МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»
Колледж профессионального образования

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания
для самостоятельной работы по изучению дисциплины
для студентов Колледжа профессионального образования
специальности **38.02.07 Банковское дело**

Утверждено на заседании ПЦК
информационных технологий
Протокол №9 от « 21 » мая 20 19г.
Председатель ________ Н.А.Серебрякова

Пермь 2019

Методические указания по самостоятельной работе студентов предназначены для студентов специальности 38.02.07 Банковское дело ТОП 50 для выполнения самостоятельных работ по дисциплине «Элементы высшей математики»

Разработчик: Собко Т.А. , преподаватель Колледжа профессионального образования ФГБОУ Пермский государственный национальный исследовательский университет

ПЕРЕЧЕНЬ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ СТУДЕНТА

№ п/п	*Наименование раздела, темы изучаемой дисциплины*	*Кол-во часов*	*Вид работы*
	Введение в дисциплину	2	
1	Раздел 1 Элементы линейной алгебры Тема 1 Матрицы и определители	2	Решение примеров и зада
2	Раздел 2. Элементы аналитической геометрии Тема 2 Системы линейных алгебраических уравнений	2	Решение примеров и зада
3	Раздел 3. Основы математического анализа Тема 3 Основные аспекты дифференцирования и интегрирования	6	Решение примеров и зада
4	Раздел 4. Дифференциальные уравнения Тема 4 Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.	4	Решение примеров и задач
Итого		16	

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению самостоятельных работ учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предназначены для реализации ОПОП по специальности 38.02.07 Банковское дело ТОП 50 разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования.

Задания на самостоятельные работы разработаны и составлены на основе рабочей программы учебной дисциплины 38.02.07 Банковское дело ТОП 50. Указанная дисциплина относится к математическому и общему естественнонаучному циклу в структуре основной профессиональной образовательной программы.

Самостоятельная работа – способ активного, целенаправленного приобретения учащимися новых для него знаний без непосредственного участия в этом процесса преподавателя.

Самостоятельная работа студента проводится с *целью*:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений, обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

Цель СРС – научить обучающегося осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.

СРС, как один из видов промежуточного контроля за качеством усвоения изучаемого материала, служит одновременно формой отчетности по следующим *разделам* данной учебной дисциплины:

Тема 1 Матрицы и определители

Тема 2 Системы линейных алгебраических уравнений

Тема 3 Основные аспекты дифференцирования и интегрирования

Тема 4 Основы теории вероятностей и математической статистики

Указания к выполнению СВР

1. СВР нужно выполнять в отдельной тетради в клетку.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения СВР производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 – 100	5	отлично
80 – 89	4	хорошо

70 – 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Методические рекомендации по подготовке сообщения

Сообщение – это сокращенная запись информации, в которой должны быть отражены основные положения текста, сопровождающиеся аргументами, 1–2 самыми яркими и в то же время краткими примерами.

Сообщение составляется по нескольким источникам, связанным между собой одной темой. Вначале изучается тот источник, в котором данная тема изложена наиболее полно и на современном уровне научных и практических достижений. Записанное сообщение дополняется материалом других источников.

Этапы подготовки сообщения:

1. Прочитайте текст.
2. Составьте его развернутый план.
3. Подумайте, какие части можно сократить так, чтобы содержание было понято правильно и, главное, не исчезло.
4. Объедините близкие по смыслу части.
5. В каждой части выделите главное и второстепенное, которое может быть сокращено при конспектировании.
6. При записи старайтесь сложные предложения заменить простыми.

Тематическое и смысловое единство сообщения выражается в том, что все его компоненты связаны с темой первоисточника.

Сообщение должно содержать информацию на 3-5 мин. и сопровождаться презентацией, схемами, рисунками, таблицами и т.д.

