МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Колледж профессионального образования

Элементы высшей математики

Методические рекомендации
для практических работ по изучению дисциплины
для студентов Колледжа профессионального образования
специальности
09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

Утверждено на заседании ПЦК
Информационных технологий
Протокол № 9 от 23.05.2018
председатель _________Н.А. Серебрякова

Пермь 2018

Составитель: Дудина Н.А., преподаватель Колледжа профессионального образования

Методические рекомендации по выполнению практических работ разработаны на основе требований Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.04 Информационные системы для оказания помощи обучающимся по дисциплине «Элементы высшей математики».

Данное пособие содержит перечень практических работ, порядок их выполнения и критерии оценивания.

Методические рекомендации по выполнению практических работ предназначены для обучающихся колледжа профессионального образования ПГНИУ специальности 09.02.04 Информационные системы.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

В результате освоения дисциплины "Элементы высшей математик " обучающийся

должен **уметь**:
- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения.

Практическая работа №1

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

Действия над матрицами. Вычисление определителей»
Цель работы: научиться выполнять операции над матрицами
Краткая теория: ***Матрицей*** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m

строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1,m}$ (т.е. $i = 1,2,3,\dots,m$) – номер строки, $j = \overline{1,n}$ (т.е. $j = 1,2,3,\dots,n$) - номер столбца. Матрицу A называют матрицей ***размера*** $m \times n$ и пишут $A_{m\times n}$. Числа a_{ij} , составляющие матрицу, называются ее ***элементами.*** Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют ***главную диагональ.*** Матрицы ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной.*** Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют ***матрицей*** n ***- го порядка.*** Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой *E*. Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой.*** Обозначается буквой *O*. Матрица, содержащая всего один столбец или одну строку называется ***вектором*** (или вектор- столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}, \qquad B = (b_1, b_2 \dots b_n).$$

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной и обозначается A^T. Транспонированной матрица обладает следующим свойством: $\left(A^T\right)^T = A$.

Действия над матрицами

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}).$$

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ ***на число k*** называется матрица

$B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n})$.

Матрица $-A = (-1)\cdot A$ называется ***противоположной матрице*** *А*. Разность матриц *A-B* можно определить так: *A-B =A+(-B)*. Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами:*

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (B + A) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$,

где *A, B, C* – матрицы, α и β - числа.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

• перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
• умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
• прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного

ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы *A* и *B* называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается *A* ~ *B*.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p} = (b_{ijk})$ называется матрица $C_{m\times з} = (c_{шл})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}\text{, где } i = \overline{1, m}\text{ , } k = \overline{1, p},$$

т. е. элемент *i*-й строки и *k*-го столбца матрицы произведения *C* равен сумме произведений элементов *i*-й строки матрицы *A* на соответствующие элементы *k*-го столбца матрицы *B*. Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда ***число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*** Т.е. если матрицы *A* и *B* квадратные одного размера, то произведения *AB* и *BA* всегда существуют.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Найти сумму матриц A+B, если: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Решение: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Пример 2. Найти 2A, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Решение: $2A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$

Пример 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы *A* (их 3) не совпадает с числом строк матрицы *B* (их 2). При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

Даны матрицы *A и B:* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

1. Найти матрицу *C*=2*A*-3*B*.
2. Найти произведение матриц *AB*; *BA*.

Вариант 2

Даны матрицы *A и B:* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Найти сумму и разность матриц: *A*+ *B*, *A*-*B*.
2. Найти матрицу *C*=2*A*-3*B*.
3. Найти произведение матриц *AB*; *BA*.

Вариант 3

Даны матрицы *A и B*: $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ -1 & 5 & 3\\ -2 & 3 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

1. Найти сумму и разность матриц: *A*+ *B*, *A*-*B*.
2. Найти матрицу *C*=2*A*-3*B*.
3. Найти произведение матриц *AB*; *BA*.

Вариант 4

Даны матрицы *A и B*: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5\\ 3 & -4 & 4\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & -4\\ 2 & 0 & 5\\ -5 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

1. Найти сумму и разность матриц: *A*+ *B*, *A*-*B*.
2. Найти матрицу *C*=2*A*-3*B*.
3. Найти произведение матриц *AB*; *BA*.

Практическая работа №2

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

Вычисление определителей»
Цель работы: научиться находить определитель матрицы.
Краткая теория.
Квадратной матрице *A* порядка *n* можно сопоставить число det *A* (или $|A|$, или Δ), называемое ее ***определителем,*** следующим образом

1. $n=1. A=(a_1); \det A=a_1.$
2. $n=2. A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};\quad \det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$
3. $n=3,\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix};\quad \det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель (*n*–1)-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}. Так если

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ \text{то}\ m_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ m_{32}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма ($i+j$) - четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij} .

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot m_{ij}.$$

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторой строки (или столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения. В случае определителей 3-го порядка получим, что

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}.$$

Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$) матрица A называется ***вырожденной.***

Матрицей, ***союзной к матрице*** А, называется матрица

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** матрице A, если выполняется условие

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Пусть A – невырожденная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & {}_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ \text{и}\ \det A \neq 0.$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{A^*}{\det A}$, т.е. $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=2\cdot 6-5\cdot(-3)=12-(-15)=27.$

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3(4\times 3-2\times 5)-2(2\times 3-5\times 1)+1(2\times 2-4\times 1)=$$

$$=3(12-10)-2(6-5)=6-2=4$$

Пример 3. Найти A^{-1}, если $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Решение: $\Delta=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=(-4+4)+2(-8+6)+3(4-3)=-1$

Составим союзную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=0$ $\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-(2+6)=-8$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-(-8+6)=2$ $\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-3=1$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=(4-3)=1$ $\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\2&-2\end{vmatrix}=-(-2-6)=8$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2&3\\2&-4\end{vmatrix}=-(8-6)=-2$ $\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=1+4=5$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&3\\3&-4\end{vmatrix}=-4-9=-13$

Союзная матрица будет следующей: $A^*=\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-13&8\\1&-8&5\end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot A^*=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&-2&1\\2&-13&8\\1&-8&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&13&-8\\-1&8&-5\end{pmatrix}$$

Проверкой $A\cdot A^{-1}=E$ убеждаемся, что обратная матрица найдена верно

Задания для практического занятия:

Вариант 1

Даны матрицы *A и B:* $A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&1&2\\-2&4&-2\end{pmatrix}$; $\qquad B=\begin{pmatrix}0&-2&5\\4&-3&3\\3&5&-1\end{pmatrix}$

3. Вычислить определители матриц det *A*; det *B*.

4. Найти Найти сумму и разность матриц: *A*+ *B*, *A*-*B*.

5. обратные матрицы A^{-1}, B^{-1}. Проверить правильность их нахождения умножением $A\cdot A^{-1}$ *и* $B\cdot B^{-1}$.

Вариант 2

Даны матрицы *A и B:* $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&0&4\\-3&0&6\end{pmatrix}$; $\qquad B=\begin{pmatrix}1&3&-4\\4&2&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

4. Вычислить определители матриц det *A*; det *B*.

5. Найти обратные матрицы A^{-1}, B^{-1}. Проверить правильность их нахождения умножением $A\cdot A^{-1}$ *и* $B\cdot B^{-1}$.

Вариант 3

Даны матрицы *A и B:* $A=\begin{pmatrix}0&4&1\\-1&5&3\\-2&3&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4&2&-3\\1&0&2\\3&4&5\end{pmatrix}$.

4. Найти произведение матриц *AB*; *BA*.

5. Вычислить определители матриц det *A*; det *B*.

6. Найти обратные матрицы A^{-1}, B^{-1}. Проверить правильность их нахождения умножением $A\cdot A^{-1}$ *и* $B\cdot B^{-1}$.

Вариант 4

Даны матрицы *A и B:* $A=\begin{pmatrix}0&1&5\\3&-4&4\\2&-2&3\end{pmatrix}$; $\qquad B=\begin{pmatrix}3&3&-4\\2&0&5\\-5&3&4\end{pmatrix}$;

4. Найти произведение матриц *AB*; *BA*.

5. Вычислить определители матриц det *A*; det *B*.

6. Найти обратные матрицы A^{-1}, B^{-1}. Проверить правильность их нахождения умножением $A\cdot A^{-1}$ *и* $B\cdot B^{-1}$.

Практическая работа №2

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

«Вычисление определителей»

Цель работы: научиться находить определитель 3-го и более высшего порядка методом

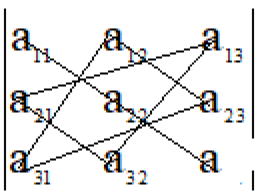
Краткая теория:

Правилу Саррюса (правило треугольников) заключается в равенстве

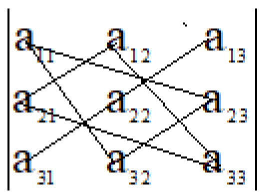
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - $$
$$- a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}.$$

Для запоминания формулы нужно уяснить так называемое правило треугольников: Каждое слагаемое определителя состоит из произведения трех элементов, причем три слагаемых берутся со знаком “+” и три слагаемых со знаком “-“. Правило треугольников (или Саррюса) состоит в том, что со знаком “+” берут произведения элементов, стоящих на главной (правой) диагонали, а также стоящих на параллельных этой диагонали прямых и углового элемента, замыкающего треугольник, а со знаком “-“ произведения элементов вспомогательной (левой) диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах треугольников, построенных аналогично предыдущему случаю:

“ + ”



“ - “



Пример 1.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1\cdot 6\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 2 + 4\cdot(-1)\cdot(-3) - (\,(-3)\cdot 6\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 1 +}$$
$$\mathbf{+1\cdot 5\cdot(-1)\,) = 71.}$$

Существенно упростить вычисление определителей позволяют его свойства. Отметим без доказательства некоторые из них.

1. Если строки матрицы определителя сделать столбцами с теми же номерами (т.е. транспонировать матрицу), то определитель не изменится.
2. Общий множитель элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя как множитель.
3. Определитель равен нулю, если
   - он имеет нулевую строку (или столбец);
   - две его строки (или столбца) одинаковы;
   - две его строки (или столбца) пропорциональны.
4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
5. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых

все строки (столбцы), кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в первом определителе стоят первые, а во втором - вторые слагаемые.

6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число (теорема о линейной комбинации параллельных рядов определителя).

7. Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов. В частности, определитель единичной матрицы равен 1: det(E) = 1.

8. Для любых двух матриц A[n,n] и B[n,n] имеет место равенство:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Пример 2 .Вычислить определитель высшего порядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

Используя свойства определителя, понизим порядок определителя. С этой целью прибавим пятый столбец к первому :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 0 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 27 & 6 & 10 & -9 \\ 9 & 6 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix};$$

в полученном определителе 4-го порядка четвертый столбец умножим на 3 и прибавим к первому столбцу, затем умножим его на 2 и прибавим ко второму столбцу, умножим его на 8 и прибавим к третьему столбцу, получаем

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 27 & 6 & 10 & -9 \\ 9 & 6 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7(-12)(-22)(-1) = -5544.$$

Из приведенного примера очевидно, что вычисление определителей высших порядков значительно упрощается, если определитель привести к треугольному виду.

Пример 3. Вычислим определитель третьего порядка с использованием его свойств:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & -7 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-7) \cdot 6 = -42.$$

Умножили первую строку на (-2) и сложили со второй; результат записали во вторую строку; далее – умножили первую строку на (-3) и сложили с третьей, результат записали в третью строку. Затем вторую строку умножили на (-1) и сложили с третьей, результат записали в третью строку и воспользовались свойством 7.

Первый и второй шаги не изменили определителя и свели его к диагональному виду.

Задания для практического занятия

1. Вычислить определители 3 порядка с помощью правила «треугольника»

1. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 0 & -8 & 1 \\ 5 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители методом разложения по строке (столбцу), или используя свойства определителя:

$a)\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & -7 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 7 & -4 & 3 \\ -8 & 3 & -5 \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & -9 \\ -4 & 7 & 6 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

3. Вычислить определитель методом приведения к треугольной форме:

$a)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$,

б) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -5 & -1 & 20 \\ -3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

.

Практическая работа №4

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

«Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений матричным методом

Краткая теория: ***Системой линейных алгебраических уравнений***, содержащей ***m*** уравнений и ***n*** неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

(1)

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, называются ***коэффициентами системы***, числа b_j - ***свободными членами***. Подлежат нахождению числа x_i, *где* $i = \overline{0,n}$. Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме:***

$$A \cdot X = B, \qquad (2)$$

здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} —$$

вектор - столбец из неизвестных x_j

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ — вектор - столбец из свободных членов b_j (3)

Расширенной матрицей системы называется матрица $\overline{A}$, дополненная столбцом членов

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} \cdots a_{1n} b_1 \\ a_{21} a_{22} \cdots a_{2n} b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mn} b_m \end{bmatrix}$$

(4)

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства. Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения. Совместная система называется ***определенной*,** если она имеет единственное решение, и ***неопределенной*,** если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется ***частным решением системы.*** Совокупность всех частных решений называется ***общим решением. Решить систему*** – это значит выяснить, совместна она или не совместна и если система совместна, значит найти ее общее значение.

Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если они имеют одно и то же решение. Эквивалентные системы чаще всего получаются, в частности, при ***элементарных преобразованиях системы*** при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

(5)

или в матричной форме $A \cdot X = B$. Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется ***главным определителем системы.*** Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной.*** Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (6)$$

Отыскание решения системы по формуле (1) называют ***матричным методом*** решения системы.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 11. \end{cases}$$

Решение: $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4+4) + 2(-8+6) + 3(4-3) = -1$

Составим союзную матрицу. Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2+6) = -8$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-8+6) = 2$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$

Союзная матрица будет следующей: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & -13 & 8 \\ 1 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

Найдем решение системы по формуле (6):

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 13 & -8 \\ -1 & 8 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, решением системы будет тройка чисел (1; 2; -1).

Задания для практического занятия:

Вариант 1

Матричным методом найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -1; \\ 3x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8; \\ 2x_2 + 7x_3 = 17; \end{cases}$

Вариант 2

1.Матричным методом найти решение системы:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 11; \\ x_1 \quad 5x_2 + 6x_3 = 28; \\ + 2x_3 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 1; \\ x_2 - 5x_3 = -9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_2 - 2x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$

Вариант 3

1. Матричным методом найти решение системы:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14; \\ 3x - y + 2z = 5; \\ x + 2y - z = 7; \end{cases}$)

б) $\begin{cases} -3x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 10; \\ -2x_2 - x_3 = -4; \\ 2x_1 - 1x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases}$

Вариант 4

1. Матричным методом найти решение системы:

А) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10; \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5; \end{cases}$

Б) $\begin{cases} -2x_2 - 5x_3 = -12; \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7; \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8; \end{cases}$

Практическая работа №5

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

«Решение систем линейных уравнений методом Крамера»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Краткая теория:

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей ***m*** уравнений и ***n*** неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

(1)

где числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, называются ***коэффициентами системы***, числа b_j - ***свободными членами.*** Подлежат нахождению числа $x_i,\ где\ i = \overline{0,n}$. Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме:***

$$A \cdot X = B, \qquad (2)$$

здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} —$$

вектор - столбец из неизвестных x_j

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор - столбец из свободных членов b_j (3)

Пусть у данной системы уравнений $\Delta \neq 0$. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (4)$$

Запишем матричное равенство (6) запишем в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Отсюда следует, что $x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta}$

$$x_2 = \frac{A_{112}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\Delta}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

(7)

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2 a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом свободных членов. Итак, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$. Аналогично $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом свободных членов, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots\ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$. Формулы

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \overline{1, n} \qquad (8)$$

называются ***формулами Крамера***.

Задания для практического занятия

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + \quad x_2 - 2x_3 = \ \ 6; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 2\cdot 4 + 5\cdot(-2)\cdot(-2) - 4\cdot(-3)\cdot(-2) - 5\cdot 1\cdot(-3) -$$

$$-(-2)\cdot 2\cdot 3 = \ 27 + 8 + 20 - 24 + 15 + 12 = 58.$$

Так как главный определитель системы не равен нулю, значит она совместа. Находим определители: Δx_1, Δx_2, Δx_3. Определитель Δx_1 получается из главного определителя Δ путём замены в нём первого столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 54 - 4 - 16 + 12 - 12 + 24 = 58.$$

Т.к. Δx_1 отличен от нуля, значит решение системы единственное. Определитель Δx_2 получается из главного определителя Δ путём замены в нём второго столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 36 + 48 + 20 - 32 + 90 + 12 = 174.$$

Определитель Δx_3 получается из главного определителя Δ путём замены в нём третьего столбца на столбец свободных членов.

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 18 - 16 - 60 + 72 + 10 - 24 = 0.$$

По формулам Крамера: $x_1 = \ x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \ \dfrac{58}{58} = 1$; $\quad x_2 = \ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{174}{58} = \ 3$;

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \ = \frac{0}{58} = 0.$$

Итак, решением системы будет тройка чисел (1; 3; 0).

Вариант 1

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y - 3z = -2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

Вариант 2

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 14; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 20; \\ 3x - 2y - 5z = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4; \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$

Вариант 3

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 10; \\ x + 5y - 2z = -15; \\ 2x - 2y - z = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

Вариант 4

1. Решить систему методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 13; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -1; \\ x - 3y + 2z = 10; \\ 3x - 4y - z = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$

Практическая работа №6

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

«Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Краткая теория:

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений, содержащей n уравнений и n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Такую систему удобно записывать в компактной ***матричной форме:***

$$A \cdot X = B, \qquad (2)$$

здесь A – матрица коэффициентов системы, называемая ***основной матрицей***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор - столбец из неизвестных x_j

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор - столбец из свободных членов b_j (3)

Решением системы называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является ***метод Гаусса,*** состоящий в последовательном исключении неизвестных.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n \end{cases}$$

(4)

где $k \le n$, $a_{ii} \ne 0, i = \overline{1,k}$. Коэффициенты a_{ii} называются ***главными элементами системы***. На втором этапе (обратный ход) идет последовательно определении неизвестных из этой ступенчатой системы.

Замечание 1. Если ступенчатая система оказывается ***треугольной***, т. е. $k = n$, то исходная система (1) имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные $x_{n-2}, \dots, x_1$.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Сначала из второго, третьего и четвертого уравнений исключаем неизвестное *x₁*. Для этого из второго уравнения вычтем первое, затем первое уравнение умножим на 2 и вычтем почленно из третьего уравнения, а затем снова первое уравнение умножим на 3 и вычтем почленно из четвертого. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_2 - x_4 = -2; \\ -x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -11; \\ -x_2 + 4x_3 - 7x_4 = -18; \end{cases}$$

Исключим x_2 из третьего и четвертого уравнений последней системы. Для этого сложим второе уравнение системы сначала с третьим, а затем с четвертым. В результате получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_2 - x_4 = -2; \\ 5x_3 - 7x_4 = -13; \\ 4x_3 - 8x_4 = -20; \end{cases}$$

Теперь исключим переменную x_3 из четвертого уравнения. Для этого третье уравнение умножим на 4, четвертое уравнение умножим на (-5) и сложим почленно полученные уравнения. Получим систему равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_2 - x_4 = -2; \\ 5x_3 - 7x_4 = -13; \\ 12x_4 = 48; \end{cases}$$

Мы получили систему уравнений треугольного вида. Начинаем обратный ход. Из последнего уравнения находим $x_4=4$, подставляем его в третье уравнение последней системы и находим $x_3=3$; из второго уравнения системы находим $x_2=2$, а из первого $x_1=1$. Решением системы является четверка чисел (1; 2; 3; 4).

