

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра информационных систем и математических методов в экономике**

**Авторы-составители: Мулюков Михаил Вадимович  
Радионова Марина Владимировна**

Рабочая программа дисциплины  
**OPTIMAL CONTROL THEORY**  
Код УМК 97813

Утверждено  
Протокол №9  
от «06» июня 2022 г.

Пермь, 2022

## **1. Наименование дисциплины**

Optimal Control Theory

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в обязательную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление подготовки: **38.03.05** Бизнес-информатика  
направленность Информационные системы и большие данные

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины **Optimal Control Theory** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**38.03.05** Бизнес-информатика (направленность : Информационные системы и большие данные)

**ПК.1** Способен к обоснованию решений

**Индикаторы**

**ПК.1.1** Формирует возможные решения на основе разработанных для них целевых показателей

**ПК.1.2** Проводит анализ, обоснование и выбор решения

#### 4. Объем и содержание дисциплины

<b>Направление подготовки</b>	38.03.05 Бизнес-информатика (направленность: Информационные системы и большие данные)
<b>форма обучения</b>	очная
<b>№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины</b>	10
<b>Объем дисциплины (з.е.)</b>	3
<b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>	108
<b>Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:</b>	42
<b>Проведение лекционных занятий</b>	14
<b>Проведение практических занятий, семинаров</b>	28
<b>Самостоятельная работа (ак.час.)</b>	66
<b>Формы текущего контроля</b>	Входное тестирование (1) Защищаемое контрольное мероприятие (2) Письменное контрольное мероприятие (2)
<b>Формы промежуточной аттестации</b>	Экзамен (10 триместр)

## **5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины**

### **Optimal Control Theory**

Brief historical background on extremal problems. Examples of optimal control problems for a one-industry economy. General formulation of optimization problems. Solving the problem of optimal control of a one-industry economy by a direct method. The discussion of the results. Problems of the classical calculus of variations. Statement, determination of the solution, weak extremum, strong extremum. General idea of the method of variations. A necessary condition for a local extremum in the simplest problem of the calculus of variations. The Dubois-Reymond lemma. Euler equation, extremals. Variational problem with general linear boundary conditions. Variational problem with retarded argument. Bolz's problem. transversality conditions. Pontryagin's maximum principle. Formulation, proof by the method of needle variations. Application of Pontryagin's maximum principle to the problem of optimal control of a one-industry economy. Dependence of the moment of switching on the parameters of the problem. Sufficient optimality conditions in optimal control problems. Main theorem and its proof. Modified theorem on sufficient optimality conditions, construction of minimizing sequences. Tasks linear in control. Optimal control problem for a nonlinear macroeconomic model. The condition of the main development. Optimal control problems for processes with discrete time. Hamilton-Bellman method. Continuous and discrete cases. Application to the problem of optimization of the investment process.

#### **Topic 1. Introduction to extremal problems. Brief historical outline**

Brief historical background on extremal problems. Examples of optimal control problems for a one-industry economy. General formulation of optimization problems. Solving the problem of optimal control of a one-industry economy by a direct method. The discussion of the results.

#### **Topic 2. Problems of the calculus of variations**

Problems of the classical calculus of variations. Statement, determination of the solution, weak extremum, strong extremum. General idea of the method of variations. A necessary condition for a local extremum in the simplest problem of the calculus of variations. The Dubois-Reymond lemma. Euler equation, extremals. Variational problem with general linear boundary conditions. Variational problem with retarded argument. Bolz's problem. transversality conditions.

#### **Topic 3. Pontryagin's maximum principle**

Pontryagin's maximum principle. Formulation, proof by the method of needle variations. Application of Pontryagin's maximum principle to the problem of optimal control of a one-industry economy. Dependence of the moment of switching on the parameters of the problem.

#### **Topic 4. Sufficient optimality conditions**

Sufficient optimality conditions in optimal control problems. Main theorem and its proof. Modified theorem on sufficient optimality conditions, construction of minimizing sequences. Tasks linear in control. Optimal control problem for a nonlinear macroeconomic model. The condition of the main development.