Перечень учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия:Учебник и практикум/Потапов А.П..М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-01061-9.-310. http://www.biblio-online.ru/book/8D43B81B97CE-40F8-B20E-3CC23C7FEFAB
2. Малугин В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач/Малугин В.А., Рощина Я.А..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-8802-4.-478. http://www.biblioonline.ru/book/BB57CBF1-7168-4B2A-B5AC-5121639082E4
3. Васильев А. А. Теория вероятностей и математическая статистика:Учебник и практикум/Васильев А.А..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-05176-6.-253. http://www.biblioonline.ru/book/61129D36-34CF-4B87-901E-CF4C3D4B056A
4. Кремер Н. Ш. Математика для колледжей:Учебное пособие/Константинова О.Г., Фридман М.Н., Кремер Н.Ш. - под ред..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-05640-2.-346. http://www.biblioonline.ru/book/D1C3E5CB-6347-41C1-B161-94782774D897
5. Шипачев В. С. Математика:Учебник и практикум/Тихонов А.Н. - отв. ред..-М.:Издательство Юрайт,2017, ISBN 978-5-534-04609-0.-447. http://www.biblio-online.ru/book/3E8EBA19-DC34-4025-B856A20AC595B921
6. Баврин И. И. Математика для технических колледжей и техникумов:Учебник и практикум/Баврин И.И..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-03893-4.-329. http://www.biblioonline.ru/book/9D6CE1CA-9504-4C54-9E21-C939010C2743

Дополнительные источники:

1. Шипачев В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление:Учебник и практикум/Шипачев В.С..М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-04547-5.-212. http://www.biblio-online.ru/book/6E17B49FD6F3-4C4E-8EB8-D48373D5A996

2. Малугин В. А. Теория вероятностей и математическая статистика:Учебник и практикум/Малугин В.А..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-06572-5.-470. http://www.biblioonline.ru/book/242C48D4-ED9D-4C2F-B84E-F783E688A607

Самостоятельная работа №1 на тему

«Матрицы и определители»

Цель: уметь выполнять арифметические действия с матрицами, уметь вычислять определители второго и третьего порядка

Краткая теория

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или nстолбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращённо, $A = (a_{ij})$, где $i = (1,m)$(т.е. $i = 1,2,3,\dots,m$) – номер строки, $j = (1,n)$(т.е. $j = 1,2,3,\dots,n$) – номер столбца.

Действия над матрицами

1. Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Определение. Суммой двух матриц$A_{т\times п}=(a_{ij})$и $B_{т\times п}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{т\times п}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij}+ b_{ij}$ ($i = (1,m)$, $j = (1,n)$).

Записывают $C = A + B$.

Пример 1.

$$\begin{matrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ & righ & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \\ & righ & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \\ & righ & \end{matrix}$$

$$(\quad)$$

Аналогично определяется *разность матриц.*

2. Умножение на число

Определение. Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k\cdot a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$). *Записывают* $B = k\cdot A$.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, k=2, $A\cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее определителем, следующим образом:

1. $n = 1$, $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.
2. $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.
3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} -$$

Пример 3. Вычислим определитель 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 2\cdot 3 = -2$$

Ответ: $\Delta = -2$

Пример 4. Найдем значение λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 27$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot\lambda - 3\cdot(-1) = 27; 4\lambda + 3 = 27; 4\lambda = 24; \lambda = 6$$

Ответ: $\lambda = 6$

Пример 5. Вычислим определитель 3-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 5 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 3+2\cdot(-3)\cdot 0+(-1)\cdot 5\cdot 4-0\cdot(-2)\cdot 4-5\cdot 2\cdot 3-(-3)\cdot(-1)\cdot 1 =$$

$$-6+0-20+0-30-3=-59$$

Ответ: $\Delta=-59$

Пример 6. Найдем значение λ

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ \lambda & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=9$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ \lambda & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-3)+(-2)\cdot(-4)\cdot 6+0\cdot\lambda\cdot 1-6\cdot 1\cdot 1-\lambda\cdot(-2)\cdot(-3)-(-4)\cdot 0\cdot 5 = 9;$$

$$-15+48+0-6-6\lambda+0=9; -6\lambda=-18; \lambda=3$$

Ответ: $\lambda=3$

Задания для самостоятельного решения:

