МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»**

Колледж профессионального образования

Элементы высшей математики

Методические рекомендации
для самостоятельных работ по изучению дисциплины
для студентов Колледжа профессионального образования
специальности
09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Утверждено на заседании ПЦК
Информационных технологий
Протокол № 9 от 23.05.2018
председатель ________Н.А. Серебрякова

Пермь 2018

Методические указания по самостоятельной работе студентов предназначены для студентов специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах для выполнения самостоятельных работ по дисциплине «Элементы высшей математики»

Разработчик: Дудина Н. А., преподаватель Колледжа профессионального образования ФГБОУ Пермский государственный национальный исследовательский университет

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания по выполнению самостоятельных работ учебной дисциплины «Элементы высшей математики» предназначены для реализации ОПОП по специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования.

Задания на самостоятельные работы разработаны и составлены на основе рабочей программы учебной дисциплины 09.02.03 Программирование в компьютерных системах. Указанная дисциплина относится к математическому и общему естественнонаучному циклу в структуре основной профессиональной образовательной программы.

Самостоятельная работа – способ активного, целенаправленного приобретения учащимися новых для него знаний без непосредственного участия в этом процесса преподавателя.

Самостоятельная работа студента проводится с *целью*:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений, обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать справочную документацию и специальную литературу;
- развития познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формированию самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

Цель СРС – научить обучающегося осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.

Указания к выполнению СВР

1. СВР нужно выполнять в отдельной тетради в клетку.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.
3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения СВР производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 – 100	5	отлично
80 – 89	4	хорошо
70 – 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Перечень учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы

Основные источники:

1.Богомолов Н. В. Алгебра и начала анализа:Учебное пособие/Богомолов Н.В..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-9858-0.-200.

2. Капкаева Л. С. Математический анализ: теория пределов, дифференциальное исчисление:Учебное пособие/Капкаева Л.С..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-04900-8.-246.

3. Пахомова Е. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий:Учебное пособие/Пахомова Е.Г., Рожкова С.В..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-7555-0.-110.

4. Потапов А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия:Учебник и практикум/Потапов А.П..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-01061-9.-310.

5. Шипачев В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление:Учебник и практикум/Шипачев В.С..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-534-04547-5.-212.

Дополнительные источники:

1. Бурмистрова Е. Б. Линейная алгебра:Учебник и практикум/Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г..-М.:Издательство Юрайт,2017, ISBN 978-5-534-03684-8.-421.

2. Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения:Учебник и практикум/Муратова Т.В..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-8798-0.-435.

3. Привалов И. И. Аналитическая геометрия:Учебник/Привалов И.И..-М.:Издательство Юрайт,2018, ISBN 978-5-9916-8774-4.-233.

Самостоятельная работа №1 на тему

«Введение в дисциплину»

Входной контроль по дисциплине «Элементы высшей математики»

1.Вычислить:

$$\left(\frac{15\cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{\frac{-1}{3}}}-2\cdot 7^{\frac{1}{2}}\cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{-1}{4}}+45^{\frac{1}{2}}\right)-183\sqrt{5}$$

2. Вычислить:

А) $\log_{27} 729$

Б) $\log_{3} 729$

В) $\log_{\frac{1}{3}} 729$

3.Вычислить:

А) $2\mathrm{arctg}1-3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

Б)$8\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$-$6\text{arctg}\sqrt{3}$

4.Решить уравнение:

А)$3^{x-7}=81$

Б)$2^{x^2-5x+6,5}=\sqrt{2}$

В)$5^{x+4}+3\cdot4^{x+3}=4^{x+4}+4\cdot5^{x+3}$

5. Найдите y_{min} и y_{max}

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4$

Ответы

1.1083

2.

А)$\log_{27}729$=2

Б)$\log_3 729$=6

В)$\log_{\frac{1}{3}}729$=-6

3.

А)$2\text{arctg}1$-$3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-\pi}{2}$

Б)$8\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$-$6\text{arctg}\sqrt{3}$=4π

4.

А)x=11

Б)$x_1=-3$ и $x_2=1$

В) x=-3

5.

$y_{min}=-1$ и $y_{max}=31$

Самостоятельная работа №2 на тему

«Матрицы и определители»

Цель: уметь выполнять арифметические действия с матрицами, уметь вычислять определители второго и третьего порядка

Краткая теория

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк одинаковой длины (или *n*столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращённо, $A = (a_{ij})$, где $i = (1,m)$(т.е. $i = 1,2,3,\dots,m$) – номер строки, $j = (1,n)$(т.е. $j = 1,2,3,\dots,n$) – номер столбца.

