МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Колледж профессионального образования

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические рекомендации
для практических работ по изучению дисциплины
для студентов Колледжа профессионального образования
специальности
09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Утверждено на заседании ПЦК
Информационных технологий
Протокол № 9 от 23.05.2018
председатель __________Н.А. Серебрякова

Пермь 2018

Составитель:

Ежова Марина Алексеевна, преподаватель высшей квалификационной категории, преподаватель ПГНИУ

Элементы математической логики: методические указания по практической работе для студентов Колледжа профессионального образования по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах и / сост. М.А. Ежова; Колледж проф. образ. ПГНИУ. – Пермь, 2018. – 16 с.

Методические указания «Элементы математической логики» разработаны на основе требований Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах для оказания помощи студентам специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах по дисциплине «Элементы математической логики». Содержат типичные практические задания по всем разделам дисциплины.

Предназначены для студентов Колледжа профессионального образования ПГНИУ специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах (СПО) всех форм обучения.

Печатается по решению педагогического совета Колледжа профессионального образования Пермского государственного национального исследовательского университета

СОДЕРЖАНИЕ

Основные понятия математической логики

Задание.
Построить таблицу истинности для формулы:

$$(p \vee \overline{r}) \leftrightarrow q$$

Решение:

В формуле 3 переменные, значит в таблице будет $2^3 = 8$ строк. Заполнение первых трёх столбцов, соответствующих переменным, стандартно:

p	r	q	…
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Исходную формулу можно заменить одной заглавной буквой из соображений, что $F = \left(p \vee \overline{r}\right) \leftrightarrow q$.

Расписываем порядок действий в формуле. Вначале действия в скобках, далее по ослаблению операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкций, импликация, эквивалентность.

p	r	q	$\overline{r}$	$p \vee \overline{r}$	F
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Заполняем таблицу, исходя из свойств операций:

p	r	q	$\overline{r}$	$p \vee \overline{r}$	F
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

Формулы алгебры высказываний

Задание 1. Упростить формулу.

$$(p \vee \overline{r}) \leftrightarrow q$$

Решение:
Используем список формул (см. Приложение 1), максимально упрощая формулу, оставляя в ней только конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание:

$$(p \vee \bar{r}) \leftrightarrow q \overset{15}{\equiv} \left((p \vee \bar{r}) \to q\right) \cdot \left(q \to (p \vee \bar{r})\right) \overset{17}{\equiv} \left(\overline{(p \vee \bar{r})} \vee q\right) \cdot \left(\bar{q} \vee (p \vee \bar{r})\right) \overset{13,1}{\equiv}$$

$$\equiv (\bar{p} \cdot r \vee q) \cdot (\bar{q} \vee p \vee \bar{r}) \overset{8}{\equiv} \bar{p} \cdot r \cdot \bar{q} \vee \bar{p} \cdot r \cdot p \vee \bar{p} \cdot r \cdot \bar{r} \vee q \cdot \bar{q} \vee q \cdot p \vee q \cdot \bar{r} \overset{21}{\equiv}$$

$$\overset{21}{\equiv} \bar{p} \cdot r \cdot \bar{q} \vee r \cdot 0 \vee \bar{p} \cdot 0 \vee 0 \vee q \cdot p \vee q \cdot \bar{r} \overset{24,25}{\equiv} \bar{p} \cdot r \cdot \bar{q} \vee q \cdot p \vee q \cdot \bar{r}.$$

Если в результате получается дизъюнкция, состоящая из элементарных конъюнкций, то получим ДНФ данной формулы.

