МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Математика

методические рекомендации

для самостоятельной работы по изучению дисциплины

Пермь 2022

Разработчик: Собко Т.А., преподаватель Колледжа профессионального образования ПГНИУ

ПЕРЕЧЕНЬ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ СТУДЕНТА

№ *п/п*	*Наименование раздела, темы изучаемой дисциплины*	*Кол-во часов*	*Вид работы*
	Введение в дисциплину	2	
1	Раздел 1 Элементы линейной алгебры Тема 1 Матрицы и определители	2	Решение примеров и зада
2	Раздел 2. Элементы аналитической геометрии Тема 2 Системы линейных алгебраических уравнений	2	Решение примеров и зада
3	Раздел 3. Основы математического анализа Тема 3 Основные аспекты дифференцирования и интегрирования	6	Решение примеров и зада
4	Раздел 4. Дифференциальные уравнения Тема 4 Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.	4	Решение примеров и задач
Итого		16	

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению самостоятельных работ учебной дисциплины «Математика»предназначены для реализации ППССЗ по специальности 18.02.12Технология аналитического контроля химических соединений разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования.

Задания на самостоятельные работы разработаны и составлены на основе рабочей программы учебной дисциплины «Математика». Указанная дисциплина относится к математическому и общему естественнонаучному циклу в структуре программы подготовки специалистов среднего звена.

Самостоятельная работа студентов (СРС)– способ активного, целенаправленного приобретения учащимися новых для него знаний без непосредственного участия в этом процесса преподавателя.

Самостоятельная работа студента проводится с *целью*:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений, обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

Цель СРС – научить обучающегося осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.

СРС, как один из видов промежуточного контроля за качеством усвоения изучаемого материала, служит одновременно формой отчетности по следующим *разделам* данной учебной дисциплины:

Тема 1 Матрицы и определители

Тема 2 Системы линейных алгебраических уравнений
Тема 3 Основные аспекты дифференцирования и интегрирования
Тема 4 Основы теории вероятностей и математической статистики

Указания к выполнению

1. Самостоятельную работу нужно выполнять в отдельной тетради в клетку.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения самостоятельной работы производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 – 100	5	отлично
80 – 89	4	хорошо
70 – 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Перечень учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия:Учебник и практикум/Потапов А.П..М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-01061-9.-310. http://www.biblio-online.ru/book/8D43B81B97CE-40F8-B20E-3CC23C7FEFAB

2. Малугин В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач/Малугин В.А., Рощина Я.А.-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-8802-4.-478. http://www.biblioonline.ru/book/BB57CBF1-7168-4B2A-B5AC-5121639082E4

3. Васильев А. А. Теория вероятностей и математическая статистика:Учебник и практикум/Васильев А.А.-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-05176-6.-253. http://www.biblioonline.ru/book/61129D36-34CF-4B87-901E-CF4C3D4B056A

4. Кремер Н. Ш. Математика для колледжей:Учебное пособие/Константинова О.Г., Фридман М.Н., Кремер Н.Ш. - под ред.-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-05640-2.-346. http://www.biblioonline.ru/book/D1C3E5CB-6347-41C1-B161-94782774D897

5. Шипачев В. С. Математика:Учебник и практикум/Тихонов А.Н. - отв. ред.-М.:Издательство Юрайт,2017, ISBN 978-5-534-04609-0.-447. http://www.biblio-online.ru/book/3E8EBA19-DC34-4025-B856A20AC595B921

6. Баврин И. И. Математика для технических колледжей и техникумов: Учебник и практикум/Баврин И.И.-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-03893-4.-329. http://www.biblioonline.ru/book/9D6CE1CA-9504-4C54-9E21-C939010C2743

Дополнительные источники:

1. Шипачев В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление:Учебник и практикум/Шипачев В.С..М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-04547-5.-212. http://www.biblio-online.ru/book/6E17B49FD6F3-4C4E-8EB8-D48373D5A996

2. Малугин В. А. Теория вероятностей и математическая статистика:Учебник и практикум/Малугин В.А..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-06572-5.-470. http://www.biblioonline.ru/book/242C48D4-ED9D-4C2F-B84E-F783E688A607

Самостоятельная работа №1 на тему

«Матрицы и определители»

Цель: уметь выполнять арифметические действия с матрицами, уметь вычислять определители второго и третьего порядка

Краткая теория

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или nстолбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращённо, $A = (a_{ij})$, где $i = (1,m)$(т.е. $i = 1,2,3,\ldots,m$) – номер строки, $j = (1,n)$(т.е. $j = 1,2,3,\ldots,n$) – номер столбца.

