

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра физики фазовых переходов**

**Авторы-составители: Ильин Владимир Алексеевич**

Рабочая программа дисциплины

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Код УМК 80954

Утверждено  
Протокол №12  
от «14» мая 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Интегральные уравнения и вариационное исчисление

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в вариативную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **03.03.01** Прикладные математика и физика  
направленность Программа широкого профиля

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины **Интегральные уравнения и вариационное исчисление** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**03.03.01** Прикладные математика и физика (направленность : Программа широкого профиля)

**ОПК.8** способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей

**ПК.1** способность применять в своей профессиональной деятельности знания, полученные в области физических и математических дисциплин

#### 4. Объем и содержание дисциплины

|   |   |
|---|---|
| <b>Направления подготовки</b>   | 03.03.01 Прикладные математика и физика (направленность:<br>Программа широкого профиля)   |
| <b>форма обучения</b>   | очная   |
| <b>№№ триместров,<br/>выделенных для изучения<br/>дисциплины</b>            | 6   |
| <b>Объем дисциплины (з.е.)</b>  | 3   |
| <b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>   | 108   |
| <b>Контактная работа с<br/>преподавателем (ак.час.),<br/>в том числе:</b>   | 42  |
| <b>Проведение лекционных<br/>занятий</b>                                    | 14  |
| <b>Проведение практических<br/>занятий, семинаров</b>                       | 28  |
| <b>Проведение лабораторных<br/>работ, занятий по<br/>иностранному языку</b> | 0   |
| <b>Самостоятельная работа<br/>(ак.час.)</b>                                 | 66  |
| <b>Формы текущего контроля</b>  | Входное тестирование (1)<br>Итоговое контрольное мероприятие (1)<br>Необъективируемое контрольное мероприятие (1)<br>Письменное контрольное мероприятие (2) |
| <b>Формы промежуточной<br/>аттестации</b>                                   | Зачет (6 триместр)  |

## 5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

### Интегральные уравнения и вариационное исчисление. Первый семестр

#### Интегральные уравнения

##### Введение

Основные понятия. Классификация интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и Вольтерра. Неоднородные и однородные уравнения. Линейные и нелинейные уравнения. Уравнения 1-го и 2-го рода. Сведение интегральных уравнений к дифференциальным. Примеры.

##### Уравнение Вольтерра 2-го рода.

Линейное неоднородное уравнение Вольтерра 2-го рода. Метод решения через ряды по степеням параметра уравнения. Итерационные ядра. Резольвента. Примеры. Вычисление резольвент разными способами

##### Уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром.

Неоднородное уравнение Фредгольма с непрерывным ядром. Метод определителей Фредгольма. Рассмотрение метода на примере трёх узлов, обобщение на произвольное число узлов. Определитель и минор Фредгольма. Резольвента. Примеры. Итерационные формулы. Итерированные ядра. Вычисление резольвент.

##### Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.

Вырожденные ядра. Решение уравнений Фредгольма с такими ядрами. Первая, вторая и третья теоремы Фредгольма. Теорема об альтернативе. Примеры. Характеристические функции и собственные числа.

#### Вариационное исчисление

Основные понятия вариационного исчисления. Вариация. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Необходимое и достаточные условия экстремума функционала. Задачи на условный экстремум. Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами. Задачи с подвижной границей.

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию: учебное пособие для вузов/М. Л. Краснов.-Москва:Наука,1975.-303.-Библиогр.: с. 299-301 (51 назв.). - Предм. указ.: с. 302-303
2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений/М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко.-Москва:Книжный дом "Либроком",2012, ISBN 978-5-397-03073-1.-190.
3. Привалов, И. И. Интегральные уравнения : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 253 с. — (Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-01552-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/433812>

### Дополнительная:

1. Авербух, Ю. В. Простейшие задачи вариационного исчисления : учебно-методическое пособие / Ю. В. Авербух, Т. И. Сережникова ; под редакцией А. Н. Сесекин. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 41 с. — ISBN 978-5-7996-1250-4. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. <http://www.iprbookshop.ru/65975>
2. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения: учебник для вузов по математическим и физическим специальностям/А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов.-Санкт-Петербург:Лань,2009, ISBN 978-5-8114-0911-2.-160.-Библиогр.: с. 156

## **9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины**

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ

<http://www.mathnet.ru/> Общероссийский математический портал

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Образовательный процесс по дисциплине **Интегральные уравнения и вариационное исчисление** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- презентационные материалы (слайды по темам лекционных и практических занятий);
- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Перечень необходимого лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения:

- 1) офисный пакет приложений (текстовый процессор, программа для подготовки электронных презентаций);
- 2) программа демонстрации видеоматериалов (проигрыватель);
- 3) приложение, позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов.