Задание 2. Составить для формулы СДНФ

$$(p \vee \bar{r}) \leftrightarrow q$$

Решение:
Построим таблицу истинности:

p	r	q	$\bar{r}$	$p \vee \bar{r}$	F
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

Отмечаем те строки в таблицы, у которых в последнем столбце стоит «1»:

p	r	q	$\bar{r}$	$p \vee \bar{r}$	F	
0	0	0	1	1	0	
0	0	1	1	1	1	+
0	1	0	0	0	1	+
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	0	
1	0	1	1	1	1	+
1	1	0	0	1	0	
1	1	1	0	1	1	+

Рядом с «+» выписываем коньюнкцию переменные, причём ставим знак отрицания над теми из них, которые в данной строке имеют значение 0:

p	r	q	$\bar{r}$	$p \vee \bar{r}$	F	
0	0	0	1	1	0	
0	0	1	1	1	1	+ $\bar{p} \wedge \bar{r} \wedge q$
0	1	0	0	0	1	+ $\bar{p} \wedge r \wedge \bar{q}$
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	0	
1	0	1	1	1	1	+ $p \wedge \bar{r} \wedge q$
1	1	0	0	1	0	
1	1	1	0	1	1	+ $p \wedge r \wedge q$

Строим дизъюнкцию этих коньюнкций:

$$(\bar{p} \wedge \bar{r} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge r \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge \bar{r} \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q) = СДНФ \ F.$$

Если в столбце F нет «1», то пишем СДНФ F = 0.

Задание 3. Доказать эквивалентность исходной формулы и полученной ДНФ.

$$(p \vee \overline{r}) \leftrightarrow q$$

Решение:
Рассмотрим формулу, упрощенную с помощью основных равносильностей алгебры высказываний:

$$\overline{p}\cdot r\cdot\overline{q}\vee\overline{r}\cdot q\vee p\cdot q$$

Теперь упростим полученную СДНФ F.

$$(\overline{p}\cdot\overline{r}\cdot q)\vee(\overline{p}\cdot r\cdot\overline{q})\vee(p\cdot\overline{r}\cdot q)\vee(p\cdot r\cdot q)$$

По формуле 3 (свойство идемпотентности) продублируем третью скобку и, используя 11 формулу (закон поглащения), преобразуем последние две скобки:

$$(\overline{p}\cdot\overline{r}\cdot q)\vee(\overline{p}\cdot r\cdot\overline{q})\vee(p\cdot\overline{r}\cdot q)\vee p\cdot q\ .$$

Теперь снова по формуле 11 преобразуем первую и третью скобки:

$$\overline{p}\cdot r\cdot\overline{q}\vee\overline{r}\cdot q\vee p\cdot q\ .$$

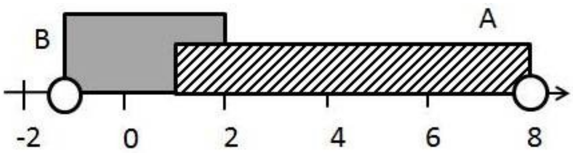
Далее упростить эту формулу нельзя.
Сравнив полученные формулы, видим, что они идентичны (порядок записи выполнения конъюнкций и дизъюнкций не имеет значения). Таким образом равносильность доказана.

Понятие множества

Задание. Выполнить операции над множествами $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $\overline{A}$.

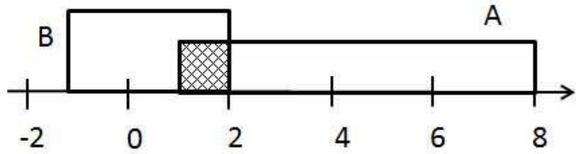
1) Операции над конечными множествами.
Даны множества $A=\{0,3,7\}$, $B=\{0,1,2,3,4,5\}$ и универсальное множество $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
Решение:
$A\cap B=\{0,3\}$ - элементы, которые присутствуют и во множестве А и во множестве В.
$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,7\}$ - элементы, которые присутствуют хотя бы в одном из двух множеств.
$A\setminus B=\{7\}$ - элементы, которые присутствуют во множестве А и не присутствуют во множестве В.
$B\setminus A=\{1,2,4,5\}$ - элементы, которые присутствуют во множестве В и не присутствуют во множестве А.
$\overline{A}=\{1,2,4,5,6,8,9\}$ - элементы, которые присутствуют в универсальном множестве U и не присутствуют во множестве А.

