Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Директор физтех-школы прикладной математики и информатики
А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Теория вероятностей
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Искусственный интеллект и большие данные Сетевое обучение кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:
лекции: 30 час.
семинары: 30 час.
лабораторные занятия: 0 час.
Самостоятельная работа: 84 час.

Подготовка к экзамену: 0 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составил: М.Е. Жуковский, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 30.08.2022

Аннотация

В курс включены все базовые определения и утверждения теории вероятностей от колмогоровской аксиоматики до многомерных предельных теорем. Курс предназначен для математиков и предполагает знание основ теории меры, комбинаторики и математического анализа.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

освоение основных современных методов теории вероятностей.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в теории вероятностей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в теории вероятностей.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Применяет базовые понятия, основную терминологию и знания основных положений и концепций в области математических и естественных наук
	ОПК-1.2 Осуществляет первичный сбор и анализ материала, интерпретирует различные математические и физические объекты
	ОПК-1.3 Использует практический опыт решения стандартных задач математических и (или) естественных наук

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- □ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- □ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- □ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- □ предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного *на* них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дискретные вероятностные пространства.	6	6		14
2	Независимость произвольного набора случайных величин.	6	6		14
3	Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.	6	6		14
4	Случайные элементы, случайные величины и векторы.	6	6		14
5	Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).	2	2		14
6	Условные вероятности.	4	4		14
Итого часов		30	30		84
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Дискретные вероятностные пространства.
Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.

2. Независимость произвольного набора случайных величин.
Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.

3. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах.
Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия, ковариация и их свойства.

4. Случайные элементы, случайные величины и векторы.
Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствия для случайных величин и векторов. Действия над случайными

величинами.

5. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).
Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности). Теорема Лебега о функции распределения.

6. Условные вероятности.
Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.

5. Описание материально-технической *базы,* необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература
1. Вероятность [Текст] : в 2 т. Т 1 : Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы : учебник для вузов / А. Н. Ширяев .— 4-е изд., перераб. и доп.
— М. : Изд-во МЦНМО, 2007, 2011 .— 552 с.
2. Курс теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. П. Чистяков .— 7-е изд., испр.
— М : Дрофа, 2007 .— 253 с.
3. Ширяев А. Н. Вероятность. В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. 8-е изд. М.: УРСС, 2005.
5. Севастьянов Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. 2-е изд. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
6. Боровков А. А. Теория вероятностей. 4-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2003.

Дополнительная литература
1. Задачи по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Н. Ширяев .— М. : МЦНМО, 2006 .— 416 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

http: //dm .fizteh.ru/

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.
В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.

Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Искусственный интеллект и большие данные Сетевое обучение кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) – Дифференцированный зачет

Разработчик: М.Е. Жуковский, д-р физ.-мат. наук, доцент, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Применяет базовые понятия, основную терминологию и знания основных положений и концепций в области математических и естественных наук
	ОПК-1.2 Осуществляет первичный сбор и анализ материала, интерпретирует различные математические и физические объекты
	ОПК-1.3 Использует практический опыт решения стандартных задач математических и (или) естественных наук

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вероятностей» обучающийся должен:

знать:

- □ фундаментальные понятия, законы теории вероятностей;
- □ современные проблемы соответствующих разделов теории вероятностей;
- □ понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- □ основные свойства соответствующих математических объектов;
- □ аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- □ понять поставленную задачу;
- □ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- □ оценивать корректность постановок задач;
- □ строго доказывать или опровергать утверждение;
- □ самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- □ самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- □ точно представить математические знания в теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- □ навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том

числе, сложных);
□ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
□ культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
□ предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки *к* текущему контролю

Две контрольные в семестре, в конце семестра экзамен. После каждого семинара студенты получают домашнее задание на неделю в количестве от 5 до 10 задач. По итогам работы в семестре в зависимости от оценок за контрольные и от работы на семинарах студент получает от 0 до 3 баллов. На экзамене студент должен решить количество задач, равное разности 3 и количества полученных баллов. Решенные на экзамене задачи, а так же два теоретических вопроса студент отвечает на экзамене устно. Если студентом не решена 1 задача, то он получает не более хор(7). Если не решены две задачи, то студент получает не более удовл(4). Наконец, если не решены три задачи, то студент отправляется на пересдачу.

Домашние задания

1. На шахматной доске размера $n\times n$ случайно размещают n ладей. Найдите вероятности следующих событий: 1. A = {ладьи не бьют друг друга}; 2. B = {ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали нет никаких фигур}.

2. Привести примеры, показывающие, что, вообще говоря, равенства P(B|A) + P(B|A) = 1, P(B|A) + P(B|A) = 1 неверны. 3. Показать, что каждая из функций G1(x,y) = I(x + y ≥ 0), G2(x,y) = [x + y],где [·] — целая часть числа, является непрерывной справа, возрастающей по каждой переменной, но не является функцией распределения в R2.