Действия над матрицами

1. Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Определение. Суммой двух матриц $A_{m\times n}$ $=(a_{ij})$и $B_{m\times n}$ $=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}$ $=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij}+ b_{ij}$ $(i = (1,m), j = (1,n))$.

Записывают $C = A + B$.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 ¿ \end{pmatrix} ¿¿¿$$
$$¿$$

Аналогично определяется *разность матриц.*

2. Умножение на число

Определение. Произведением матрицы $A_{m\times n}$ $=(a_{ij})$ на числоkназывается матрица $B_{m\times n}$ $=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k\cdot a_{ij}$$(i= (1,m),j= (1,n))$. *Записывают* $B = k\cdot A$.

Пример 2. $A=¿\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2¿ \end{pmatrix}¿¿¿$ $¿$ k=2, $A\cdot k=¿\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4¿ \end{pmatrix}¿¿¿$ $¿$

Квадратной матрице A порядка nможно сопоставить число det$A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее определителем, следующим образом:

1. $n = 1$, $A = (a_1)$; det$A = a_1$.
2. $n = 2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$.
3. $n = 3$, $A=¿\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}¿ \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}¿¿¿$ $¿$;

$$\det A = ¿\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} ¿\right| ¿ ¿ ¿ ¿$$

¿

¿

Пример 3. Вычислим определитель 2-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -2$$

Ответ: $\Delta = -2$

Пример 4. Найдем значение λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 27$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \lambda - 3 \cdot (-1) = 27 ; 4\lambda + 3 = 27 ; 4\lambda = 24 ; \lambda = 6$$

Ответ: $\lambda = 6$

Пример 5. Вычислим определитель 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 3 + 2 \cdot (-3) \cdot 0 + (-1) \cdot 5 \cdot 4 - 0 \cdot (-2) \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - (-3) \cdot (-1) \cdot 1 = ¿$$

$$¿ -6 + 0 - 20 + 0 - 30 - 3 = -59$$

Ответ: $\Delta = -59$

Пример 6. Найдем значение λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 9$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ \lambda & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 0 \cdot \lambda \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - \lambda \cdot (-2) \cdot (-3) - (-4) \cdot 0 \cdot 5 = 9 ;$$

$$-15 + 48 + 0 - 6 - 6\lambda + 0 = 9 ; -6\lambda = -18 ; \lambda = 3$$

Ответ: $\lambda = 3$

Задания для самостоятельного решения:

1) Вычислить определители 2-го порядка

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -12 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

2) Найти значение λ

1. $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 8$ 2. $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = 3$ 3. $\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 15$

3) Найти матрицу:

1.C=A-4B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2. C=4A-B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3.C=A+2B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Вычислить определители 3-го порядка

1. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

5) Найти значение λ

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \lambda \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -34$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 17$

Самостоятельная работа №3 на тему

«Системы линейных алгебраических уравнений»

Цель: уметь решать систему линейных уравнений методами Крамера и Гаусса

Краткая теория

Правило Крамера

Правило (метод) Крамера применяется к системам, у которых <u>число уравнений равно числу неизвестных. Этот метод использует определители.</u>

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$|a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 ¿ |a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 ¿¿¿$$

В которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) Δ≠0, а определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = ¿ |a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} ¿||a_{21} \quad a_{22} \quad a_{32} ¿|¿ ¿¿ ¿$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы Δ≠0, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Таким образом, если определитель системы Δ ≠ 0, то система имеет единственное решение и обратно. Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

Случай 1. Определитель системы не равен нулю: $\Delta \neq 0$, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, тогда система имеет единственное решение.

Случай 2. Определитель системы равен нулю: $\Delta = 0$ (т.е. коэффициенты при неизвестных пропорциональны). Пусть при этом один из определителей Δ_x, Δ_y не равен нулю (т. е свободные члены не пропорциональны коэффициентам при неизвестных). $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. В этом случае система не имеет решений.

Случай 3. $\Delta=0,\ \Delta x_x=0,\ \Delta_y y=0$ (т. е. и коэффициенты и свободные члены пропорциональны $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$), если одно из уравнений, есть следствие другого; система сводится к одному уравнению с двумя неизвестными и имеет бесчисленное множество решений.