Дисциплина не предусматривает использование специального программного обеспечения.

При освоении материала и выполнении заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ (**student.psu.ru**).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).

система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.

система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для лекционных и практических занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций требуется аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля требуется аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Для самостоятельной работы студентов требуется аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-



образовательную среду университета. Помещения Научной библиотеки ПГНИУ

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Интегральные уравнения и вариационное исчисление**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции и  
критерии их оценивания**

| Компетенция   | Планируемые результаты обучения   | Критерии оценивания результатов обучения  |
|---|---|---|
| <p><b>ОПК.8</b><br/>способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей</p> | <p>Студент должен<br/>знать: способы сведения друг в друга интегральных и дифференциальных уравнений;<br/>уметь: использовать математические приёмы из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач;<br/>владеть: навыками использования методов из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач.</p> | <p align="center"><b>Неудовлетворител</b></p> <p>Студент<br/>не знает: способы сведения друг в друга интегральных и дифференциальных уравнений;<br/>не умеет: использовать математические приёмы из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач;<br/>не владеет: методами из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач.</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b></p> <p>Студент<br/>знает: способы сведения друг в друга интегральных и дифференциальных уравнений;<br/>умеет: использовать элементарные математические приёмы из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач;<br/>владеет: элементарными методами из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач.</p> <p align="center"><b>Хорошо</b></p> <p>Студент<br/>знает: способы сведения друг в друга интегральных и дифференциальных уравнений;<br/>умеет: использовать базовые математические приёмы из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач;<br/>владеет: несколькими методами из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных</p> |

| Компетенция   | Планируемые результаты обучения   | Критерии оценивания результатов обучения  |
|---|---|---|
|   |   | <p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b></p> <p>задач.</p> <p style="text-align: center;"><b>Отлично</b></p> <p>Студент знает: способы сведения друг в друга интегральных и дифференциальных уравнений;<br/>умеет: использовать различные математические приёмы из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач;<br/>владеет: различными методами из других разделов математики для решения интегральных уравнений и вариационных задач.</p>  |
| <p><b>ПК.1</b><br/>способность применять в своей профессиональной деятельности знания, полученные в области физических и математических дисциплин</p> | <p>Студент должен знать: основные типы интегральных уравнений (Вольтерра и Фредгольма), их связь с дифференциальными уравнениями; основные определения и теоремы вариационного исчисления;<br/>уметь: применять методы решения интегральных уравнений различной сложности и варьировать функционалы;<br/>владеть: навыками решения интегральных уравнений и вариационных задач.</p> | <p style="text-align: center;"><b>Неудовлетворител</b></p> <p>Студент не знает: основные типы интегральных уравнений, определения и теоремы вариационного исчисления;<br/>не умеет: применять методы решения интегральных уравнений и варьировать функционалы;<br/>не владеет: навыками решения интегральных уравнений и вариационных задач.</p> <p style="text-align: center;"><b>Удовлетворительн</b></p> <p>Студент знает: основные типы интегральных уравнений и их связь с дифференциальными уравнениями, определения и теоремы вариационного исчисления;<br/>умеет: применять методы решения интегральных уравнений и варьировать функционалы в элементарных случаях;<br/>владеет: навыками решения интегральных уравнений и вариационных задач в элементарных случаях.</p> <p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b></p> <p>Студент знает: основные типы интегральных уравнений и их связь с дифференциальными уравнениями, определения и теоремы вариационного исчисления;</p> |

| Компетенция | Планируемые результаты обучения | Критерии оценивания результатов обучения   |
|-------------|---------------------------------|--|
|             |                                 | <p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b></p> <p>умеет: применять методы решения интегральных уравнений и варьировать функционалы на базовом уровне;<br/> владеет: навыками решения базовых интегральных уравнений и вариационных задач.</p> <p style="text-align: center;"><b>Отлично</b></p> <p>Студент<br/> знает: основные типы интегральных уравнений и их связь с дифференциальными уравнениями, определения и теоремы вариационного исчисления;<br/> умеет: применять методы решения интегральных уравнений различной сложности и варьировать любые функционалы;<br/> владеет: навыками решения интегральных уравнений и вариационных задач различной сложности.</p> |

