

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**  
**А.А. Воронов**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**по дисциплине:** Гармонический анализ  
**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Искусственный интеллект и большие данные  
Сетевое обучение  
кафедра высшей математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 75 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 45 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 180, всего зач. ед.: 5

Программу составили:

Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Л.Н. Знаменская, д-р физ.-мат. наук, доцент

М.В. Балашов, д-р физ.-мат. наук, доцент

А.Ю. Петрович, канд. физ.-мат. наук, доцент

В.В. Редкозубов, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 17.11.2022

## Аннотация

Гармонический анализ — раздел математики, изучающий свойства функций на основе их представления в виде тригонометрических рядов или интегралов. В курсе рассматриваются классические вопросы теории рядов Фурье: поточечная и равномерная сходимости, интегрирование, порядок убывания коэффициентов, обобщенное суммирование. Приводятся базовые сведения из функционального анализа, рассматриваются банаховы пространства, полные системы в общих евклидовых пространствах. Изучаются интегралы с параметром (в т.ч. и интегралы Эйлера). На их основе вводится преобразование Фурье, рассматриваются его основные свойства. Вводятся некоторые классы обобщенных функций, кратко изучаются операции над ними и их базовые свойства.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

формирование систематических знаний о методах математического анализа, расширение и углубление таких понятий как функция и ряд.

### Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся теоретических знаний и практических навыков в теории тригонометрических рядов Фурье и началах функционального анализа;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов математического анализа в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Применяет базовые понятия, основную терминологию и знания основных положений и концепций в области математических и естественных наук
	ОПК-1.2 Осуществляет первичный сбор и анализ материала, интерпретирует различные математические и физические объекты
	ОПК-1.3 Использует практический опыт решения стандартных задач математических и (или) естественных наук

## 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

### знать:

- основные факты теории тригонометрических рядов Фурье абсолютно интегрируемых функций: достаточные условия поточечной и равномерной сходимости;
- теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании, порядке убывания коэффициентов, теорему о суммировании рядов Фурье методом средних арифметических и ее применения;
- определение сходимости в метрических и линейных нормированных пространствах, примеры полных и неполных пространств;
- примеры полных систем в линейных нормированных пространствах;
- основные понятия теории рядов Фурье по ортонормированной системе в бесконечномерном евклидовом пространстве;

- определения собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, их свойства; теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании по параметру несобственных интегралов, их применение к вычислению интегралов;
- достаточное условие представления функции интегралом Фурье;
- преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства;
- основные понятия теории обобщенных функций, преобразование Фурье обобщенных функций, его свойства.

**уметь:**

- разлагать функции в тригонометрический ряд Фурье, исследовать его на равномерную сходимость, определять порядок убывания коэффициентов Фурье;
- исследовать полноту систем в функциональных пространствах;
- исследовать сходимость и равномерную сходимость несобственных интегралов с параметром, дифференцировать и интегрировать их по параметру;
- представлять функции интегралом Фурье; выполнять преобразования Фурье;
- оперировать с обобщенными функциями.

**владеть:**

- мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками работы с рядами и интегралами Фурье в различных формах;
- навыками применения изученной теории в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий**

**4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций.	3	5		8
2	Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.	2	5		8
3	Метрические и линейные нормированные пространства.	4	5		8
4	Бесконечномерные евклидовы пространства.	4	5		8
5	Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом.	2	6		9
6	Собственные интегралы и несобственные интегралы.	3	3		8
7	Интеграл Фурье.	4	4		8
8	Пространство основных функций и пространство обобщенных функций.	4	5		9
9	Преобразование Фурье обобщенных функций.	4	7		9
Итого часов		30	45		75
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		180 час., 5 зач.ед.			

## 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 4 (Весенний)

### 1. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций.

Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье, следствия из признака Липшица. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме.

### 2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических.

Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

### 3. Метрические и линейные нормированные пространства.

Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства Неполнота пространства непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.

### 4. Бесконечномерные евклидовы пространства.

Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условия для того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

### 5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом.

Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.