Пример 1. Решим систему уравнений методом Крамера

$$a\text{¿}\begin{cases}4x+y=5\\3x-2y=12\end{cases};б\text{¿}\begin{cases}2x+4y+z=4\\3x+6y+2z=4\\4x-y-3z=1\end{cases}$$

а) $\Delta=\begin{vmatrix}4 & 1\\3 & -2\end{vmatrix}=-11;\Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\12 & -2\end{vmatrix}=-22;\Delta_y=\begin{vmatrix}4 & 5\\3 & 12\end{vmatrix}=33$

$$\Delta\neq 0;x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-22}{-11}=2;y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{33}{-11}=-3$$

Ответ: (2; –3)

б)

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\3 & 6 & 2\\4 & -1 & -3\end{vmatrix}=9;\Delta_x=\begin{vmatrix}4 & 4 & 1\\4 & 6 & 2\\1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-18;\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\3 & 4 & 2\\4 & 1 & -3\end{vmatrix}=27;\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & 4 & 4\\3 & 6 & 4\\4 & -1 & 1\end{vmatrix}=-36$$

$$\Delta\neq 0;x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-18}{9}=-2;y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{27}{9}=3;z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-36}{9}=-4$$

Ответ: (–2; 3; –4)

Метод Гаусса

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных) применим для решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных может быть либо равно числу уравнений, либо отлично от него.

Для простоты рассмотрим метод Гаусса для системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными в случае, когда существует единственное решение:

Дана система:

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3=b_3\end{cases} \qquad (1)$$

1-ый шаг метода Гаусса.

На первом шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент $a_{11} \neq 0$. Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Получим уравнение:

$$x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \qquad (2)$$

где $a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$; $j = 1,2,3$; $b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = b_3^{(1)} \end{cases} \qquad (3)$$

Верхний индекс (1) указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

2-ой шаг метода Гаусса.

На втором шаге исключим неизвестное x_2из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \qquad (4)$$

где $a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$; $b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}^{(1)}$. Получим уравнение:

$$a_{33}^{(2)} \cdot x_3 = b_3^{(2)}$$

Предполагая, что $a_{33}^{(2)} \neq 0$, находим $x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^3$.

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 = b_1^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \\ x_3 = b_3^{(3)} \end{cases} \qquad (5)$$

Система вида (5) называется ***треугольной.***

Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют ***прямым ходом метода Гаусса.***

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют ***обратным ходом метода Гаусса.***

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2. Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1.

В общем случае для системы m линейных уравнений с n неизвестными проводятся аналогичные преобразования. На каждом шаге исключается одно из неизвестных из всех уравнений, расположенных ниже ведущего уравнения.

Отсюда другое называние метода Гаусса – *метод последовательного исключения неизвестных.*

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида $0=b$, где $b\neq 0$, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система m линейных уравнений с n неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

Треугольная система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1+c_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n=b_n \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода гаусса.

Ступенчатая система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1+c_{12}x_2+\ldots+\ c_{1n}x_n=b_1 \\ \qquad x_2+\ldots+\ c_{2n}x_n=\ b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_k+\ldots+c_{kn}x_n=\ b_k \end{cases}$$

Такая система имеет бесчисленное множество решений. Чтобы найти эти решения, во всех уравнениях системы члены с неизвестными x_{k+1}, …, x_k переносят в правую часть. Эти неизвестные называются свободными и придают им произвольные значения. Из полученной треугольной системы находим x_1, …, x_k, которые будут выражаться через свободные неизвестные.

Пример 2. Решим систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ 2x+y-2z=4 \\ -x+2y+4z=-2 \end{cases}$$

Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Поменяем строки местами

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Добавим 3-ю строку ко 2-й

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Умножим 1-ю строку на $k=\frac{-1}{2}$ и добавим ко 2-й

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Получим единицы на главной диагонали

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y-z=2 \\ y-\frac{4}{5}z=\frac{6}{5} \\ z=1 \end{cases}$$

$$z=1\,;\, y=\frac{6}{5}+\frac{4}{5}=\frac{10}{5}=2\,;\, x=2+1-\frac{1}{2}\cdot 2=2$$

Ответ: (2; 2; 1)

Задания для самостоятельного решения:

1)Решить систему уравнений методом Крамера

1. $\begin{cases} 5x+2y=12 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -3x+2y=0 \\ 8x-y=13 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -4x-3y=-8 \\ -5x-2y=-3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -12x+13y+11z=9 \\ 4x+3y-2z=-16 \\ -x+7y+5z=-7 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -x-3y-2z=1 \\ 4x-5y+5z=5 \\ -3x+7y-4z=-3 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x+3y+2z-4=0 \\ 2x+6y+z=2 \\ 4x+8y-z-2=0 \end{cases}$

2) Решить систему уравнений методом Гаусса

1. $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ 3x-2y=-2 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x-y-z=3 \\ -2x+y-2z=-1 \\ 3x-4y+z=-1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} -4x+5y-z=3 \\ 3x-4y-2z=-5 \\ x+y-6z=-7 \end{cases}$

Самостоятельная работа №4 на тему

«Векторы»

Цель: отработка навыков по выполнению основных действий над векторами.