2) Операции над непрерывными множествами.
Даны множества $A=[1;8)$, $B=(-1;2]$. Универсальным множеством будем считать все множество действительных чисел.
Решение:
Изначальные множества:

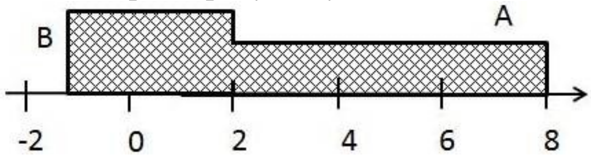


Точки {-1} и {8} выколотые, т.е. не входят в соответствующие множества.

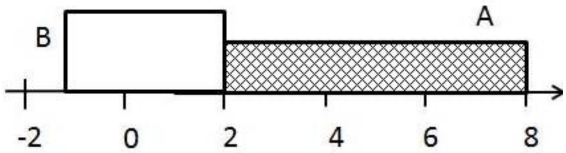
$A \cap B = [1;2]$ - элементы, которые присутствуют и во множестве А и во множестве В. Штриховкой указано результирующее множество.



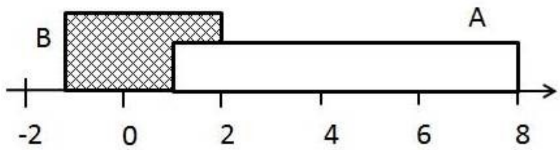
$A \cup B = (-1;8)$ - элементы, которые присутствуют хотя бы в одном из двух множеств.



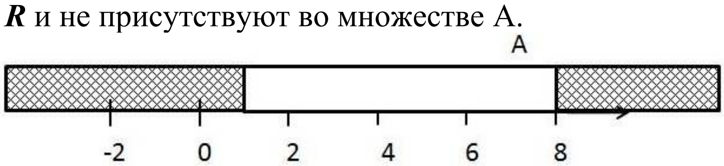
$A \setminus B = (2;8)$ - элементы, которые присутствуют во множестве А и не присутствуют во множестве В.



$B \setminus A = (-1;1)$ - элементы, которые присутствуют во множестве В и не присутствуют во множестве А.



$\overline{A} = (-\infty;1) \cup [8;+\infty)$ - элементы, которые присутствуют в универсальном множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и не присутствуют во множестве А.



Декартово произведение множеств

Задание 1. Даны два множества $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ и $B = \{0,8,9\}$. Найдите их декартово произведение $B \times A$.

Решение:
Декартовым произведением двух конечных множеств является конечное множество, состоящее из двухместных кортежей, на первом месте в которых стоит элемент из первого множества, а на втором – из второго множества. Аналогично для случая произведения трех и более множеств.
Расположим элементы декартового произведения по возрастанию элементов А:

$$B \times A = \{(0;\alpha),(8;\alpha),(9;\alpha),(0;\beta),(8;\beta),(9;\beta),(0;\gamma),(8;\gamma),(9;\gamma),(0;\delta),(8;\delta),(9;\delta)\}$$

Задание 2. Даны два множества $A = [2;\ 3]$ и $B = [-1;\ 6]$. Найдите их декартово произведение $A \times B$.
Решение:
Прямым произведение двух множеств, одно или два из которых бесконечно, является часть координатной плоскости, все точки которой подчинены правилу: первая координата (x) – из первого множества, вторая координата (y) – из второго множества.

$$A \times B = \{(x,y) \in R^2 | \ 2 \le x \le 3, -1 \le y \le 6 \ \}.$$

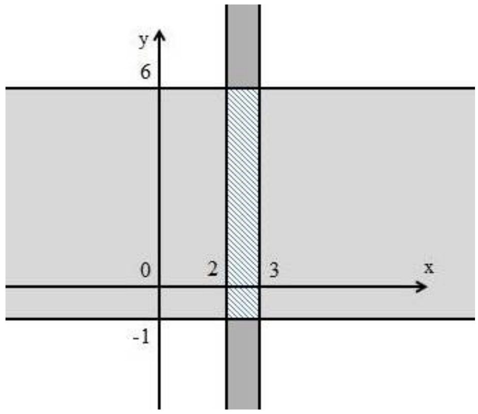
Построим координатную плоскость с расчетом, по оси Ох нужны значения 2 и 3, по оси Оу: -1 и 6 (масштаб важен).

