

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра теоретической физики**

Авторы-составители: **Марышев Борис Сергеевич  
Демин Виталий Анатольевич  
Циберкин Кирилл Борисович**

Рабочая программа дисциплины  
**ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ**  
Код УМК 68998

Утверждено  
Протокол №6  
от «08» июня 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Векторный и тензорный анализ

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в обязательную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **28.03.01** Нанотехнологии и микросистемная техника  
направленность Материалы микро- и наносистемной техники

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины **Векторный и тензорный анализ** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**28.03.01** Нанотехнологии и микросистемная техника (направленность : Материалы микро- и наносистемной техники)

**ОПК.3** Способен применять базовые знания в области математики, физики и других наук в профессиональной деятельности, в том числе педагогической деятельности, для проведения научных исследований, анализа объектов, систем, процессов, явлений и методов, их экспериментального и теоретического (включая построение их качественных и количественных моделей) изучения и для использования полученных результатов на практике

#### **Индикаторы**

**ОПК.3.2** Понимает физические методы теоретического и экспериментального изучения систем, явлений и процессов в природе и применяет их на практике

#### 4. Объем и содержание дисциплины

<b>Направления подготовки</b>	28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника (направленность: Материалы микро- и наносистемной техники)
<b>форма обучения</b>	очная
<b>№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины</b>	6
<b>Объем дисциплины (з.е.)</b>	3
<b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>	108
<b>Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:</b>	42
<b>Проведение лекционных занятий</b>	14
<b>Проведение практических занятий, семинаров</b>	28
<b>Проведение лабораторных работ, занятий по иностранному языку</b>	0
<b>Самостоятельная работа (ак.час.)</b>	66
<b>Формы текущего контроля</b>	Входное тестирование (1) Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (4)
<b>Формы промежуточной аттестации</b>	Зачет (6 триместр)

## **5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины**

### **Векторный и тензорный анализ. Первый семестр**

#### **Операции с векторами, базис**

##### **Операции с векторами**

Операции над векторами. Инварианты векторов. Скалярное произведение. Векторное и смешанное произведение векторов. Неравенство Шварца.

##### **Преобразования координат**

Базисные векторы. Преобразование векторов. Свойства матрицы преобразования.

#### **Понятие тензора**

##### **Свойства тензоров**

Определение тензора. Действия над тензорами. Индексная форма записи. Примеры тензорных величин (тензор поляризуемости). Транспонирование тензоров. Шпур. Разложение тензора на неприводимые компоненты.

##### **Операции с тензорами**

Прямое произведение, оператор проектирования. Упрощения и свертки. Инвариантные тензоры. Дельта-символ. Определение и свойства. Псевдотензоры,  $\epsilon$ -символ. Свертки символа Леви-Чивита. Соотношение дуальности. Векторное произведение.

##### **Дифференциальные операторы**

Векторные и тензорные поля. Оператор набла. Градиент. Операции DIV и ROT. Лапласиан.

##### **Криволинейные системы координат**

Градиент скалярного поля в декартовой и цилиндрической СК. Основные свойства и примеры. Дифференциальные операции второго порядка. Лапласиан. Соленоидальные и потенциальные поля.

##### **Интегральные теоремы в обобщенной форме**

Интегрирование векторных полей по контуру, поверхности и по объему. Понятия циркуляции векторного поля и потока векторного поля. Обобщенная теорема Остроградского - Гаусса. Интегрирование тензоров и векторов по кривой. Обобщенная теорема Стокса. Примеры применения интегральных теорем в физике.

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Любимов Д. В., Марышев Б. С., Циберкин К. Б. Векторный и тензорный анализ: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров "Физика", "Радиофизика", "Прикладная математика и физика", "Нанотехнологии и микросистемная техника"/Д. В. Любимов, Б. С. Марышев, К. Б. Циберкин.-Пермь, 2016, ISBN 978-5-7944-2715-8.-1.-Библиогр.: с. 92  
<https://elis.psu.ru/node/392690>
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия: учебник для студентов физической специальности и специальности "Прикладная математика"/В. А. Ильин, Э. Г. Позняк.-Москва: Физматлит, 2003, ISBN 5-9221-0128-5.-240.
3. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учебное пособие для академического бакалавриата / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 184 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-06198-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/438945>