Задания для самостоятельного решения:

1. Векторы ***a*** и ***b*** взаимно перпендикулярны, причём |***a***| = 5 и |***b***| = 12. Определить |***a*** + ***b***| и |***a*** — ***b*** |.
2. Векторы ***a*** и ***b*** образуют угол φ = 60°, причём |**a**| = 5 и |***b***| = 8. Определить |**a** + ***b***| и |**a** — ***b***|.
3. Векторы **a** и ***b*** образуют угол φ=120°, причём |**a**| = 3 и |***b***| = 5. Определить |**a** + ***b***| и |**a** — ***b***|.
4. Какому условию должны удовлетворять векторы ***a*** и ***b***, чтобы имели место следующие соотношения: 1) |**a** + ***b***| = |**a** — ***b***|, 2) |**a** + ***b***| >|**a** — ***b***|, 3) |**a** + ***b***| <|**a** — ***b***|.
5. Какому условию должны удовлетворять векторы ***a*** и ***b***, чтобы вектор **a** + ***b*** делил пополам угол между векторами ***a*** и ***b***.
6. По данным векторам ***a*** и ***b*** построить каждый из следующих векторов: 1) 3***a***; 2) —***b***; 3) 2***a*** + ***b***; 4) ***a*** — 3***b***.
7. Векторы ***a*** и ***b*** образуют угол ; зная, что |***a***| = 3, |***b***| = 4, вычислить: 1) ***ab***; 2) $\boldsymbol{a}^2$; 3) $\boldsymbol{b}^2$; 4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$; 5) (3**a** — 2***b***) (***a*** + 2***b***); 6) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$; 7) $(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2$.
8. Векторы ***a*** и ***b*** взаимно перпендикулярны; вектор *c* образует с ними углы, равные , зная, что |*a*| = 3, |*b* | = 5, |*c*| = 8, вычислить: 1) (3*a* — 2*b*) (*b* + 3c); 2) $(a+b+c)^2$; 3) $(a+2b-3c)^2$.
9. Даны точки . Используя свойства векторного произведения, найти площадь треугольника ABC и внутренний угол при вершине B.
10. Будут ли его диагонали *АС* и *ВД* взаимно перпендикулярны

Самостоятельная работа №5 на тему

«Уравнение плоскости»

Цель: отработка решения задач.

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти угол между плоскостями x-2y+2z-8=0 и x+z-6=0.
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(5,-4,6) перпендикулярно оси x.
3. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости -2+y-4z-5=0 и отстоящей от нее на расстояние, равное 1.
4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки параллельно оси x.
5. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку M(3,1,-2) перпендикулярно плоскости x-+2y-3z-2=0.
6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(1,2,0), B(2,1,1) и C(3,0,1).
7. Найти угол между плоскостями –x+2y-z+1=0 и y+3z-1=0.
8. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки параллельно вектору .
9. Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости 5x-3y+2z-3=0.
10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки параллельно оси z.
11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(5,-4,6) и отсекающую на осях координат равные отрезки.
12. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(2,2,-2) параллельно плоскости x-2y-3z=0.
13. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.
14. Найти расстояние от точки A(4,3,0) до плоскости, проходящей через точки .
15. Найти уравнение плоскости, параллельной плоскости -x+y-4z-5=0 и отстоящей от нее на расстояние, равное 6.
16. Найти расстояние между параллельными плоскостями: 4x+3y-5z-8=0 и 4x+3y-5z+12=0.
17. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(1,1,1) параллельно плоскости *-2x+y-z+1=0.*
18. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки A(3,1,1), B(1,4,1) и C(1,1,6).
19. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки параллельно вектору .
20. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку M(2,1,-3) перпендикулярно плоскости 2x-y+3z=0.

Самостоятельная работа №6 на тему

«Кривые второго порядка»

Цель: отработка решения задач.

Кривая второго порядка может быть задана уравнением

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$

Существует система координат (не обязательно декартова прямоугольная), в которой данное уравнение может быть представлено в одном из видов, приведенных ниже.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ - уравнение “мнимого” эллипса.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение гиперболы.

a2x2 – c2y2 = 0 – уравнение двух пересекающихся прямых.

y2 = 2px – уравнение параболы.

y2 – a2 = 0 – уравнение двух параллельных прямых.

y2 + a2 = 0 – уравнение двух “мнимых” параллельных прямых.

y2 = 0 – пара совпадающих прямых.