1) Вычислить определители 2-го порядка

1. $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 9\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 9\end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix}-12 & -1\\ 5 & 0\end{vmatrix}$

2) Найти значение λ

1. $\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ 3 & 20\end{vmatrix}=8$ 2. $\begin{vmatrix}-5 & 1\\ \lambda & -2\end{vmatrix}=3$ 3. $\begin{vmatrix}\lambda & -3\\ 5 & 0\end{vmatrix}=15$

---

3) Найти матрицу:

1.С=А-4В, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 8\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

2. С=4А-В, если$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 8\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

3.C=A+2B, если$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 8\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

4) Вычислить определители 3-го порядка

$$1.\begin{vmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}\quad 2.\begin{vmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}\quad 3.\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0\\ -3 & 0 & -1\\ 1 & 5 & 0\end{vmatrix}$$

5) Найти значение λ

$$1.\begin{vmatrix}2 & 0 & \lambda\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-34\qquad 2.\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda\\ \lambda & 0 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=17$$

Самостоятельная работа №2 на тему

«Системы линейных алгебраических уравнений»

Цель: уметь решать систему линейных уравнений методами Крамера и Гаусса

Краткая теория

Правило Крамера

Правило (метод) Крамера применяется к системам, у которых <u>число уравнений равно числу неизвестных. Этот метод использует определители.</u>

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,\end{cases}$$

В которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) Δ≠0, а определители $\Delta_{x_1},\Delta_{x_2},\Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$a_{11}a_{12}a_{13}$
$a_{21}a_{22}a_{32}$
$a_{31}a_{32}a_{33}$
rli
$b_1a_{12}a_{13}$
$b_2a_{22}a_{32}$
$b_3a_{32}a_{33}$
rli
$a_{11}b_1a_{13}$
$a_{21}b_2a_{32}$
$a_{31}b_3a_{33}$
rli
$, \mathit{\Delta}_{x_3}$
$a_{11}a_{12}b_1$
$a_{21}a_{22}b_2$
$a_{31}a_{32}b_3$
rli

| || |

| || |
$\mathit{\Delta} =$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы Δ≠0, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\mathit{\Delta}_{x_1}}{\mathit{\Delta}}, x_2 = \frac{\mathit{\Delta}_{x_2}}{\mathit{\Delta}}, x_3 = \frac{\mathit{\Delta}_{x_3}}{\mathit{\Delta}}.$$

Таким образом, если определитель системы Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение и обратно. Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

Случай 1. Определитель системы не равен нулю: $\mathit{\Delta} \neq 0$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тогда система имеет единственное решение.

Случай 2. Определитель системы равен нулю: $\mathit{\Delta} = 0$ (т.е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны). Пусть при этом один из определителей $\mathit{\Delta}_x, \mathit{\Delta}_y$ не равен нулю (т. е свободные члены не пропорциональны коэффициентам при неизвестных).$\mathit{\Delta} = 0$и$\mathit{\Delta}_x \neq 0$или $\mathit{\Delta}_y \neq 0$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. В этом случае система не имеет решений.

Случай 3. $\mathit{\Delta} = 0,\ \mathit{\Delta}\mathrm{x}_x = 0,\ \mathit{\Delta}_y\mathrm{y} = 0$ (т. е. и коэффициенты и свободные члены пропорциональны $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$), если одно из уравнений, есть следствие другого; система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решим систему уравнений методом Крамера

$$a\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}; б\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11; \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} = -22; \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 33$

$$\Delta \neq 0; x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-22}{-11} = 2; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{33}{-11} = -3$$

Ответ: (2; –3)

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 9; \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -18; \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 27; \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ -36

$$\Delta \neq 0; x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-18}{9} = -2; y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3; z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-36}{9} = -4$$

Ответ: (–2; 3; –4)

Метод Гаусса

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) применим для решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных может быть либо равно числу уравнений, либо отлично от него.