Все точки плоскости, у которых первая координата между 2 и 3, содержатся в вертикальной полосе. Проведем эту полосу на координатной плоскости.

Все точки плоскости, у которых вторая координата между -1 и 6, содержатся в горизонтальной полосе. Проведем эту полосу на координатной плоскости.

В пересечении получим прямоугольник.

Графическое изображение:



Так как все границы промежутков включаются в интервалы, то на рисунке все границы изображаются как сплошные линии. По той же причине вершины прямоугольника также являются частью решения (т.к. обе координаты каждой вершины входят в интервалы).

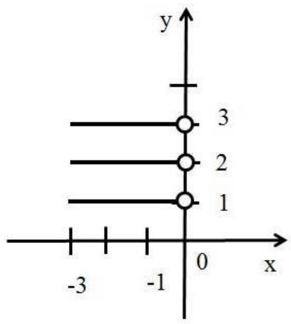
Результатом решения является изображение прямоугольника, у которого:

- сплошные границы
- вершины входят в результат
- внутренняя часть заштрихована.

Задание 3. Даны два множества $A = [-3;0)$ и $B = \{1;\ 2;\ 3\}$. Найдите их декартово произведение $A \times B$.

Решение:

$$A \times B = \{(x,y) \in R^2 | -3 \le x < 0, y \in \{1,2,3\} \ \}.$$



Построим координатную плоскость с расчетом, по оси Ох нужны значения -3 и 0, по оси Оу: 1, 2 и 3 (масштаб важен).

Все точки плоскости, у которых первая координата между -3 и 0, содержатся в вертикальной полосе. Все точки плоскости, у которых вторая координата 1, 2 или 3, содержатся в трех бесконечных горизонтальных линиях.

В пересечении этих двух условий, получим три горизонтальных отрезка.

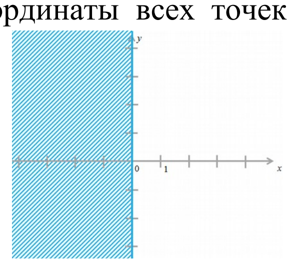
Графическое изображение:

Так как число «0» не входит во множество А, значит, точки (0; 1), (0; 2) и (0; 3) не входят в итоговое множество – выколотые точки. Число «-3» входит во множество А, значит, точки (-3; 1), (-3; 2) и (-3; 3) являются частью решения – их можно выделить, а можно не выделять.

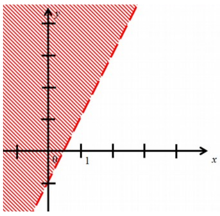
Задание 4. Найдите декартово произведение $\{(x,y) \in R^2 | x \le 0, y > 2x - 1, x^2 + y^2 \le 9 \ \}.$

Решение:

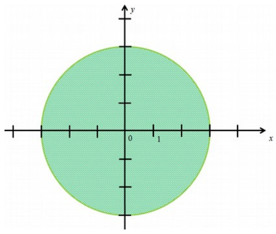
Результатом решения является часть координатной плоскости, координаты всех точек которой подчиняются трем условиям, указанным в задании:



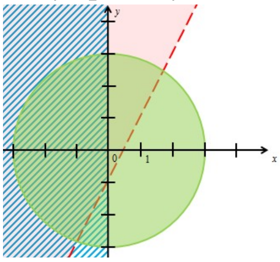
- $x \le 0$ – полуплоскость, левая часть координатной плоскости, включая ось Оу, т.к. x может равняться 0;



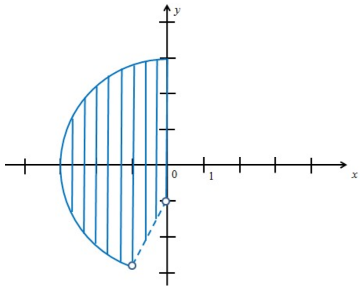
- $y > 2x - 1$ – полуплоскость, расположенная выше (знак больше) прямой y = 2x – 1, сама прямая изображается пунктирной линией, т. к. не входит в решение (строгое равенство);



- $x^2 + y^2 \le 9$ - часть плоскости, заключенная внутри (знак меньше) окружности с уравнением $x^2 + y^2 = 9$ (радиус равен 3), включая саму границу.