4.Случайная величина ξ имеет стандартное распределение Коши. Найдите плотности распределения случайных величин ξ2 1+ξ2, 1 1+ξ2, 2ξ 1−ξ2 , 1 ξ. 5. Пусть ξ1,ξ2 — случайные величины, каждая из которых не зависит от случайной величины ξ. Верно ли, что вектор (ξ1,ξ2) также не зависит от случайной величины ξ?

Задачи первой контрольной

1. Является ли F(x,y) = (1−e−x−y)I(x + y ≥ 0) функцией распределения?

2. Пусть P1,P2,P3 — экспоненциальные распределения с параметром 1, P = P1×P 2×P3.НайдитеP({(x,y,z) : из отрезков длин x,y,z можно составить треугольник}).

3. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, функция распределения которой равна F(x) =□ □ □ □ □ □ □ 0, x ≤−2π 3 ; (1/5)cosx + π 3, −2π 3 ≤ x < −π 3; (1/2)cosx, −π 3 ≤ x < 0;1 , x ≥ 0.

4. Даны независимые случайные величины X,Y ∼ U[−1,1]. Пусть ξ = X/(X +Y), η = X + Y. Найдите cov(ξ,η). 5. Пусть ξ1,ξ2,... — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью cx2e−xI(x > 0). Найдите c и докажите, что P(limn→∞ ξn lnn = 1) = 1.

Задачи второй контрольной

1. Случайные величины ξ,η независимы. Плотность ξ равна (x/2)I((0,2]), случайная величина η обладает экспоненциальным распределением с параметром 1. Найти

вероятность того, что вектор (η,ξ) попадает в круг радиуса 1 с центром в точке (1,0).

2. Характеристическая функция вектора (ξ,η) равна $\varphi(\xi,\eta) = e-2yi-1/2(2x2-2xy+y2)$. Найдите такое число α, что случайные величины $\xi + \alpha\eta$ и η независимы. С помощью полученного числа найдите $E\xi2\eta$.

3. Случайная величина ξ имеет пуассоновское распределение с параметром λ. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $f(\xi)$, если $f(x) = (-1)x-1x$.

4. Для простейшего симметричного случайного блуждания Sn найдите вероятность того, что оно за N шагов ни разу не пересекает уровень 2: P(S2 6= 2,...,SN 6= 2) =?

5. Игральная кость бросается N раз. При каждом бросании к выпавшему числу прибавляется 1, если оно отлично от 6. Если же выпадает 6, то число не меняется. Каким должно быть N, чтобы число, делящееся на 3, выпало (после пересчета) хотя бы 700 раз с вероятностью, превосходящей 0.98?

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов для сдачи экзамена:

1. Вероятностное пространство. Аксиомы Колмогорова. Теорема о непрерывности в "нуле" вероятностной меры.
2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры.
3. Геометрические вероятности. Примеры.
4. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Примеры.
5. Теорема о монотонных классах.
6. Независимость событий и систем событий. Пример Бернштейна. Лемма о достаточном условии независимости сигма-алгебр.
7. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (док-во единственности).
8. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия, ковариация и их свойства.
9. Случайные элементы, случайные величины и векторы. Достаточное условие измеримости отображения, следствия для случайных величин и векторов. Действия над случайными величинами.
10. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости, теорема о независимости борелевских функций от непересекающихся наборов независимых случайных величин.
11. Математическое ожидание случайной величины (интеграл Лебега по вероятностной мере): определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка корректности определений.
12. Основные свойства математического ожидания. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.
13. Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенство Коши - Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.
14. Неравенство Маркова, Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Иенсена.
15. Виды сходимости случайных величин, их взаимосвязи. Критерий Коши сходимости с вероятностью 1.
16. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости почти наверного ряда из случайных величин.
17. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.
18. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной

сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорированной сходимости.

19. Лемма Бореля Кантелли. Усиленный закон больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.
20. Формула пересчета математических ожиданий. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега.
21. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (б/д). Совместное распределение конечного набора случайных величин. Свертка распределений.
22. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер. Теорема Александрова (б/д). Теорема об эквивалентности сходимости по распределению случайных величин и сходимости функций распределения во всех точках непрерывности предельной функции.
23. Схема испытаний Бернулли и полиномиальная схема. Предельные теоремы для схемы Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра-Лапласа (б/д).
24. Характеристические функции вероятностных мер. функций распределения, случайных величин и векторов. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.
25. Теорема единственности для характеристических функций вероятностных. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.
26. Теорема непрерывности для характеристических функций (б/д). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин.
27. Теорема Берри Эссеена о скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д). Оценки константы в теореме Берри Эссеена.

Билет 1:

1. Характеристические функции вероятностных мер. функций распределения, случайных величин и векторов. Примеры. Основные свойства характеристических функций случайных величин.
2. Теорема единственности для характеристических функций вероятностных. Независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций.

Билет 2:

1. Дисперсия, ковариация и их свойства. Неравенство Коши - Буняковского. Дисперсия суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.
2. Неравенство Маркова, Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Неравенство Иенсена.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние,

систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние,

систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их

на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние

систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.