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

1-ый шаг метода Гаусса.

На первом шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент $a_{11} \neq 0$. Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Получим уравнение:

$$x_1 + a_{12^{(1)}}x_2 + a_{13^{(1)}}x_3 = b_{1^{(1)}} \qquad (2)$$

где $a_{1j^{(1)}} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$; $j = 1,2,3$; $b_{1^{(1)}} = \frac{b_1}{a_{11}}$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12^{(1)}}x_2 + a_{13^{(1)}}x_3 = b_{1^{(1)}} \\ a_{22^{(1)}}x_2 + a_{23^{(1)}}x_3 = b_{2^{(1)}} \\ a_{32^{(1)}}x_2 + a_{33^{(1)}}x_3 = b_{3^{(1)}} \end{cases} \quad (3)$$

Верхний индекс (1) указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

2-ой шаг метода Гаусса.

На втором шаге исключим неизвестное x_2из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент $a_{22^{(1)}} \neq 0$. Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23^{(2)}}x_3 = b_{2^{(2)}} \quad (4)$$

где $a_{23^{(2)}} = \frac{a_{23^{(1)}}}{a_{22^{(1)}}}$; $\quad b_{2^{(2)}} = \frac{b_{2^{(1)}}}{a_{22^{(1)}}}$

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на$a_{33^{(1)}}$.Получим уравнение:

$$a_{33^{(2)}} \cdot x_3 = b_{3^{(2)}}$$

Предполагая, что $a_{33^{(2)}} \neq 0$,находим $x_3 = \frac{b_{3^{(2)}}}{a_{33^{(2)}}} = b_{3^3}$.

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12^{(1)}}x_2 + a_{13^{(1)}}x_3 = b_{1^{(1)}} \\ x_2 + a_{23^{(2)}}x_3 = b_{2^{(2)}} \\ x_3 = b_{3^{(3)}} \end{cases} \quad (5)$$

Система вида (5) называется ***треугольной*.**

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют ***прямым ходом метода Гаусса*.**

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют ***обратным ходом метода Гаусса.***

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2. Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1.

В общем случае для системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными проводятся аналогичные преобразования. На каждом шаге исключается одно из неизвестных из всех уравнений, расположенных ниже ведущего уравнения.

Отсюда другое называние метода Гаусса – *метод последовательного исключения неизвестных.*

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида 0=b, где $b \neq 0$, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b_n \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad x_2 + \dots + c_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad x_k + \dots + c_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Такая система имеет бесчисленное множество решений. Чтобы найти эти решения, во всех уравнениях системы члены с неизвестными $x_{k+1}, \dots, x_k$ переносят в правую часть. Эти неизвестные называются свободными и придают им произвольные значения. Из полученной треугольной системы находим $x_1, \dots, x_k$, которые будут выражаться через свободные неизвестные.

Пример 2. Решим систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - 2z = 4 \\ -x + 2y + 4z = -2 \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Поменяем строки местами

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Добавим 3-ю строку ко 2-й

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Умножим 1-ю строку на $k = \frac{-1}{2}$ и добавим ко 2-й

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Получим единицы на главной диагонали

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - z = 2 \\ y - \frac{4}{5}z = \frac{6}{5} \\ z = 1 \end{cases}$$

$$z = 1; y = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = 2; x = 2 + 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2$$

Ответ: (2; 2; 1)

Задания для самостоятельного решения:

1)Решить систему уравнений методом Крамера

1. $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 8x - y = 13 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -4x - 3y = -8 \\ -5x - 2y = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -12x + 13y + 11z = 9 \\ 4x + 3y - 2z = -16 \\ -x + 7y + 5z = -7 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -x - 3y - 2z = 1 \\ 4x - 5y + 5z = 5 \\ -3x + 7y - 4z = -3 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x + 3y + 2z - 4 = 0 \\ 2x + 6y + z = 2 \\ 4x + 8y - z - 2 = 0 \end{cases}$

2) Решить систему уравнений методом Гаусса

1. $\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x - 2y = -2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x - y - z = 3 \\ -2x + y - 2z = -1 \\ 3x - 4y + z = -1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -4x + 5y - z = 3 \\ 3x - 4y - 2z = -5 \\ x + y - 6z = -7 \end{cases}$

Самостоятельная работа №3 на тему

«Основные аспекты дифференцирования и интегрирования»

Цель: уметь вычислять производные простых и сложных функций, уметь применять производную при исследовании построении графиков функции.

Краткая теория.

Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю.

$$f'(x) \ \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Формулы дифференцирования	
$c' = 0$ $x' = 1$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx)' = k(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\mathbf{(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}}$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$(cu)' = cu'$$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, v \neq 0$

$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$Исследование функций и построение их графиков следует проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать, является ли функция четной или нечетной.
3. Исследовать, является ли функция периодической.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства, то есть промежутки на которых $y < 0$ или $y > 0$.
5. Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.
6. Построить график функции.

Пример 1

Исследовать функцию $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+1$ и построить ее график.

Проведем исследование по схеме:

1) D(f)=R, т.к. f(x)-многочлен.

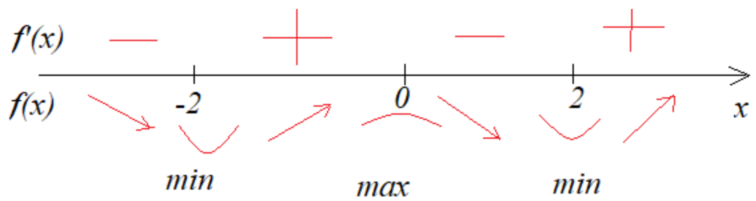
2) Так как f(-x)=f(x), тогда функция является четной. График симметричен отн. Oy.

3)Точки пересечения графика с осью Ox:

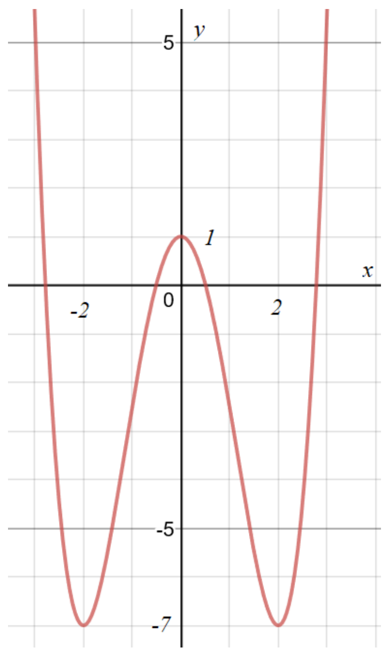
$\frac{1}{2}x^4-4x^2+1=0$

(-2,782;0); (-0,5;0) (0,5;0) (2,782;0).

При x=0; y=1
(0;1) -точка пересечения графика с осью Оу
4)Функция не является периодической.
5) $f'(x)=2x^3-8x=2x(x+2)(x-2)$
$2x(x+2)(x-2)=0$
X=0; x=2; x=-2-критические точки



Функция убывает при $x \in -\infty; -2] \cup [0; 2]$.
Функция возрастает при $x \in [-2; 0] \cup [2: +\infty]$.
(-2;-7);(2;-7)-min
(0;1)-max.
6)



Для более точного построения графика функции можно найти асимптоты и промежутки выпуклости, точки перегиба.

Задания для самостоятельного решения:

1) Пользуясь лекциями и краткой теорией, повторите вычисление производных простых и сложных функций, использование производной при исследовании и построении графиков функции.