Действия над матрицами

1. Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Определение. Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = (1,m)$, $j = (1,n)$).

Записывают $C = A + B$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Аналогично определяется *разность матриц.*

2. Умножение на число

Определение. Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k\cdot a_{ij}$ ($i = (1,m)$, $j = (1,n)$). *Записывают* $B = k\cdot A$.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $k=2$, $A\cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее определителем, следующим образом:

1. $n = 1$, $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.
2. $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.
3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Пример 3. Вычислим определитель 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 2\cdot 3 = -2$$

Ответ: $\Delta = -2$

Пример 4. Найдем значение λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 27$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \lambda - 3 \cdot (-1) = 27; \;\; 4\lambda + 3 = 27; \;\;\; 4\lambda = 24; \;\;\; \lambda = 6$$

Ответ: $\lambda = 6$

Пример 5. Вычислим определитель 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot 0 + (-1) \cdot 5 \cdot 4 - 0 \cdot (-2) \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - (-3) \cdot (-1) \cdot 1 =$$

$$= -6 + 0 - 20 + 0 - 30 - 3 = -59$$

Ответ: $\Delta = -59$

Пример 6. Найдем значение λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 0 \cdot \lambda \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - \lambda \cdot (-2) \cdot (-3) - (-4) \cdot 0 \cdot 5 = 9;$$

$$-15 + 48 + 0 - 6 - 6\lambda + 0 = 9; \;\; -6\lambda = -18; \;\;\; \lambda = 3$$

Ответ: $\lambda = 3$

Задания для самостоятельного решения:

1) Вычислить определители 2-го порядка

$$\mathbf{1.}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{2.}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{3.}\begin{vmatrix} -12 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

2) Найти значение λ

$$\mathbf{1.}\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 8 \qquad \mathbf{2.}\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = 3 \qquad \mathbf{3.}\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 15$$

3) Найти матрицу:

1.C=A-4B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

2. C=4A-B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

3.C=A+2B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

4) Вычислить определители 3-го порядка

1. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

5) Найти значение λ

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -34$ **2.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 17$

Самостоятельная работа №2 на тему

«Системы линейных алгебраических уравнений»

Цель: уметь решать систему линейных уравнений методами Крамера и Гаусса

Краткая теория

Правило Крамера

Правило (метод) Крамера применяется к системам, у которых число уравнений равно числу неизвестных. Этот метод использует определители.

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

В которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) $\Delta \neq 0$, а определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Таким образом, если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение и обратно. Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

Случай 1. Определитель системы не равен нулю: $\Delta \neq 0$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тогда система имеет единственное решение.

Случай 2. Определитель системы равен нулю: $\Delta = 0$ (т.е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны). Пусть при этом один из определителей Δ_x, Δ_y не равен нулю (т. е свободные члены не пропорциональны коэффициентам при неизвестных). $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. В этом случае система не имеет решений.

Случай 3. $\Delta = 0,\ \Delta x_x = 0,\ \Delta_y y = 0$ (т. е. и коэффициенты, и свободные члены пропорциональны $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$), если одно из уравнений, есть следствие другого; система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решим систему уравнений методом Крамера

$$a)\ \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases};\quad б)\ \begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -22;\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 33$

$$\Delta \neq 0;\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{-11} = -3$$

Ответ: (2; –3)

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 9;\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -18;\ \Delta_y =$
$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 27;\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -36$

$$\Delta \neq 0;\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2;\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3;\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-36}{9} = -4$$

Ответ: (–2; 3; –4)

Метод Гаусса

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) применим для решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных может быть либо равно числу уравнений, либо отлично от него.

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

1-ый шаг метода Гаусса.

На первом шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент $a_{11} \neq 0$. Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Получим уравнение:

$$x_1 + a_{12}{}^{(1)} x_2 + a_{13}{}^{(1)} x_3 = b_1{}^{(1)} \qquad (2)$$

где $a_{1j}{}^{(1)} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$; $j = 1,2,3$; $b_1{}^{(1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}}$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}^{(1)} x_2 + a_{13}{}^{(1)} x_3 = b_1{}^{(1)} \\ \quad a_{22}{}^{(1)} x_2 + a_{23}{}^{(1)} x_3 = b_2{}^{(1)} \\ \quad a_{32}{}^{(1)} x_2 + a_{33}{}^{(1)} x_3 = b_3{}^{(1)} \end{cases} \qquad (3)$$

Верхний индекс (1) указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

2-ой шаг метода Гаусса.

