

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования "Пермский
государственный национальный исследовательский
университет"**

Физико-математический институт

Авторы-составители: Скачкова Елена Александровна

Рабочая программа дисциплины
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Код УМК 61556

Утверждено
Протокол №1
от «19» июня 2024 г.

Пермь, 2024

1. Наименование дисциплины

Интегральные уравнения

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина входит в вариативную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **01.03.04** Прикладная математика

направленность Интеллектуальный анализ данных, программирование и искусственный интеллект

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины **Интегральные уравнения** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

01.03.04 Прикладная математика (направленность : Интеллектуальный анализ данных, программирование и искусственный интеллект)

ОПК.1 Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике

Индикаторы

ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности

ПК.1 Способен решать профессиональные задачи, возникающие при проведении научных и прикладных исследований

Индикаторы

ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований

ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований

4. Объем и содержание дисциплины

Направление подготовки	01.03.04 Прикладная математика (направленность: Интеллектуальный анализ данных, программирование и искусственный интеллект)
форма обучения	очная
№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины	7
Объем дисциплины (з.е.)	4
Объем дисциплины (ак.час.)	144
Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:	56
Проведение лекционных занятий	28
Проведение практических занятий, семинаров	28
Самостоятельная работа (ак.час.)	88
Формы текущего контроля	Защищаемое контрольное мероприятие (1) Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (1)
Формы промежуточной аттестации	Экзамен (7 триместр)

Тематический план

Наименование тем и разделов	Всего ак.час	Аудиторные занятия			самостоятельная работа
		лекции	лабораторные занятия	практические занятия	
7 триместр	144	28	0	28	88
Интегральные уравнения.Первый семестр	144	28	0	28	88
Введение	16	4	0	4	8
Интегральное уравнение Фредгольма	16	4	0	4	8
Уравнения Вольтерра I и II рода.	16	4	0	4	8
Преобразования Лапласа и Фурье	18	4	0	4	10
Нелинейные интегральные уравнения.	18	4	0	4	10
Интегральные уравнения с параметром.	18	4	0	4	10
Контрольное мероприятие №1	12	0	0	2	10
Контрольное мероприятие №2	12	0	0	2	10
Итоговое контрольное мероприятие	18	4	0	0	14

5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

Интегральные уравнения. Первый семестр

Введение

Понятие интегрального уравнения. Примеры интегральных уравнений. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Классификация интегральных уравнений. Понятие об уравнениях Фредгольма, Вольтера, Гаммерштейна, Урысона, Ляпунова и др.

Интегральное уравнение Фредгольма

Линейное уравнение Фредгольма II рода. Понятие вырожденного ядра. Редукция уравнения Фредгольма с вырожденным ядром к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы о разрешимости. Однородное уравнение Фредгольма с параметром. Характеристические числа, пространство решений однородного уравнения, собственные функции. Спектр, связь спектра и нормы, спектральный радиус. Представление решения интегрального уравнения Фредгольма. Последовательные приближения, необходимые и достаточные условия сходимости последовательных приближений. Оценка нормы интегрального оператора в различных функциональных пространствах. Редукция общего интегрального уравнения Фредгольма II рода к интегральному уравнению с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма о разрешимости.

Уравнения Вольтерра I и II рода.

Редукция уравнения Вольтерра II рода к уравнению Фредгольма. Однородное уравнение Вольтера. Спектр оператора Вольтерра. Сходимость метода последовательных приближений. Редукция уравнения Вольтера к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения Вольтерра I рода. Спектр интегрального оператора с симметричным ядром. Ортогональность системы собственных функций. Разложение по собственным функциям. Представление решения интегрального уравнения с симметричным ядром.

Преобразования Лапласа и Фурье

Понятие о преобразовании Лапласа. Оригинал и изображение. Простейшие свойства преобразования. Изображения некоторых элементарных функций. Формула обращения. Восстановление оригинала с помощью разложения в ряд. Восстановление оригинала для дробно-рациональных функций с помощью разложения на простейшие дроби. Восстановление оригинала с помощью теоремы о вычетах. Редукция интегральных, интегро-дифференциальных и обыкновенных дифференциальных уравнений к алгебраическому уравнению с помощью преобразования Лапласа. Восстановление оригинала. Прямое и обратное преобразование Фурье и его свойства. Редукция интегральных уравнений к алгебраическому уравнению с помощью преобразования Фурье. Восстановление оригинала.

Нелинейные интегральные уравнения.

Некоторые классы нелинейных интегральных уравнений. Метод неподвижной точки. Доказательство разрешимости уравнений с помощью принципа Банаха. Локальный принцип Банаха. Принцип Шаудера. Редукция уравнения Гаммерштейна с вырожденным ядром к системе нелинейных алгебраических уравнений. Представление точного решения.