2)Вычислите:

1.значение производной функции $f(x)=4x^3+6x+3$ при $x_0=1$;

2.значение производной функции f(x)=2xcosx при $x_0=0$;
3.$f'(0) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = (x^2 - 3x)\cos 3x$
4.тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)=\frac{3}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=1$;
5.наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x$ на отрезке $[-3; \quad 4]$;
3)Вычислите производные сложных функций:

1) $y = 3\sin 5x$;
2) $y = 4\cos\frac{x}{2}$;
3) $y = \arccos 3x$;
4) $y = \ln\sqrt{2x-1}$;
5) $y = \sqrt{x^3+2x-5}$
6) $y = \sin^3 x$;
7) $y = \ln\sin 3x$;
8) $y = \ln\sqrt{2x-1}$.

4)Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции:

1) $y = \frac{x^4}{6} - 3x^2$;
2) $y = \frac{x^4}{3} - 6x^2$.

5) Проведите исследование функций и постройте их графики:

1) $y = 8 - 2x - x^2$;
2) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Самостоятельная работа №4 на тему

Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения первого и второго порядка.

Цель: уметь применять формулы интегрирования при решении дифференциальных уравнений первого и второго порядка, с разделенными и разделяющимися переменными.

Краткая теория:

Определение дифференциального уравнения 1-го порядка. Общее и частное решение

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

F (x, y, y′) = 0 (1)

т.е. содержит независимую переменную *x,* искомую функцию *y(x)* и её производную *y′(x)*. Разрешая уравнение (1), если это возможно, относительно производной y' получим

$$y' = f(x,y) \quad (2)$$

Иногда уравнения (1), (2) записывают в дифференциалах:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его ***частным решением.*** Для многих дифференциальных уравнений первого порядка *общее решение* можно задать формулой вида:

$$y = y(x, C) \quad (4)$$

где C - произвольная постоянная такая, что при любом C функция (4) является частным решением дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых ***интегральными кривыми***, а каждое частное решение представляет собой отдельную интегральную кривую. Иногда не удаётся получить решения дифференциального уравнения в явной форме, т.е в виде $y = y(x, C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задаётся формулой вида:

$$\Phi(y, x, C) = 0 \quad (5)$$

Выражение типа $\Phi(x, y, C) = 0$ в этом случае называют ***интегралом*** **(*частным,***

общим) дифференциального уравнения.

Задача Коши

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y$, где x_0, y_0- заданные числа. Задача Коши кратко записывается так:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y = y_0 \text{ при } x = x_0. \end{cases} \quad (6)$$

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (2) называется ***уравнением с разделяющимися переменными,*** если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (7)$$

В предположении, что $f_2(y) \neq 0$, уравнение с разделяющимися переменными (7) можно переписать в виде (разделить переменные):

$$\frac{\mathrm{dy}}{f_2(y)} = f_1(x)\mathrm{dx}. \quad (8)$$

Уравнение вида (8) называется ***уравнением с разделёнными переменными***.

Теорема 1. Если существуют интегралы $\int \frac{\mathrm{dx}}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)\mathrm{dx}$., то общий интеграл уравнения с разделёнными переменными (8) задаётся уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C, \quad (9)$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ - некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные (с учётом условий, когда это можно делать);
2) проинтегрировать почленно полученное уравнение с разделёнными переменными;
3) найти его общий интеграл уравнения;
4) выяснить, имеет ли уравнение (5) решения, не получающиеся из общего интеграла;
4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (в случае задачи Коши).