Замечание 2. На практике удобнее работать не с системой (1), а с расширенной ее матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

Пример 2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение: в результате элементарных преобразований над расширенной матрицей системы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Поэтому общее решение системы: $x_2 = 5x_4 - 13x_3 - 3;\ x_1 = 5x_4 - 8x_3 - 1.$

Если положить, например, $x_3 = 0, x_4 = 0,$ найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 0, x_4 = 0.$

Пример 3. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + y - z = 0; \\ -2x + y + z = 6; \\ x + y + z = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ 2x - 3y + 2z = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4; \end{cases}$

Вариант 2

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y + z = 4; \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8; \end{cases}$

Вариант 3

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 3y + z = 6; \\ 2x + 3y + 3z = 13; \\ 3x + 3y + z = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3\text{б} + z = 1; \\ 2x + y + 3z = 11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5; \end{cases}$

Вариант 4

1. Найти решение системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31; \\ 5x + y + 2z = 29; \\ 3x - y + z = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10; \end{cases}$

В) $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5; \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -5; \end{cases}$

Практическая работа №7

Раздел 1 Элементы линейной алгебры

Цель работы: закрепление теоретического материала

Контрольные вопросы

1. Что такое определитель матрицы?
2. Что такое минор и алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы А?
3. Как найти союзную и обратную матрицы для матрицы А?
4. Что называется матрицей? Дать определения основных понятий матрицы.
5. Какая матрица называется квадратной? Единичной?
6. Какие операции можно производить над матрицами?
7. Что значит решить систему уравнений? Дать определение общего и частного решений.
8. В чем состоит метод Гаусса решения систем линейных уравнений вы знаете?
9. Укажите общий вид системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными.
10. Что значит решить систему уравнений? Дайте определение общего и частного решений.
11. В чем суть метода Крамера? Перечислите формулы Крамера.
12. Что значит решить систему уравнений?
13. В чем суть матричного метода решения системы линейных уравнений? Перечислите формулы.

Практическая работа №8

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

«Операции над векторами. Вычисление модуля и скалярного произведения»

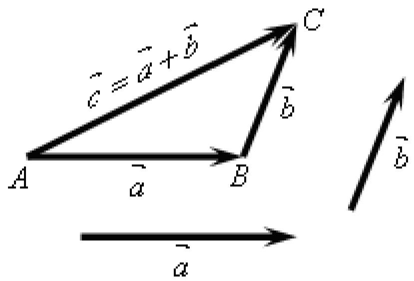
Цель работы: научиться выполнять операции над векторами в координатах

Краткая теория:

Вектором называется направленный отрезок. Вектор, заданный парой несовпадающих точек А и В, обозначается символом $\overrightarrow{AB}$.Точка *A* называется ***началом***, а точка *B* – ***концом*** вектора. Расстояние $|\overrightarrow{AB}|$ называется ***длиной*** (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$. Для обозначения векторов употребляются также строчные латинские буквы со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$. Вектор $\overrightarrow{AA}$, концы которого совпадают, называется ***нулевым*** вектором. Длина нулевого вектора равна нулю. Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если два нулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***сонаправленными*** $\left(\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\right)$, во втором – ***противоположно направленными*** $\left(\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\right)$. Равные векторы сонаправлены и равны по модулю, т.е. если $a=b$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$, и обратно, если векторы сонаправлены и равны по модулю, то она равны, т.е. если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ и $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$, то $\vec{a}=\vec{b}$.

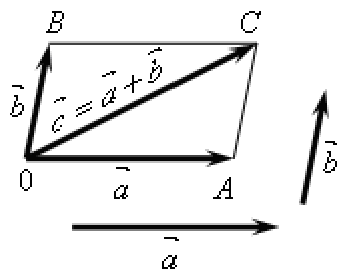
Для того чтобы построить сумму двух данных векторов $\vec{a}+\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку *A* и отложить от нее вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, а затем от точки *B* отложить вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ является ***суммой***:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

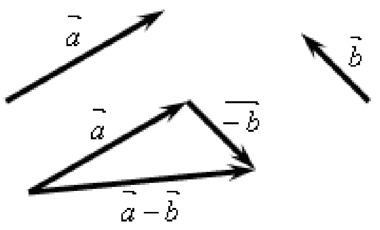


Этот способ построения называется правилом треугольника.

Сумму двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить и следующим образом. Откладывая от произвольной точки *O* векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, построим параллелограмм *OACB*. Тогда вектор $\overrightarrow{OC}$ (где $[OC]$ – диагональ параллелограмма) является искомой суммой: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Этот способ построения называется правилом параллелограмма:



Два вектора называются ***противоположными***, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$. Таким образом, $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$. Ненулевые противоположные векторы имеют равные длины и противоположные направления. Вектор *c* называется ***разностью*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, достаточно прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор, противоположный вектору $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$



Произведением ненулевого ***вектора*** $\vec{a}$ на ***число m*** называется вектор, имеющий направление вектора $\vec{a}$, если $m > 0$, и противоположное направление, если $m < 0$. Длина этого вектора равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа ***m***.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число ***m*** обозначается ***m*** $\vec{a}$. При любых ***m*** и $\vec{a}$ векторы ***m*** $\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны и $|m\vec{a}| = |m| \cdot |\vec{a}|$.

Углом между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между направлениями этих векторов: $\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right) = \varphi$, где $0 \le \varphi \le 180^\circ$.

Частные случаи:

1) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right) = 0$;

2) если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right) = 180^\circ$.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Даны координаты точек т.А(2;-2;1), т.В(-3;1;4). Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение: $\overrightarrow{AB}$=(-5;3;3) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25+9+9} = \sqrt{43}.$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = (1;-1;2), \vec{b} = (2;3;-1)$. Найти:
1)длины векторов; 2) их сумму и разность; 3) найти вектор $2\vec{a} + 3\vec{b}$;

Решение:

1) $|\vec{a}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6};$ $|\vec{b}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}.$

2) $\vec{a} + \vec{b} = (1;-1;2) + (2;3;-1) = (3;2;1)$; $\vec{a} - \vec{b} = (-1;-4;3).$

3) $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(1;-1;2) + 3(2;3;-1) = (8;7;1).$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

Даны точки: *т. А* (3; -2; 4), *т. В*(4; -1; 2), *т. С(*6;-3; 2*)*, *т.D* (7; -3; 1)*;* *т. Е*(-2; 4; 3) *и* *т.F*(5; -1; 3).

1. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и вычислить их длину;
2. Найти векторы $\vec{m} = 2\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DE}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{DF} + 3\,\overrightarrow{BE}$.

Вариант 2

Даны точки: *т. А* (5; -8; -1), *т.В* (6; -8; -2), *т. С*(7; -5; -11), *т.D* (7; -7; -9), *т. Е*(6; -1; 5) *и* *т.F*(4;-7; 5).

1. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и вычислить их длину;

2.Найти векторы $\vec{m} = 2\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DE}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{DF} + 3\,\overrightarrow{BE}$.

Вариант 3

Даны точки: *т. A* (1; 0; 3), *т.B* (2; -1; 0), *т.C*(0; -6; -5), *т.D* (-8; -5; 1), *т. E*(3; -3; 4) и *т.F*(5; -2; 7).

1. Найти векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ и вычислить их длину;
2. Найти векторы $\vec{m} = 2\vec{AC} - \vec{DE}$ и

Вариант 4

Даны точки: *т. A* (-6; -5; 7), *т.B* (-7; -15; 8), *т. C*(14; -10; 9), *т.D* (4; -1; 7), *т. E*(-5; 9;-7) и *т.F*(-5; 0; 4)

1. Найти векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ и вычислить их длину;
2. Найти векторы $\vec{m} = 2\vec{AC} - \vec{DE}$ и $\vec{n} = \vec{DF} + 3\vec{BE}$.

Практическая работа №9

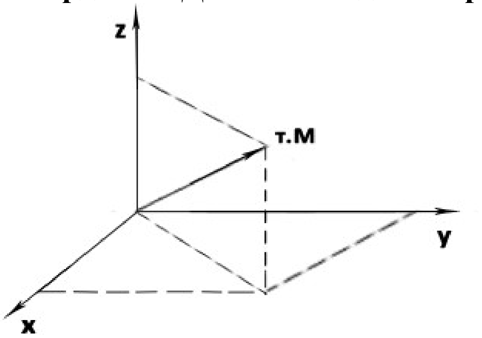
Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Вычисление модуля и скалярного произведения»

Цель работы: научиться вычислять модуль и скалярное произведение.

Краткая теория:

Декартова система координат. Действие над векторами в координатах



Декартову прямоугольную систему координат в пространстве зададим с помощью точки отсчета – т.O и 3-х взаимно перпендикулярных осей OX, OY, OZ – это ось абсцисс, ось ординат и ось аппликат. Выберем на них масштаб, и тогда положение произвольной точки M определяется тройкой чисел – координатами точки в пространстве: т.M*(x;y;z)*. Этой точке поставим в соответствии вектор $\overrightarrow{OM}$, который назовем радиус- вектором, этот вектор будет иметь те же координаты $\overrightarrow{OM}$ *(x;y;z)*.

Введем на осях OX, OУ,OZ единичные векторы: $\vec{I} = (1;0;0)$ $\vec{J} = (0;1;0)$ $\vec{K} = (0;0;1)$

В некоторых учебниках их обозначают $\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3}$. Видим, что они взаимно перпендикулярны (т.к. лежат на координатных осях) и имеют единичную длину: $\vec{I} \perp \vec{J} \perp \vec{K}$; $|\vec{I}| = |\vec{J}| = |\vec{K}| = 1$. Такие векторы называют ***ортами*** и они образуют ***базис*** 3-х-мерного пространства. Т.о., чтобы задать декартову прямоугольную систему координат в пространстве, надо задать начало отсчета т.O и базис. Тогда радиус-вектор OM в базисе $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ раскладывается так

$$\overrightarrow{OM} = (x; y; z) = (x;0;0) + (0; y;0) + (0;0; z) = x(1;0;0) + y(0;1;0) + z(0;0;1) = x\vec{I} + y\vec{J} + z\vec{K}.$$

Пусть в декартовой системе координат заданы векторы

$$\vec{a} = (\acute{r}_1; a_2; \acute{r}_3) \text{ и } \vec{b} = (b_1; b_2; b_3),$$

тогда

суммой векторов называется вектор с координатам

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3); \qquad (1)$$

разностью векторов называется вектор с координатами

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3); \qquad (2)$$

произведение вектора на число *m называется* вектор с координатами

$$m\vec{a}=(m\acute{r}_1;m\acute{r}_2;\check{n}\acute{r}_3) \qquad (3)$$

длина вектора $\vec{a}=(\acute{r}_1;a_2;\acute{r}_3)$ находится по формуле

$$\left|\vec{\acute{r}}\right|=\sqrt{\acute{r}_1^{\,2}+\acute{r}_2^{\,2}+\acute{r}_3^{\,2}} \quad . \qquad (4)$$

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан координатами начала и конца

$$A(x_A;y_A;z_A) \text{ и } B(x_B;y_B;z_B),$$

то его координаты вычисляются по формуле

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;\,z_B-z_A) \qquad (5)$$

а его длина

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\,. \qquad (6)$$

С помощью этой формулы вычисляется также расстояние между двумя точками на плоскости.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное

$$\vec{\acute{r}}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad (7)$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов, с другой стороны, может быть найдено как произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a},\wedge\vec{b}). \qquad (8)$$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:

Угол между векторами $\vec{a}=(\acute{r}_1;a_2;\acute{r}_3)$ и $b=(b_1;b_2;b_3)$ вычисляется по формуле

$$\cos(\vec{a},\wedge\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} \qquad (9)$$

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}=(\acute{r}_1;a_2;\acute{r}_3)$ и $b=(b_1;b_2;b_3)$ имеет вид

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \qquad (10)$$

т.е. если соответствующие координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

Условие перпендикулярности двух векторов вытекает из равенства нулю скалярного произведения, поэтому имеет вид

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1Даны векторы $\vec{a}=(1;-1;2),\vec{b}=(2;3;-1)$. Найти:
найти их скалярное произведение; найти угол между данными векторами.

Решение:

$\vec{a}\vec{b}=(1;-1;2)(2;3;;-1)=2-3-2=-3$

$\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = -\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$, $\varphi = \left(\vec{r}\,\hat{;}\,\vec{b}\right) = \arccos\left(-\dfrac{3}{2\sqrt{21}}\right) \approx 109^0$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

Даны точки: *т. A* (3; -2; 4), *т. B*(4; -1; 2), *т. C(*6;-3; 2)*,* *т.D* (7; -3; 1)*;* *т. E*(-2; 4; 3) *и* *т.F*(5; -1; 3).

1. Вычислить скалярное произведение $\vec{m}\cdot\vec{n}$;
2. Найти углы между векторами $\vec{BD}$ *и* $\vec{AF}$; $\vec{CE}$ *и* $\vec{FB}$;
3. Найти расстояние между серединами отрезков $[CF]$ и $[ED]$;
4. При каком ***k*** векторы $\vec{a}(-3;\ 1;\ k)$ и $\vec{BF}$ перпендикулярны?
6. При каком ***t*** векторы $\vec{b} = (-6;\ t;\ 4)$ и $\vec{CA}$ коллинеарны?

Вариант 2

Даны точки: *т. A* (5; -8; -1), *т.B* (6; -8; -2), *т. C*(7; -5; -11), *т.D* (7; -7; -9), *т. E*(6; -1; 5) *и* *т.F*(4;-7; 5).

1. Вычислите скалярное произведение $\vec{m}\cdot\vec{n}$;
2. Найти углы между векторами $\vec{BD}$ *и* $\vec{AF}$; $\vec{CE}$ *и* $\vec{FB}$;
3. Найти расстояние между серединами отрезков $[CF]$ и $[ED]$;
4. При каком ***k*** векторы $\vec{a}(6;\ k;\ -4)$ и $\vec{BF}$ перпендикулярны?
5. При каком ***t*** векторы $\vec{b} = (-6;\ -9;\ t)$ и $\vec{CA}$ коллинеарны?

Вариант 3

Даны точки: *т. A* (1; 0; 3)*, т.B* (2; -1; 0), *т.C*(0; -6; -5), *т.D* (-8; -5; 1), *т. E*(3; -3; 4) и *т.F*(5; -2; 7).

1. Вычислить скалярное произведение $\vec{m}\cdot\vec{n}$;
2. Найти углы между векторами $\vec{BD}$ *и* $\vec{AF}$; $\vec{CE}$ *и* $\vec{FB}$;
3. Найти расстояние между серединами отрезков $[CF]$ и $[ED]$;
4. При каком ***k*** векторы $\vec{a}(k;\ 4\ -8\ )$ и $\vec{BF}$ перпендикулярны?
5. При каком ***t*** векторы $\vec{b} = (3;\ t;\ 24)$ и $\vec{CA}$ коллинеарны?;

Практическая работа №10

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии
«Составление уравнений прямых на плоскости.

Цель работы: научиться составлять уравнения прямой на плоскости.

Краткая теория:

Общее уравнение прямой

Если на плоскости произвольно взята декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно текущих координат *x* и *y*

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

где A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую в этой системе координат.

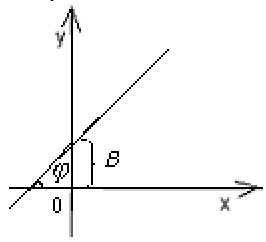
Верно и обратное утверждение: в декартовой системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени вида (1). Уравнение (1) называется ***общим уравнением прямой.***

Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой

Углом наклона прямой к оси Ox называется наименьший угол φ, на который нужно повернуть в положительном направлении ось абсцисс до её совпадения с данной прямой. Направление любой прямой характеризуется её ***угловым коэффициентом k,*** который определяется как тангенс угла наклона φ этой прямой к оси *Ox,* т.е. $k=\operatorname{tg}\varphi$. Исключения составляет лишь прямая, перпендикулярная оси *Ox,* которая не имеет углового коэффициента.

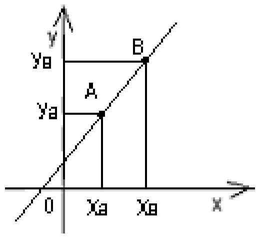
Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и пересекающий ось *Oy в* точке, ордината которой равна b (начальная ордината), записывается в виде

$$y=kx+b. \qquad (2)$$



Угловой коэффициент k прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$, находится как коэффициент k прямой, заданной двумя точками $A(x_a;\ y_a)$ и $B(x_B;y_B)$, вычисляется по формуле

$$k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \qquad (3)$$



Уравнение прямой в отрезках

Уравнением прямой в отрезках называется уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (4)$$

где a и b – абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями *Ox* и *Oy*, т.е. длины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях, взятые с соответствующими знаками.

Уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении

Уравнение прямой, проходящей через т.у $A(x_a;\ y_a)$ и имеющей угловой коэффициент $k,$ записывается в виде

$$y-y_a=k\,(x-x_a). \qquad (5)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Если прямая проходит через две точки т. $A\ (x_1;\ y_1)$ и т.$B\ (x_2;\ y_2)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (6)$$

Нормальное уравнение прямой

Пусть дана прямая C, проходящая через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$ и перпендикулярная вектору $\overline{n}$ (A;B). Любой вектор $\overline{n} \neq \overline{o}$, перпендикулярный данной прямой ℓ, называется ее ***нормальным вектором.*** Выберем на прямой произвольную т. М*(x;y).* Тогда $\overline{n} \perp \overline{M_0M}$, а значит их скалярное произведение $\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Это равенство можно записать в координатах

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0 \qquad (7)$$

Параметрическое и каноническое уравнения прямой

Пусть прямая l задана начальной точкой M_0 $(x_0; y_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}$ $(a_1;a_2)$,. Пусть т. $M(x ; y)$ – любая точка, лежащая на прямой l. Тогда вектор $\cdot\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$. Следовательно, $\cdot\overline{M_0M} = t\vec{a}$. Записывая это уравнение в координатах, получаем параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \qquad (8)$$

Исключим параметр t из уравнения (9). Это возможно, так как вектор $\overline{a} \neq 0$, и потому хотя бы одна из его координат отлична от нуля. Пусть $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, тогда $t = \dfrac{x-x_0}{a_1}$,

$t = \dfrac{y-y_0}{a_2}$ и, следовательно, $\dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{y-y_0}{a_2}$. (9)

Уравнение (9) называется ***каноническим уравнением прямой*** с направляющим вектором $\vec{a}$ $=(a_1; a_2)$.