(x – a)2 + (y – b)2 = R2 – уравнение окружности.

Задания для самостоятельного решения:

Привести уравнение второго порядка к каноническому виду, определить вид кривой второго порядка и найти основные характеристики.

1. $x^2 - y^2 - 16=0$
2. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127=0$
3. $9x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 23=0$
4. $4x^2 + 9y^2 - 18y - 27=0$
5. $9x^2 - 4y^2 + 8y - 40=0$
6. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2=0$
7. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1=0$
8. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4=0$
9. $x^2 - y^2 - 25=0$
10. $4x^2 – y - 4=0$
11. $x^2 - y^2 - 4=0$
12. $25x^2 – 100 + 4y^2=0$

Самостоятельная работа №7 на тему

«Теория пределов»

Цель: отработка навыков вычисления пределов

Задания для самостоятельного решения.

Вычислить пределы:

Вариант № 1

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

3. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-8}{x+2}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{2x-1}-1}$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

8. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

9. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{2x^2-6x}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

Вариант № 2

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-40x+128}{x-8}$

3. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{3x^2-40x+128}{x-8}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{x-4}$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2+6}{2x^3+10x^2+5x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

8. $\lim\limits_{x\to -\frac{4}{3}}\frac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

9. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2-3}{x+1}$

10. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{1+x}-3}{8-x}$

Самостоятельная работа №8 на тему

«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Цель: уметь вычислять производные простых и сложных функций, уметь применять производную при исследовании построении графиков функции.

Краткая теория.

Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю.

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Формулы дифференцирования	
$c'=0$	$(\sin x)'=\cos x$
$x'=1$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$
$(kx)'=k$ $\quad(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(e^x)'=e^x$	$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	

Правила дифференцирования

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+v'u$

$(cu)'=cu'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, $v\neq 0$

$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ Исследование функций и построение их графиков следует проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать, является ли функция четной или нечетной.
3. Исследовать, является ли функция периодической.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства, то есть промежутки на которых $y<0$ или $y>0$.
5. Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.
6. Построить график функции.

Пример 1

Исследовать функцию $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2+1$ и построить ее график.

Проведем исследование по схеме:

1) D(f)=R, т.к. f(x)-многочлен.

2) Так как f(-x)=f(x), тогда функция является четной. График симметричен отн. Оу.

3)Точки пересечения графика с осью Ох:

$\frac{1}{2}x^4-4x^2+1=0$

(-2,782;0); (-0,5;0) (0,5;0) (2,782;0).

При x=0; y=1

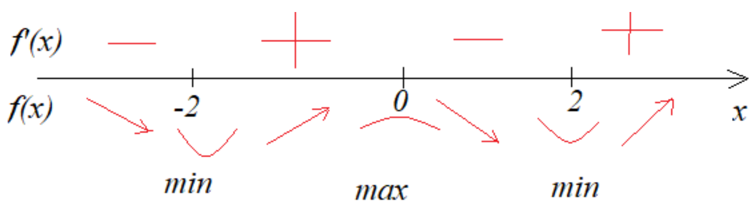
(0;1) -точка пересечения графика с осью Оу

4)Функция не является периодической.

5) $f'(x)=2x^3-8x=2x(x+2)(x-2)$

$2x(x+2)(x-2)=0$

X=0; x=2; x=-2-критические точки



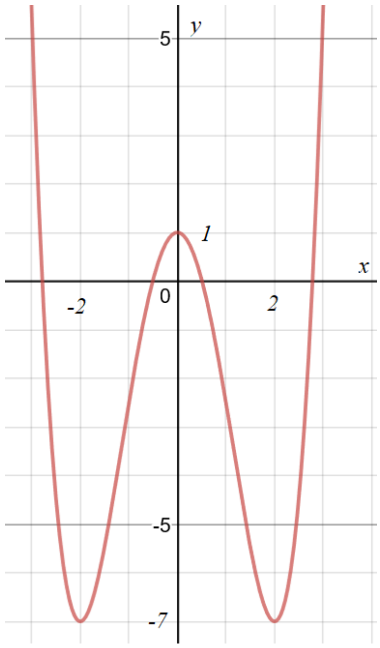
Функция убывает при x∈¿-2]∪[0;2].

Функция возрастает при $x\in[-2;0]\cup[2:+\infty]$.

(-2;-7);(2;-7)-min

(0;1)-max.

6)



Для более точного построения графика функции можно найти асимптоты и промежутки выпуклости, точки перегиба.

