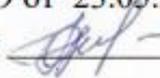


**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**
**«Пермский государственный национальный исследовательский
университет»**

Колледж профессионального образования

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические указания по самостоятельной работе
для студентов Колледжа профессионального образования
по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Утверждено на заседании ПЦК
Информационных технологий
Протокол № 9 от 23.05.2018
председатель  Н.А. Серебрякова

Пермь 2018

Составитель:

Ежова Марина Алексеевна, преподаватель высшей квалификационной категории, преподаватель ПГНИУ

Элементы математической логики: методические указания по самостоятельной работе для студентов Колледжа профессионального образования по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах / сост. М.А. Ежова; Колледж проф. образ. ПГНИУ. – Пермь, 2018. – 12 с.

Методические указания «Элементы математической логики» разработаны на основе требований Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах для оказания помощи студентам специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах по дисциплине «Элементы математической логики». Содержат самостоятельные задания по разделам дисциплины.

Предназначены для студентов Колледжа профессионального образования ПГНИУ специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах (СПО) всех форм обучения.

Печатается по решению педагогического совета Колледжа профессионального образования Пермского государственного национального исследовательского университета

СОДЕРЖАНИЕ

Введение в дисциплину	4
Основные понятия математической логики	4
Формулы алгебры высказываний	4
Основные классы функций. Полнота множества. Теорема Поста	4
Связь между теорией множеств и алгеброй высказываний	5
Понятие множества	5
Декартово произведение множеств	5
Бинарные отношения	5
Понятие предиката	6
Предикатная формула	7
Применение логики предикатов	7
Префиксная нормальная формула	7
Машина Тьюринга	7
Алгоритмы Маркова	8
Итоговый контроль	8
Приложение 1	11

Введение в дисциплину

Задание.

Найти не менее 5 электронных источников информации о каждом из разделов дисциплины: математическая логика (алгебра высказываний), теория множеств, теория предикатов (названия сайтов, ссылки на литературу).

Основные понятия математической логики

Задание 1.

Записать сложные высказывания, соответствующие формулам, если простейшее высказывание A обозначает «Зверь полосатый», а простейшее высказывание B – «Зверь хищный».

Формулы:

- $\neg A$,
- $\neg B$,
- $A \wedge B$,
- $A \vee B$.

Определить, какие из сложных высказываниях подходят зверям: тигр, волк, бурундук, заяц.

Задание 2.

Составить своё задание, аналогичное заданию 1.

Формулы алгебры высказываний

Задание. Доказать, что формулы тождественно истинные 2 способами: через таблицу истинности и через преобразования (использовать нумерацию равносильностей из Приложения 1):

- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
- $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $p \vee \bar{p}$
- $\overline{p \wedge \bar{p}}$
- $(p \wedge q) \rightarrow p$
- $\bar{\bar{p}} \rightarrow p$
- $\bar{p} \rightarrow (p \rightarrow q)$

Основные классы функций. Полнота множества. Теорема Поста

Задание 1.

Зафиксировать не менее 7 наборов логических операций, на основе которых можно составить полную систему множеств.

Задание 2.

Распределить 16 булевых функций от двух переменных по основным классам функций, указанным в теореме Поста.

Связь между теорией множеств и алгеброй высказываний

Задание.

На основе лекции составить общую таблицу, сопоставляющую теорию множеств и алгебру высказываний по критериям:

- Обозначения
- Операция «сумма»
- Операция «умножение»
- Унарная операция
- Законы дистрибутивности
- Законы поглощения
- Законы де Моргана.

Понятие множества

Задание.

Привести примеры множеств разной природы с разной мощностью:

- Мощность равна 5,
- Мощность равна 20,
- Мощность равна a ,
- Мощность равна c .

Декартово произведение множеств

Задание 1.

Составить прямое произведение для $A \times B$ и для $B \times A$, если

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$
- $A = \{0, \Delta, \square\}$, $B = \{a, b, \Delta\}$

Задание 2.

Изобразить часть плоскости, соответствующее описанному декартовому произведению:

- $\{(x, y) \in R^2 \mid x \leq 0, y \geq 0, y \leq 2x + 1\}$
- $\{(x, y) \in R^2 \mid 2 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3\}$
- $\{(x, y) \in R^2 \mid x \leq 0, y \geq 0, y \leq 3x + 2\}$

Бинарные отношения

Задание 1.

Дано множество $T = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ и бинарное отношение $\theta = \{(a, b) \mid a : b\}$ (отношение кратности, т.е. a нацело делится на b). Построить матрицу этого отношения.

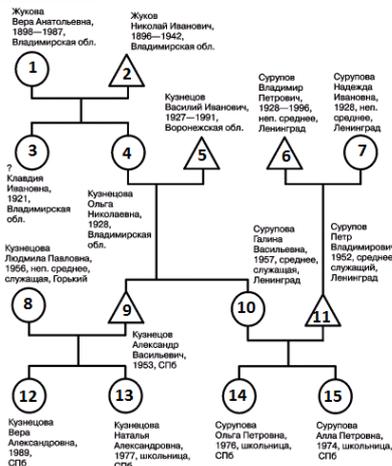
Задание 2.