Если $a_1=0$ и $a_2 \neq 0$, то уравнения (8) примут вид

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}.$$

Этими уравнениями задается прямая, параллельная оси *Oy* и проходящая через точку M_0 $(x_0; y_0)$. Каноническое уравнение такой прямой имеет вид

$$x=x_0 \qquad (10)$$

Если $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, то уравнения (8) примут вид

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 \end{cases}$$

Этими уравнениями задается прямая, параллельная оси О*x* и проходящая через точку M_0 $(x_0; y_0)$. Каноническое уравнение такой прямой имеет вид

$$y=y_0 \qquad (11)$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Составить уравнение прямой, которая отсекает на отрицательной полуплоскости *Oy* отрезок, равный 2 единицам, и образует с осью *Ox* угол φ =30˚.

Решение: Прямая пересекает ось *Oy* в точке *B* (0;–2) и имеет угловой коэффициент *k*=tg φ= $=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Полагая в уравнении (2) $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и b = –2, получим искомое уравнение $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 2,$ или $\sqrt{3}x - 3y - 6 = 0$.

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точки *A* (–1; 2) и *B* (0;–3). (У*казание*: угловой коэффициент прямой находится по формуле (3))

Решение: $\kappa = \dfrac{-3-2}{0-(-1)} = -5$. Отсюда имеем $y = -5x - b$. Подставив в это уравнение координаты *т.B,* получим: $-3 = -5 \cdot 0 + в$, т.е. начальная ордината $b = -3$. Тогда получим уравнение $y = -5x - 3$.

Пример 3. Общее уравнение прямой 2*x* – 3*y* – 6 = 0 привести к уравнению в отрезках.

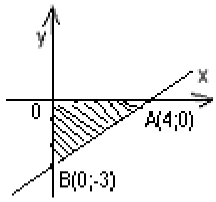
Решение: запишем данное уравнение в виде $2x - 3y=6$ и разделим обе его части на свободный член: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$. Это и есть уравнение данной прямой в отрезках.

Пример 4. Через точку A (1;2) провести прямую, отсекающую на положительных полуосях координат равные отрезки.

Решение: Пусть уравнение искомой прямой имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ По условию $a=b$. Следова-тельно, уравнение принимает вид $x + y = a$. Так как точка А (1; 2) принадлежит этой прямой, значит ее координаты удовлетворяют уравнению $x + y = a$; т.е. $1 + 2 = a$, откуда $a = 3$. Итак, искомое уравнение записывается следующим образом: $x + y = 3$, или $x + y - 3 = 0$.

Пример 5. Для прямой $y=\frac{3}{4}x-3$ написать уравнение в отрезках. Вычислить площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

Решение: Преобразуем данное уравнение следующим образом: $\frac{3}{4}x-y=3$, или $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$. В результате получим уравнение $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$, которое и является уравнением данной прямой в отрезках. Треугольник, образованный данной прямой и осями координат, является прямоугольным треугольником с катетами, равными 4 и 3, поэтому его площадь равна S = $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$ *(кв. ед.)*



Задания для практической работы

Вариант 1

1. Привести общее уравнение прямой 2x+3y-6=0 к уравнению в отрезках и вычислить площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от соответствующего координатного угла;
2. В ΔАВС вершины имеют координаты точки А (-3;4), точки В (-4;-3), точки С (8;1). Составить уравнения стороны (АВ), высоты (ВК) и медианы (СМ);

Вариант 2

1. Привести общее уравнение прямой 3x-4y+12=0 к уравнению в отрезках и вычислить длину отрезка, который отсекается от этой прямой соответствующим координатным углом;
2. В ΔАВС вершины имеют координаты точки А (4;2), точки В (1;5), точки С (-2;6). Составить уравнения стороны (АВ), высоты (ВК) и медианы (СМ);
3. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0 (3;-4) и параллельной вектору $\overline{a}$ (-7;5);

Вариант 3

1. Привести общее уравнение прямой 4x-5y+20=0 к уравнению в отрезках и вычислить площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от соответствующего координатного угла;
2. В ΔАВС вершины имеют координаты точки А (3;-2), точки В (7;3), точки С (0;8). Составить уравнения стороны (АВ), высоты (ВК) и медианы (СМ);

3. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0 (-1;-2) и параллельной вектору $\overline{a}$ (3;-5);

Вариант 4

1. Привести общее уравнение прямой 12x-5y+60=0 к уравнению в отрезках и вычислить длину отрезка, который отсекается от этой прямой соответствующим координатным углом;

2. В ΔABC вершины имеют координаты точки A (0;-2), точки B (3;6), точки C (1;-4). Составить уравнения стороны (AB), высоты (BK) и медианы (CM);

1. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0(4;4) и параллельной вектору $\overline{a}$ (-2;7);

Практическая работа №11

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Определение взаимного расположения прямых.

Цель работы: определять взаимное расположение 2-х прямых.

Краткая теория.

Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть даны две прямые, заданные общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Тогда угол φ между ними определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (12)$$

Условие параллельности 2-х прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad (13)$$

Условие перпендикулярности 2-х прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad (14)$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1 \;\; и \;\; y = k_2x + b$

то угол φ между ними вычисляется по формулам

$$cos\varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{k_2^{\,2} + 1}} \qquad \text{или} \qquad tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \qquad (15)$$

Условие параллельности в этом случае имеет вид:

$$k_1 = k_2 \qquad (16)$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad (17)$$

Если две прямые заданы каноническими уравнениями: $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2}$ и $\frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2}$

то угол φ между этими прямыми определяется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \qquad (18)$$

Условие параллельности прямых:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \qquad (19)$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \qquad (20)$$

Расстояние от точки до прямой

Расстояние d от точки $M(x_1;\, y_1)$ до прямой $Ax+By+C=0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (21)$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить угол между прямыми $2x + 3y - 7 = 0$ и $3x - 7y + 4 = 0$.

Решение: $cos\ \varphi = \dfrac{|2\cdot 3 + 3\cdot(-7)|}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{3^2+(-7)^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{13}\sqrt{58}} = 0{,}546$; $\quad \varphi = \arccos 0{,}546 \approx 57^0$.

Пример 2. Выяснить взаимное расположение прямых:

$ŕ)\ 4ő - 5ó + 3 = 0 \quad č \quad 5ő + 4ó + 11 = 0; \quad á)\ -3ő - 7ó + 6 = 0 \quad č \quad 9ő + 21ó - 1 + 0$

Решение: а) $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{4}{5} \neq \dfrac{-5}{4} = \dfrac{B_1}{B_2}$ – *значит, прямые не параллельны*;

б) $A_1A_2 + B_1B_2 = 4\cdot 5 + (-5)\cdot 4 = 0$ – *значит, прямые перпендикулярны.*

Пример 3. Вычислить угол между прямыми $y = 2x - 3$ *и* $y = \dfrac{5}{7}x + 4$

Решение: $\kappa_1 = 2$ *и* $\kappa_2 = \dfrac{5}{7}$

$$cos\varphi = \frac{\left|2\cdot\frac{5}{7}+1\right|}{\sqrt{2^2+1}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{7}\right)^2+1}} = \frac{\frac{17}{7}}{\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{74}}{7}} = \frac{17}{\sqrt{5\cdot 74}} = 0{,}883; \quad \varphi = \arccos 0{,}883 \approx 28^0.$$

Пример 3. Выяснить взаимное расположение прямых:

$ŕ)\ ó = 4ő - 3 \quad č \quad ó = 4ő + 10; \quad á)\ ó = \dfrac{1}{2}ő + 7 \quad č \quad ó = -2ő + 9$

Решение:

а) $k_1 = k_2 = 4$ – *значит, прямые параллельны*

б) $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{1}{2}\cdot(-2) = -1$ – *значит, прямые перпендикулярны*

Пример 4. Найти угол между прямыми $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+2}{7}$ и $\dfrac{x+3}{6} = \dfrac{y-8}{11}$.

Решение: $\cos\varphi = \dfrac{|5\cdot 6 + 7\cdot 11|}{\sqrt{5^2+7^2}\cdot\sqrt{6^2+11^2}} = \dfrac{101}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{157}} = 0{,}937; \quad \varphi = \arccos 0{,}937 \approx 20^0$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0 (-2;4) и параллельной вектору $\overline{a}$ (6;-1);

2. Определить взаимное расположение 2-х прямых 2x – 5y – 20 = 0 и 5x + 2y – 10 = 0;

3. Вычислить расстояние от середины отрезка АВ до прямой $12x - 5y + 1 = 0$, если известны координаты концов отрезка т.А(1; 6) и т.В(9; 8).

Вариант 2

1. Вычислить угол между прямыми:

а) 2x - 3y + 7 = 0 и 3x - y + 5 = 0 ; б) $y = \frac{3}{4}x - 5$ и y = 2x – 4;

2.Определить взаимное расположение 2-х прямых: $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{4}$ и $\frac{x-15}{-4} = \frac{y+6}{5}$;

3. Вычислить расстояние от середины отрезка АВ до прямой $7x + 24y - 5 = 0$, если известны координаты концов отрезка т.А(18;8), т.В(-2; -6).

Вариант 3

1. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точку M_0 (-1;-2) и параллельной вектору $\overline{a}$ (3;-5);

3. Вычислить угол между прямыми

а) 3x + y - 7 = 0 и x - y + 4 = 0; б) $\frac{x-6}{1} = \frac{y}{3}$ и $\frac{x-3}{3} = \frac{y-6}{1}$;

3. Определить взаимное расположение 2-х прямых $y = -\frac{1}{5}x + 8$ и y = 5x + 3;

Практическая работа №12

Цель работы: закрепление теоретического материала

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Контрольные вопросы

1. Дайте определение вектора. Что такое длина вектора?
2. Какие действия можно производить над векторами, какими свойствами они обладают?
3. Перечислите формулы суммы, разности, умножения вектора на число в координатах.
4. Как найти скалярное произведение двух векторов?
2. Что называется углом между двумя векторами в пространстве?
3. Чему равно скалярное произведение двух ортогональных векторов?

Назовите уравнения прямой на плоскости, когда известны точка, через которую она проходит и ее направляющий вектор.

Какой вид имеет нормальное, общее уравнения прямой на плоскости;

Назовите уравнение прямой, проходящей через две точки, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой с угловым коэффициентом;

Перечислите формулы для вычисления угла между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

Как найти расстояние от точки до прямой?

Практическая работа №13

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

«Решение задач на кривые второго порядка»

Цель работы: научиться решать задачи на кривые второго порядка: эллипс, гиперболу и параболу.

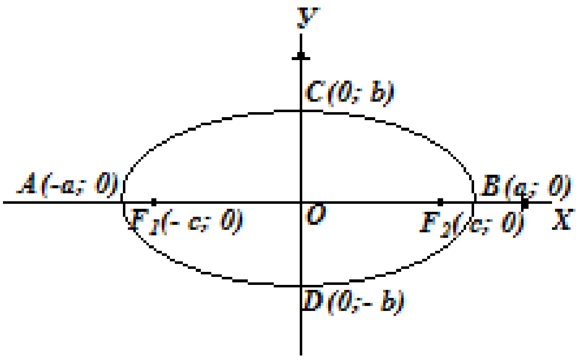
Краткая теория:

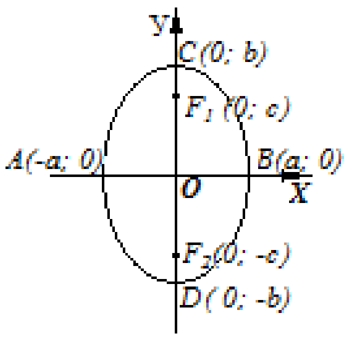
Эллипс есть множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых ***фокусами*** эллипса, есть величина постоянная (равная 2*a*), большая, чем расстояние между фокусами (равное 2*c*).

Простейшее уравнение эллипса получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось *Ox* принять прямую, проходящую через фокусы F_1 и F_2, а за ось *Oy* – перпендикуляр к оси абсцисс в середине отрезка $[F_1F_2]$. Тогда уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{где } b^2 = a^2 - c^2 \qquad (1)$$

Точки A и B, C и D пересечения эллипса с его осями симметрии (координатными осями) называются ***вершинами*** эллипса. Отрезки $[AB]$ – ***большой осью***, а $[CD]$ – ***малой осью***, так как $a > b$. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение эллипса, равны его полуосям.





Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к его большой оси, т.е.

$$e=\frac{c}{a} \qquad (2)$$

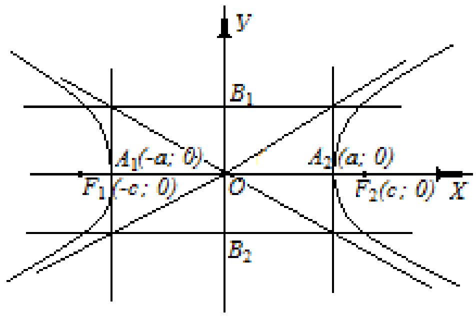
Очевидно, что $e < 1$.

Если эллипс, определяемый уравнением вида (1), расположен так, что его фокусы лежат на оси Oy, то тогда $b> a$ и большой осью служит отрезок $[B_1B_2]$ длиной $2b$, а малой осью – отрезок $[A_1A_2]$ длиной $2a$. Эксцентриситет такого эллипса вычисляется по формуле

$$e=\frac{c}{b}, \quad \text{где } c=\sqrt{b^2-a^2} \qquad (3)$$

Гиперболой называется множество точек, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная *(2a),* меньшая, чем расстояние между фокусами *(2c).*

Простейшее уравнение гиперболы получается, если расположить координатную систему следующим образом: за ось OX принять прямую, проходящую через фокусы F_1 *и* F_2, за ось OY – перпендикуляр в середине отрезка $[F_1F_2]$



Тогда уравнение гиперболы примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{где } b^2 = c^2 - a^2 \qquad (4)$$

Гипербола имеет две оси симметрии (координатные оси), с одной из которых (осью абсцисс) она пересекается в двух точках A_1 и A_2, называемых *вершинами* гиперболы. Отрезок $[A_1A_2]$ длиной $2a$ называется ***действительной осью*** гиперболы, а отрезок $[B_1B_2]$ длиной $2b$ – ***мнимой осью*** гиперболы. Таким образом, параметры a и b, входящие в уравнение гиперболы, равны её полуосям.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к её действительной оси:

$$e = \frac{c}{a} \qquad (5)$$

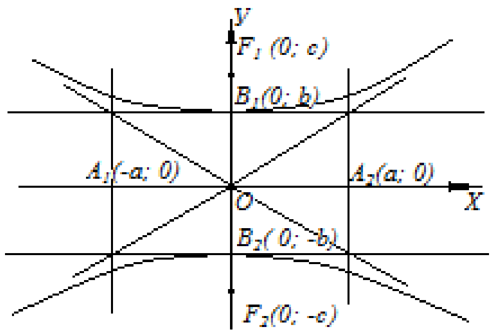
Очевидно, что $e > 1$.

Гипербола имеет две ***асимптоты,*** уравнения которых

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x \qquad (6)$$

Если мнимая ось гиперболы направлена по оси OX и имеет длину $2a$, а действительная ось длиной $2b$ направлена по оси OY, то уравнение гиперболы имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7)$$



Эксцентриситет такой гиперболы вычисляется по формуле

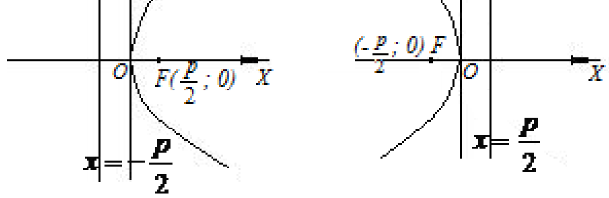
$$e = \frac{c}{b} \qquad (8)$$

Её асимптоты те же, что и у гиперболы (4). Гиперболы (4) и (7) называются ***сопряжёнными.*** Гипербола называется ***равносторонней,*** если её действительная и мнимая оси равны, т.е.
$a = b$. Простейшие уравнение равносторонней гиперболы имеет вид

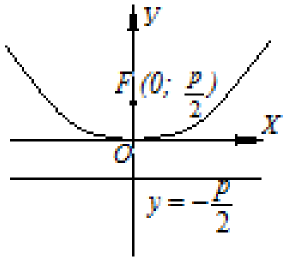
$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (9)$$

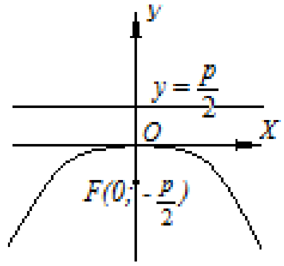
Параболой называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой*** параболы.

Величина p, равная расстоянию от фокуса до директрисы, называется ***параметром*** параболы. Прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно её директрисе, называется ***осью,*** а точка пересечения параболы с её осью – ***вершиной*** параболы. Простейшее уравнение параболы получается, если координатная система расположена следующим образом: за одну из координатных осей берётся ось параболы, а за другую – прямая, перпендикулярная оси параболы и проведённая посредине между фокусом и директрисой. Тогда уравнение параболы примет вид:



$$y^2 = 2px \qquad (10) \qquad\qquad y^2 = -2px \qquad (11)$$





$x^2 = 2py$ (12) $x^2 = -2py$ (13)

Уравнение

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \qquad (14)$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси абсцисс.

Аналогично, уравнение

$$x = my^2 + ny + p \quad (m \neq 0) \qquad (15)$$

определяет параболу, ось которой перпендикулярна оси ординат. Уравнения (14) и (15) приводятся к простейшему виду (10) – (13) путём тождественных преобразований с последующим переносом координатной системы.

Примеры по выполнению практической работы:

Пример 1. Найти оси, вершины, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0.$$

Решение: Приведём данное уравнение к простейшему виду (1), для чего свободный член перенесём вправо и разделим на него все члены уравнения. В результате получим

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), имеем $a = 5$, $b = 3$. Отсюда находим оси эллипса $2a = 10$, $2b = 6$ и координаты вершин $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$. Далее, находим $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Следовательно, фокусами эллипса служат точки F_1 (-4; 0) и F_2 (4; 0). Эксцентриситет эллипса вычисляем по формуле (2): $e = {}^{c}\!/_{a} = {}^{4}\!/_{5}$.

Пример 2. Найти оси, вершины, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.

Решение: Перенесём свободный член вправо и разделим на него все члены данного уравнения. В результате получим простейшее уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4), имеем $a = 3$, $b = 4$. Таким образом, действительная ось гиперболы $2a = 6$, а мнимая ось $2b = 8$; координаты вершин A_1 (–3; 0) и A_2 (3; 0). Далее, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$, следовательно, фокусами гиперболы служат точки F_1(–5; 0) и F_2(5; 0). Эксцентриситет гиперболы вычисляем по формуле (5): $e = c/a = 5/3$. Наконец, подставляя значения $a = 3$, $b = 4$ в формулы (6), получим уравнения асимптот гиперболы $y = \frac{4x}{3}$ и $y = -\frac{4x}{3}$.