#### **Topic 5. Optimal control problems for processes with discrete time**

Optimal control problems for processes with discrete time. Hamilton-Bellman method. Continuous and discrete cases. Application to the problem of optimization of the investment process.

### **Preparation for the final test Preparation for the final test**

Preparation for the final certification in the discipline. Brief historical background on extremal problems. Examples of optimal control problems for a one-industry economy. General formulation of optimization problems. Solving the problem of optimal control of a one-industry economy by a direct method. The discussion of the results. Problems of the classical calculus of variations. Statement, determination of the solution, weak extremum, strong extremum. General idea of the method of variations. A necessary condition for a local

extremum in the simplest problem of the calculus of variations. The Dubois-Reymond lemma. Euler equation, extremals. Variational problem with general linear boundary conditions. Variational problem with retarded argument. Bolz's problem. transversality conditions. Pontryagin's maximum principle. Formulation, proof by the method of needle variations. Application of Pontryagin's maximum principle to the problem of optimal control of a one-industry economy. Dependence of the moment of switching on the parameters of the problem. Sufficient optimality conditions in optimal control problems. Main theorem and its proof. Modified theorem on sufficient optimality conditions, construction of minimizing sequences. Tasks linear in control. Optimal control problem for a nonlinear macroeconomic model. The condition of the main development. Optimal control problems for processes with discrete time. Hamilton-Bellman method. Continuous and discrete cases. Application to the problem of optimization of the investment process.

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Maksimov V. P. Continuous mathematical models. Computer workshop on attainability and control problems:textbook/Vladimir P. Maksimov.-Perm:Perm University Press,2019, ISBN 978-5-7944-3319-7.-119. <https://elis.psu.ru/node/596003>
2. Maksimov V. P. Optimal control of dynamic economic models. An elementary introduction/V. P. Maksimov.-Пермь:Пермский государственный национальный исследовательский университет,2006, ISBN 5-7944-0718-2.-1. <https://elis.psu.ru/node/468046>

### Дополнительная:

1. Maksimov V. P. Continuous mathematical models. Computer workshop on attainability and control problems:textbook/Vladimir P. Maksimov.-Perm:Perm University Press,2019, ISBN 978-5-7944-3319-7.-119. <https://elis.psu.ru/node/596003>



## 9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

[https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal\\_control](https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_control) Optimal Control

[https://en.wikipedia.org/wiki/Lev\\_Pontryagin](https://en.wikipedia.org/wiki/Lev_Pontryagin) Lev Pontryagin

[https://en.wikipedia.org/wiki/Richard\\_E.\\_Bellman](https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman) Richard E. Bellman

[https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus\\_of\\_variations](https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus_of_variations) Calculus of variations

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pontryagin%27s\\_maximum\\_principle](https://en.wikipedia.org/wiki/Pontryagin%27s_maximum_principle) Maximum principle

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hamilton%E2%80%93Jacobi%E2%80%93Bellman\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Hamilton%E2%80%93Jacobi%E2%80%93Bellman_equation)

Hamilton–Jacobi–Bellman equation

[https://en.wikipedia.org/wiki/Bellman\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Bellman_equation) Bellman equation

[https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal\\_control](https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_control) Optimal Control

## 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Образовательный процесс по дисциплине **Optimal Control Theory** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- 1) presentation materials (slides on the topics of lectures);
- 2) on-line access to the Electronic library system (ELS);
- 3) access to the electronic information and educational environment of the University;
- 4) Internet services and electronic resources.

List of required licensed and / or freely distributed software:

- 1) Maple V Release 4 (Free Software),
- 2) Scilab 6.1 (Free Software),
- 3) Applications that allow you to view and play the media content of PDF files;
- 4) Office application packages.

- 1) презентационные материалы (слайды по темам лекционных и практических занятий);
- 2) доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- 3) доступ в электронную информационно-образовательную среду университета;
- 4) интернет-сервисы и электронные ресурсы;

Перечень необходимого лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения:

- 1) Maple V Release 4 (свободное ПО),
- 2) Scilab 6.1 (свободное ПО),
- 3) приложения, позволяющее просматривать PDF-файлы и воспроизводить медиаконтент;
- 4) офисные пакеты приложений.