На втором шаге исключим неизвестное x_2из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент $a_{22}{}^{(1)} \neq 0$. Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}{}^{(2)} x_3 = b_2{}^{(2)} \tag{4}$$

где $a_{23}{}^{(2)} = \dfrac{a_{23}{}^{(1)}}{a_{22}{}^{(1)}}$; $\qquad b_2{}^{(2)} = \dfrac{b_2{}^{(1)}}{a_{22}{}^{(1)}}$

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}{}^{(1)}$. Получим уравнение:

$$a_{33}^{(2)} \cdot x_3 = b_3^{(2)}$$

Предполагая, что $a_{33}{}^{(2)} \neq 0$, находим $x_3 = \dfrac{b_3{}^{(2)}}{a_{33}{}^{(2)}} = b_3{}^{3}$.

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}^{(1)} x_2 + a_{13}{}^{(1)} x_3 = b_1{}^{(1)} \\ \qquad\qquad x_2 + a_{23}{}^{(2)} x_3 = b_2{}^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 = b_3{}^{(3)} \end{cases} \tag{5}$$

Система вида (5) называется ***треугольной.***

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют ***прямым ходом метода Гаусса.***

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют ***обратным ходом метода Гаусса.***

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2. Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1.

В общем случае для системы m линейных уравнений с n неизвестными проводятся аналогичные преобразования. На каждом шаге исключается одно из неизвестных из всех уравнений, расположенных ниже ведущего уравнения.

Отсюда другое называние метода Гаусса – *метод последовательного исключения неизвестных.*

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида $0=b$, где $b\neq 0$, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система m линейных уравнений с n неизвестными будет приведена или к *треугольному*или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\quad x_k + \ldots + c_{k\,n}x_n = b_k \end{cases}$$

Такая система имеет бесчисленное множество решений. Чтобы найти эти решения, во всех уравнениях системы члены с неизвестными x_{k+1}, …, x_k переносят в правую часть. Эти неизвестные называются свободными и придают им произвольные значения. Из полученной треугольной системы находим x_1, …, x_k, которые будут выражаться через свободные неизвестные.

Пример 2. Решим систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ -x + 2y + 4z = -2 \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Поменяем строки местами

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Добавим 3-ю строку ко 2-й

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ю строку на $k = -\frac{1}{2}$ и добавим ко 2-й

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Получим единицы на главной диагонали

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y - z = 2 \\ \quad y - \dfrac{4}{5}z = \dfrac{6}{5} \\ \qquad z = 1 \end{cases}$$

$$z = 1; \quad y = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = 2; \quad x = 2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

Ответ: (2; 2; 1)

Задания для самостоятельного решения:

1) Решить систему уравнений методом Крамера

1. $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 8x - y = 13 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} -4x - 3y = -8 \\ -5x - 2y = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -12x + 13y + 11z = 9 \\ 4x + 3y - 2z = -16 \\ -x + 7y + 5z = -7 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} -x - 3y - 2z = 1 \\ 4x - 5y + 5z = 5 \\ -3x + 7y - 4z = -3 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x + 3y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z - 2 = 0 \end{cases}$

2) Решить систему уравнений методом Гаусса

1. $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x - 2y = -2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4x - y - z = 3 \\ -2x + y - 2z = -1 \\ 3x - 4y + z = -1 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} -4x + 5y - z = 3 \\ 3x - 4y - 2z = -5 \\ x + y - 6z = -7 \end{cases}$

Самостоятельная работа №3 на тему

«Основные аспекты дифференцирования и интегрирования»

Цель: уметь вычислять производные простых и сложных функций, уметь применять производную при исследовании построении графиков функции.

Краткая теория.

Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Формулы дифференцирования	
$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(kx)' = k$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(e^x\right)' = e^x$	

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$(cu)' = cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \; v \neq 0$$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Исследование функций и построение их графиков следует проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать, является ли функция четной или нечетной.
3. Исследовать, является ли функция периодической.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства, то есть промежутки на которых $y < 0$ или $y > 0$.
5. Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.
6. Построить график функции.