Пример 3. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом в точке $F\,(0; -8)$.

Решение: Фокус параболы лежит на оси ординат, а вершина – в начале координат, поэтому уравнение параболы можно записать либо в виде $x^2 = 2py$, либо в виде $x^2 =- 2py$. Далее, поскольку ордината фокуса отрицательна, уравнение параболы следует искать в виде $x^2= -2py$. Из координаты фокуса параболы имеем $p / 2 = 8$, откуда $p=16$ и $2p = 32$, и окончательно получаем $x^2 = -32y$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Составить уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты (0; 3) и (6; -7);

2.Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси ОХ, если расстояние между фокусами равно 20, а эксцентриситет $e = 5/6$;

3.Дана гипербола $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{63} = 1$. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет, асимптоты этой гиперболы;

4.Парабола задана уравнением $y^2 = 14x$. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;

5. Составить уравнение окружности, центр которой лежит в фокусе параболы $y^2 = -8x$, а радиус равен действительной оси эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

Вариант 2

1. Составить уравнение окружности, концы диаметра которой имеют координаты (-2; 3) и (2; 5);

2.Уравнение эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса;

3.Дана гипербола $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{256} = 1$. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет асимптоты этой гиперболы;

4. Парабола задана уравнением y^2 = -5x. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;

5. Составить уравнение параболы, вершина которой лежит в начале координат, а фокус совпадает с центром окружности $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$;

Вариант 3

1. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-1; 4) и проходящей через точку (3; 5);

2.Уравнение эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Найти расстояние между фокусами и эксцентриситет эллипса.

3.Составить уравнение гиперболы, если длина её действительной оси равна 12, а эксцентриситет равен $\frac{4}{3}$. Найти её фокусное расстояние и асимптоты;

4. Парабола задана уравнением $y^2 = 6x$. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;

5. Составить уравнение окружности с центром в точке (-3; 8), диаметр которой равен фокусному расстоянию эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$;

Вариант 4

1. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-3; 04) и проходящей через точку (2; 4);

2.Составьте уравнение эллипса с фокусами на оси ОХ, если расстояние между фокусами равно 12, а эксцентриситет $e = \frac{1}{3}$.

3. Найдите вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$.

4. Парабола задана уравнением $y^2 = -4x$. Указать координаты фокуса параболы и уравнение её директрисы;

5. Составит уравнение гиперболы, фокусы которой совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, а эксцентриситет равен $\frac{4}{3}$.

Практическая работа №14

Раздел 3. Основы математического анализа

«Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей»

Цель работы: Научиться вычислять пределы функции, раскрывать неопределенности при вычислении пределов.

Краткая теория:

Пусть функция *f(x)* определена в некоторой окрестности точки *a,* кроме, быть может, самой точки *a.* Число *B* называется ***пределом функции** f(x)* ***в точке*** *a* (или при *x*, стремящемся к *a*), если для любой последовательности значений аргумента $x_n \neq a$, сходящейся к *a*, последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in N$ сходится к числу *B*.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ или $f(x) \to B$ при $x \to a$.

Короче, $B = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = B$ для любой последовательности $x_n \neq a$, $n \in N$, сходящейся к *a,* т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Теорема 1: Функция не может иметь двух разных пределов в точке.

Теорема 2: Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют: $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

Теорема 3: Предел произведения функций равен произведению их пределов, если последние существуют: $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \to a}(cf(x)) = c \lim_{x \to a} f(x),$$

Теорема 4: Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел делителя отличен от нуля:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)},$$

Пусть функция *f(x)* определена на всей числовой прямой. Число *B* называется ***пределом функции f(x) при $x \to +\infty$***, если $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = B$ для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = B$. Аналогично, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = C$, если $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = C$ для любой последовательности (x_n) такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$ В ряде случаев поведение функции *f(x)* разное при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Например, для функции $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1}$, определенной для всех $x \neq 1$, имеем $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1} = -3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x-1} = 3$.

Поэтому при исследовании свойств функций рассматривают как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, так и $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)$.

Сформулируем определение ***бесконечного предела функции***: если для любой последовательности значений аргумента *(x_n)* такой, что $x_n \neq a$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, то говорят, что предел функции *f(x)* в точке *a* есть бесконечность, и пишут $\lim\limits_{ч\to a} f(x)=\infty$.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то функция *f(x)* называется ***бесконечно большой при x→a***. Если же $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то функция *f(x)* называется ***бесконечно малой при x→a***. Аналогично определяются бесконечно большие и бесконечно малые функции при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

Заметим, что имеет место следующее утверждение: если функция *f(x)* – бесконечно малая при $x\to a$ и $f(x)\neq 0$ для $x\neq a$ из некоторой окрестности точки *a,* то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая при $x\to a$. Верно и обратное утверждение: если функция *f(x)* – бесконечно большая при $x\to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая при $x\to a$.

Примеры по выполнению практической работы

1) ***Предел многочлена.***

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3+2x^2-3x+7)$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}(5x^3+2x^2-3x+7)=\lim_{x\to 2}\left(5x^3\right)+\lim_{x\to 2}\left(2x^2\right)-\lim_{x\to 2}3x+\lim_{x\to 2}7=5\lim_{x\to 2}x^3+2\lim_{x\to 2}x^2-3\lim_{x\to 2}x+7=$$

$$=5\left(\lim_{x\to 2}x\right)^3+2\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\lim_{x\to 2}x+7=5\cdot 2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+7=49$$

Т.о. для вычисления предела многочлена *f (x)* при $x\to a$ достаточно вместо переменной *x* поставить значение *a*, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

2) ***Предел отношения двух многочленов***, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *где a– число*.

а) Если $g(a)\neq 0$, то можно применить теорему о пределе частного.

Пример 2. Пусть требуется вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}.=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}$

Решение: $f(x)=x^3-2x-3$ и $g(x)=x^2+3x+3$. Так как $g(3)=3^2+3\cdot 3+3=21\neq 0$. то имеем: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-2x-3\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3x+3\right)}=\dfrac{18}{21}=\dfrac{6}{7}$

б) Если $g(a)=0$, то теорему о пределе частного применить нельзя. Тогда если $f(a)=A\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$, если же $f(a)=0$ – имеем неопределённость вида (0/0). В этом случае предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно вычислить разложением многочленов *f(x)* и *g(x)* на множители.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$.

Решение: здесь $f(2)=2^2-5\cdot 2+6=0$, $g(2)=2^2-6\cdot 2+8=0$. Так как $x\neq 2$, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-4}=\frac{1}{2}.$$

3) *Предел отношения многочленов* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *при* $x\to\infty$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$.

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(4-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{8}{x^3}\right)}=\frac{3-0+0+0}{4-0-0+0}=\frac{3}{4}.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}=0.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^5}\right)}{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\infty.$

4) *Пределы некоторых иррациональных функций*. Для вычисления $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$, где $f(x)\geq 0$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, воспользуемся равенством $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(a)}$, которое принимается нами без доказательства.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{2x^2-3x+4}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{2x^2-3x+4}=\sqrt{2(-1)^2-3(-1)+4}=\sqrt{9}=3$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{3x^2-x+4}-2\right)=0$, то теорему о пределе частного применить нельзя. Имеем неопределённость вида (0/0). Умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{\left(3x^2-x+4\right)-2^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{3x^2-x+4}+2\right)}{3x-1}$$

Пр

$$=\frac{2\left(\sqrt{3\cdot 0-0+4}+2\right)}{3\cdot 0-1}=-8$$

имер 9. Найти предел $\lim\limits_{ч\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$. Данный пример демонстрирует технику раскрытия неопределенности вида (∞-∞).

$$\lim_{ч\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{ч\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{ч\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{ч\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

5) *Применение замечательных пределов*

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

Пользуясь этими формулами, можно вычислить ряд пределов.

Пример 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$

Решение:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}$, заменяя $3x=y$ и учитывая, что $y\to0$ при $x\to0$, получаем: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot1=3$.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg5x}{\sin 3x}$.

Решение:

$$\lim_{x\to0}\frac{tg5x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin5x}{\cos5x}\cdot\frac{1}{\sin3x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\cos5x}\cdot\frac{5\sin5x}{5x}\cdot\frac{3x}{3\sin3x}\right)=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\cos5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot1\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3}$$

Здесь мы воспользовались известным пределом $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$.

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5x}$

Решение: $$\lim_{x\to\infty}(1+3/2x)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(2x/3\right)}\right)^{2x/3\cdot3/2\cdot5}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(2x/3\right)}\right)^{\left(2x/3\right)}\right)^{15/2}$$

Заменяя $\frac{2x}{3}=y$ и учитывая, что $y\to\infty$ при $x\to\infty$, можем написать

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+3/2x\right)^{5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(2x/3\right)}\right)^{\left(2x/3\right)}\right)^{15/2}=\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{15/2}=e^{15/2}.$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить пределы функций в точке: а) $\lim\limits_{x\to2}(3x^3+2x^2-7x+1)$;

б) $\lim\limits_{x\to11}\frac{x^2-121}{x-11}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-3x}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^3-5x+2}{6x^2+5x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-7})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} xctg2x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{\cos 5x-\cos 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{3x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}$

Вариант 2

1. Вычислить пределы функций в точке: а) $\lim\limits_{x\to -3}(5x^3-4x^2+6x+2)$;

б) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{x-8}$; г) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x-6}{x^2+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x^3}{x^2-6x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{5+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{2x}$.

Вариант 3

1. Вычислить пределы функций в точке: а) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+6x^2-12x+4)$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{\sqrt{x+31}-6}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{5x-1+2x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+x^3}{3x^3+2x^4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+x^3-6}{1+4x-2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{4x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{6x}\right)^x$;

Вариант 4

1. Вычислить пределы функций в точке: а) $\lim\limits_{x\to 5}(x^3-4x^2+8x-18)$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2-49}{x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x+7}{\sqrt{x+32}-5}$;

2. Вычислить пределы функций на бесконечности:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x-1}{6-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x^3}{x^3-12x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-4x+9}{4-2x+x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$;

3. Вычислить, используя замечательные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} ctg3x\cdot\sin 4x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 3x+\sin 7x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{5x}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{4x}$;

Практическая работа № 15

Раздел 3. Основы математического анализа

«Дифференцирование сложной функции»

Цель работы: научиться вычислять производные сложных функций

Краткая теория:

Пусть функция *f (x)* определена в некоторой окрестности точки x_0. ***Производной функции f (x) в точке*** x_0 называется отношение приращения функции $\Delta f\ (x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует, и обозначается $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (1)$$

Производную функции $y = f\ (x)$, $x \in (a;b)$ в точке *x* обозначают $f'(x)$, $y'(x)$, $\dfrac{df}{dx}$ $\dfrac{dy}{dx}$, причём все эти обозначения равноправны. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием функции.*** Функция, имеющая производную в точке x_0, называется ***дифференцируемой в этой точке.*** Функция, имеющая производную в каждой точке интервала *(a;b)*, называется ***дифференцируемой на этом интервале*****;** при этом производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию на *(a ;b)*.

Таблица производных элементарных функций

1. $C' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$,
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9. $(arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(arcctg\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
11. $(a^x)' = a^x \ln a$
12. $(e^x)' = e^x$
13. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
14. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Правила дифференцирования

На практике применяют следующие правила дифференцирования

1. $(u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x$,
2. $(uv)'_x = u'_x v + v'_x u$, $\qquad (Cu)'_x = Cu'_x$;
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'_x = \dfrac{u'_x v - v'_x u}{v^2}$,

где u и υ обозначают дифференцируемые функции переменной x, C - константа.

Дифференцирование сложной функции

Теорема. Пусть дана сложная функция $y = g(u)$, где $u = f(x)$. Если функция $u = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, а функция $y = g(u)$ определена на множестве значений функции $f(x)$ и дифференцируема в точке $u_0 = f(x_0)$, то сложная функция $y = g(f(x))$ в данной точке x_0 имеет производную, которая находится по формуле

$$y'_x(x_0) = g'(u_0) \cdot f'(x_0) \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. **Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = (x^3 - 5x + 7)^9$.**

Решение:

$$f'(x) = ((x^3 - 5x + 7)^9)' = \left|\ \text{обозначим за } z = x^3 - 5x + 7\ \right| = (z^9)'_z \cdot z'_x = 9z^8 \cdot (3x^2 - 5) = 9(x^3 - 5x + 7)^8 \cdot (3x^2 - 5).$$

.

Пример 2. **Вычислить $f'(x)$, если $f(x) = \sqrt[3]{(5 + 3x - 2x^2)^2}$.**

Решение:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{(5 + 3x - 2x^2)^2})' = \left|\ t = 5 + 3x - 2x^2 \right| = (t^{\frac{2}{3}})'_t \cdot t'_x = \frac{2}{3} \cdot t^{-\frac{1}{3}} \cdot (5 + 3x - 2x^2)'_x =$$

$$= \frac{2(3 - 4x)}{3\sqrt[3]{5 + 3x - 2x^2}}.$$

Пример3.Вычислить $f'(x)$, если 1) $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$;
2) $f(x) = (\ln(\arccos x^2))$;

Решение:

1) $$f'(x) = \left(\sqrt{\arcsin x}\right)' = \left|\ t = \arcsin x\ \right| = \left(\sqrt{t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{(1 - x^2)\arcsin x}};$$

2) данная функция является суперпозицией трех функций, поэтому имеем

$$f'(x) = \left(\ln(\arccos(x^2))\right)' = \left|\ \text{положим } t = \arccos x^2\ \right| = \left(\ln t\right)'_t \cdot \left(\arccos x^2\right)'_x =$$

$$= \left|\ \text{положим } z = x^2\ \right| = \frac{1}{t} \cdot \left(\arccos z\right)'_z \cdot z'_x = \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\right) \cdot 2x = -\frac{2x}{\arccos x^2\ \sqrt{1 - x^4}}$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y = (7x^2 - 5x + 9)^6$; 2) $y = \sqrt{5\sin x - 8\cos x}$; 3) $y = 2^{x^2 - 5x + 2}$;

4) $y = \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$; 5) $y = \arcsin x^2$ 6) $y = arctg\sqrt{x}$;

2. Вычислить $f'(\sqrt{2})$, если $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{x}$;

3. Вычислить $f'(2\sqrt{2})$, если $f(x) = \dfrac{9x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Вариант 2

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=(2x^3-4x+5)^4$; 2) $y=\ln(2\cos x-9\sin x)$; 3) $y=7^{5tgx+3}$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ 5) $y=(\arcsin x)^2$; 6) $y=\sqrt{arctgx}$;

2. Вычислить $f'(\frac{1}{3})$, если $f(x)=\arccos\sqrt{x}$;

3. Найти $f'(\sqrt{3})$, если $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

Вариант 3

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=(4x^3+2x^2+1)^5$; 2) $y=\cos(1-7x+4x^2)$; 3) $y=3^{6\sin x+\cos x}$

4) $y=\ln\dfrac{x}{5+x}$; 5) $y=\arccos\sqrt{x}$; 6) $y=arcctgx^3$;

2. Вычислить $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x)=\sqrt{arctgx}$;

3. Найти $f'(\sqrt{3})$, если $f(x)=(x^2-2)\sqrt{x^2+1}$.

Вариант 4

1. Вычислить производные следующих функций:

1) $y=(2+3x-8x^2)^7$; 2) $y=\ln ctgx$; 3) $y=e^{6\arcsin x-2}$;

4) $y=\sqrt{\dfrac{x}{7+x}}$ 5) $y=arctg\dfrac{1}{x}$; 6) $y=2\arcsin x^3$;

2. Вычислить $f'(1)$, если $f(x)=\sqrt{\arccos x}$;

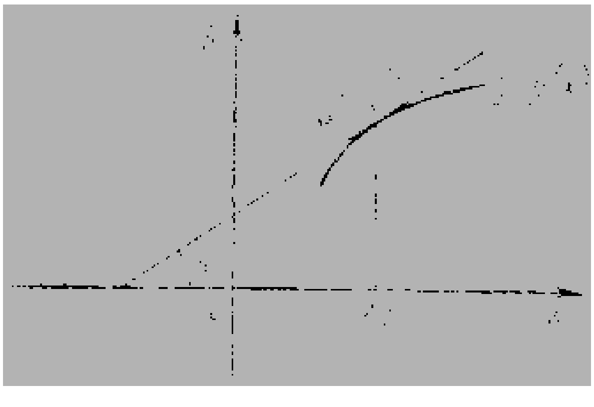
3. Найти $f'(\sqrt{2})$, если $f(x)=(x^2+3)\sqrt{x^2-1}$.

Практическая работа №16

Раздел 3. Основы математического анализа
«Геометрический и физический смысл производной».
Цель работы: научиться решать задачи на геометрический и физический смысл производной.
Краткая теория:

Геометрический смысл производной состоит в следующем: производная функции $y = y(x)$ при данном значении аргумента $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.:

$$y'(x_0) = tg\,\alpha = k \qquad (1)$$



Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0 ; y_0)$ имеет вид

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

Если функция $y(x)$ имеет при $x = x_0$ бесконечную производную, то уравнение касательной имеет вид:

$$x = x_0 \qquad (3)$$

Физический смысл производной. Производная $y'(x_0)$ от функции $y = y(x)$, вычисленная при значении аргумента $x = x_0$, есть скорость изменения этой функции относительно независимой переменной х в точке $x = x_0$. Тогда, если зависимость между пройденным путём s и временем t при прямолинейном неравномерном движении материальной точки выражается формулой $s = s(t)$, то её мгновенная скорость $v(t)$ в любой момент времени t_0 равна производной пути по времени:

$$v(t_0) = s'(t_0) \qquad (4)$$

При прямолинейном движении материальной точки ускорение есть скорость изменения скорости, то

$$a(t_0) = v'(t_0) \qquad (5)$$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Найти угол наклона и уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 6x + 3$ в точке $M_0(1 ; -1)$.

Решение: Согласно формуле (1) вычислим угловой коэффициент касательной - вычислим производную функции $y = 2x^2 - 6x + 3$ при $x_0 = 1$. Имеем $y' = 4x - 6$, откуда $y'(1) = -2$. Значит $k = tg\alpha = -2$. Тогда $\alpha = 180^0 - arctg 2 \approx 117^0$. Воспользовавшись уравнением (2), получим уравнение касательной: $y = -1 -2(x - 1)$, или $2x + y - 1 = 0$.

Пример 2. Составить уравнение касательной в точке $M(3 ; -1)$ к кривой

$$\begin{cases} x = t^2 - 1; \\ y = t^2 + t - 3; \end{cases}$$

Решение: определим прежде всего значение t, соответствующее точке $M(3 ; -1)$. Это значение должно одновременно удовлетворять уравнениям $t^2 - 1 = 3$ и $t^2 + t - 3 = -1$, т.е. $t^2 = 4$ и $t^2 + t - 2 = 0$. Корни первого уравнения $t_1 = -2$ и $t_2 = 2$; корни второго уравнения $t_1 = -2$ и $t_2 = 1$. Таким образом, точке M соответствует значение $t = -2$. Угловой коэффициент касательной к кривой в точке M равен значению производной $y'(x)$ в этой точке :

$y'_x = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{2t+1}{2t} = \frac{3}{4}$. Следовательно, искомое уравнение касательной имеет вид

$y - (-1) = \frac{3}{4}(x - 3)$, или $3x - 4y - 13 = 0$.