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ (**student.psu.ru**).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).

система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.

система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

The material and technical base is provided by the availability of:

1. Lecture classes - an audience equipped with presentation equipment (projector, screen, computer / laptop) with appropriate software, chalk (s) or marker board.
2. Seminar-type classes (seminars, practical classes) - an audience equipped with presentation equipment (projector, screen, computer / laptop) with appropriate software, chalk (s) or marker board.
3. Laboratory classes - a computer class equipped with personal computers and appropriate software. The composition of the equipment is specified in the Passport of the computer class.
4. Independent work - an audience for independent work, equipped with computer equipment with the ability to connect to the Internet, provided with access to the electronic information and educational environment of the University. Premises of the Scientific library of PSU.
5. Current control - an audience equipped with presentation equipment (projector, screen, computer / laptop) with appropriate software, chalk (s) or marker board.

Материально-техническая база обеспечивается наличием:

1. Лекционные занятия - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.
2. Занятий семинарского типа (практические занятия) - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.
3. Лабораторные занятия - компьютерный класс, оснащенный персональными ЭВМ и соответствующим программным обеспечением. Состав оборудования определен в Паспорте компьютерного класса.
4. Самостоятельная работа - аудитория для самостоятельной работы, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», обеспеченная доступом в электронную информационно-образовательную среду университета. Помещения Научной библиотеки ПГНИУ.
5. Текущий контроль и промежуточная аттестация - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской. Или аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Optimal Control Theory**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.  
Индикаторы и критерии их оценивания**

**ПК.1**

**Способен к обоснованию решений**

<b>Компетенция (индикатор)</b>	<b>Планируемые результаты обучения</b>	<b>Критерии оценивания результатов обучения</b>
<p><b>ПК.1.2</b> Проводит анализ, обоснование и выбор решения</p>	<p>Conducts analysis, justification and selection of the optimal solution in optimal control problems</p>	<p style="text-align: center;"><b>Неудовлетворител</b> Does not know how to analyze solutions in optimal control problems. Does not possess the skills of substantiation and choice of solutions in optimal control problems. Does not know the optimal control model.</p> <p style="text-align: center;"><b>Удовлетворительн</b> Able to analyze solutions in optimal control problems at an unsatisfactory level. Possesses the skills of substantiation and choice of solutions in optimal control problems at an unsatisfactory level. Uncertain knowledge of optimal control models.</p> <p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b> Able to analyze solutions in optimal control problems at a good level. Possesses the skills of substantiation and decision making at a good level. In general, he knows optimal control models.</p> <p style="text-align: center;"><b>Отлично</b> He is able to perform solution analysis in optimal control problems at an excellent level. Possesses the skills of substantiation and decision making at an excellent level. Demonstrates high knowledge of optimal control models.</p>
<p><b>ПК.1.1</b> Формирует возможные решения на основе разработанных для них целевых показателей</p>	<p>Forms possible solutions based on the target indicators developed for them in optimal control problems.</p>	<p style="text-align: center;"><b>Неудовлетворител</b> He does not have the skills to formulate possible solutions based on the target indicators developed for them in optimal control problems. Does not know the optimal control model.</p> <p>Cannot solve optimal control problems.</p> <p style="text-align: center;"><b>Удовлетворительн</b> Has the skills to formulate possible solutions based on the target indicators developed for</p>

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
		<p style="text-align: center;"><b>Удовлетворительн</b></p> <p>them in optimal control problems at a satisfactory level.</p> <p>Knows models of optimal control at a satisfactory level.</p> <p>Able to solve optimal control problems at a satisfactory level.</p> <p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b></p> <p>Has the skills to formulate possible solutions based on the target indicators developed for them in optimal control problems at a good level.</p> <p>In general, he knows optimal control models.</p> <p>Able to solve optimal control problems at a good level.</p> <p style="text-align: center;"><b>Отлично</b></p> <p>Has the skills to formulate possible solutions based on the target indicators developed for them in optimal control problems at an excellent level.</p> <p>Knows optimal control models at an excellent level.</p> <p>Able to solve optimal control problems at an excellent level.</p>