Пример 1

Исследовать функциюf(x)=$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$ и построить ее график.

Проведем исследование по схеме:

1) D(f)=R, т.к. f(x)-многочлен.

2) Так как f(-x)=f(x), тогда функция является четной. График симметричен отн. Оу.

3)Точки пересечения графика с осью Ох:

$\frac{1}{2}x^4-4x^2+1=0$

(-2,782;0); (-0,5;0) (0,5;0) (2,782;0).

При x=0; y=1

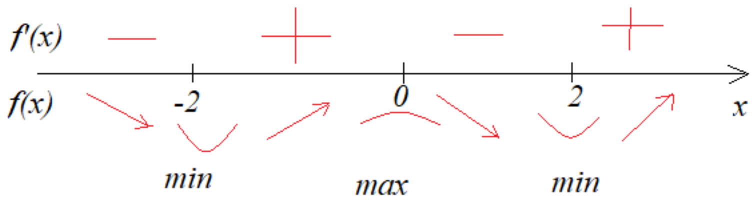
(0;1) -точка пересечения графика с осью Оу

4)Функция не является периодической.

5) $f'(x)=2x^3-8x=2x(x+2)(x-2)$

$2x(x+2)(x-2)=0$

X=0; x=2; x=-2-критические точки



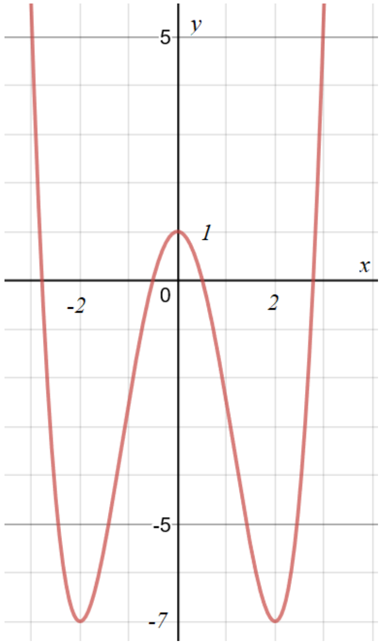
Функция убывает при $x\in(-\infty;-2]\cup[0;2]$.

Функция возрастает при $x\in[-2;0]\cup[2:+\infty]$.

(-2;-7);(2;-7)-min

(0;1)-max.

6)



Для более точного построения графика функции можно найти асимптоты и промежутки выпуклости, точки перегиба.

Задания для самостоятельного решения:

1) Пользуясь лекциями и краткой теорией, повторите вычисление производных простых и сложных функций, использование производной при исследовании и построении графиков функции.

2)Вычислите:

1.значение производной функции $f(x)=4x^3+6x+3$ при $x_0=1$;

2.значение производной функции $f(x)=2x\cos x$ при $x_0=0$;

3. $f'(0)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x)=(x^2-3x)\cos 3x$

4.тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)=\frac{3}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=1$;

5.наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x$ на отрезке $[-3; \quad 4]$;

3)Вычислите производные сложных функций:

а) $y = 3\sin 5x$;

б) $y = 4\cos\frac{x}{2}$;

в) $y = \arccos 3x$;

г) $y = \ln\sqrt{2x-1}$;

д) $y = \sqrt{x^3 + 2x - 5}$

е) $y = \sin^3 x$;

ж) $y = \ln\sin 3x$;

з) $y = \ln\sqrt{2x-1}$.

4)Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции:

а) $y = \frac{x^4}{6} - 3x^2$;

б) $y = \frac{x^4}{3} - 6x^2$.

5) Проведите исследование функций и постройте их графики:

а) $y = 8 - 2x - x^2$;

б) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Самостоятельная работа №4 на тему

Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

Цель: уметь применять формулы интегрирования при решении дифференциальных уравнений первого и второго порядка, с разделенными и разделяющимися переменными.

Краткая теория:

Определение дифференциального уравнения 1-го порядка. Общее и частное решение

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:
$F(x, y, y') = 0$ (1)
т.е. содержит независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производную $y'(x)$.