Пример 3. Точка движется прямолинейно по закону $s = \frac{t^3}{3} + 2t^2 - t$ (s выражается в метрах, t - в секундах). Найти скорость и ускорение через 1 сек после начала движения.

Решение: скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени: $v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 + 4t - 1$ Отсюда *v (1) = 4 (м/с).* Ускорение прямолинейного движения равно второй производной пути по времени: $a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t + 4$, и, следовательно,

$a(1) = 6$ (м/с^2).

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной через данную точку М $(\frac{\pi}{2};\ 0)$ графика функции $f(x) = 2\cos x$;

2. Найти угол наклона касательной, проведённой к кривой *y = sin2 x* в точке с абсциссой $x = \frac{2\pi}{3}$.

3. Составить уравнение касательной к кривой $f(x) = \frac{3}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$

4. В какой точке графика функции *f(x) = 2(x – 9)²* *+ 12*, в которой касательная параллельна ОХ.

5. Составить уравнение касательной к кривой $y = x + e^{-2x}$, параллельной прямой $y = -x$

6. Точка движется прямолинейно по закону *S(t)* = $4\sqrt{t+1}$. Найти мгновенную скорость точки в момент времени *t = 3c.*

7. Точка движется по закону $s(t) = t + t^2 + t^3$ (*м*). Найти скорость точки в тот момент времени, когда ее ускорение было равным 20 $м/c^2$.

Вариант 2

1. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной через данную точку М $(\pi;\ 0)$ графика функции $f(x) = -tgx$;

2. Найти угол наклона касательной, проведённой к кривой *y = cos 3x* в точке с абсциссой $x = \frac{3}{4}\pi$.

3.Составить уравнение касательной к кривой $f(x) = 2x - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

4. В какой точке графика функции *f(x)* = $\frac{1}{2}$ *(x – 6)²* *- 12*, в которой касательная параллельна ОХ.

5. Составить уравнение касательной к кривой $y =$ $y = x - \frac{1}{x^2}$, параллельной прямой $y = 3x$.

6. Точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = t^2 - 4t - 5$ $(м/c)$.В какой момент времени ее ускорение будет равным нулю.

7. Точка движется по закону $s(t) = t - 4t^2 + 2t^3$ (*м*). Найти скорость точки в тот момент времени, когда ее ускорение было равным 16 $м/c^2$.

Вариант 3

1. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной через данную точку М $(\pi;\ 1)$ графика функции $f(x) = 1 + \sin x$.

2. Найти угол наклона касательной, проведённой к кривой *y = tg x* в точке $x = \frac{5}{4}\pi$.

3.Составить уравнение касательной к кривой $f(x) = x^2 + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

4. В какой точке графика функции *f(x) = ln 3x - x*, в которой касательная параллельна ОХ.

5. Составить уравнение касательной к кривой $y =$ $y = 2x - \ln x$, параллельной

прямой $y = x$.

6. Точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = \frac{1}{2}t^2 - 4t + 3$ $(м/с)$ В какой момент времени ее ускорение будет равно 4 $м/с^2$.

7. Тело движется по закону $s(t) = t$ $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 2$. В какой момент времени ее ускорение будет равным 4 $м/с^2$.

Практическая работа №17

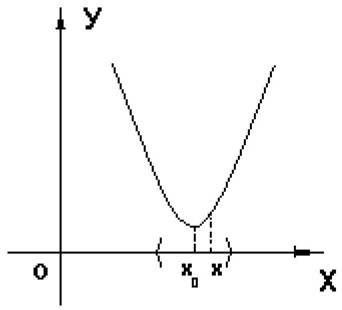
Раздел 3. Основы математического анализа

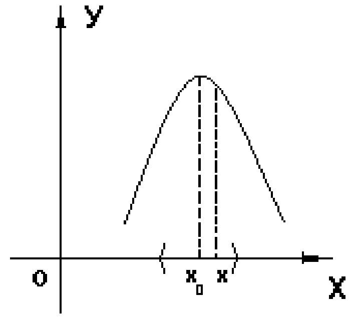
«Исследование функций с помощью производной. Решение задач на максимум и минимум»

Цель работы: научиться применять производную к исследованию функций, к решению задач на максимум и минимум

Краткая теория: К монотонным функциям относятся возрастающие, строго возрастающие, убывающие и строго убывающие функции. Интервалы, на которых функция возрастает или убывает, называются ***интервалами монотонности*** этой функции.

Точка x_0 - называется ***точкой минимума*** функции *f(x)* , если существует окрестность точки x_0 O(x_0), такая что $\forall x \in O(x_0), x \neq x_0$ выполняется условие $f(x) \succ f(x_0)$, и называется ***точкой максимума*** функции *f(x)* , если выполняется условие $f(x) \prec f(x_0)$.Точки минимума и максимума называются ***точками экстремума функции.***

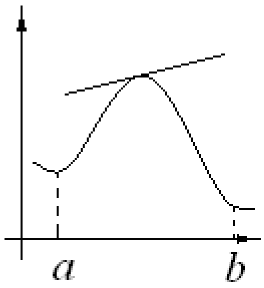




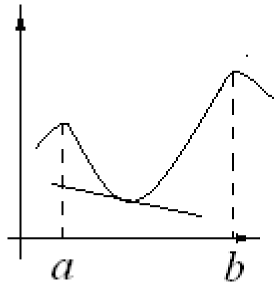
Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Вычислить производную функции $f'(x)$;
2. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует;
3. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;
4. Если в рассматриваемом интервале $f'(x) \prec 0$, то на этом интервале функция убывает; $f'(x) \succ 0$, то на этом интервале функция возрастает.
5. Если x_0 - критическая точка и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с «+» на « - », то x_0 - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то x_0 - точка минимума.

Кривая *y=f(x)* называется ***выпуклой вниз на промежутке*** *(a; b),* если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка и называется выпуклой вверх, если наоборот.

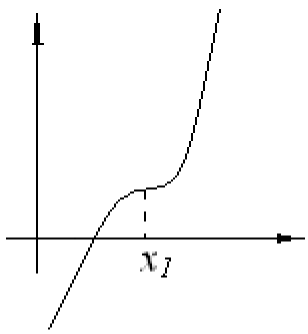


Выпуклость вверх на *(a; b)*



Выпуклость вниз на *(a; b),*

Промежутки, в которых график функции обращен выпуклостью вверх или вниз, называют ***промежутками выпуклости*** графика функции. Точка графика функции *y=f(x),* разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называются точками перегиба.



x_1 – абсцисса точки перегиба кривой

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции *y= f(x*), в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

1. Вычислить вторую производную функции $f''(x)$;
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых $f''(x)=0$ или не существует;
3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале $f''(x) \prec 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вверх; $f''(x) \succ 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;
5. Если x_0 - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Правило нахождения наименьшего и наибольшего значения функции в некотором промежутке:

1. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
2. Вычислить значение функции на концах промежутка;
3. Сравнить полученные значения, тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

С помощью экстремума функций, решаются многие прикладные задачи геометрии, механики и т.д., в которых требуется определить наименьшее или наибольшее значение функции, причем эта функция не дается в готовом виде, а составляется в соответствии с условиями конкретной задачи.

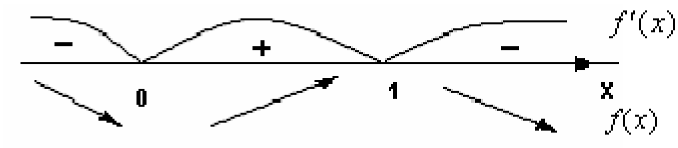
Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 6$**;**
Решение: данная функция определена на всей числовой прямой. Применим правило отыскания промежутков монотонности:
1. Вычислим производную: $f'(x) = 6x - 6x^2$**;**
2. Найдем критические точки:

$$f'(x) = 6x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 6x \cdot (1 - x) = 0 \Leftrightarrow$$

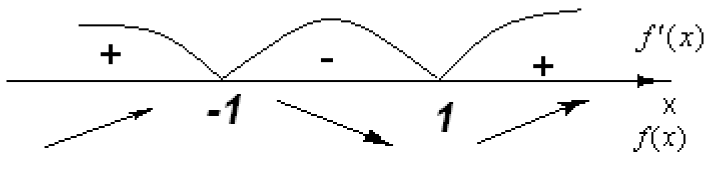
$$x_1 = 0 \quad и \quad x_2 = 1 \quad - \quad критические \quad точки$$

3. Определим знаки производной в интервалах:



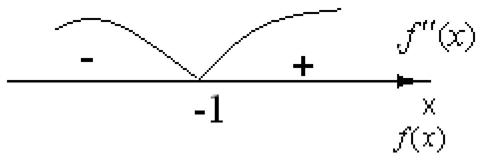
4. Функция возрастает на промежутке (0; 1), убывает на $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$

Пример 2. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 3x$
Решение: *D(f)*=R,
1) Найдем критические точки функции $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1) = 0$
   $x_1 = 1 \quad и \quad x_2 = -1 \quad - \quad критические \quad точки \quad f(x)$;
2) Определим знаки производной в интервалах, на которые разбивается область определения критическими точками



3) Т.о. $x_1 = -1$ - точка максимума - max *f(x)*= $f(1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$;
$x_2 = 1$ - точка минимума - $\min f(x) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$;

Пример 3. Найти промежутки выпуклости графика функции вверх, если функция задана формулой $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9$.
Решение:
1. Вычислим вторую производную функции $f'(x) = 3x^2 + 6x;\ f''(x) = 6x + 6$;
2. Найдем у функции точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует: $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$
3. Исследуем знак второй производной в интервалах



4. Т.к. $f''(x) \prec 0$ на $(-\infty;\ -1)$, значит на $(-\infty;\ -1)$ график функции выпуклый вверх.

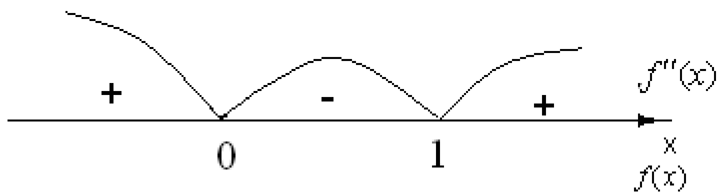
Пример 4. В каких точках график функции $y = 4x^4 - 8x^3 + 2$ имеет перегиб:

Решение:

1. Вычислим вторую производную функции $y' = 16x^3 - 24x^2$; $y'' = 48x^2 - 48x$;

Найдем у функции точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует: $y'' = 48x^2 - 48x = 0 \Rightarrow 48x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 1$

Исследуем знак второй производной в полученных интервалах



Т.к. функция меняет знак в обеих точках, значит у нас две точки перегиба. Вычислим вторые координаты найденных точек: y(0)=2, y(1)= -2, Значит точки перегиба следующие (0; 2) и (1; -2).

Пример 5. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ на отрезке $[-3;\ 3]$

Решение: Функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ непрерывна на отрезке $[-3;\ 3]$. найдем критические точки функции, для этого вычислим ее производную и приравняем ее нулю: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$ - критические точки функции, причем обе они принадлежат отрезку $[-3;\ 3]$. Вычислим значения функции в критических точках и на концах отрезка: $f(-1) = 17,\quad f(2) = -10,\quad f(-3) = -35,\quad f(3) = 1$. Т.о., наименьшее значение функции равно -35 и достигается на левой границе отрезка, а наибольшее значение функции равно 17 и достигается во внутренней точке $x = -1$.

Пример 6. Требуется огородить проволочной сеткой длиной *2p* участок прямоугольной формы. Найти размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей;

Решение: из условий задачи имеем, что периметр участка равен *2p*. Обозначим длины сторон прямоугольника ***x*** и ***y***. Тогда из периметра прямоугольника имеем $P = 2(x+y) = 2p \Rightarrow x + y = p \Rightarrow y = p - x$. Обозначим через *S(x)* площадь прямоугольника. Тогда $S(x) = xy = x(p-x) = px - x^2$, причем $p \in [0;\ p]$. Исследуем полученную функцию на экстремум: $S'(x) = (px - x^2)' = p - 2x = 0 \Rightarrow 2x = p \Rightarrow x = \dfrac{p}{2}$ - критическая точка, принадлежащая отрезку $[0;\ p]$. Исследуя знак $S'(x)$ в интервалах $\left(0;\ \dfrac{p}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{p}{2};\ p\right)$, получаем, что на первом из них *S(x)* возрастает, а на втором убывает. Следовательно, при $x = \dfrac{p}{2}$ площадь прямоугольника будет наибольшей. Найдем $y = p - x = p - \dfrac{p}{2} = \dfrac{p}{2}$. Значит, из прямоугольников с периметром *2p*, наибольшую площадь будет иметь квадрат со стороной $\dfrac{p}{2}$.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Исследовать функцию на монотонность и экстремум:

а) $f(x)=x^3+3x^2-9x$; б) $y=\dfrac{x}{9-x^2}$

2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

$y=x^3-3x^2-24x+7$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке:
а) $y=6x^2-3x^4-1, \quad x\in[-2;\ 2]$; б) $y=\sqrt{25-x^2} \quad x\in[-4;\ 4]$.

4. Представьте число 3 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго слагаемого была наименьшей.

Вариант 2

1. Исследовать функцию на монотонность и экстремум:

1) $f(x)=2x^3-3x^2-36x$; 2) $y=\dfrac{2x-3}{x+7}$.

2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

$y=10+15x+6x^2-x^3$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке: 1) $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x-\dfrac{1}{3}, \quad x\in[-2;\ 2]$; 2) $y=\sqrt[3]{x^2}(2-x) \quad x\in[-6;\ 1]$.

4. Представьте число 5 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы произведение первого слагаемого и куба второго слагаемого было наибольшим.

Вариант 3

1. Исследовать функцию на монотонность и экстремум:

1) $y=x^4-\dfrac{x^3}{3}-2x^2+x$; 2) $y=\dfrac{x^4+48}{x}$.

2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

$y=1{,}5x^4-2x^3+5$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке:
1) $y=x^3+3x^2-9x-7, \quad x\in[-4;3]$; 2) $y=\dfrac{x-1}{x+1} \quad x\in[0;\ 4]$.

4. Площадь прямо угольника равна 16 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы его периметр был наименьшим.

Вариант 4

1. Исследовать функцию на монотонность и экстремум:

а) $y=x^4+8x^3+5$; б) $y=\sqrt{x}(x-3)$.

2. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

$y=(x+1)^3(5-x)$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке:

1) $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x-4, \quad x\in[-4;\ 2]$; 2) $y=\sin 2x-x, \quad x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

Практическая работа №18

Раздел 3. Основы математического анализа

«Применение производной к построению графиков функций»

Цель работы: научиться применять производную к построению графиков функций.

Краткая теория

Для построения графиков функций можно использовать следующую схему:

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Находят асимптоты графика функции;
5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая $y=kx+b$ называется *наклонной асимптотой* для графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0 \tag{1}$$

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся из условий:

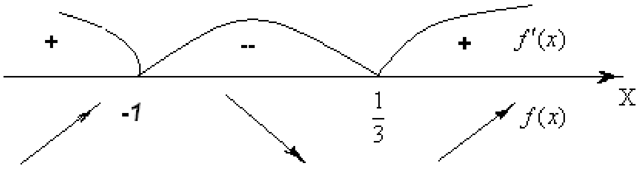
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) \tag{2}$$

Если $k=0$, то прямая $y=b$ называется *горизонтальной асимптотой*.
Прямая $x=a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$.

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $y=f(x)$ в качестве точки *а*, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

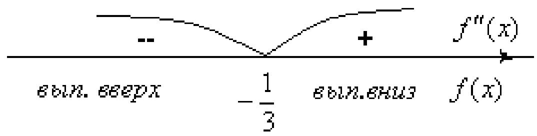
Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Исследовать функцию $y=x^3+x^2-x-1$ и построить ее график.
Решение: исследуем функцию по схеме:
1. D(y)=R;
2. $y(-x)=(-x)^3+(-x)^2-(-x)-1=-x^3+x^2+x-1=-(x^3-x^2-x+1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): $x^3+x^2-x-1=0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x=-1$ *и* $x=1$.
Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x=0$, то $y=-1$;
4. Асимптот нет;
5. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y'=3x^2+2x-1$. Найдем критические точки функции: $y'=3x^2+2x-1=0$. Получим: $x_1=-1$ *и* $x_2=\frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



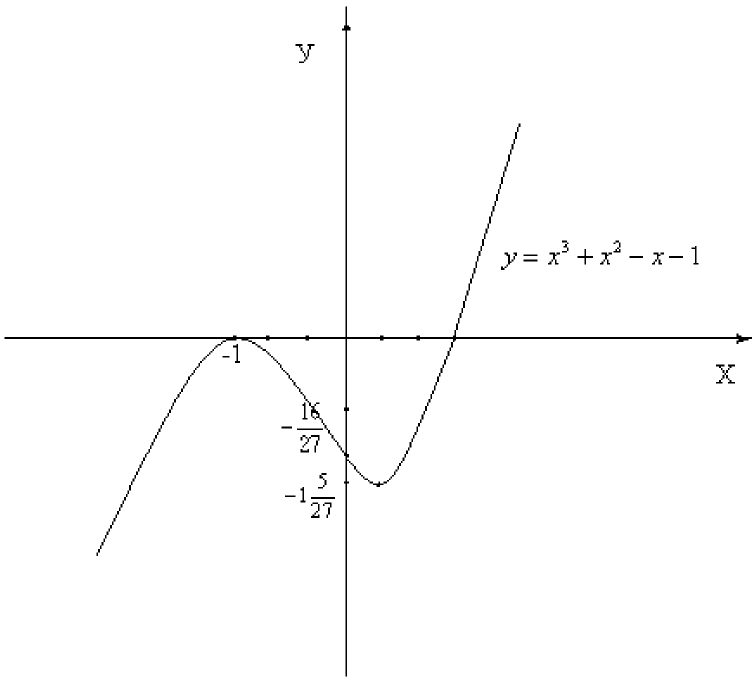
Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)$ *и* $(\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$. Найдем экстремумы функции: $\max f(x)=f(-1)=0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;\,0)$, $\min f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

6. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции: $6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку $x = -\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

7. Построим график:



Пример 2. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

Решение:

1. Найдем область определения функции. Она задается условиями $x \neq 1$, $x \neq -1$ (при значениях $x \neq 1$, $x \neq -1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

D(*f*)=(-∞;1)(-1:1)(1;+∞).

2. Исследуем функцию на честность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = f(x)$$

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при x ≥ 0.