Интегральные уравнения с параметром.

Уравнение с параметром в банаховом пространстве. Теорема о неявном отображении и ее следствие для нелинейного интегрального уравнения. Точки ветвлений решений интегральных уравнений. Точки бифуркации. Примеры.

Контрольное мероприятие №1

В контрольной работе проверяется усвоение следующих тем:
Линейное уравнение Фредгольма и уравнение Вольтерра.

Контрольное мероприятие №2

Основные свойства преобразования Лапласа. Таблица простейших преобразований.
Методы восстановления оригинала преобразования Лапласа по его изображению.
Применение преобразования Лапласа к решению интегральных, интегро-дифференциальных и обыкновенных дифференциальных уравнений

Итоговое контрольное мероприятие

На экзамене проверяются элементы теории интегральных уравнений, изученные в данном триместре:
Интегральное уравнение Фредгольма.
Уравнения Вольтерра I и II рода.
Преобразования Лапласа и Фурье
Метод последовательных приближений

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная:

1. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями: учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - Москва: URSS, 2016, ISBN 978-5-9710-2562-7. - 190.
2. Привалов, И. И. Интегральные уравнения : учебник для вузов / И. И. Привалов. — 4-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 253 с. — (Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-01552-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/433812>

Дополнительная:

1. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений: [учебник для студентов физико-математических специальностей университетов] / И. Г. Петровский ; [под ред. О. А. Олейник]. - Москва: Физматлит, 2009, ISBN 978-5-9221-1081-5. - 136.
2. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию: учебное пособие для вузов / М. Л. Краснов. - Москва: Наука, 1975. - 303. - Библиогр.: с. 299-301 (51 назв.). - Предм. указ.: с. 302-303
3. Полянин, А. Д. Интегральные уравнения в 2 ч. Часть 1 : справочник для вузов / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 369 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02917-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/437089>
4. Интегральные уравнения : учебное пособие / О. В. Новоселов, Е. И. Яковлев, Р. В. Ульверт [и др.]. — Красноярск : Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, 2020. — 122 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. <http://www.iprbookshop.ru/107201>
5. Полянин, А. Д. Интегральные уравнения в 2 ч. Часть 2 : справочник для вузов / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 238 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02918-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/438584>

Директор библиотеки _____ (С.Н.Соларева)

9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ

<http://window.edu.ru/> Единое окно доступа к образовательным ресурсам

<http://www.mathnet.ru/> Общероссийский математический портал

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Образовательный процесс по дисциплине **Интегральные уравнения** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
- офисный пакет приложений «LibreOffice».

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ (student.psu.ru).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).

система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.

система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная: специализированной мебелью, презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения семинарских (практических) занятий требуется аудитория, оснащенная: специализированной мебелью, презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации аудитория, оснащенная: специализированной мебелью, ноутбуком/компьютером, меловой (и) или маркерной доской, проектором, экраном.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными

компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине
Интегральные уравнения**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.
Индикаторы и критерии их оценивания**

ОПК.1

Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
<p>ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности</p>	<p>ЗНАТЬ: основные понятия и утверждения дисциплины. УМЕТЬ: решать задачи в стандартных постановках, давать содержательную интерпретацию результатов вычислений, контролировать правильность вычислений, уметь применять полученные знания для решения некоторых прикладных задач. ВЛАДЕТЬ: основным понятийным аппаратом предмета.</p>	<p align="center">Неудовлетворител</p> <p>Необходимые знания для освоения предмета отсутствуют. Студент не знает теоретических основ дисциплины, необходимых для формирования компетенции. Нет навыков выполнения расчетов.</p> <p align="center">Удовлетворительн</p> <p>Общие, но не структурированные знания основных понятий предмета. Владение техникой выполнения конкретно поставленной задачи, но с большим количеством недочетов.</p> <p align="center">Хорошо</p> <p>В целом сформированные, но содержащие небольшие пробелы, знания теоретических основ. Владение техникой выполнения конкретно поставленной задачи, но с небольшими погрешностями при интерпретации результатов.</p> <p align="center">Отлично</p> <p>Студент показывает сформированные систематические знания теоретических основ, умение применить их на практике. Показывает успешное применение навыков мыслительной деятельности.</p>

ПК.1

Способен решать профессиональные задачи, возникающие при проведении научных и прикладных исследований

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
----------------------------	------------------------------------	---