Задания для самостоятельного решения:

1) Пользуясь лекциями и краткой теорией, повторите вычисление производных простых и сложных функций, использование производной при исследовании и построении графиков функции.

2)Вычислите:

1.значение производной функции $f(x)=4x^3+6x+3$ при $x_0=1$;

2.значение производной функции $f(x)=2x\cos x$ при $x_0=0$;

3. $f'(0)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x)=(x^2-3x)\cos 3x$

4.тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)=\frac{3}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=1$;

5.наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^3-6x$ на отрезке $[-3;\ 4]$;

3)Вычислите производные сложных функций:

а) $y=3\sin 5x$;

б) $y=4\cos\frac{x}{2}$;

в) $y=\arccos 3x$;

г) $y=\ln\sqrt{2x-1}$;

д) $y=\sqrt{x^3+2x-5}$

е) $y=\sin^3 x$;

ж) $y=\ln\sin 3x$;

з) $y=\ln\sqrt{2x-1}$.

4)Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции:

а) $y=\frac{x^4}{6}-3x^2$;

б) $y=\frac{x^4}{3}-6x^2$.

5) Проведите исследование функций и постройте их графики:

а) $y=8-2x-x^2$;

б) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Самостоятельная работа №8 на тему

«Интегральное исчисление функции одной действительной переменной»

Цель : отработка навыков нахождения неопределенных и определенных интегралов.

Краткая теория.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x)+C;$

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x)+C;$

4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Таблица неопределённых интегралов

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgxdx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	ex + C
2	$\int ctgxdx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos xdx$	sinx + C

3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin x dx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}+C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	arcsin $\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$

Методы интегрирования.

1. Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

2. Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

3. Интегрирование по частям.

Способ основан на формуле $\int udv = uv - \int vdu$;

4. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа (m ≥ 2, n ≥ 2) и b2 – 4ac <0.

Теорема: Если $R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: P(x) = (x - a)α…(x - b)β(x2 + px + q)λ…(x2 + rx + s)μ), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+...+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+...+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+...+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+...+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где *Ai, Bi, Mi, Ni, Ri, Si* – некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин Ai, Bi, Mi, Ni, Ri, Si применяют так называемый метод неопределенных коэффициентов, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях х.

Определенный интеграл.

Обозначение : $\int_a^b f(x)dx.$

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Свойства определенного интеграла.

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

Вычисление определенного интеграла.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур.

Вычисление объемов тел.

Объем тел вращения.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции f(x) на интервале [a, ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	21. $\int \frac{dx}{1-\sin x}$

2. $\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x\,dx$

3. $\int \frac{2^{arctg 2x}\,dx}{1+4x^2}$

4. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

5. $\int \sin(2x+3)\,dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-1)}$

8. $\int \frac{3x-4}{x^2-4}\,dx$

9. $\int ctg^2 2x\,dx$

10. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^6}}$

11. $\int x^2\cos 3x\,dx$

12. $\int \cos(\ln x)\,dx$

13. $\int \arcsin x\,dx$

14. $\int x\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx$

15. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}$

16. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

17. $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+1}\,dx$

18. $\int \frac{(x-8)\,dx}{x(x-2)^2}$

22. $\int \sin 4x\cdot\cos 4x\,dx$

23. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}$

24. $\int \cos^4 x\cdot\sin^5 x\,dx$

25. $\int \sin 3x\cdot\cos 10x\,dx$

26. $\int tg^5 x\,dx$

27. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$

28. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x\cdot\sqrt{x-2}}$

29. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

31. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

32. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

33. $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$

34. $\int x^2\cdot e^{x^2}\,dx$

35. $\int x\ln^2 x\,dx$

36. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

37. $\int \frac{dx}{e^{2x}-e^x}$

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x\cdot\cos^3 x}}$

19. $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{(x^2+2)(x^2+4)}$

20. $\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-x+1}dx$

39. $\int \sin x \cos^3 x\, dx$

40. $\int \frac{x^2 dx}{x^3+1}$

2. Вычислить интегралы от дробно-рациональных функций

$$\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx; \qquad \int \frac{x^6}{x^2-x+1}dx;$$

3. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^{\infty} ¿\, e^{-x}\, dx$;

б) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$;

в) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

г) $\int_0^{\pi ¿ \frac{2¿}{¿}} ¿\, tgx\, dx$;

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=4-x^2, y=0$; 2) $y^2=2x, x=2$; 3) $y=3-2x-x^2, y=0$;

4) $y=\frac{x}{4}, x=1, y=1$; 5) $t=\ln x, x=e, y=0$.

5. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=1-x^2, y=0$ вокруг оси OX;

2) $y=e^x, x=1, x=0, y=0$ вокруг оси OX;

3) $y=\frac{4}{3}, x=1, x=4, y=0$ вокруг оси OX;

4) $y^2=4-x, x=0$ вокруг оси OY;

Самостоятельная работа №9 на тему

«Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных»

Цель : отработка навыков нахождения области определения, частных производных функции нескольких переменных.

Краткая теория.

Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

z = f(x, y)

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Число А называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие $MM_0 < r$ также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по x.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по x.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x};\quad z'_x;\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x};\quad f'_x(x,y).$

Аналогично определяется частная производная функции по y.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y).

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x,y,z,\ldots,t) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти область определения функции двух переменных (дать геометрическое истолкование).

1.1. $z=\sqrt{\ln(x+y)}$.

1.2. $z=\ln\frac{x^2}{x+y}$.

1.3. $z=\ln\frac{\cos x}{y}$.

1.4. $z=\ln\frac{x-3}{y-5}$.

1.5. $z=\ln(y-\sin x)$.

1.6. $z=\log_y(x^2+y^2-9)$.

1.7. $z=\frac{1}{x}\arcsin\frac{x+y}{y}$.

1.8. $z=\sqrt{\ln xy}$.

2. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z=z(x,y)$.

2.1. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

2.2. $z=\ln\left(\sqrt{x}+y^2\right)$.

2.3. $z=\ln(1+x)\cdot\ln(1+y^3)$.

2.4. $z=\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$.

2.5. $z=xy^2\cdot\ln(x^2+y)$.

2.6. $z=\ln(x^5+\ln y)$.

2.7. $z=(1+\log_y x)^3$.

2.8. $z=\ln(\sin x+\cos y)$.

2.9. $z=\ln\left(\sqrt[3]{y}-\sin x\right)$.

2.10. $z=\ln\left(x\sqrt{y}+\frac{y}{2x}\right)$.

Самостоятельная работа №9 на тему

«Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных»

Цель занятия: отработка навыков нахождения области определения, частных производных функции нескольких переменных.

Краткая теория.

Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы $\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\cdot S_i$ имеют конечный предел, то этот предел называется двойным интегралом от функции f(x, y) по области Δ.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \iint_\Delta f(x,y)dxdy$$

С учетом того, что $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$ получаем:

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)S_i = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i, y_i)\Delta y_i \Delta x_i$$

В приведенной выше записи имеются два знака Σ, т.к. суммирование производится по двум переменным x и y.

Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек P_i, то, считая все площади S_i одинаковыми, получаем формулу:

$$\iint_\Delta f(x,y)dydx = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sum\sum_\Delta f(x,y)\Delta y\Delta x$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-1}^{0} dx \int_{-8x^2}^{-2x+6} f(x,y)dy$
2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D xy^2\,dxdy,\ D: y=x^2,\ y=2x$
3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dy$
4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $x=0;\ y=e^x;\ y=e$

Самостоятельная работа №10 на тему

«Теория комплексных чисел»

Цель: отработка навыков работы с комплексными числами.

Краткая теория.

Комплексным числом *z* называется выражение $z = a + ib$, где *a* и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$

При этом число a называется действительной частью числа z ($a = Re\, z$), а b- мнимой частью ($b = Im\, z$).

Если $a = Re\, z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b = Im\, z = 0$, то число z будет действительным.

Данная форма представления комплексного числа называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются комплексно – сопряженными.

Следующая форма записи называется тригонометрической формой записи комплексного числа: $z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

При этом величина r называется модулем комплексного числа, а угол наклона φ - аргументом комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \varphi = Arg\, z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = Arg\, z = arctg\,\frac{b}{a};$$

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

$Z_1 = 0{,}5 - 3{,}2i;\ Z_2 = 1{,}5 - 0{,}8i.$

2. Найдите разность и частное комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

$$Z_1 = \sqrt{5} - i; \quad Z_2 = \sqrt{5} - 2i.$$

3. Выполните действия

$$\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}.$$

$(7+i)\cdot(2-i) - (3+5i)\cdot(-i).$

$i(3-i) - (2+3i)\cdot(1-i).$

$\frac{3}{i} + \frac{5-i}{2} - \frac{10+i}{1+i.}$

4. Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

1) $Z = \left(\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$,

2) $Z = \left(\cos 31^0 + i\sin 31^0\right)^{-10}$,

5. Записать число Z в тригонометрической форме:

1) $Z=\left(\sqrt{3}-i\right)^{100}$,

2) $Z=\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^{6}$,

3) $Z=\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}, n\in N$,

4) $Z=\left(\mathrm{tg}2-i\right)^{4}$.