3. Точек пересечения графика функции с осью ОХ нет,

Найдем точки пересечения графика функции с осью ОУ: если $x = 0 \quad \text{то} \;\; y = -1$

4. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая x = 1, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

Значит, y = 1 – горизонтальная асимптота графика функции.

5. Найдем критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$y'\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

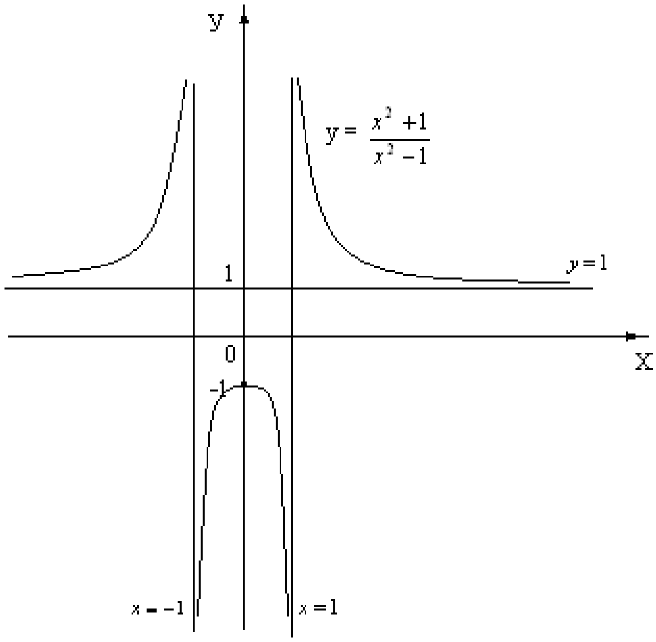
Критические точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При x < 0 имеем y′ > 0, а при x > 0 имеем y′ < 0. Значит, x = 0 – точка максимума функции, причем $y_{max} = f(0) = \frac{0^2+1}{0^2-1} = -1$. При x > 0 имеем y′ < 0. Но следует учесть наличие точек разрыва x =- 1 и x=1. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутках (-∞; -1) и (-1;0] функция возрастает, на промежутках [0;1) и (1;+∞) функция убывает.

Вычислим вторую производную

$$f''(x)=\left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{-4(x^2-1)^2+4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)$ нигде не обращается в ноль, критическими точками будут только точки $x = \pm 1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах:

7. Отметим (0;-1) – точку максимума, построим прямые y = 1 – горизонтальную асимптоту, что x = 1 и x = - 1– вертикальные асимптоты;



Задания для практического занятия

Вариант 1

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8;$ 2) $y = 3x + \frac{1}{3x}.$

Вариант 2

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1;$ 2) $y = \frac{4}{x} - x$

Вариант 3

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1;$ 2) $y = \frac{8}{x} + x.$

Вариант 4

Исследовать по схеме и построить графики функций:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 16;$ 2) $y = x - \frac{1}{x};$

Практическая работа №19

«Вычисление неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования»

Цель работы: научиться вычислять неопределённые интегралы методом непосредственного интегрирования.

Краткая теория:

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* в промежутке $a \le x \le b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна *f(x):*

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx, \quad a \le x \le b \qquad (1)$$

Совокупность всех первообразных функций *F*(x) + c для функции *f*(x) на некотором промежутке называется *неопределённым интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а С -произвольной постоянной интегрирования. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*.

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad (n \neq -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$
12. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$
13. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C;$
14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$
16. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C;$

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + \varphi(x)]dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx \qquad (3)$$

2. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \ a \neq 0. \qquad (4)$$

Под непосредственным интегрированием понимают способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводятся к одному или нескольким табличным интегралам.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить: $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx$.

Решение:

1) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx = 5\int x^4 dx - 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C$;

Пример 2. Вычислить: $\int \dfrac{(x+2)^3 dx}{x}$; Решение:

$$\int \frac{(x+2)^3 dx}{x} = \int \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x} dx = \int (x^2 + 6x + 12 + \frac{8}{x})dx = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 12x + 8\ln|x| + C$$

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

1) $\int (2x^2 + 7x - 1)dx$; 2) $\int \frac{(2-3x)^2}{x^3} dv$ 3) $\int (6^x - \frac{4}{\sqrt{x}})dx$

4) $\int \left(3\sin x + \frac{4}{x^4}\right)dx$; 5) $\int \left(\frac{8}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx$; 6) $\int \frac{dx}{121+x^2}$;

7) $\int \frac{2\sqrt[3]{x} - 3x^2}{x^2} dx$; 8) $\int \frac{\sin 2x + \sqrt[3]{x}\cos x}{x\cos x} dx$;

9) $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ 10) $\int \frac{x^2+7x+12}{x+3} dx$

Вариант 2

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

1) $\int (4x^4 - 8x^3 + \sqrt{x})dx$; 2) $\int \frac{(1-4x)^2}{x^4} dx$; 3) $\int \left(10\cos x - \frac{2}{x^3}\right)dx$;

4) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{12}{81+x^2}\right)dx$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$; 6) $\int (6^{2x} - \frac{4}{x})dx$

7) $\int \frac{x^2-5x-24}{x+3} dx$; 8) $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$;

9) $\int (2+x)x^2\sqrt[3]{x}dx$; 10) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

Вариант 3

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

1) $\int (-x^3 - 8x^2 + 4)dx$; 2) $\int \frac{(4x+x^2)^2}{x^5} dx$; 3) $\int (\sqrt[3]{x^2} - 5^x)dx$

4) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{49-x^2}} + \frac{1}{2\sin^2 x}\right)dx$; 5) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$; 6) $\int \frac{dx}{25+16x^2}$;

7) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$ 8) $\int \frac{2+\sqrt{x^3 - x^5}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

9) $\int \frac{x^2-5x+6}{x-2} dx$ 10) $\int \frac{x^2+2}{1+x^2} dx$

Вариант 4

1. Методом непосредственного интегрирования вычислить:

1) $\int (9x^5 + 3x^2 - 8)dx$; 2) $\int \frac{(x-2x^2)^2}{x^2} dx$; 3) $\int (2^{3x} - 9\sqrt{x} + 5)dx$;

4) $\int \left(\frac{8}{100+x^2} - \frac{1}{4\cos^2 x}\right)dx$; 5) $\int \left(\frac{5}{x^4} + 4\cos x\right)dx$; 6) $\int \frac{3dx}{\sqrt{4-49x^2}}$.

7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$ 8) $\int \frac{2x\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx$

9) $\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx$ 10) $\int \frac{x^2-3x-10}{x-5}dx$

Практическая работа №20

«Вычисление неопределенных интегралов методом подстановки и интегрирования по частям»

Цель работы: научиться вычислять неопределённые интегралы, применяя метод подстановки и метод интегрирования по частям.

Краткая теория:

Сущность интегрирования методом подстановки заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из основных формул интегрирования. Для нахождения $\int f(x)dx$ заменяем переменную x новой переменной u с помощью подстановки $x=\varphi(u)$. Дифференцируя это равенство, получаем $dx=\varphi'(u)du$.

Подставляя в подынтегральное выражение вместо х и dx их значения , выраженные через u du , имеем

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(u)]\varphi'(u)du = \int F(u)du \qquad (1)$$

После того, как интеграл относительно новой переменной u будет найден, с помощью подстановки $u=\phi(x)$ он приводится к переменной *x*.

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке. Найдем дифференциал произведения этих функций:

$d(uv)=u'vdx+uv'dx$.ак как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства,

$$\int d(uv) = \int u'vdx = \int uv'dx, \text{ или} \int d(uv) = \int vdu + \int udv \text{ , но} \int d(uv) = uv + C,$$

следовательно

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (2)$$

В правой части формулы (2) постоянную интегрирования *C* не пишут, т.к она фактически присутствует в интеграле $\int vdu$. Формула (2) называется ***формулой интегрирования по частям.***

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется в виде произведения множителей u и dv; при этом dx обязательно входят в dv. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int vdu$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных двух интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла.

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv. Общих установок по этому вопросу не имеется. Однако, для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, сделать это возможно.

1. В интегралах вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$,

где *P(x)* – многочлен относительно *x*, *a* – некоторое число, полагают $u=P(x)$, а все остальные сомножители за dv.

2. В интегралах вида $\int P(x)\ln|ax|dx$, $\int P(x)\arcsin axdx$, $\int P(x)\arccos axdx$, $\int P(x)arctgaxdx$, $\int P(x)arcctgaxdx$

полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители за u.

3. В интегралах вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, где *a* и *b* числа, за u можно принять любую из функций e^{ax} или *sin bx* (или *cos bx*).

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить $\int (1+x)^5 dx$ *;*

Решение: положим *1+x = z.* Продифференцируем это неравенство: *d(1+ x)= =dz* или *dx = dz.* Заменив в интеграле переменную интегрирования, получим:

$$\int (1+x)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6}\cdot(1+x)^6 + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int \frac{2\text{Í}^{\text{ő}}dx}{(1-\text{Í}^{\text{ő}})^2}$

Решение: пусть $1-e^x = z$, тогда $d(1-e^x) = dz$; $-e^x dx = dz$; $\Rightarrow$ $e^x dx = -dz$; С учетом полученного имеем

$$\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2} = -2\int \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-e^x} + C;$$

Пример 3. Вычислить $\int \frac{\text{ő}^2+1}{\text{ő}+2}dx$

Решение: $x+2=t;\ \Rightarrow x = t-2;\ \Rightarrow dx = d(t-2) = dt$

$$\int \frac{x^2+1}{x+2}dx = \int \frac{(t-2)^2+1}{t}dt = \int \frac{t^2-4t+5}{t}dt = \int\left(t-4+\frac{5}{t}\right)dt = \frac{t^2}{2} - 4t + 5\ln|t| + C =$$

$$= \frac{(x+2)^2}{2} - 4(x+2) + 5\ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x - 6 + 5\ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} - 2x + 5\ln|x+2| + C_1,$$

где $C_1 = C - 6$;

Пример 4. Вычислить $\int x\cdot\sqrt{x-3}dx$

Решение: сделав замену $\sqrt{x-3} = t$, получим $x = t^2+3,\quad dx = 2tdt$. Поэтому

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}dx = \int (t^2+3)\cdot t\cdot 2tdt = 2\int (t^4+3t^2)dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 6\cdot\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C;$$

Пример 5. Вычислить $\int \sin 8x \cos 2x\, dx$

Решение: этот интеграл решается с помощью формул тригонометрии:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

Поэтому, имеем $\int \sin 8x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 6x)dx = -\frac{1}{20}\cos 10x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$;

Пример 6. Вычислить $\int x\sin xdx$;

Решение: положим $u = x$, $dv = \sin x dx$; тогда $du = dx$, $\int dv = \int \sin x dx$, т.е. $v = -\cos x$. Используя формулу (2), получим

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 7. Вычислить $\int x\ln x dx$;

Решение: положим *u=lnx, dv=xdx;* тогда $du = \frac{dx}{x}$; $v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2}$.

Используя формулу (2), получим: $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. З**адания для практического занятия**

Вариант 1

1. Методом подстановки вычислить:

а) $\int (7+3x)^5 dx$; б) $\int 3\sin 5x dx$; в) $\int \frac{5dx}{1+9x^2}$; г) $\int \sqrt[3]{(2-5x)^2}dx$;

д) $\int \sqrt{e^x - 1}\cdot e^x dx$ е) $\int \frac{3dx}{1+2x}$; ж) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$; з) $\int \sin 5x \cos 3x dx$;

2.Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int (1-x)\sin x dx$ б) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

Вариант 2

1. Методом подстановки вычислить:

а) $\int (5-4x)^6 dx$; б) $\int 7\cos 6x dx$; в) $\int \frac{4dx}{3-4x}$; г) $\int \frac{7dx}{\sqrt{1-16x^2}}$;

д) $\int \sqrt[3]{x^2-3}\cdot x dx$; е) $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$; ж) $\int \frac{tgx\, dx}{\cos^2 x}$; з) $\int \sin 2x \sin 6x dx$;

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int x\cos x dx$; б) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

Вариант 3

1. Методом подстановки вычислить:

а) $\int (2-7x)^4 dx$; б) $\int 6\cos 2x dx$; в) $\int \frac{5dx}{3-4x}$; г) $\int \frac{2dx}{1+16x^2}$;

д) $\int \sqrt[4]{(7x+4)^3}\, dx$; е) $\int e^x \cos(e^x)dx$; ж) $\int \frac{\sin x\, dx}{5-2\cos x}$; з) $\int \cos 4x \cos 5x dx$;

2. Методом интегрирования по частям вычислить:

а) $\int xe^x dx$; б) $\int \arcsin x\, dx$;

Практическая работа №21

«Вычисление определенных интегралов методом подстановки и интегрирования по частям»

Цел работы: научиться вычислять определённые интегралы методом подстановки и методом интегрирования по частям.

Краткая теория:Приращение *F (b) – F (a)* любой из первообразных функций *F (x) + C* функции *f (x)* при изменении аргумента от *x = a* до *x = b* называется *определённым интегралом от a до b от функции f (x:)*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

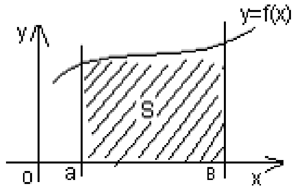
Числа *a* и *b* называются *пределами интегрирования*, *a – нижним, b – верхним*. Отрезок [*a;b*] называется *отрезком интегрирования*. Функция *f (x)* называется *подынтегральной функцией*, а переменная *x – переменной интегрирования.* Формула (1) называется *формулой*

Ньютона - Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла

Если интегрируемая на отрезке [a;b] функция f (x) неотрицательна, то определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), осью абсцисс и прямыми x = a и x = b :

$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух непрерывных функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3. Если $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4. Если функция *f (x)* неотрицательная на отрезке [*a;b*], где *a<b*, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0\ ;$$

5. Если $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in [a;b]$, где $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

6. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции *f (x)* на отрезке [*a;b*], где *a<b,* то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \mathrm{M}(b-a)$

7. (Теорема о среднем). Если функция *f (x)* непрерывна на отрезке [*a;b*], то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$

Непосредственное интегрирование предполагает использование основных свойств определенного интеграла и формулы Ньютона – Лейбница.

Метод подстановки сводит определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью подстановки $u=\varphi(x)$ к определенному интегралу относительно новой переменной *u.* При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования a_1 и b_1, которые находятся из исходной подстановки: $a_1=\varphi(a),\quad b_1=\varphi(b)$.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Вычислить $\int\limits_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx$

Решение:

$$\int\limits_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t \\ d(e^x - 1) = dt \\ e^x dx = dt \\ a' = e^0 - 1 = 0 \\ b' = e^1 - 1 = e - 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^{e-1} t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^{e-1} = \frac{(e-1)^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}(e-1)^5$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$.

Решение: сделаем подстановку $5x - 1 = t$. Тогда $d(5x-1) = dt \Rightarrow 5dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$.

Новые пределы интегрирования: $t_1 = 5 \cdot 1 - 1 = 4 \quad t = 5 \cdot 2 - 1 = 9$. Следовательно,

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int\limits_1^2 (5x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{5}\int\limits_4^9 t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{5} t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^9 = \frac{2}{5}(9^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}) = \frac{2}{5}.$$

Пример 3. Вычислить $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Решение: Положим $x = 2\sin t$. Тогда $dx = 2\cos t\,dt$. Если $x = 0,$ *то* $t = 0$, если $x = 2,$ *то* $t = \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4 - 4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)dt = 2(t - \frac{1}{4}\sin 4t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(4\cdot\frac{\pi}{2})) - 0 = \pi$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_e^4 x\ln x dx$

Решение: положим *u=lnx,* *dv=xdx.* Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$.Следовательно,

$$\int\limits_e^4 x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x \Big|_e^4 - \frac{1}{2}\int\limits_e^4 x^2\frac{dx}{x} = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2 \Big|_e^4 = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} =$$

$$= 8\ln 4 - 4 - \frac{e^2}{4}$$

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int\limits_{-2}^1 (5 - 2x)^2 dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 - \cos x}dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x + 1}}dx$; ;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$; 5) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3 + 4x^2}$; 6) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$

7) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{tg^3 x dx}{\cos^2 x}$ 8) $\int_0^1 \frac{e^u du}{5+e^u}$

2. Вычислить методом интегрирования по частям:

1) $\int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$; 2) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$;

Вариант 2

1. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int_2^3 (2x-1)^2 dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$; 3) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 3e^{x^2} x dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$; 5) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+5} dx$; 6) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$

7) $\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{2x^3+3}$ 8) $\int_0^1 \frac{z dz}{z^4+1}$

2.Вычислить методом интегрирования по частям:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; 2) $\int_0^1 \arccos x dx$;

Вариант 3

1. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

1) $\int_4^5 (4-x)^3 dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 3) $\int_0^{\frac{n}{2}} \sqrt{3\sin x+1} \cos x dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$; 5) $\int_0^1 e^{x^2} x dx$; 6) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-u\right) du$

7) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x dx}{\sqrt{x^2+1}}$ 8) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos z dz}{\sin^3 z}$

2.Вычислить методом интегрирования по частям:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$;

Практическая работа № 22

Раздел 3. Основы математического анализа

Цель работы. Сформировать умения и навык использования интеграла при решении различных практических задач и задач на вычисление объемов тела.

Решение прикладных задач с помощью определённого интеграла»

Краткая теория.

Задача о вычислении пути

Согласно физическому смыслу первой производной, производная функции в точке есть мгновенная скорость точки, т.е. $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$. Отсюда, $ds = v(t)dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t_1 до t_2 получаем

$$\int ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Тогда путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью υ(е) за отрезок времени [t_1, t_2]выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt. \qquad (1)$$

Пример 1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t+3t^2$(м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.
Решение.

$$S=\int_0^5 (2t+3t^2)dt = (t^2+t^3)\Big|_0^5 =150(м).$$

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью v =($6t^2$+2t) м/с, второе – со скоростью v^2=(4t+5) м/с. На каком расстояния друг от друга они окажутся через 5 с?
Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1=\int_0^5 (6t^2+2t)dt = (2t^2+t^3)\Big|_0^5 =275(м)$$

$$S_2=\int_0^5 (4t+5)dt = (2t^2+5t)\Big|_0^5 =75(м)$$

Таким образом, $S=S_1-S_2$= 275-75=200 (м).

2. Задача о вычислении работы переменной силы

Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постояна, а пройденный путь равен s, то как известно из курса физики, работа A этой F вычисляется по формуле:
A= F*s
Работу переменной силы f(x) при перемещении по оси Ox материальной точки от x=a до x=b, находим по формуле (3):

$$A=\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Решении задач на вычисление работы силы упругости, связанных с растяжением и сжатием пружин, основывается на законе Гука. По закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину, пропорциональная этому растяжению или сжатию, т.е. F=kx, где x – величина растяжения или сжатия, k – коэффициент пропорциональности.