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : Базовая

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Экзамен

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 41 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 41 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>Входной контроль</b>	Topic 1. Introduction to extremal problems. Brief historical outline <b>Входное тестирование</b>	Basics of mathematical analysis, Fundamentals of the theory of differential equations.
<b>ПК.1.2</b> Проводит анализ, обоснование и выбор решения	Topic 2. Problems of the calculus of variations <b>Защищаемое контрольное мероприятие</b>	Some performance problems. Optimization of consumption at a constant rate of accumulation. Consumption optimization at a piecewise constant consumption rate. Investigation of the simplest problems of the calculus of variations.
<b>ПК.1.2</b> Проводит анализ, обоснование и выбор решения	Topic 3. Pontryagin's maximum principle <b>Защищаемое контрольное мероприятие</b>	Pontryagin's maximum principle. Sufficient optimality conditions. Optimal control problem for a nonlinear macroeconomic model.
<b>ПК.1.2</b> Проводит анализ, обоснование и выбор решения	Topic 5. Optimal control problems for processes with discrete time <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Bellman equation. The principle of optimality. Dynamic programming. The problem of optimal distribution of investments.

<b>Компетенция (индикатор)</b>	<b>Мероприятие текущего контроля</b>	<b>Контролируемые элементы результатов обучения</b>
<p><b>ПК.1.2</b> Проводит анализ, обоснование и выбор решения</p> <p><b>ПК.1.1</b> Формирует возможные решения на основе разработанных для них целевых показателей</p>	<p>Preparation for the final test Preparation for the final test</p> <p><b>Письменное контрольное мероприятие</b></p>	<p>Brief historical background on extremal problems. Examples of optimal control problems for a one-industry economy. General formulation of optimization problems. Solving the problem of optimal control of a one-industry economy by a direct method. The discussion of the results. Problems of the classical calculus of variations. Statement, determination of the solution, weak extremum, strong extremum. General idea of the method of variations. A necessary condition for a local extremum in the simplest problem of the calculus of variations. The Dubois-Reymond lemma. Euler equation, extremals. Variational problem with general linear boundary conditions. Variational problem with retarded argument. Bolz's problem. transversality conditions. Pontryagin's maximum principle. Formulation, proof by the method of needle variations. Application of Pontryagin's maximum principle to the problem of optimal control of a one-industry economy. Dependence of the moment of switching on the parameters of the problem. Sufficient optimality conditions in optimal control problems. Main theorem and its proof. Modified theorem on sufficient optimality conditions, construction of minimizing sequences. Tasks linear in control. Optimal control problem for a nonlinear macroeconomic model. The condition of the main development. Optimal control problems for processes with discrete time. Hamilton-Bellman method. Continuous and discrete cases. Application to the problem of optimization of the investment process.</p>

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### Topic 1. Introduction to extremal problems. Brief historical outline

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
 Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
 Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**  
 Проходной балл: **0**

Показатели оценивания	Баллы
All problems are solved correctly	10
More then 4 problems are solved correctly	4.1

### Topic 2. Problems of the calculus of variations

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
 Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
 Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**  
 Проходной балл: **12.3**

Показатели оценивания	Баллы
Optimization of consumption at a constant rate of accumulation	10
The study of the simplest problems of the calculus of variations	10
Optimization of consumption at a piecewise constant rate of consumption	10

### Topic 3. Pontryagin's maximum principle

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
 Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
 Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **20**  
 Проходной балл: **8.2**

Показатели оценивания	Баллы
The task is completely solved.	20
The task is completely partial.	8.2

### Topic 5. Optimal control problems for processes with discrete time

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
 Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
 Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **20**  
 Проходной балл: **8.2**

Показатели оценивания	Баллы
The task is completely solved.	20
The task is completely partial.	8.2

### Preparation for the final test Preparation for the final test

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**  
 Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**  
 Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**  
 Проходной балл: **12.3**



<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
The student answered all questions correctly.	30
The student answered at least 41 percent of the questions correctly.	12.3