Пример 1. Найти частное решение уравнения:

$$\begin{cases} 2yy' = 1 - 3x^2; \\ y_0 = 3 \text{ при } x_0 = 0; \end{cases}$$

Решение: это уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в дифференциалах. Учитывая, что $y' = \frac{dx}{dy}$, получим:

$$2$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x alignl$$

. Разделим переменные: $2ydy = (1 - 3x^2)dx$. Интегрируя обе части последнего равенства, найдём $\int 2ydy = \int(1 - 3x^2)dx$, т.е. $y^2=x-x^3+C$. Подставив начальные значения $x_0=1$, $y_0=3$, найдём C: $9=1-1+C$, т.е. $C=9$. Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2=x-x^3+9$, или $x^3+y^2-x-9 = 0$.

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x + 1)ydx = dy$;
б) $(y - 1)^2dx + (1 - x)^3dy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частные решения дифференциальных уравнений):

а) $x^2dy = y^2dx$, $y = 0{,}25$ при $x = 0{,}1$;

б) $3x\sqrt[3]{y}dx + (1 - x^2)dy = 0$, $y = 1$ при $x = 0$.

3. Найти общее решение дифференциальных уравнений

а) $x^3dy - y^3dx = 0$; б) $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0$;

4. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а)

$y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}$
$y = e^2$ при $x = 9$; б)

$y^2 \mathrm{dx} = e^x \mathrm{dy}$
$y = 1$, если $x = 0$;

Краткая теория

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае записывается в виде:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (1)$$

или, если это возможно, в разрешённом относительно y'' виде

$$y'' = f(x, y, y') \quad (2)$$

Говорят, что формула $y = \phi(x, C_1, C_2)$ представляет ***общее решение*** дифференциального уравнения второго порядка (1) или (2), если для любых значений C_1' и C_2' постоянных C_1 и C_2 функция $\phi(x, C_1', C_2')$ является решением данного уравнения, и любое его ***частное решение*** может быть получено из формулы $y = \phi(x, C_1, C_2)$ при некоторых значениях C_1' и C_2'.

Для дифференциальных уравнений второго порядка ***задача Коши*** формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ или, в другой записи,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_0'. \end{cases} \quad (3)$$

где x_0, y_0, y_0' - заданные числа. Геометрически общее решение уравнения (1) или (2) представляет собой семейство интегральных кривых, а решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку x_0;y_0 в данном направлении – угловой коэффициент касательной к интегральной кривой (графику решения $y = y(x)$), проведённой в точке x_0;y_0равен данному числу y_0'.

Простейшее уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' = f(x). \quad (4)$$

Уравнения этого вида называются ***уравнениями, допускающими понижение порядка*** и решаются двукратным интегрированием: полагаем $y' = p(x)$,тогда $y'' = p'$ и уравнение (4) принимает вид $p' = f(x)$, или $dp=f(x)\ dx$. Отсюда $p = \int f(x)\mathrm{dx} = F(x) + C_1$, где $F(x)$ – одна из первообразных для функции f(x). Так как $p = y'$,то $y' = F(x) + C_1$ или $\mathrm{dy} = (F(x) + C_1)\mathrm{dx}$. Отсюда, интегрируя ещё раз, находим, как нетрудно проверить, общее решение уравнения (4) (в области, где существуют рассматриваемые интегралы): $y = \int F(x)\,\mathrm{dx} + C_1 x + C_2$

Уравнение вида

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (5)$$

где a_0, a_1, a_2 - действительные числа ($a_0 \neq 0$), называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными***

коэффициентами. Чтобы решить уравнение (5), нужно решить характеристическое уравнение:

$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$
(6)

При решении характеристического уравнения (6) возможны три случая, в зависимости от которых строится общее решение данного дифференциального уравнения (5)

Корни уравнения (6)	Частные решения уравнения (5)	Общее решение (5)
Действительные и различные: $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1x}$; $y_2 = e^{k_2x}$	$y = C_1e^{k_1x}$ +
Равные: $k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1x}$; $y_2 = \mathrm{x}e^{k_1x}$	$y = e^{k_1x}(C_1$
Комплексно сопряжённые: $\alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = \cos 2x$.