Пример 1. Сила упругости F пружины, растянутой на 1^1 = 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 1_2 =0,1 м?
Решение. Подставив данные в формулу закона Гука, получим: 3=k*0.05, т.е. k=60, следовательно, сила упругости выражается соотношением F=60x. Найдем работу переменной силы по формуле (2), полагая, что a=0; b=0,1:

$$A=\int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2\Big|_0^{0,1} =0,3Дж$$

3. Задача о силе давления жидкости

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле P=gphS, (4)
Где g – ускорение свободного падения в м/$с^2$;
p– плотность жидкости в кг/$м^3$;
h – глубина погружения площадки в м;
S – площадь площадки в $м^2$.
По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку,

так как ее разные точки лежат на разных глубинах.
Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями x = a, x = b, y1 = f1(x) и y2=f2(x).
Для решения задачи разобьем пластину на n частей (малых горизонт альных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т.е. параллельными оси OY). На глубине x выделим одну из них и обозначим через f(x) ее длину, а через Δx ее ширину. Приняв полоску за прямоугольник, находим ее площадь $S = f(x) \cdot \Delta x$.

$$P = g\rho f(x) \cdot \Delta x \cdot x$$

Найдем дифференциал dp этой функции.

$$dp = g\rho f(x) \cdot x dx$$

Тогда по закону Паскаля интегрируя полученное равенство в пределах от x = a до x = b, получим

$$P=g\int_a^b pxf(x)dx \qquad (3)$$

Пример

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м х 0,7 м.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Оу и Ох соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой (3). Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x)=0{,}7x,\ x\in[0;0{,}4]$. Так как пределы интегрирования a=0 и b=0,4, то получим:

$$P=g\int_0^{0,4} 1000*0{,}7*xdx = 700\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,4} =56g \approx 549\text{Н}$$

Задания.

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y = 4 – x^2 и y = - 5. Сделать чертёж.
2.Скорость движения точки v = 18t – 3t^2 м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.
3.Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20 Н растягивает её на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,12 до 0,14 м?
4.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y = x^2 - 4x и y = 0. Сделать чертёж.
5.Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью v = 29,4 – 9,8t м/с. Найдите наибольшую высоту подъёма тела.
6.При сжатии пружины на 0,05 м совершается работа 30 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,08 м?

Вычисление объёмов с помощью определённого интеграла.

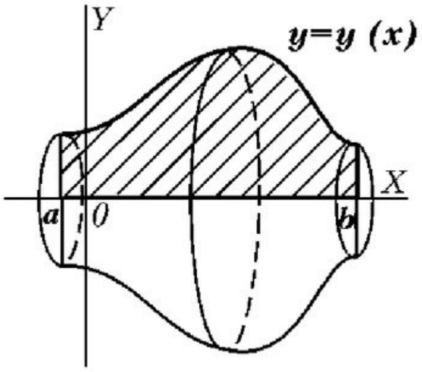
Краткая теория.

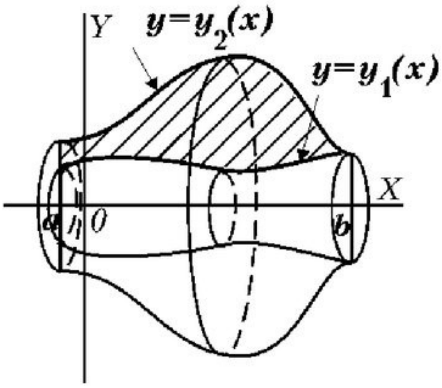
Пусть вокруг оси Ох вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией y= f(x) >0, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Полученная при вращении фигура называется **телом вращения.**

Вращение вокруг оси Ох.

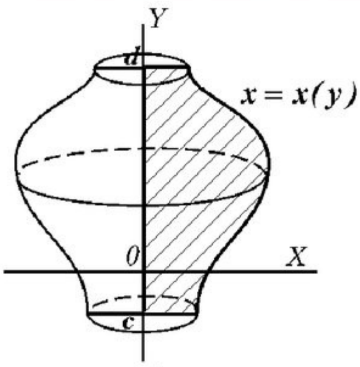
$$V_{ox} = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx \qquad V_{ox} = \pi\int_a^b [y_2{}^2(x) - y_1{}^2(x)]\,dx$$

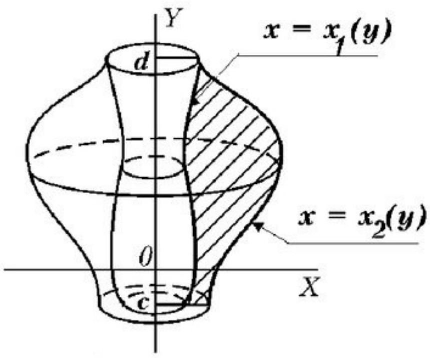


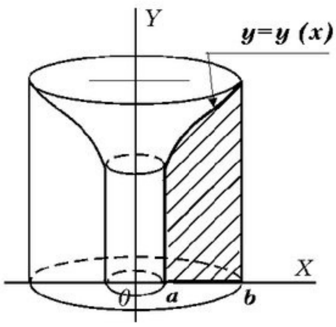


Вращение вокруг оси Оу.

При





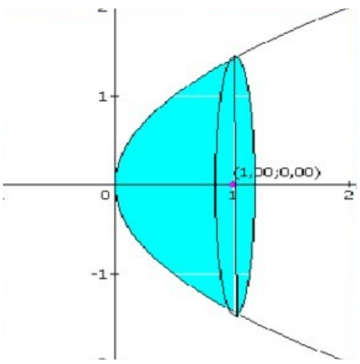


$$V_{oy} = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy \qquad V_{oy} = \pi\int_c^d [x_2{}^2(y) - x_1{}^2(y)]\,dy \qquad V_{oy} = 2\pi\int_a^b x \cdot y(x)\,dx$$

Пример1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x, y = 0, x = 1.$

Решение:

$$V = \pi\int_0^1 2x\,dx = \pi x^2|_0^1 = \pi \text{ (куб. ед)}$$



Пример2. Найти объем конуса, полученного вращением вокруг оси Ох прямоугольного треугольника, если радиус основания, полученного конуса R и высота H.

Решение:

Очевидно, f(x) = kx, тогда k = tg α=$\frac{R}{H}$. Получаем: $f(x)=\frac{Rx}{H}$.

Вычислим объем:

$$V=\int_0^H \pi f^2(x)dx=\int_0^H \pi\frac{R^2x^2}{H^2}dx=\frac{\pi R^2x^3}{H^2\cdot 3}\Big|_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2H$$

Задания:

Вычислите объем тела вращения, ограниченной линиями.

	Вариант 1.		Вариант 2.
1	$y=e^x, x=0, x=1, y=0$	1	$y=-x^3, x=0, x=2, y=0$
2	$y=-\frac{4}{x}, x=-4, x=-1, y=0$	2	$y=\frac{5}{x}, x=1, x=5, y=0$
3	$y=-x^2+x, y=0$	3	$y=4-x^2, y=0$
4	$y=sin, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi, y=0$	4	$y=cos, x=\pi, x=\frac{3\pi}{2}, y=0$
5	$y=3cos, x=-\frac{\pi}{2}, x=0, y=0$	5	$y=2sin, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi, y=0$
6	$y=1+x^2, x=1, x=2, y=0$	6	$y=e^x, x=-2, x=0, y=0$

Практическая работа №23

Раздел 3. Основы математического анализа

Цель работы: решение практических задач

Задание: 1. Решить задачи

1) Участники Интернет-форума указали города, где они проживают. Получился следующий список:
   Москва, Смоленск, Москва, Москва, С.-Петербург, Челябинск, Назрань, Москва, Норильск, Уфа, Москва, Волгоград, С.-Петербург, Ногинск, Москва, Москва, Челябинск, Москва, С.-Петербург, С.-Петербург, Москва, Челябинск, Дмитров, Москва, Ижевск, Мурманск, Волгоград, Москва, Ярославль.
   Составьте таблицу подсчета и таблицу распределения участников форума по городам.
2) В сосуд с теплой водой погрузили 10 термометров. Термометры показали следующие результаты:
   34,5°; 35,1°; 34,4°; 34,2°; 34,7°; 34,6°; 35,0°; 34,2°; 34,5°; 34,8°.

а) Чем может объясняться изменчивость в показаниях термометров? Назовите хотя бы две возможные причины.

б) Расположите полученные значения по возрастанию.

в)Найдите среднее значение температуры и размах полученного набора.

3) Пользуясь результатами задачи 1, составьте таблицу отклонений показаний термометров от среднего значения. Сколько показаний меньше, чем среднее? Сколько показаний больше, чем среднее?

1) Пользуясь результатами задачи 1. найдите медиану показаний термометров.Сколько показаний больше и сколько показаний меньше медианы?
2) За практическую работу по физике преподаватель поставил 7 пятерок, 9 четверок, 8 троек и 2 двойки. Постройте столбиковую диаграмму по этим данным. Вычислите среднюю оценку.
3) В понедельник и во вторник магазин продал по 5 автомобилей, в среду—6, в четверг —4, в пятницу —8, а в субботу— 12 автомобилей. Вычислите среднее число автомобилей, проданных за день. Постройте по этим данным столбиковую диаграмму «число проданных автомобилей по дням».
4) В кафе предлагают два первых блюда: борщ, рассольник – и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель.

9)В басне Ивана Андреевича Крылова «Квартет»: «проказница Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка» устроили любопытный эксперимент, они исследовали влияние взаимного расположения музыкантов на качество исполнения.

Проказница-Мартышка, Осёл, Козёл, да косолапый Мишка
Затеяли сыграть Квартет.
Достали нот, баса, альта, две скрипки
И сели на лужок под липки — пленять своим искусством свет.
Ударили в смычки, дерут, а толку нет.
«Стой, братцы, стой! — кричит Мартышка. — Погодите!
Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.
Ты с басом, Мишенька, садись против альта,
Я, прима, сяду против вторы;
Тогда пойдёт уж музыка не та: у нас запляшут лес и горы!»
Расселись, начали Квартет;
Он всё-таки на лад нейдёт.
«Постойте ж, я сыскал секрет, —
Кричит Осёл: — мы, верно, уж поладим, коль рядом сядем».
Послушались Осла: уселись чинно в ряд;
А всё-таки Квартет нейдёт на лад.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры, кому и как сидеть.
Случилось Соловью на шум их прилететь.
Тут с просьбой все к нему, чтоб их решить сомненье:
«Пожалуй, — говорят: — возьми на час терпенье,
Чтобы Квартет в порядок наш привесть:
И ноты есть у нас, и инструменты есть;
Скажи лишь, как нам сесть!» —
«Чтоб музыкантом быть, так надобно уменье
И уши вашихпонежней, —
Им отвечает Соловей: — А вы, друзья, как ни садитесь,
Всё в музыканты не годитесь».

Мартышка, Осёл, Козёл и Мишка пересаживались, считая, что от этого зависит звучание музыки. И если бы не вмешался Соловей, участники квартета, наверное, перепробовали бы все возможные варианты.

Так сколько же существует способов, чтобы рассадить, например в один ряд, четырех музыкантов?

Практическая работа № 24

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

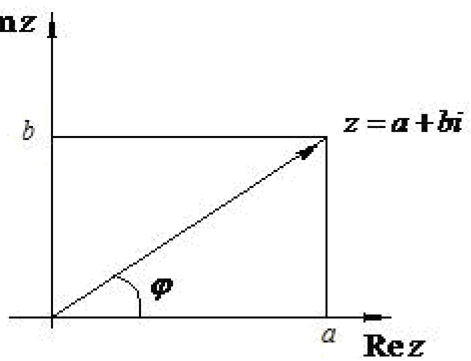
«Действия над комплексными числами в тригонометрической форме»

Цель работы: научиться производить действия с комплексными числами в тригонометрической форме

Краткая теория:

Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = a + bi$ на комплексной плоскости изображается точкой с координатами $(a\,;b)$ или радиус-вектором с теми же координатами.



Тогда каждому комплексному числу $z = a + bi$ можно поставить в соответствие его *модуль* $z = |z|$ и *аргумент* $\varphi = \arg z$.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{и} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r};\ \cos\varphi = \frac{a}{r} \qquad (1)$$

Из формул (1) выразим a и b:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

(2)

Подставив (2) в (1), можно перейти от алгебраической формы комплексного числа к новой записи комплексного числа

$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Следовательно,

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (3)$$

Формула (3) называется *тригонометрической формой комплексного числа.* Заметим, что комплексные числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число,
кратное 2л.

Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть даны два числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Тогда их произведение можно найти по формуле:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \qquad (4)$$

т.е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. Формула (5) имеет место для любого конечного числа сомножителей: если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \ldots, z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$, то

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)) \qquad (5)$$

Деление комплексных чисел в тригонометрической форме производится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (6)$$

т.е модуль частного двух комплексных чисел z_1 z_2 равен частному модулей, а аргумент частного – разности аргументов. Применяя формулу (6) к частному случаю $z_1 = 1, \quad z_2 = z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, найдём тригонометрическую форму *обратного числа* z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \qquad (7)$$

Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме

Если $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то формула (5) принимает вид

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (8)$$

Формула (8) называется *формулой Муавра*. Она показывает, что для возведения комплексного числа в натуральную степень нужно возвести в эту степень его модуль, а аргумент умножить на показатель степени. Если $|z| = 1$, то формула (8) принимает вид

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \qquad (9)$$

Извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме

Корнем n-ой степени, $n \in N, n \geq 2,$ *из числа z* такое комплексное число *u*, для которого $u^n = z$. Операция нахождения корней *n*-ой степени из комплексного числа *z* называется *извлечением корня n-ой степени* из числа z и результат её обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда корни *n*-ой степени из числа *z* будем вычислять по следующей формуле:

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n}\right), \qquad (10)$$

где $k = 0,1,2,\ldots n-1$, и все эти значения различны.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Найти тригонометрическую форму числа $z = 2 + 2i$.

Решение: имеем $r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Находим $\arg z : tg\varphi = \frac{2}{2} = 1$, и так как $z = 2 + 2i$ находится в первом квадранте, то берем $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Итак, $2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

Пример 2. Найти тригонометрическую форму числа $z = -\sqrt{3} + i$.

Решение: имеем $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$. Находим φ: $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}$, следовательно, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Итак, $-\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{5}{6}\pi + i\ \sin\frac{5}{6}\pi)$.

Пример 3. Умножить числа: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение: $z_1 z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Пример 4. Даны числа $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$.

Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} - i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

Пример 5. Найти число, обратное к $z = 6(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Решение: Согласно формуле (8) получим

$$z^{-1} = \frac{1}{6}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)) = \frac{1}{6}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{12} - i\frac{\sqrt{2}}{12}$$

Пример 6. Вычислить $(1+i)^{30}$.

Решение: чтобы воспользоваться формулой Муавра, найдём тригонометрическую форму числа $1+i$. Имеем $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда

$$(1+i)^{30} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{30} = \left(\sqrt{2}\right)^{30}\left(\cos\frac{30\pi}{4} + i\sin\frac{30\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^{15}\left(\cos\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(6\pi + \frac{6\pi}{4}\right)\right) = 2^{15}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2^{15}\cdot i.$$

Пример 7. Вычислить $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$.

Решение: имеем: $z = \sqrt{3} - i;\ |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2;$

$\sin\varphi = -\frac{1}{2};\ \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \Rightarrow\ \varphi = \frac{11}{6}\pi$. Тогда $z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$. Отсюда по формуле (11) получим:

$$u_k = \sqrt[6]{\sqrt{3}-i} = \sqrt[6]{2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi\kappa}{6} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6} + 2\pi\kappa}{6}\right),$$

где $\kappa = 0,1,2,3,4,5$. Тогда получаем

$$u_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}\right), \qquad u_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}\right),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}\right), \qquad u_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}\right),$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}\right), \qquad u_5 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{71\pi}{36} + i\sin\frac{71\pi}{36}\right).$$

Геометрическая интерпретация корней $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ дана на рисунке, откуда видно, что числа изображаются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиусом $r = \sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат.

Пример 8. Найти $\sqrt[4]{1}$.

Решение:

$$u_k=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{4}+i\sin\frac{0+2\pi k}{4}\right)=\cos\frac{\pi k}{2}+i\sin\frac{\pi k}{2}$$

Полагая $k=0,1,2,3,$ получим:

$u_0=\cos 0+i\sin 0=1$, $\quad u_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$, $\quad u_2=\cos\pi+i\sin\pi=-1$,

$u_3=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$.

Пример 9. Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение:

$$u_k=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)=\cos\frac{\pi+4\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}$$ Полагая,

$k=0,1,2,$ получим: $u_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $\quad u_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$;

$u_2=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$.

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Привести число $z=15-15\sqrt{3}\,i$ в тригонометрическую форму;
2. Представить в алгебраической форме число $z=6(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi)$;
3. Выполнить умножение комплексных чисел $z_1\cdot z_2$:

$$z_1=10(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi);\quad z_2=\frac{1}{5}(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)\quad;$$

4. Выполнить деление комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$:

$$z_1=4(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi);\quad z_2=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})\quad;$$

5. Вычислить, используя формулу Муавра: $\left(6(\cos\frac{7}{8}\pi+i\sin\frac{7}{8}\pi)\right)^4$;
6. Извлечь корень из комплексного числа $\sqrt[3]{-125}$

Вариант 2

1. Привести число $z=-5+5i$ в тригонометрическую форму;
2. Представить в алгебраической форме число $z=3\sqrt{2}(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi)$;
3. Выполнить умножение комплексных чисел $z_1\cdot z_2$:

$$z_1=\sqrt{3}(\cos 92^0+i\sin 92^0);\quad z_2=\sqrt{6}(\cos 88^0+i\sin 88^0)\quad;$$

4. Выполнить деление комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$:

$$z_1=\sqrt{6}(\cos\frac{11}{9}\pi+i\sin\frac{11}{9}\pi);\quad z_2=\sqrt{3}(\cos\frac{8}{9}\pi+i\sin\frac{8}{9}\pi)\quad;$$

5. Вычислить, используя формулу Муавра: $\left(\sqrt{2}(\cos 20^0 + i\sin 20^0)\right)^{12}$;
6. Извлечь корень из комплексного числа $\sqrt[3]{-64i}$

Вариант 3

1. Привести число $z = -6\sqrt{3} - 6i$ в тригонометрическую форму;
2. Представить в алгебраической форме число $z = 4(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi)$;
3. Выполнить умножение комплексных чисел $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}); \quad z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$

4. Выполнить деление комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$:

$$z_1 = 6(\cos 240^0 + i\sin 240^0); \quad z_2 = 2(\cos(-60^0) + i\sin(-60^0) \quad ;$$

5. Вычислить, используя формулу Муавра: $\left(2(\cos 15^0 + i\sin 15^0)\right)^8$;
6. Извлечь корень из комплексного числа $\sqrt[3]{64}$

Практическая работа № 25

Раздел 4. Дифференциальные уравнения
«Действия над комплексными числами в показательной форме»

Цель работы: научиться производить действия с комплексными числами в показательной форме.