Совместим все три условия на одном изображении. Выделим ту часть плоскости, в которой имеются все три вида штриховки:



Линия окружности и линия по оси Оу сплошные, т.к. эти границы включены в результирующее множество. Линия – часть прямой – изображена штриховкой, т.к. эта граница не включена. Точки пересечения прямой и других границ выколотые, т.к. все точки прямой не являются частью итогового изображения. Фигура заштрихована.

Бинарные отношения

Задание 1. Дано множество $M = \{1,2,3,4,5\}$ и бинарное отношение $\rho = \{(a;b) \mid (a-b) - \text{нечетное число}\}$. Построить матрицу этого отношения.

Решение:

Построим матрицу для отношений на множестве элементов M:

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Теперь проверим, с какими элементами элемент 1 находится в отношении ρ:

1 – 1 = 0 – не является нечётным, т.е. (1, 1) не находится в отношении ρ.

1 – 2 = -1 – нечётное число, т.е. (1, 2) находится в отношении ρ.

1 – 3 = -2 – не является нечётным, т.е. (1, 3) не находится в отношении ρ.

1 – 4 = -3 – нечётное число, т.е. (1, 4) находится в отношении ρ.

1 – 5 = -4 – не является нечётным, т.е. (1, 5) не находится в отношении ρ.

Соответственно заполним первую строку таблицы:

	1	2	3	4	5
1	-	+	-	+	-
2					
3					

4					
5					

Вместо «+» и «-» можно ставить «1» и «0», соответственно.

Аналогично заполним таблицу для других элементов:

	1	2	3	4	5
1	-	+	-	+	-
2	+	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	+
5	-	+	-	+	-

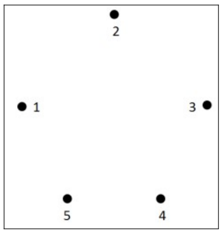
Задание 2. Дано множество $M = \{1,2,3,4,5\}$ и бинарное отношение $\rho = \{(a;b) \mid (a-b) - \textit{нечетное число}\}$. Построить ориентированный граф.

Решение:

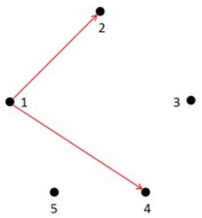
Для начала выпишем все пары элементов, состоящие в бинарном отношении:

$\rho = \{(1;2),(1;4),(2;1),(2;3),(2;5),(3;2),(3;4),(4;1),(4;3),(4;5),(5;2),(5;4)\}$

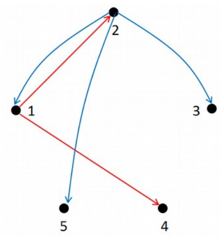
Этого можно не делать, если бинарное отношение легко определяется.



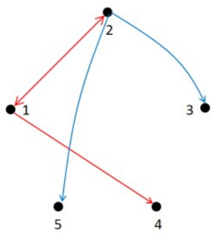
Ориентированным графом, соответствующим бинарному отношению, будет изображение, состоящее из точек-вершин (элементы множества M) и направленных отрезков-ребер (соединяют вершины, находящиеся в отношении ρ). Изобразим элементы множества M в виде точек. Можно расположить их любым способом, в том числе по кругу (см. рисунок справа).



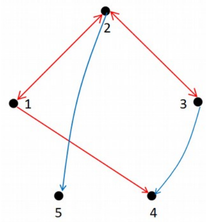
Теперь соединим вершину «1» с вершинами «2» и «4», т.к. эти пары элементов состоят в перечне ρ. Важно четко прорисовывать стрелки.