Решение: положим $y' = p(x)$; тогда $y'' = p'$, и, следовательно, $p' = \cos 2x$ или $\mathrm{dp} = \cos 2x\mathrm{dx}$. Интегрируя это уравнение, находим: $p = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$. Т.к. $p = y'$, то $y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$, $\mathrm{dy} = \frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{dx} + C_1\mathrm{dx}$. Интегрируя второй раз, имеем общее решение: $\int \mathrm{dy} = \int \frac{1}{2}\sin 2x\mathrm{dx} + C_1\int \mathrm{dx}$, т.е. $y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1x + C_2$.

Пример 2. Дана задача Коши:

$$\begin{cases} y'' = \frac{3}{\sqrt{x}}; \\ y = 4,\ y' = 14 \text{ при } x = 4. \end{cases}$$

Решение: Положим $p = y'$, тогда $y'' = p'$ и получим следующее уравнение: $p' = 3x^{-\frac{1}{2}}$ или $\mathrm{dp} = 3x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dx}$. Интегрируя, получим $p = y' = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$. Так как $y' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, то получим следующее: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$ или $\mathrm{dy} = \left(6x^{\frac{1}{2}} + C_1\right)\mathrm{dx}$. Интегрируя почленно, получим $y = 4\sqrt{x^3} + C_1x + C_2$ - общее решение. Наложим начальные условия. Тогда $y(4) = 4 \cdot 4^{\frac{3}{2}} + C_1 \cdot 4 + C_2 = 4y'(4) = 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}} + C_1 = 14$. Отсюда имеем, что $C_1 = 2, \mathrm{C}_2 = -36$.

Значит, частное решение следующее: $y = 4\sqrt{x^3} + 2x - 36$.

1. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

Решение: а) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$. Его корни $\kappa_1 = 2$ и $\kappa_2 = -1$. Значит, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

б) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$.Его корни $\kappa_1 = \kappa_2 = -3$. Тогда общее решение имеет вид $y = C_1e^{-3x} + C_2\mathrm{x}\mathrm{e}^{-3x}$.

2. Найти решение задачи Коши: $y'' - 4y' + 5y = 0$, $\mathrm{y}(0) = 6, \mathrm{y}'(0) = 15$

Решение: составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 4\kappa + 5 = 0$. Решая его, получим $D = -4$ и комплексно сопряжённые корни $k_1 = 2 - i$ и $k_2 = 2 + i$. Тогда его общим решением будет $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Подставим начальное условие: $\mathrm{y}(0) = \mathrm{e}^{2\cdot 0}(\mathrm{C}_1\cos 0 + C_2\sin 0) = C_1 = 6$. Вычислим производную $y' = 2e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{2x}(-C_1\sin x + C_2\cos x)$. Подставим начальное условие $y'(0) = 2e^{2\cdot 0}(C_1\cos 0 + C_2\sin 0) + e^{2\cdot 0}(-C_1\sin 0 + C_2\cos 0) = 2C_1 + C_2 = 2 \cdot 6 + C_2 = 15$. Откуда имеем $C_2 = 3, \Rightarrow y =$

$e^{2x}(6\cos x + 3\sin x)$ - частное решение.

Задания для самостоятельной работы:

1.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y^{//} = \frac{1}{x^2}$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y^{//} = \sin x; \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi, y \quad \left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t) = 12t - 1$ (ускорение - *м/с*^{2}, время - *сек*). Начальное положение тела $x(0) = 0$ и начальная скорость $v(0) = 10$ м/с. Найти закон движения тела и путь, пройденный за 3 секунды;

4. Найти общее дифференциального уравнения: $y^{//} - 2y \quad + 5y = 0$.

5 .Решить задачу Коши: $\begin{cases} y^{//} - 10y \quad + 16y = 0; \\ y = 4; y \quad = 26, \text{при} x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y^{//} - 8y \quad + 20y = 0; \\ y = 2; y \quad = 8, \text{при} x = 0. \end{cases}$