Краткая теория:

Показательная форма комплексных чисел

Рассматривая комплексные числа вида $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, зависящие от действительной переменной φ и комплекснозначные функции вида $u(\varphi) = e^{i\varphi}$ ($e \approx 2{,}71828...$), Л. Эйлер заметил, что относительно операций умножения и дифференцирования эти выражения имеют одни и те же свойства, т.е. они представляют модели одной и той же логической структуры:

$$z(\varphi_1)z(\varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = z(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$u(\varphi_1)u(\varphi_2) = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i\varphi_1 + i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = u(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$z'(\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)' = -\sin\varphi + i\cos\varphi = i^2\sin\varphi + i\cos\varphi = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = iz(\varphi)$$

$$u'(\varphi) = \left(e^{i\varphi}\right)' = ie^{i\varphi} = iu(\varphi)$$

Таким образом, выражения $e^{i\varphi}$ и $\cos\varphi + i\sin\varphi$ имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим Эйлер предложил формулу

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (1)$$

которая теперь известна как ***формула Эйлера.***

Пусть дано комплексное число в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Применяя формулу Эйлера, получим

$$z = re^{i\varphi}, \qquad (2)$$

которая называется ***показательной формой комплексного числа***.

Действия над комплексными числами в показательной форме

Пусть даны два комплексных числа в показательной форме

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Тогда их произведение и частное могут быть найдены по формулам:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \qquad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (4)$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$; тогда операции возведения в степень и извлечения корня выполняются по формулам:

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi} \qquad (5)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k)/n}, \qquad (6)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Найти показательную форму чисел: 1) $z_1 = 1 + i$; 2) $z_2 = -\sqrt{3} - i$

Решение:

1) Находим $r = |z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$, следовательно, $z_1 = 1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}$.

2) Находим $r=|z_2|=2$, $\varphi_2=\dfrac{7}{6}\pi$, следовательно, $z_2=-\sqrt{3}-i=2e^{\frac{7}{6}\pi i}$

Пример 2. Найти алгебраическую форму чисел:

1) $z_1=2e^{\frac{\pi}{3}i}$; 2) $z_2=3e^{-\frac{\pi}{6}\pi i}$; 3) $z_3=e^{-3+4i}$.

Решение:

1) Имеем $z_1=2e^{\frac{\pi}{3}i}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$.

2) Имеем $z_2=3e^{-\frac{\pi}{6}i}=3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3i}{2}$.

3) Имеем $z_3=e^{-3+4i}=e^{-3}e^{4i}=e^{-3}(\cos 4+i\sin 4)\approx 0{,}05(-0{,}65-0{,}76i)\approx -0{,}03-0{,}04i$.

Пример 3. Найти произведение z_1z_2 и частное z_1/z_2 комплексных чисел и написать результаты в алгебраической форме: а) $z_1=3e^{\frac{2}{3}\pi i}$; $z_2=6e^{\frac{\pi}{6}i}$;

Решение:

а) $z_1z_2=3e^{\frac{2}{3}\pi i}\cdot 6e^{\frac{\pi}{6}i}=18e^{\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{6}\right)i}=18e^{\frac{5}{6}i}=18\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)=18\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=-9\sqrt{3}+9i$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3e^{\frac{2}{3}\pi i}}{6e^{\frac{\pi}{6}i}}=\frac{1}{2}e^{\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6}\right)i}=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{6}\pi i}=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}(0+i)=\frac{i}{2};$$

Пример 4. Вычислить z^4, $\sqrt[3]{z}$ для $z=2e^{-\frac{3}{4}\pi i}$, и представить результаты в алгебраической форме

Решение:

$$z^4=\left(2e^{-\frac{3}{4}\pi i}\right)^4=2^4e^{-3\pi i}=16e^{-3\pi i}=16(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi))=16(-1+0i)=-16$$

$$u_k=\sqrt[3]{2e^{-\frac{3}{4}\pi i}}=\sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{4}\pi+2\pi\kappa}{3}i},\ k=0,1,2.$$

$$u_0=\sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{2}\pi}{3}i}=\sqrt[3]{2}e^{-\frac{\pi}{2}i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sqrt[3]{2}(0-i)=-\sqrt[3]{2}\,i$$

$$u_1=\sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{2}\pi+2\pi}{3}i}=\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$$

$$u_2=\sqrt[3]{2}e^{\frac{-\frac{3}{2}\pi+4\pi}{3}i}=\sqrt[3]{2}e^{\frac{5\pi}{6}i}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}i$$

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Дано число $z=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\ i$. Привести его в показательную форму;
2. Привести число $z=3e^{\frac{11}{6}\pi i}$ в алгебраическую форму;
3. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2$, если $z_1=2e^{\frac{7}{18}\pi i}$ и $z_2=4e^{\frac{5}{18}\pi i}$;
4. Найти частное чисел $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=6e^{\frac{3}{2}\pi i}$ и $z_2=\frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}\pi i}$;
5. Привести число $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\ i$ в показательную форму и вычислить z^{12};
6. Вычислить $\sqrt{z}$, если $z=4e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Вариант 2

1. Дано число $z=3+\sqrt{3}\ i$. Привести его в показательную форму;
2. Привести число $z=4e^{\frac{5}{3}\pi i}$ в алгебраическую форму;
3. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2$, если $z_1=4e^{\frac{\pi}{6}i}$ и $z_2=2e^{\frac{\pi}{12}i}$;
4. Найти частное чисел $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=5e^{\frac{5}{6}\pi i}$ и $z_2=\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$;
5. Привести число $z=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\ i$ в показательную форму и вычислить z^6;
6. Вычислить $\sqrt[3]{z}$, если $z=8e^{\pi i}$.

Вариант 3

1. Дано число $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\ i$. Привести его в показательную форму;
2. Привести число $z=6e^{\frac{3}{4}\pi i}$ в алгебраическую форму;
3. Найти произведение чисел $z_1\cdot z_2$, если $z_1=2e^{\frac{5}{12}\pi i}$ и $z_2=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{3}i}$;
4. Найти частное чисел $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=\frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}\pi i}$ и $z_2=\frac{1}{6}e^{\frac{7}{6}\pi i}$;
5. Привести число $z=-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}\ i$ в показательную форму и вычислить z^3;
6. Вычислить $\sqrt{z}$, если $z=9e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Практическая работа №26

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

«Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными»

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Определение дифференциального уравнения 1-го порядка. Общее и частное решение

Краткая теория:

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

т.е. содержит независимую переменную *x,* искомую функцию *y(x)* и её производную *y′(x)*. Разрешая уравнение (1), если это возможно, относительно производной y' получим

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

Иногда уравнения (1), (2) записывают в дифференциалах:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (3)$$

Дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его *частным решением*. Для многих дифференциальных уравнений первого порядка *общее решение* можно задать формулой вида:

$$y = y(x, C) \qquad (4)$$

где *C* - произвольная постоянная такая, что при любом *C* функция (4) является частным решением дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых *интегральными кривыми*, а каждое частное решение представляет собой отдельную интегральную кривую. Иногда не удаётся получить решения дифференциального уравнения в явной форме, т.е в виде $y = y(x, C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задаётся формулой вида:

$$\Phi(y, x, C) = 0 \qquad (5)$$

Выражение типа $\Phi(x, y, C) = 0$ в этом случае называют *интегралом* (*частным*, *общим*) дифференциального уравнения.

Задача Коши

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y$, где x_0, y_0 - заданные числа. Задача Коши кратко записывается так:

$$y' = \begin{cases} f(x, y); \\ y = y_0 \quad \text{при } x = x_0. \end{cases} \qquad (6)$$

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0; y_0)$.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (2) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \qquad (7)$$

В предположении, что $f_2(y) \neq 0$, уравнение с разделяющимися переменными (7) можно переписать в виде (разделить переменные):

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{8}$$

Уравнение вида (8) называется *уравнением с разделёнными переменными*.

Теорема 1. Если существуют интегралы $\int \frac{dx}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)dx.$, то общий интеграл уравнения с разделёнными переменными (8) задаётся уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C, \tag{9}$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ - некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные (с учётом условий, когда это можно делать);
2) проинтегрировать почленно полученное уравнение с разделёнными переменными;
3) найти его общий интеграл уравнения;
4) выяснить, имеет ли уравнение (5) решения, не получающиеся из общего интеграла;
4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (в случае задачи Коши).

Пример по выполнению практической работы

Пример 1. Найти частное решение уравнения:

$$\begin{cases} 2yy' = 1 - 3x^2; \\ y_0 = 3 \quad \text{при} \quad x_0 = 0; \end{cases}$$

Решение: это уравнение с разделяющимися переменными. Представим его в дифференциалах. Учитывая, что $y' = \frac{dx}{dy}$, получим: $2y\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$. Разделим переменные: $2ydy = (1-3x^2)dx.$ Интегрируя обе части последнего равенства, найдём $\int 2ydy = \int (1-3x^2)dx,$ т.е. $y^2=x-x^3+C$. Подставив начальные значения $x_0=1$, $y_0=3$, найдём C: $9=1-1+C$, т.е. $C=9$. Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2=x$---x^3+9, или $x^3+y^2-x-9=0$.

Задания для практического занятия

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $(x+1)ydx = dy$; б) $(y-1)^2dx + (1-x)^3dy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частные решения дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} x^2dy = y^2dx \\ y = 0{,}25 \;\; \text{при} \;\; x = 0{,}1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x\sqrt[3]{y}dx + (1-x^2)dy = 0 \\ y = 1 \;\; \text{при} \;\; x = 0 \end{cases}$.

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $2xdx = 3y^2dy$;   б) $x\sqrt{9-y^2}dx - y\left(4+x^2\right)dy = 0$

2. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} \frac{dy}{3x} - \frac{dx}{2y} = 0 \\ y = 5 \;\; при \;\; x = 4 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} ydx - \left(4+x^2\right)\ln ydy = 0 \\ y = 1 \;\; при \;\; x = 2 \end{cases}$;

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений

а) $x^3dy - y^3dx = 0$;   б) $\cos x\cos ydx - \sin x\sin ydy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} y' = \frac{y}{2\sqrt{x}} \\ y = e^2 при \;\; x = 9 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} y^2dx = e^xdy \\ y = 1, если \;\; x = 0 \end{cases}$;

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциальных уравнений:

а) $y' = x^2y - x^2$;   б) $\sin^2 y \cdot ctgxdx + \cos x \cdot tgydy = 0$;

2. Решить задачу Коши (найти частное решение дифференциальных уравнений):

а) $\begin{cases} y'\sqrt{x} = 1 + y^2 \\ y = 0 \;\; при \;\; x = 4 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} (1+x)ydx + (1-y)xdy = 0 \\ y = 1, если \;\; x = 1 \end{cases}$.

Практическая работа № 27

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

«Решение дифференциальных уравнений второго порядка»

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка

Краткая теория:

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае записывается в виде:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (1)$$

или, если это возможно, в разрешённом относительно y'' виде

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

Говорят, что формула $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ представляет ***общее решение*** дифференциального уравнения второго порядка (1) или (2), если для любых значений C_1' и C_2' постоянных C_1 и C_2 функция $\varphi(x, C_1', C_2')$ является решением данного уравнения, и любое его ***частное решение*** может быть получено из формулы $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ при некоторых значениях C_1' и C_2' .

Для дифференциальных уравнений второго порядка ***задача Коши*** формулируется следующим образом: найти решение *y = y(x)* уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ или, в другой записи,

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \\ y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y_0'. \end{cases} \qquad (3)$$

где x_0, y_0, y_0' - заданные числа. Геометрически общее решение уравнения (1) или (2) представляет собой семейство интегральных кривых, а решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку $(x_0\,; y_0)$ в данном направлении – угловой коэффициент касательной к интегральной кривой (графику решения *y = y(x)*), проведённой в точке $(x_0$; $y_0)$ равен данному числу y_0'. Простейшее уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' = f(x)\,. \qquad (4)$$

Уравнения этого вида называются ***уравнениями, допускающими понижение порядка*** и решаются двукратным интегрированием: полагаем $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$ и уравнение (4) принимает вид $p' = f(x)$, или *dp=f(x) dx*. Отсюда $p = \int f(x)dx = F(x) + C_1$, где *F(x)* – одна из первообразных для функции f(x). Так как $p = y'$, то $y' = F(x) + C_1$ или $dy = (F(x) + C_1)dx$. Отсюда, интегрируя ещё раз, находим, как нетрудно проверить, общее решение уравнения (4) (в области, где существуют рассматриваемые интегралы): $y = \int F(x)dx + C_1 x + C_2$

Уравнение вида $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, (5)

где a_0, a_1, a_2 - действительные числа $(a_0 \neq 0)$, называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами***. Чтобы решить уравнение (5), нужно решить характеристическое уравнение:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (6)$$

При решении характеристического уравнения (6) возможны три случая, в зависимости от которых строится общее решение данного дифференциального уравнения (5)

Корни уравнения (6)	Частные решения уравнения (5)	Общее решение уравнения (5)
Действительные и различные: $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Равные: $k_1 = k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = x e^{k_1 x}$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
Комплексно сопряжённые: $\alpha \pm \beta i$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$; $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Примеры по выполнению практической работы

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = \cos 2x$.
Решение: положим $y' = p(x)$; тогда $y'' = p'$, и, следовательно, $p' = \cos 2x$ или $dp = \cos 2x dx$. Интегрируя это уравнение, находим: $p = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$. Т.к. $p = y'$, то $y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$, $dy = \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 dx.$ Интегрируя второй раз, имеем общее решение: $\int dy = \int \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 \int dx,$ т.е.

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x + C_2.$$

Пример 2. Дана задача Коши: $\begin{cases} y'' = \frac{3}{\sqrt{x}}; \\ y = 4,\ y' = 14 \ \text{при}\ x = 4. \end{cases}$

Решение: Положим $p = y'$, тогда $y'' = p'$ и получим следующее уравнение: $p' = 3x^{-\frac{1}{2}}$ или $dp = 3x^{-\frac{1}{2}}dx$. Интегрируя, получим $p = y' = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то получим следующее: $\dfrac{dy}{dx} = 6x^{\frac{1}{2}} + C_1$ или $dy = (6x^{\frac{1}{2}} + C_1)dx$. Интегрируя почленно, получим $y = 4\sqrt{x^3} + C_1x + C_2$ - общее решение. Наложим начальные условия. Тогда $y(4) = 4 \cdot 4^{\frac{3}{2}} + C_1 \cdot 4 + C_2 = 4$ $y'(4) = 6 \cdot 4^{\frac{1}{2}} + C_1 = 14$. Отсюда имеем, что $C_1 = 2, \quad C_2 = -36$. Значит, частное решение следующее: $y = 4\sqrt{x^3} + 2x - 36.$

Пример 3. Найти общее решение уравнений:

а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

Решение: а) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$. Его корни $\kappa_1 = 2$ и $\kappa_2 = -1$. Значит, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

б) Составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$.Его корни $\kappa_1 = \kappa_2 = -3$. Тогда общее решение имеет вид $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$.

Пример 4. Найти решение задачи Коши: $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 6, \; y'(0) = 15$

Решение: составим характеристическое уравнение: $\kappa^2 - 4\kappa + 5 = 0$. Решая его, получим $D = -4$ и комплексно сопряжённые корни $k_1 = 2 - i$ и $k_2 = 2 + i$. Тогда его общим решением будет $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Подставим начальное условие: $y(0) = e^{2\cdot 0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = C_1 = 6.$ Вычислим производную $y' = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$. Подставим начальное условие $y'(0) = 2e^{2\cdot 0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^{2\cdot 0}(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 2C_1 + C_2 = 2 \cdot 6 + C_2 = 15$. Откуда имеем $C_2 = 3, \; \Rightarrow y = e^{2x}(6\cos x + 3\sin x)$ - частное решение.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' = \dfrac{1}{x^2}.$

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = \sin x; \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi, \; y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t) = 12t - 1$ (ускорение - *м/с²*, время - *сек*). Начальное положение тела $x(0) = 0$ и начальная скорость $v(0) = 10 м/с$. Найти закон движения тела и путь, пройденный за 3 секунды;

4. Найти общее дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + 5y = 0.$

5 .Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 10y' + 16y = 0; \\ y = 4; y' = 26, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 8y' + 20y = 0; \\ y = 2; y' = 8, \quad при \quad x = 0. \end{cases}$

Вариант 2

1.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' = x^2 + 1$

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = -3cosx; \\ y(\pi) = 5\pi, y'(\pi) = 5. \end{cases}$

3. Из семейства интегральных кривых уравнения $y'' = 12x^2$ выделить ту, которая в точке(1;1) имеет касательную с угловым коэффициентом, равным 4;

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 10y' + 9y = 0.$

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 4y' - 5y = 0; \\ y = 3, y' = -9, \text{ при } x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' - 6y' + 25y = 0; \\ y = 2; y' = 10, \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

Вариант 3

1.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' = \sin x + 1$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \\ y(1) = \dfrac{2}{3}; y'(1) = 2. \end{cases}$

3. Из семейства интегральных кривых уравнения $y'' = 6(1 - x)$ выделить ту, которая в точке (1; 5) имеет касательную с углом наклона к оси ОХ, равным $\dfrac{\pi}{4}$.

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 7y' + 12y = 0$.

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 4y' - 32y = 0; \\ y = 8, y' = -4, \text{ при } x = 0. \end{cases}$

6.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 8y' + 25y = 0; \\ y = 5; y' = 4, \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

Вариант 4

1.Найти общее решение дифференциального уравнения:

$y'' = 60x^2 - 4x + 2$.

2.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' = x^3 + 3; \\ y(1) = -2{,}45; \; y'(1) = 2{,}25. \end{cases}$

3. Ускорение тела, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $a(t) = 6t - 4$ (ускорение - *м/с²*, время - *сек*). Найти закон движения тела и путь, пройденный за 5секунд; если через 2 секунды после начала движения $v = 6 м/с, \; s = 5 м$;

4.Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 9y = 0$.

5.Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = 0; \\ y = 2, y' = -3, \text{ при } \; x = 0. \end{cases}$

6. Решить задачу Коши: $\begin{cases} y'' + 4y' + 20y = 0; \\ y = 3; y' = 2, \quad \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

Основные источники:

1.Богомолов Н. В. Алгебра и начала анализа:Учебное пособие/Богомолов Н.В..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-9858-0.-200.

2. Капкаева Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление:Учебное пособие/Капкаева Л.С..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-04900-8.-246.

3. Пахомова Е. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий:Учебное пособие/Пахомова Е.Г., Рожкова С.В..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-7555-0.-110.

4. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия:Учебник и практикум/Потапов А.П..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-01061-9.-310.
5. Шипачев В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление:Учебник и практикум/Шипачев В.С..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-04547-5.-212.
Дополнительные источники:
1. Бурмистрова Е. Б. Линейная алгебра:Учебник и практикум/Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г..-М.:Издательство Юрайт,2017, ISBN 978-5-534-03684-8.-421.
2. Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения:Учебник и практикум/Муратова Т.В..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-8798-0.-435.
3. Привалов И. И. Аналитическая геометрия:Учебник/Привалов И.И..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-8774-4.-233.