Далее соединим вершину «2» с вершинами «1», «3» и «5». Ребра могут быть одного цвета.

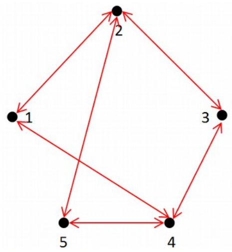


Видим, что вершины «1» и «2» соединены дважды. Поэтому можно соединить эти стрелки в одну, помня, что фактически, это два ребра.



Теперь соединим вершину «3» с вершинами «2» и «4», опять заменив две стрелки одной двойной:

Аналогично поступим с вершинами «4» и «5». В итоге получим следующее изображение:



Задание 3. Дано множество $M = \{1,2,3,4,5\}$ и бинарное отношение $\gamma = \{(a,b) |\ a + b = 7\}$.

Определить свойства бинарного отношения.

Решение:

1) Определим рефлексивно ли отношение γ. Переберем все элементы по одному:

$1 + 1 \neq 7$ – не состоит в отношении γ с самим собой,
$2 + 2 \neq 7$ – не состоит в отношении γ с самим собой,
$3 + 3 \neq 7$ – не состоит в отношении γ с самим собой,
$4 + 4 \neq 7$ – не состоит в отношении γ с самим собой,
$5 + 5 \neq 7$ – не состоит в отношении γ с самим собой.

Достаточно проверить только один элемент, который не состоит в этом отношении с самим собой, чтобы сделать вывод, что отношение γ - иррефлексивно. Иначе придется перебрать все элементы для проверки рефлексивности.

2) Определим симметрично ли отношение γ. Переберем все пары элементов, состоящих в отношении γ:

если $2 + 5 = 7$, то и $5 + 2 = 7$;
если $3 + 4 = 7$, то и $4 + 3 = 7$;
если $4 + 3 = 7$, то и $3 + 4 = 7$;
если $5 + 2 = 7$, то и $2 + 5 = 7$.

Таким образом, γ - симметричное бинарное отношение. Если при смене порядка элементов в записи любого бинарного отношения симметричность не наблюдается, то необходимо проверить бинарное отношение на антисимметрию, прежде чем указать асимметрию.

3) Определим транзитивно ли отношение γ. Запишем все пары элементов, находящиеся в отношении γ:

$$\gamma = \{ (2,5) , (3,4) , (4,3) , (5,2) \}$$

Выберем любую пару: (3,4) – это пара $(a\pi b)$, т.е. a = 3, b = 4.

Теперь подберем другую пару из γ, начинающуюся с b=4. Это (4,3) - $(b\pi c)$, т.о. b=4, c=3.

Составим, согласно определению, третью пару из элементов $(a\pi c)$: (3,3). Такой скобки в γ нет. Значит, γ - интранзитивно.

Для определения транзитивности необходимо перебрать всевозможные случаи.

Общий вывод по примеру: γ - иррефлексивно, симметрично и интранзитивно.

Понятие предиката

Задание 1. Определить, является ли выражения предикатами:

«Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$»;

«$x^2 + 2x + 4$» ($x \in R$)

Решение:

«Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$»

Данное высказывание

- Имеет смысл
- Содержит символ «=», а так же предикат всеобщности «Для всех … чисел»
- Является ложным, так как не более двух действительных чисел могут быть корнями равенства, т.е. равенство выполняется не для всех действительных чисел

Вывод: это предикат.

$$«x^2 + 2x + 4» \ (x \in R)$$

Данное высказывание

- Не содержит «=» или аналогичного символа соотношения
- Не может быть ни ложным, ни истинным
- Не выражает свойства объекта (квадратный многочлен может быть вычислен, но это не свойство для x)

Вывод: это не предикат.