### 6. Собственные интегралы и несобственные интегралы.

Собственные интегралы, зависящие от параметра и их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера - гамма и бета-функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

### 7. Интеграл Фурье.

Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

### 8. Пространство основных функций и пространство обобщенных функций.

Пространство основных функций и пространство обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

9. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Преобразование Фурье обобщенных функций. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Учебная аудитория, оснащенная доской, мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 2-х ч. : учеб.пособ.для студ.вузов. Ч. 2 / Г. Е. Иванов .— М. : МФТИ, 2000 .— 230 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Криков, М. И. Шабунин .— 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2013 .— 672 с.
3. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 2 : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2003, 2009, 2012 .— 504 с.
4. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : Функции нескольких переменных : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] ; под ред Л. Д. Кудрявцева .— М. : Наука : Физматлит, 1995 .— 496 с.
5. Краткий курс математического анализа [Текст] : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев .— 3-е изд., перераб. — М. : Физматлит, 2002 ,2003, 2005 .— Т. 2 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 2002. - 424 с.
6. Лекции по математическому анализу [Текст] : учебник для вузов / О. В. Бесов .— М. : Физматлит, 2014 .— 480 с.
7. Лекции по математическому анализу [Текст] : в 3 ч. Ч. 3 : учеб. пособие для вузов. Кратные интегралы. Гармонический анализ / А. Ю. Петрович ; М-во образования и науки, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2013 .— 311 с.
8. Лекции по математическому анализу [Текст] : Ч. 2 : учеб. пособие для вузов / Г. Н. Яковлев .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004 .— 332 с.

### Дополнительная литература

1. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 1 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 464 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 2 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 448 с.
3. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В.Фомин .— 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012 .— 572 с.

**7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://lib.mipt.ru/catalogue/1195/?page=0> – электронная библиотека Физтеха, раздел «Анализ. Учебники по элементарному анализу».
2. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
3. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
4. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
5. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
6. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

## ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Искусственный интеллект и большие данные  
 Сетевое обучение  
 кафедра высшей математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

**Разработчики:** Г.Е. Иванов, д-р физ.-мат. наук, профессор  
 Л.Н. Знаменская, д-р физ.-мат. наук, доцент  
 М.В. Балашов, д-р физ.-мат. наук, доцент  
 А.Ю. Петрович, канд. физ.-мат. наук, доцент  
 В.В. Редкозубов, канд. физ.-мат. наук

### 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Применяет базовые понятия, основную терминологию и знания основных положений и концепций в области математических и естественных наук
	ОПК-1.2 Осуществляет первичный сбор и анализ материала, интерпретирует различные математические и физические объекты
	ОПК-1.3 Использует практический опыт решения стандартных задач математических и (или) естественных наук

### 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Гармонический анализ» обучающийся должен:

**знать:**

- основные факты теории тригонометрических рядов Фурье абсолютно интегрируемых функций: достаточные условия поточечной и равномерной сходимости;
- теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании, порядке убывания коэффициентов, теорему о суммировании рядов Фурье методом средних арифметических и ее применения;
- определение сходимости в метрических и линейных нормированных пространствах, примеры полных и неполных пространств;
- примеры полных систем в линейных нормированных пространствах;
- основные понятия теории рядов Фурье по ортонормированной системе в бесконечномерном евклидовом пространстве;

- определения собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, их свойства; теоремы о непрерывности, дифференцировании и интегрировании по параметру несобственных интегралов, их применение к вычислению интегралов;
- достаточное условие представления функции интегралом Фурье;
- преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства;
- основные понятия теории обобщенных функций, преобразование Фурье обобщенных функций, его свойства.

**уметь:**

- разлагать функции в тригонометрический ряд Фурье, исследовать его на равномерную сходимость, определять порядок убывания коэффициентов Фурье;
- исследовать полноту систем в функциональных пространствах;
- исследовать сходимость и равномерную сходимость несобственных интегралов с параметром, дифференцировать и интегрировать их по параметру;
- представлять функции интегралом Фурье; выполнять преобразования Фурье;
- оперировать с обобщенными функциями.

**владеть:**

- мышлением, методами доказательств математических утверждений;
- навыками работы с рядами и интегралами Фурье в различных формах;
- навыками применения изученной теории в математических и физических приложениях;
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Теорема Римана.
2. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле.
3. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.
4. Теоремы Верйерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
5. Неравенство Бесселя.
6. Равенство Парсевала.
7. Теорема Рисса-Фишера.
8. Преобразование Фурье, обратное преобразование Фурье.



## Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 1**  
Дисциплина: ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Теорема (лемма) Римана. Стремление к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемой функции.
2. Выяснить, полна ли система  $\{x^2, x^4, \dots, x^{2n}, \dots\}$  в  $C[-1, 1]$  и в  $C[1, 2]$ .
3. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Изобразить график интеграла Фурье функции  $f$ .

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 21**  
Дисциплина: ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Пространства основных и обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.  $\delta$ -функция.
2. Выяснить, можно ли функцию  $f(x) = e^x \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , представить равномерно сходящимся рядом Фурье по системе
  - а)  $\{\cos(2k - 1)x, k \in \mathbb{N}\}$ ,   б)  $\{\sin(2k - 1)x, k \in \mathbb{N}\}$ .

3. Вычислить  $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{xe^x} dx, \quad \alpha > 0$ .