Самостоятельная работа №11 на тему

«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Цель : отработка навыков решения дифференциальных уравнений.

Краткая теория.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Решение вида y = φ(x, C_0) называется частным решением дифференциального уравнения.

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

1) $y^2dx+\left(x+e^{\frac{2}{y}}\right)dy=0$

2) $y'+2y=y^2\mathrm{tg}\,x$

2. Найти решение задачи Коши

1) $y'+xy=(1+x)e^{-x}y^2,\ y(0)=1$

2) $xy'+y=2y^2\ln x,\ y(1)=\frac{1}{2}$

3. Найти общее решение уравнения $y''-5y'+6y=0$.

4. Найти общее решение уравнения $y^{(5)}+4y^{(4)}+13\{y'''=0.$¿

5. Найти общее решение уравнения $y'''-2y''+y'=2e^{x}.$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$e^{x+2y}dy=x\,dx.$$
$$\sin 2y\cos x\,dy=\cos 2y\sin x\,dx.$$
$$(1+e^{x})y\,y'=e^{x}.$$
$$(\cos(x-2y)+\cos(x+2y))y'=\sin x.$$
$$y'\,ctg\,x+y=2.$$
$$\cos y\,dx=2\sqrt{1+x^2}\,dy+\cos y\sqrt{1+x^2}\,dy.$$
$$3^{y^2-x^2}=\frac{y\,y'}{x}.$$
$$(xy+x^3y)y'=1+y^2.$$
$$(x^2+xy)dx+(y^2+1)dy=0.$$
$$2xy\,y'=1-x^2.$$
$$\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy.$$
$$(y+1)y'=\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}+xy.$$
$$\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0.$$
$$y-x\,y'=x\,sec(y/x).$$
$$(y^2-2xy)dx+x^2dy=0.$$
$$x\,y'=y\cos\ln(y/x).$$
$$y'\,x+x+y=0.$$
$$xy+y^2=(2x^2+xy)y'.$$
$(y$¿¿$2-2xy)dx-x^2dy=0.$¿
$$y'=x/y+y/x.$$

7. Найти частное решение дифференциального уравнения.

$$(x^2+1)y'+4xy=3,\ y(0)=0$$
$$y'=2x(x^2+y),\ y(0)=0$$
$$y\,x'+x=4y^3+3y^2,\ y(2)=1$$
$$y=x(y'-x\cos x),\ y(\pi/2)=0$$
¿¿
$$(1-x^2)y'+xy=1,\ y(0)=1$$
$$x\,y'+y=\ln x+1,\ y(1)=0$$

8. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$y'+y=x\sqrt{y}.$$
$$xy\,dy=(y^2+x)dx.$$
$$xy'-2x\sqrt{y}=4y.$$
$$xy'-2\sqrt{x^3}\,y=y.$$
$$2x^3yy'+3x^2y^2+1=0.$$
$$y'+2xy=2x^3y^3.$$
$$y'=x\sqrt{y}+xy/(x^2-1).$$

9. Найти частное решение дифференциального уравнения.

$y''' = \sin x,\ x_0 = \pi/2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

$y'' = 4\cos 2x,\ x_0 = \pi/4,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

$y'' = 1/\sqrt{1 - x^2},\ x_0 = 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

$y''' = e^{x/2} + 1,\ x_0 = 2,\ y(0) = 8,\ y'(0) = 5,\ y''(0) = 2.$

$y'' = \cos x + e^x,\ x_0 = \pi,\ y(0) = -e^{-\pi},\ y'(0) = -1.$

$y'' = 2\sin^2 x \cdot \cos x,\ x_0 = \pi,\ y(0) = 1/9,\ y'(0) = 1,$

$y''' = \cos 4x,\ x_0 = \pi,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 15/16,\ y''(0) = 0$

10. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающее понижение порядка.

$(1 - x^2)\, y'' - x y' = 2.$

$y''\, x\, lnx = y'.$

$xy'' = y'.$

$y'' - 2y'\, ctg\, x = \sin^3 x.$

$y'' + y' = \sin x.$

11. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающее понижение порядка, которое удовлетворяет заданным условиям.

$y'' = y' e^y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

$y''\, tg\, y = 2y'^2,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 2$

$y'^2 = y',\ y(0) = 2/3,\ y'(0) = 1$

$y'' = y' + y'^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

$2y'^2 = (y - 1)\, y''.\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

y¿¿

$y'' = 1/\sqrt{y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$