Дано множество и бинарное отношение. Построить матрицу этого отношения. Перечислить все пары элементов, состоящих в этом отношении. Построить граф отношения.

- $T = \{a, б, в, г, д, е, ж\}$, $\varphi = \{(a, b) | a - \text{гласная буква}, b - \text{согласная буква}\}$.
- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\beta = \{(x, y) | x > y\}$ (Примечание: рисунок изначально делать крупным).

Задание 3.

Дано изображение генеалогического дерева О.П. Суруповой, 1992/1993 учебный год (<http://www.nir.ru/sj/sj/34-bozhkov.htm>):



Круги – женщины, треугольники – мужчины. Сверху – родители, снизу – дети (например, 1 и 2 – супруги и родители, а 3 и 4 их дети).

Составить матрицу отношения $\alpha = \{(x; y) | x - \text{мать } y \text{ (} y - \text{ребенок любого пола)}\}$ на множестве L , состоящим из 15 людей, входящих в эту семью. Перечислить все пары элементов, состоящих в этом отношении. Построить граф отношения.

Понятие предиката

Задание 1.

Определить, какие из следующих выражений являются предикатами. Указать, хотя бы 1 критерий, если выражение не предикат:

- «Река x впадает в озеро Байкал» (x пробегает множество названий всевозможных рек);
- « $x^2 + 2x + 4$ » ($x \in \mathbb{R}$);
- « x есть брат y » (x, y пробегают множество всех людей);
- « x и y лежат по разные стороны от z » (x, y пробегают множество всех точек, а z — всех прямых одной плоскости);
- « $\text{ctg } 45^\circ = 1$ »;
- « x перпендикулярна y » (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);
- «Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$ »

Задание 2.

Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных над указанными множествами.

- « x кратно 3», $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- « x кратно 3», $M = \{2, 4, 8\}$;
- « $\sin x > 1$ », $M = \mathbb{R}$;
- « $x_1 < x_2$ », $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_2 = \{3, 5, 7\}$;
- « $x_1 + x_2 < 0$ », $M_1 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $M_2 = \{-3, 1, 2\}$.

Предикатная формула

Задание 1.

Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегает множество действительных чисел:

- $(\forall x)(\exists y)(x + y = 7)$;
- $(\exists y)(\forall x)(x + y = 7)$;
- $(\forall x)(\forall y)(x + y = 7)$;
- $[(\forall x)(\forall y)(x + y = 3)] \rightarrow (3 = 4)$;
- $(\forall a) \{ [(\exists x)(ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0) \}$;

Задание 2.

Переведите на естественный язык следующие высказывания, если

- если $P(x,y) \leftrightarrow$ « x старше y » на множестве людей, $\forall x \forall y P(x, y)$
- $P(x,y) \leftrightarrow$ « x богаче y » на множестве людей, $\forall y \forall x P(x, y)$
- $P(x,y) \leftrightarrow$ « x выше y » на множестве людей, $\exists y \forall x P(x, y)$.

Применение логики предикатов

Задание.

Написать формулы, выражающие следующие утверждения, используя данные предикаты:

Предикаты:

$T(x)=и \leftrightarrow$ « x – точка»

$Пр(x)=и \leftrightarrow$ « x – прямая»

$Пл(x)=и \leftrightarrow$ « x – плоскость»

$Л(x,y)=и \leftrightarrow$ « x принадлежит y » (иначе, « x лежит на y »)

$Пп(x,y)=и \leftrightarrow$ « x параллельно y »

Утверждения:

- Через каждые 2 различные точки можно провести единственную прямую.
- Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.

Префиксная нормальная формула

Задание.

Записать ПНФ для предикатной формулы:

- $\forall x(\overline{\forall y L(y) \rightarrow N(x)}) \wedge F(z)$
- $\overline{\exists x(\forall y T(y) \rightarrow V(x))}$
- $\overline{\exists x((\forall y L(y) \wedge N(x)) \wedge \forall z(R(z) \wedge K(x, z)))}$

Машина Тьюринга

Задание.

Найти не менее 3 различных программ, воссоздающих работу Машины Тьюринга (зафиксировать ссылки и названия сайтов).

Алгоритмы Маркова

Задание.

Найти не менее 3 различных программ, реализующие действия нормальных алгоритмов Маркова (зафиксировать ссылки и названия сайтов).

Итоговый контроль

Задание.

Ответить на 4 вопроса, согласно варианту. Указывать примеры при ответе на каждый вопрос.