### Дополнительная:

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов/П. С. Александров.-Санкт-Петербург: Лань, 2009, ISBN 978-5-8114-0908-2.-512.-Предм. указ.: с. 505-511
2. Гершанок В. А. Сборник задач по векторной алгебре и элементам теории поля: учебное пособие для студентов университетов, обучающихся по специальности 011200 "Геофизика"/В. А. Гершанок.-Пермь: Пермский государственный университет, 2001, ISBN 5-7944-0172-9.-72.-Библиогр.: с. 71
3. Игнаточкина Л. А. Руководство к решению задач по тензорной алгебре векторных пространств: Учебное пособие/Игнаточкина Л. А..-Москва: Московский педагогический государственный университет, 2014, ISBN 978-5-4263-0159-7.-64. <http://www.iprbookshop.ru/31762>

## **9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины**

<http://library.psu.ru/node/738> Ресурсы Научной библиотеки ПГНИУ

<http://elis.psu.ru> Электронная мультимедийная библиотека ELiS

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Образовательный процесс по дисциплине **Векторный и тензорный анализ** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС)
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.
- Интернет-сервисы и электронные ресурсы (поисковые системы, электронная почта и т.д.)

Перечень необходимого лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения:

- приложение, позволяющее просматривать PDF-файлы
- офисный пакет приложений «LibreOffice».

Дополнительный перечень используемых информационных технологий определяется преподавателями дисциплины.

При освоении материала и выполнении заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ ([student.psu.ru](http://student.psu.ru)).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

- система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).
- система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.
- система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью

подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Векторный и тензорный анализ**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.  
Индикаторы и критерии их оценивания**

**ОПК.3**

**Способен применять базовые знания в области математики, физики и других наук в профессиональной деятельности, в том числе педагогической деятельности, для проведения научных исследований, анализа объектов, систем, процессов, явлений и методов, их экспериментального и теоретического (включая построение их качественных и количественных моделей) изучения и для использования полученных результатов на практике**

<b>Компетенция (индикатор)</b>	<b>Планируемые результаты обучения</b>	<b>Критерии оценивания результатов обучения</b>
<p><b>ОПК.3.2</b> Понимает физические методы теоретического и экспериментального изучения систем, явлений и процессов в природе и применяет их на практике</p>	<p>Знать основные понятия и теоремы векторного и тензорного анализа, линейной алгебры, теории поля. Уметь вычислять собственные значения операторов, оперировать математическими выражениями с использованием индексной нотации. Владеть приемами преобразования выражений в индексной нотации, навыками применения основных теорем векторного и тензорного анализа, вычисления собственных векторов, упрощения выражений с применением символа Кронекера.</p>	<p align="center"><b>Неудовлетворител</b></p> <p>Не знает основные понятия и теоремы векторного и тензорного анализа, линейной алгебры, теории поля. Не умеет вычислять собственные значения операторов, оперировать математическими выражениями с использованием индексной нотации. Не владеет приемами преобразования выражений в индексной нотации, навыками применения основных теорем векторного и тензорного анализа, вычисления собственных векторов, упрощения выражений с применением символа Кронекера.</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b></p> <p>Общие, но не структурированные знания основных понятий и теорем векторного и тензорного анализа, линейной алгебры, теории поля. Демонстрирует частично сформированное умение производить расчёты, давать интерпретацию результатов, оперировать математическими выражениями с использованием индексной нотации. Имеет представление о приемах преобразования выражений в индексной нотации, способах применения основных теорем векторного и тензорного анализа, вычисления собственных векторов, упрощения выражений с применением символа Кронекера</p> <p align="center"><b>Хорошо</b></p> <p>Сформированные, но содержащие отдельные</p>

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
		<p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b></p> <p>пробелы знания основных понятий и теорем векторного и тензорного анализа, линейной алгебры, теории поля. В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы умения производить расчёты, давать интерпретацию результатов, контролировать правильность вычислений, самостоятельно приобретать новые знания. В целом успешно, но с отдельными пробелами владеет приемами преобразования выражений в индексной нотации, навыками применения основных теорем векторного и тензорного анализа, вычисления собственных векторов, упрощения выражений с применением символа Кронекера.</p> <p style="text-align: center;"><b>Отлично</b></p> <p>Сформированные систематические знания основных понятий и теорем векторного и тензорного анализа, линейной алгебры, теории поля. Сформированное умение производить расчёты, вычислять собственные значения операторов, оперировать математическими выражениями с использованием индексной нотации. Успешное и систематическое применение навыков преобразования выражений в индексной нотации, применения основных теорем векторного и тензорного анализа, вычисления собственных векторов, упрощения выражений с применением символа Кронекера.</p>