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : Базовая

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Зачет

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 41 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 41 балла

| Компетенция  | Мероприятие текущего контроля   | Контролируемые элементы результатов обучения   |
|--|---|--|
| <b>Входной контроль</b>  | Введение<br><b>Входное тестирование</b>                                     | Знание понятий: производная, интеграл, экстремум, ряд Тейлора. Умение дифференцировать, интегрировать, находить экстремум, раскладывать функцию в ряд Тейлора.   |
| <b>ПК.1</b><br>способность применять в своей профессиональной деятельности знания, полученные в области физических и математических дисциплин<br><b>ОПК.8</b><br>способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей | Уравнение Вольтерра 2-го рода.<br><b>Письменное контрольное мероприятие</b> | Проверить правильность решения интегрального уравнения Вольтерра. Свести дифференциальное уравнение к интегральному уравнению. Решить интегральное уравнение Вольтерра, сводя его к дифференциальному уравнению. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра и решить его двумя способами. |

| Компетенция   | Мероприятие текущего контроля   | Контролируемые элементы результатов обучения   |
|---|---|--|
| <p><b>ПК.1</b><br/>способность применять в своей профессиональной деятельности знания, полученные в области физических и математических дисциплин</p> <p><b>ОПК.8</b><br/>способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей</p> | <p>Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.</p> <p><b>Письменное контрольное мероприятие</b></p> | <p>Умение решать интегральные уравнения с помощью определителей Фредгольма, с помощью рекуррентных соотношений, с помощью итерированных ядер; решать интегральные уравнения с вырожденным ядром.</p> |
| <p><b>ПК.1</b><br/>способность применять в своей профессиональной деятельности знания, полученные в области физических и математических дисциплин</p> <p><b>ОПК.8</b><br/>способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей</p> | <p>Вариационное исчисление</p> <p><b>Необъективируемое контрольное мероприятие</b></p>                      | <p>Способность использовать знания математики, интерпретировать полученные результаты, объяснять решения примеров.</p>   |

| Компетенция   | Мероприятие текущего контроля   | Контролируемые элементы результатов обучения  |
|---|---|---|
| <p><b>ПК.1</b><br/>способность применять в своей профессиональной деятельности знания, полученные в области физических и математических дисциплин</p> <p><b>ОПК.8</b><br/>способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей</p> | <p>Вариационное исчисление</p> <p><b>Итоговое контрольное мероприятие</b></p> | <p>Знание основных типов интегральных уравнений (Вольтерра и Фредгольма) и сути вариационного исчисления, связи интегральных уравнений с дифференциальными уравнениями.</p> <p>Умение решать основные типы интегральных уравнений и использовать методы вариационного исчисления для различных задач.</p> |

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### Введение

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **.5 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

| Показатели оценивания   | Баллы |
|---|-------|
| Контроль содержит 5 заданий. Правильное выполнение каждого задания оценивается в 2 балла. | 10    |

#### Уравнение Вольтерра 2-го рода.

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **22**

Проходной балл: **11**

| Показатели оценивания  | Баллы |
|--|-------|
| Найдена резольвента интегрального уравнения 2 способом, решено интегральное уравнение с помощью резольвенты. | 7     |
| Найдена резольвента интегрального уравнения 1 способом, решено интегральное уравнение с помощью резольвенты. | 7     |
| Интегральное уравнение сведено к дифференциальному уравнению, которое решено.                                | 4     |
| Сделана проверка правильности решения интегрального уравнения.   | 2     |
| Дифференциальное уравнение сведено к интегральному уравнению.  | 2     |

### Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **20**

Проходной балл: **10**

| Показатели оценивания   | Баллы |
|---|-------|
| Решено интегральное уравнение с помощью определителей Фредгольма. | 5     |
| Решено интегральное уравнение с помощью рекуррентных соотношений. | 5     |
| Решено интегральное уравнение с помощью итерированных ядер.       | 5     |
| Решено интегральное уравнение с вырожденным ядром.                | 5     |

### Вариационное исчисление

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **.5 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **18**

Проходной балл: **0**

| Показатели оценивания   | Баллы |
|-------------------------|-------|
| Решены домашние задачи. | 18    |

### Вариационное исчисление

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **20**

| Показатели оценивания   | Баллы |
|---|-------|
| Даны ответы на 20 вопросов (за каждый правильный ответ даётся 2 балла). | 40    |