Распределение вопросов по вариантам:

Вариант	Вопрос 1	Вопрос 2	Вопрос 3	Вопрос 4
1	7	3	41	58
2	33	59	14	2
3	29	53	38	45
4	62	54	56	8
5	64	34	11	11
6	65	39	24	32
7	21	6	33	23
8	38	54	40	57
9	22	20	18	48
10	20	53	16	40
11	17	59	53	19
12	29	64	49	46
13	20	31	9	6
14	42	44	36	45
15	38	6	3	22
16	21	37	17	62
17	64	49	14	47
18	22	9	35	66
19	65	52	12	38
20	39	68	44	45

Вопросы для итогового контроля:

1. Что такое логика?
2. Дайте определения термина «высказывание»?
3. Как обозначается операция импликация?
4. Сколько строк в таблице истинности с тремя переменными?
5. Как обозначается операция эквивалентность?
6. Основоположником логики считают...
7. Сколько пунктов в определении формулы алгебры высказываний?
8. Когда формула алгебры высказываний называют тавтологией?
9. Как расшифровывается аббревиатура ДНФ?
10. Элементарная конъюнкция – это...

11. Сколько булевых функций от двух переменных существуют?
12. Сколько пунктов в алгоритме по поиску ДНФ?
13. Сколько формул содержится в списке «Основные равносильности алгебры высказываний» («Свойства логических операций»)?
14. Сколько полных систем булевых функций вы знаете?
15. Изобразите простейшую логическую схему.
16. Дайте определение мощности множества.
17. Сколько способов задания множеств вы знаете?
18. Сколько операций над множествами вы знаете?
19. Что означает фраза « A – подмножество B »?
20. Дать определение пересечения двух множеств.
21. Универсальное множество – это...
22. Если A – подмножество B , а B – подмножество A , то что можно сказать об этих множествах?
23. Пустое множество – это...
24. Дайте определение n -мерного вектора.
25. Если во множестве A 3 элемента, а в множестве B – 20, то в их декартовом произведении элементов...
26. Бинарные отношения – это...
27. Свойство, противоположное транзитивности.
28. Сколько свойств бинарных отношений вы знаете?
29. Дайте определение разности множеств A и B .
30. При выполнении операций над множествами скобки важны?
31. Дано множество M – все действительные числа из интервала $(0;3)$. Какова его мощность?
32. Сколько видов отображений вы знаете?
33. Можно ли найти декартово произведение двух множеств, если одно из них пустое?
34. Приведите пример симметричного бинарного отношения.
35. Приведите пример транзитивного бинарного отношения.
36. Приведите пример иррефлексивного бинарного отношения.
37. Как называется операция над высказываниями, аналогичная объединению множеств?
38. Фактор-множество – это...
39. Дополнение к универсальному множеству – это...
40. Приведите пример отношения порядка.
41. Что такое исчисление высказываний?
42. Что такое аксиома?
43. Что такое правило вывода?
44. Что такое доказательство?
45. Что такое интерпретация?
46. Какие три класса формул существуют?
47. Назовите основные правила вывода.
48. Укажите множество значений любого предиката.
49. Каково минимальное число переменных в предикате?
50. Каково максимальное число переменных в предикате?
51. Квантор всеобщности обозначается как...
52. Приведите пример предиката.
53. Квантор существования обозначается как...
54. Какие значения может принимать аргумент предиката?

55. Запишите пример тождественно истинного предиката.
56. Запишите пример тождественно ложного предиката.
57. Какие логические связки могут быть внутри предиката?
58. Запишите отрицание квантора всеобщности.
59. Приведите пример предиката с переменным значением.
60. Запишите отрицание квантора существования.
61. Сколько пунктов в определении предикатной формулы?
62. Как расшифровывается аббревиатура ПНФ?
63. Определение термина «предикат».
64. Приведите пример предикатной формулы.
65. Сколько видов равносильности формул вы знаете?
66. Элементарная формула – это...
67. Какие переменные называются свободными в формуле?
68. Какие формулы равносильны на множестве?

Основные равносильности алгебры высказываний

1. $\overline{\overline{x}} = x$ - закон двойного отрицания
2. $x \wedge x = x$
3. $x \vee x = x$ } идемпотентность
4. $x \wedge y = y \wedge x$ } коммутативность
5. $x \vee y = y \vee x$ }
6. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ } ассоциативность
7. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ }
8. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ } дистрибутивность
9. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ }
10. $x \& (y \vee x) = x$ } закон поглощения
11. $x \vee (y \& x) = x$ }
12. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ } законы де Моргана
13. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ }
14. $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$
15. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$
16. $x \rightarrow y = \overline{x \& y}$
17. $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$
18. $x \& y = \overline{x \rightarrow y}$
19. $x \vee y = \overline{\overline{x} \rightarrow y}$
20. $\overline{x} \wedge x = 0$
21. $\overline{x} \vee x = 1$ - закон исключенного третьего
22. $x \wedge 1 = x$
23. $x \vee 1 = 1$
24. $x \wedge 0 = 0$
25. $x \vee 0 = x$

Методическое издание

«Элементы математической логики»:

методические указания по практической работе
для студентов Колледжа профессионального образования специальности
09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Составитель:

Ежова Марина Алексеевна

Редактор _____

Корректор _____

Подписано в печать _____

Формат 60x84/12. Усл.печ.л. _____. Уч.-изд.л. _____.

Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел

Пермского государственного университета

614990. Пермь, ул. Букирева, 15

Типография Пермского государственного университета

614990. Пермь, ул. Букирева, 15