Разрешая уравнение (1), если это возможно, относительно производной y' получим

$y' = f(x,y)$ (2)

Иногда уравнения (1), (2) записывают в дифференциалах:
$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ (3)

Дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его ***частным решением***. Для многих дифференциальных уравнений первого порядка *общее решение* можно задать формулой вида:
$y = y(x, C)$ (4)

где C - произвольная постоянная такая, что при любом C функция (4) является частным решением дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых ***интегральными кривыми***, а каждое частное решение представляет собой отдельную интегральную кривую. Иногда не удаётся получить решения дифференциального уравнения в явной форме, т.е в виде $y = y(x, C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задаётся формулой вида:
$\Phi(y, x, C) = 0$ (5)
Выражение типа $\Phi(x, y, C) = 0$ в этом случае называют ***интегралом*** (***частным, общим***) дифференциального уравнения.

Задача Коши

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y$, где x_0, y_0 - заданные числа. Задача Коши кратко записывается так:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); & (6) \\ y = y_0 \text{ при } x = x_0. \end{cases}$$

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (2) называется ***уравнением с разделяющимися переменными,*** если имеет следующий вид:

$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ (7)

В предположении, что $f_2(y) \neq 0$, уравнение с разделяющимися переменными (7) можно переписать в виде (разделить переменные):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \qquad (8)$$

Уравнение вида (8) называется ***уравнением с разделёнными переменными***.

Теорема 1. Если существуют интегралы $\int \frac{dx}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)dx.$, то общий интеграл уравнения с разделёнными переменными (8) задаётся уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C, \qquad (9)$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ - некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные (с учётом условий, когда это можно делать);
2) проинтегрировать почленно полученное уравнение с разделёнными переменными;
3) найти его общий интеграл уравнения;
4) выяснить, имеет ли уравнение (5) решения, не получающиеся из общего интеграла;
4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (в случае задачи Коши).

Пример 1. Найти частное решение уравнения:

$$\begin{cases} 2yy' = 1 - 3x^2; \\ y_0 = 3 \end{cases} \text{при } x_0 = 0;$$

Решение: это уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в дифференциалах. Учитывая, что $y' = \frac{dx}{dy}$, получим: $2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$. Разделим переменные: $2ydy = (1-3x^2)dx.$Интегрируя обе части последнего равенства, найдём $\int 2ydy = \int (1-3x^2)dx,$т.е. $y^2=x-x^3+C$. Подставив начальные значения $x_0 =1$, $y_0 =3$, найдём C:$9=1-1+C$, т.е. $C=9$. Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2=x---x^3+9$, или$x^3+y^2 - x-9 = 0$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x+1)ydx = dy$; б) $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частные решения дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} x^2dy = y^2dx \\ y = 0{,}25 \quad при \quad x = 0{,}1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x\sqrt[3]{y}dx + (1-x^2)dy = 0 \\ y = 1 \quad при \quad x = 0 \end{cases}$.

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений

а) $x^3dy - y^3dx = 0$; б) $\cos x\cos y dx - \sin x \sin y dy = 0$;

4. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} \\ y = e^2 при \quad x = 9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y^2dx = e^x dy \\ y = 1, если \quad x = 0 \end{cases}$;

Краткая теория

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае записывается в виде:

$F(x, y, y', y'') = 0.$ (1)

или, если это возможно, в разрешённом относительно y'' виде

$y'' = f(x, y, y')$ (2)

Говорят, что формула $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ представляет ***общее решение*** дифференциального уравнения второго порядка (1) или (2), если для любых значений C_1' и C_2' постоянных C_1 и C_2 функция $\varphi(x, C_1', C_2')$ является решением данного уравнения, и любое его ***частное решение*** может быть получено из формулы $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при некоторых значениях C_1' и C_2'.

Для дифференциальных уравнений второго порядка ***задача Коши*** формулируется следующим образом: найти решение *y = y(x)* уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ или, в другой записи,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'. \end{cases} \qquad (3)$$

где x_0, y_0, y_0' - заданные числа. Геометрически общее решение уравнения (1) или (2) представляет собой семейство интегральных кривых, а решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$ в данном направлении – угловой коэффициент касательной к интегральной кривой (графику решения *y = y(x)*), проведённой в точке $(x_0;$ $y_0)$ равен данному числу y_0'. Простейшее уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' = f(x). \qquad (4)$$

Уравнения этого вида называются ***уравнениями, допускающими понижение порядка***и решаются двукратным интегрированием: полагаем $y' = p(x)$,тогда $y'' = p'$ и уравнение (4) принимает вид $p' = f(x)$, или *dp=f(x) dx*. Отсюда $p = \int f(x)dx = F(x) + C_1$, где *F(x)* – одна из первообразных для функции f(x). Так как *p* = y',то $y' = F(x) + C_1$ или $dy = (F(x) + C_1)dx$. Отсюда, интегрируя ещё раз, находим, как нетрудно проверить, общее решение уравнения (4) (в области, где существуют рассматриваемые интегралы): $y = \int F(x)dx + C_1x + C_2$