Задание 2. Для высказывания найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей:

«А. С. Пушкин — великий русский поэт»

Решение:

Создадим 2-местный предикат:

S(a,b) = и $\leftrightarrow$ «a. С. Пушкин — великий b поэт»

a пробегает множество всех букв русского алфавита

b $\in$ {русский, немецкий, китайский, атлантический}

Задание 3. Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами:

а) «x кратно 3», M= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};

б) «$x^2 + 4 > 0$», M= R;

в) «x_1 делит x_2», M1 = M2 = {2, 3, 4, 6};

Решение:

а) I_P = {3, 6, 9} / множество истинности или область истинности; название предиката – P – произвольное

б) I_Q = M / т.к. данное неравенство выполняется при любых действительных числах

в) I_K = { (2,4) , (2,6) , (3,6) } / пары чисел, которые при подстановке дают истинное высказывание

Термин «делит» обозначает «является делителем».

Предикатная формула

Задание 1. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

а) $\forall x \ \exists y \ (x + y = 7)$;

б) $\forall b \ \exists a \ \forall x \ \{x^2 + ax + b > 0\}$;

Решение:

а) $\forall x \ \exists y \ (x + y = 7)$;

Читаем согласно пониманию кванторов: «*Для каждого числа **x** существует число **y** такое, что сумма чисел **x** и **y** равна 7*»

Перефразируем: «*Для каждого **x** найдётся число **y** такое, что их сумма составляет 7*»

Теперь избавимся от символов ***x*** и ***y***: «*Для каждого числа найдётся второе такое, что их сумма составляет 7*».

Проверим истинность этой фразы. Действительно, для любого ***x*** найдётся такое ***y*** =7–***x***, что ***x*** + ***y*** = 7.

Вывод: высказывание истинное.

б) $\forall b \ \exists a \ \forall x \ \{x^2 + ax + b > 0\}$

В данном примере сразу 3 переменные и для простоты оставим числа a, b и x, как и само неравенство.

«Для любого коэффициента b найдется такой коэффициент a, что для любого x выполняется неравенство $x^2 + ax + b > 0$»

Для определения истинности или ложности, необходимо определить, действительно ли для произвольного b можно подобрать число a, чтобы неравенство выполнялось всегда.

Неравенство будет выполняться всегда, если при решении соответствующего уравнения не будет действительных корней (дискриминант меньше 0):

$x^2 + ax + b = 0.$

$D = a^2 – 4b$

$a^2 – 4b < 0.$

$a^2 < 4b$

Данное неравенство не решаемо для отрицательных b.

Таким образом, изначальное высказывание ложное.

Применение логики предикатов

Задание. Используя интерпретацию предикатов, записать определение параллельности прямых в пространстве.

Интерпретация предикатов – объекты трехмерного евклидова пространства.

T(x) = 1 ↔ «x является точкой»

Pr(x) = 1 ↔ «x является прямой»

Pl(x) = 1 ↔ «x является плоскостью»

L(x,y) = 1 ↔ «x лежит на/в y»

Решение:

Две прямые являются параллельными, если они не пересекаются и через них можно провести плоскость.

Перефразируем определение, чтобы соотнести с имеющимися предикатами. Две прямые являются параллельными, если

- не существует точки, общей для обеих прямых,
- существует плоскость, в которой лежат эти прямые.

Пусть A(x,y) = 1 ↔ «x параллельно y» (не важно, чем являются объект x и объект y)

Прямая ***x*** и прямая ***y*** являются параллельными	$Pr(x) \wedge Pr(y) \wedge A(x,y)$
не существует точки ***k***, которая лежит на прямой ***x*** и которая лежит на прямой ***y*** одновременно	$\neg (\exists k\ T(k) \wedge L(k,x) \wedge L(k,y))$
существует плоскость ***m***, в которой лежит прямая ***x*** и в которой лежит прямая ***y*** одновременно	$\exists m\ Pl(m) \wedge L(x,m) \wedge L(y,m)$

Теперь соединим все три части, помня, что определение – это, по сути, эквивалентность термина и его описания. Также знаем, что определение параллельности действует на любых прямых:

$$\forall x\ \forall y\ Pr(x) \wedge Pr(y) \wedge [\ A(x,y) \leftrightarrow \neg \{ \exists k\ T(k) \wedge L(k,x) \wedge L(k,y) \} \wedge \{ \exists m\ Pl(m) \wedge L(x,m) \wedge L(y,m) \}\ ]$$