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : Базовая

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Зачет

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 50 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 50 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>Входной контроль</b>	Операции с векторами <b>Входное тестирование</b>	Умение оперировать матрицами, векторами, вычислять собственные числа матриц
<b>ОПК.3.2</b> Понимает физические методы теоретического и экспериментального изучения систем, явлений и процессов в природе и применяет их на практике	Операции с тензорами <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Знание базовых понятий теории матриц, теории операторов, умение находить собственные значения и главные оси координат.
<b>ОПК.3.2</b> Понимает физические методы теоретического и экспериментального изучения систем, явлений и процессов в природе и применяет их на практике	Операции с тензорами <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Знать: основные понятия и теоремы векторного и тензорного анализа Уметь: вычислять собственные значения операторов, оперировать математическими выражениями с использованием индексной нотации Владеть: приемами преобразования выражений в индексной нотации, навыками применения основных теорем векторного и тензорного анализа
<b>ОПК.3.2</b> Понимает физические методы теоретического и экспериментального изучения систем, явлений и процессов в природе и применяет их на практике	Криволинейные системы координат <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Знание и владение приемами использования дифференциальных операторов, интегральных теорем векторного и тензорного анализа. Знание и умение преобразовывать выражения в криволинейных координатах.

<b>Компетенция (индикатор)</b>	<b>Мероприятие текущего контроля</b>	<b>Контролируемые элементы результатов обучения</b>
<b>ОПК.3.2</b> Понимает физические методы теоретического и экспериментального изучения систем, явлений и процессов в природе и применяет их на практике	Интегральные теоремы в обобщенной форме <b>Итоговое контрольное мероприятие</b>	Владение навыками применения дифференциальных операторов и интегральных теорем к векторным полям.
<b>ОПК.3.2</b> Понимает физические методы теоретического и экспериментального изучения систем, явлений и процессов в природе и применяет их на практике	Интегральные теоремы в обобщенной форме <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Знание и умение использовать основные объекты векторного и тензорного анализа, умение находить собственные оси тензоров, вычислять дифференциальные операторы и применять интегральные теоремы к векторным и тензорным полям, владение навыками работы с криволинейными системами координат

### **Спецификация мероприятий текущего контроля**

#### **Операции с векторами**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Вычисление определителя $3 \times 3$	3
Сложение векторов, скалярное и векторное произведение	3
Решение систем алгебраических уравнений	2
Дифференцирование, интегрирование	2

#### **Операции с тензорами**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **.5 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **20**

Проходной балл: **10**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Собственные значения и собственные векторы в невырожденном и вырожденном случае.	10
Основные понятия тензорной алгебры. Преобразование матричных выражений. Преобразования координат.	10

#### **Операции с тензорами**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **18**

Проходной балл: **9**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Нахождение собственных чисел и собственных векторов.	6
Преобразование выражений, содержащих дельта-символы.	5
Запись выражений в индексной форме.	4
Разложение тензора на неприводимые.	3

### **Криволинейные системы координат**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **18**

Проходной балл: **9**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Умение вычислять градиент, дивергенцию, ротор, работать с дифференциальными операторами второго и более высоких порядков	6
Знание и умение применять теорему Стокса для преобразования математических выражений.	5
Знание и умение применять теорему Гаусса для преобразования математических выражений.	4
Знание криволинейных систем координат, владение основными навыками построения дифференциальных операторов в криволинейных координатах	3

### **Интегральные теоремы в обобщенной форме**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **20**

Проходной балл: **10**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Дифференциальные операторы. Потенциалы. Теорема Гельмгольца	10
Теорема Гаусса и теорема Стокса в обобщенном тензорном виде.	10

### **Интегральные теоремы в обобщенной форме**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **24**

Проходной балл: **12**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Приведение тензора к собственным осям	5
Вычисление градиента, дивергенции, ротора и их комбинаций	5
Преобразование комбинаций символов Леви-Чивиты и векторных произведений	

	5
Применение теоремы Гаусса к вычислению интеграла	4
Преобразование интеграла по поверхности с применением теоремы Стокса	3
Вычисление коэффициентов Ламэ, построение дифференциальных операторов в криволинейных координатах	2