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
<p>ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований</p>	<p>Знает понятие корректной постановки математической задачи, умеет математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p>	<p>Неудовлетворител Не знает понятие корректной постановки математической задачи, не умеет математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p> <p>Удовлетворительн Демонстрирует частично сформированное знание понятие корректной постановки математической задачи, частично сформированное умение математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p> <p>Хорошо Демонстрирует сформированное, но содержащее пробелы знание понятие корректной постановки математической задачи, сформированное, но содержащее пробелы умение математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p> <p>Отлично Демонстрирует сформированное знание понятие корректной постановки математической задачи, сформированное умение математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p>
<p>ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований</p>	<p>ЗНАТЬ: основные понятия и утверждения дисциплины. УМЕТЬ: применять полученные знания для решения некоторых прикладных задач. ВЛАДЕТЬ: основным понятийным аппаратом предмета.</p>	<p>Неудовлетворител Не знает основные понятия и утверждения теории интегральных уравнений. Не знает основных формул. Нет навыков решения задач в стандартных постановках.</p> <p>Удовлетворительн Общие, но неструктурированные знания основных понятий и утверждений предмета.</p>

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
		<p style="text-align: center;">Удовлетворительн</p> <p>Демонстрирует владение техникой выполнения конкретно поставленной задачи, но с большим количеством недочетов. Демонстрирует частично сформированное умение решать задачи в стандартных постановках. Имеет представление о теоретическом анализе интегральных уравнений.</p> <p style="text-align: center;">Хорошо</p> <p>Владеет основным понятийным аппаратом интегральных уравнений. Демонстрирует в целом сформированные, но содержащие небольшие пробелы, знания теоретических основ интегральных уравнений. Демонстрирует владение техникой выполнения конкретно поставленной задачи, но с небольшими погрешностями при вычислениях. Умеет контролировать правильность вычислений; самостоятельно приобретать новые знания.</p> <p style="text-align: center;">Отлично</p> <p>Студент показывает сформированные систематические знания теоретических основ интегральных уравнений, а также умение применить их на практике. Показывает успешное применение навыков мыслительной деятельности. Демонстрирует способность контролировать правильность вычислений; самостоятельно приобретать новые знания.</p>

Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : 2024

Вид мероприятия промежуточной аттестации : Экзамен

Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации : Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

Максимальное количество баллов : 100

Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 43 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 43 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований	Контрольное мероприятие №1 Письменное контрольное мероприятие	Интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром. Характеристические значения, собственные функции, спектр, спектральный радиус интегральных операторов. Резольвента интегрального уравнения. Метод последовательных приближений и его применение к интегральному уравнению Фредгольма. Теоремы и альтернатива Фредгольма для общих ядер. Уравнения Вольтерра I и II рода. И интегральные уравнения с симметричным ядром.
ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований	Контрольное мероприятие №2 Защищаемое контрольное мероприятие	Основные свойства преобразования Лапласа. Таблица простейших преобразований. Методы восстановления оригинала преобразования Лапласа по его изображению. Применение преобразования Лапласа к решению интегральных, интегро-дифференциальных и обыкновенных дифференциальных уравнений

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований	Итоговое контрольное мероприятие Итоговое контрольное мероприятие	Интегральное уравнение Фредгольма. Уравнения Вольтерра I и II рода. Преобразования Лапласа и Фурье. Метод последовательных приближений

Спецификация мероприятий текущего контроля

Контрольное мероприятие №1

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Умеет найти резольвенту интегрального уравнения. Контролирует правильность преобразований.	10
Знает метод последовательных приближений. Умеет применить его к решению интегральному уравнению Фредгольма. Контролирует правильность преобразований	10
Знает теоремы и альтернативу Фредгольма для общих ядер.	5
Умеет решать уравнения Вольтерра I и II рода. Контролирует правильность преобразований	5

Контрольное мероприятие №2

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Умеет применить преобразования Лапласа к решению интегро-дифференциальных уравнений. Контролирует правильность преобразований	10
Умеет применить преобразования Фурье к решению интегральных уравнений. Контролирует правильность преобразований	10
Знает методы восстановления оригинала преобразования Лапласа по его изображению. Умеет восстановить оригинал преобразования Лапласа по его изображению.	5

Умеет применить преобразования Лапласа к решению интегральных уравнений. Контролирует правильность преобразований	5
--	---

Итоговое контрольное мероприятие

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

Показатели оценивания	Баллы
Умеет решать интегральное уравнение Фредгольма. Контролирует правильность преобразований	10
Умеет решать уравнения Вольтерра I и II рода. Контролирует правильность преобразований	10
Умеет применить преобразования Лапласа и Фурье к решению интегральных уравнений. Контролирует правильность преобразований	10
Умеет применить метод последовательных приближений к решению интегральных уравнений. Контролирует правильность преобразований	10