Префиксная нормальная формула

Задание. Записать ПНФ для предикатной формулы

$$\overline{\forall x([\forall y P(y) \wedge Q(x)] \wedge \forall z[R(x) \wedge K(y,z)])}$$

Решение:

В данной формуле есть связные переменные: $\boldsymbol{x}$, первое вхождение $\boldsymbol{y}$, и $\boldsymbol{z}$ (на них распространяется действие соответствующих кванторов), и свободные - второе вхождение $\boldsymbol{y}$ (у него нет соответствующего квантора).
Видим, что второе включение переменной $\boldsymbol{y}$ не зависит от первого включения. Значит, это повторение переменной, которое следует избежать путем замены:

$$\forall x\,(\overline{[\forall yP(y) \wedge Q(x)] \wedge \forall z[R(x) \wedge K(t,z)]})$$

Преобразуем формулу согласно свойствам операций над предикатами и формулам преобразования (см. Приложение 1):

$$\forall x\,(\overline{[\forall yP(y) \wedge Q(x)] \wedge \forall z[R(x) \wedge K(t,z)]}) \overset{12}{=}$$

$$\overset{12}{=} \forall x\left(\overline{\forall yP(y) \wedge Q(x)} \vee \overline{\forall z[R(x) \wedge K(t,z)]}\right) \overset{13}{=}$$

$$\overset{13}{=} \forall x\left(\overline{\forall yP(y)} \vee \overline{Q(x)} \vee \exists z[\overline{R(x)} \vee \overline{K(t,z)}]\right) =$$

$$= \forall x\left(\exists y\overline{P(y)} \vee \overline{Q(x)} \vee \exists z[\overline{R(x)} \vee \overline{K(t,z)}]\right) =$$

$$= \forall x\exists y\exists z\left(\overline{P(y)} \vee \overline{Q(x)} \vee \overline{R(x)} \vee \overline{K(t,z)}\right)\cdot$$

Данная формула не имеет повторяющихся переменных, все её кванторы вынесены вперёд, формула в скобках не содержит импликации и составных формул под знаком отрицания, т.е. она записана в приведённой/префиксной форме.

Основные равносильности алгебры высказываний

1. $\overline{\overline{x}} = x$

2. $x \wedge x = x$ - закон двойного отрицания

3. $x \vee x = x$ идемпотентность

4. $x \wedge y = y \wedge x$

5. $x \vee y = y \vee x$ коммутативность

6. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

7. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ ассоциативность

8. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

9. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ дистрибутивность

10. $x \,\&\, (y \vee x) = x$

11. $x \vee (y \,\&\, x) = x$ закон поглощения

12. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

13. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ законы де Моргана

14. $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$

15. $x \leftrightarrow y = (x \to y) \,\&\, (y \to x)$

16. $x \to y = \overline{x \,\&\, \overline{y}}$

17. $x \to y = \overline{x} \vee y$

18. $x \,\&\, y = \overline{x \to \overline{y}}$

19. $x \vee y = \overline{x} \to y$

20. $\overline{x} \wedge x = 0$

21. $\overline{x} \vee x = 1$ - закон исключенного третьего

22. $x \wedge 1 = x$

23. $x \vee 1 = 1$

24. $x \wedge 0 = 0$

25. $x \vee 0 = x$

Методическое издание

«Элементы математической логики»:

методические указания по практической работе

для студентов Колледжа профессионального образования специальности

09.02.03 Программирование в компьютерных системах и

Составитель:

Ежова Марина Алексеевна

Редактор ________________

Корректор _______________

Подписано в печать ________

Формат 60х84/16. Усл.печ.л. ______. Уч.-изд.л. ______.

Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел

Пермского государственного университета

614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография Пермского государственного университета

614990. Пермь, ул. Букирева, 15