Уравнение вида $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$, (5)

где a_0, a_1, a_2 - действительные числа $(a_0 \neq 0)$, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***. Чтобы решить уравнение (5), нужно решить характеристическое уравнение:

$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$ (6)

При решении характеристического уравнения (6) возможны три случая, в зависимости от которых строится общее решение данного дифференциального уравнения (5)

Корни уравнения (6)	Частные решения уравнения (5)	Общее решение уравнения (5)
Действительные и различные: $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1x}$; $y_2 = e^{k_2x}$	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
Равные: $k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1x}$; $y_2 = xe^{k_1x}$	$y = e^{k_1x}(C_1 + C_2x)$
Комплексно сопряжённые: $\alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Пример 1.Найти общее решение уравнения $y'' = \cos 2x$.

Решение: положим $y' = p(x)$; тогда $y'' = p'$, и, следовательно, $p' = \cos 2x$ или $dp = \cos 2xdx$. Интегрируя это уравнение, находим: $p = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$. Т.к. $p = y'$, то $y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$, $dy = \frac{1}{2}\sin 2xdx + C_1dx.$ Интегрируя второй раз, имеем общее решение: $\int dy = \int \frac{1}{2}\sin 2xdx + C_1\int dx,$ т.е. $y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2$.

Пример 2. Дана задача Коши: $\begin{cases} y'' = \dfrac{3}{\sqrt{x}}; \\ y = 4,\ y' = 14 \ \ при \ \ x = 4. \end{cases}$

Решение: Положим $p = y'$, тогда $y'' = p'$ и получим следующее уравнение: $p' = 3x^{-\frac{1}{2}}$ или $dp = 3x^{-\frac{1}{2}}dx$. Интегрируя, получим $p = y' = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$. Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то получим следующее: $\dfrac{dy}{dx} = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$ или $dy = (6x^{\frac{1}{2}} + C_1)dx$. Интегрируя почленно, получим $y = 4\sqrt{x^3} + C_1x + C_2$ - общее решение. Наложим начальные условия. Тогда $y(4) = 4\cdot 4^{\frac{3}{2}} + C_1\cdot 4 + C_2 = 4$ $y'(4) = 6\cdot 4^{\frac{1}{2}} + C_1 = 14$. Отсюда имеем, что $C_1 = 2,\quad C_2 = -36$.

Значит, частное решение следующее: $y = 4\sqrt{x^3} + 2x - 36$.

1. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

Решение: а) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$. Его корни $\kappa_1 = 2$ и $\kappa_2 = -1$. Значит, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

б) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$. Его корни $\kappa_1 = \kappa_2 = -3$. Тогда общее решение имеет вид $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$.

2. Найти решение задачи Коши: $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 6,\ \ y'(0) = 15$

Решение: составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 4\kappa + 5 = 0$. Решая его, получим $D = -4$ и комплексно сопряжённые корни $k_1 = 2 - i$ и $k_2 = 2 + i$. Тогда его общим решением будет $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Подставим начальное условие: $y(0) = e^{2\cdot 0}(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) = C_1 = 6$. Вычислим производную $y' = 2e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x)$. Подставим начальное условие $y'(0) = 2e^{2\cdot 0}(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) + e^{2\cdot 0}(-C_1\sin 0 + C_2\cos 0) = 2C_1 + C_2 = 2\cdot 6 + C_2 = 15$. Откуда имеем $C_2 = 3,\ \Rightarrow\ y = e^{2x}(6\cos x + 3\sin x)$ - частное решение.

Задания для самостоятельной работы:

1.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' = \dfrac{1}{x^2}$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = \sin x; \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi,\ \ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t) = 12t - 1$ (ускорение - *м/с*^{2}, время - *сек*). Начальное положение тела $x(0) = 0$ и начальная скорость $v(0) = 10\,м/c$. Найти закон движения тела и путь, пройденный за 3 секунды;

4. Найти общее дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + 5y = 0$.

5 .Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 10y' + 16y = 0; \\ y = 4; y' = 26, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 8y' + 20y = 0; \\ y = 2; y' = 8, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$