

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Пермский государственный национальный
исследовательский университет"

Физико-математический институт

Авторы-составители: **Оглезнева Анна Николаевна**

Рабочая программа дисциплины
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Код УМК 99239

Утверждено
Протокол №1
от «19» июня 2024 г.

Пермь, 2024

1. Наименование дисциплины

Линейная алгебра

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина входит в обязательную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **01.03.04** Прикладная математика

направленность Интеллектуальный анализ данных, программирование и искусственный интеллект

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины **Линейная алгебра** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

01.03.04 Прикладная математика (направленность: Интеллектуальный анализ данных, программирование и искусственный интеллект)

ОПК.1 Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике

Индикаторы

ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности

4. Объем и содержание дисциплины

Направления подготовки	01.03.04 Прикладная математика (направленность: Интеллектуальный анализ данных, программирование и искусственный интеллект)
форма обучения	очная
№№ семестров, выделенных для изучения дисциплины	2
Объем дисциплины (з.е.)	4
Объем дисциплины (ак.час.)	144
Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:	56
Проведение лекционных занятий	28
Проведение практических занятий, семинаров	28
Самостоятельная работа (ак.час.)	88
Формы текущего контроля	Входное тестирование (1) Защищаемое контрольное мероприятие (2) Итоговое контрольное мероприятие (1)
Формы промежуточной аттестации	Экзамен (2 семестр)

5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

Входной контроль

Минимальные необходимые сведения из теории множеств, алгебры, общей топологии и теории категорий

Раздел 1. Определители и матрицы.

В данном разделе изучаются комплексные числа, определители любого порядка и действия с матрицами. Элементами определителя могут быть либо действительные числа (определители матриц над полем действительных чисел), либо комплексные числа. Для определения определителей нужно знать определение и свойства подстановок, поэтому им уделяется небольшое внимание. Заканчивается раздел изучением операций с матрицами и решением матричных уравнений.

Комплексные числа. Перестановки и подстановки.

При изучении данной темы вводится определение комплексных чисел и действий с ними: сложение, умножение, деление, извлечение корня. Обращается внимание на то, что корень из комплексного числа имеет столько значений, каков его показатель.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

В разделе обоснован метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений (с произвольным числом уравнений и неизвестных). Метод основан на элементарных преобразованиях матрицы системы.

Определители n -го порядка.

В подразделе дано определение определителя квадратной матрицы произвольного порядка с элементами из поля комплексных или действительных чисел. Рассмотрены свойства определителей, получены правила для их вычисления.

Операции над матрицами. Решение матричных уравнений.

В подразделе рассмотрены: сложение матриц, умножение матрицы на действительное (комплексное) число, умножение матриц, нахождение обратной матрицы для квадратной невырожденной матрицы. Обоснованы два способа решений простейших матричных уравнений.

КР 1

В работу включены задания трех типов: действия с комплексными числами; вычисление определителей 3, 4 и n -ного порядков; решение матричных уравнений.

Раздел 2. Линейные пространства.

В разделе дано определение линейного пространства над полями R и C , приведены примеры линейных пространств, рассмотрены линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, введены понятия: базиса и размерности линейного пространства, ранга системы векторов, координаты вектора в фиксированном базисе, матрица перехода, линейного подпространства.

Определение линейных пространств. Базис. Координаты вектора.

В подразделе дано определение линейного пространства над полями R и C , приведены примеры линейных пространств, рассмотрены линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, введены понятия: базиса и размерности линейного пространства, ранга системы векторов, координаты вектора в фиксированном базисе, матрица перехода.

Линейные подпространства.

В подразделе даны определения: линейного подпространства, суммы и пересечения линейных подпространств (доказана теорема о связи размерностей).

Раздел 3. Системы линейных уравнений.

В разделе дано определение ранга матрицы, доказана теорема о ранге матрицы. Доказана теорема Кронекера-Капелли и на основе ее выведены правила решения систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены свойства решений СЛОУ и связь общего решения СЛНУ с общим решением соответствующей СЛОУ.

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

В подразделе дано определение ранга матрицы, доказана теорема о ранге матрицы. Доказана теорема Кронекера-Капелли и на основе ее выведены правила решения систем линейных алгебраических уравнений.

Пространство решений системы линейных однородных уравнений.

В подразделе рассмотрены свойства решений СЛОУ и связь общего решения СЛНУ с общим решением соответствующей СЛОУ.

КР 2

В контрольную работу включено решение СЛОУ и СНОУ на основе правил, следующих из теоремы Кронекера-Капелли.

Раздел 4. Линейные операторы.

В разделе дается определение линейного оператора, действующего из одного линейного пространства в другое и доказываются его свойства. Обоснованы три способа задания линейного оператора. Рассмотрены связь координат вектора и его образа и связь матриц линейного оператора в двух парах базисов. Рассмотрены ядро и область значений линейного оператора. Линейное преобразование рассмотрено как частный случай линейного оператора, показано, что линейное преобразование в разных базисах задается подобными матрицами. Изучены понятия собственного значения и собственного вектора, описаны линейные преобразования с простым спектром.

Определение, свойства и способы задания линейного оператора.

В подразделе дается определение линейного оператора, действующего из одного линейного пространства в другое и доказываются его свойства. Обоснованы три способа задания линейного оператора. Рассмотрены связь координат вектора и его образа и связь матриц линейного оператора в двух парах базисов. Рассмотрены ядро и область значений линейного оператора.

Линейные преобразования. Собственные значения и собственные векторы.

В подразделе линейное преобразование рассмотрено как частный случай линейного оператора, показано, что линейное преобразование в разных базисах задается подобными матрицами. Изучены понятия собственного значения и собственного вектора, описаны линейные преобразования с простым спектром.

Раздел 5. Евклидовы пространства.

В разделе даны определения: скалярного произведения векторов в линейных пространствах над полями R и C ; евклидова и унитарного пространств. Рассмотрены: способы задания скалярного произведения в евклидовом пространстве; длины векторов; углы между векторами; ортогональность векторов; ортогональное дополнение вектора и линейного подпространства; ортогональные и ортонормированные базисы. Рассмотрены частные виды линейных преобразований евклидовых пространств: преобразование, сопряженное данному линейному преобразованию; самосопряженные и ортогональные преобразования.

Скалярное произведение векторов. Определение и свойства евклидова пространства.

В подразделе даны определения: скалярного произведения векторов в линейных пространствах над полями R и C ; евклидова и унитарного пространств. Рассмотрены: способы задания скалярного произведения в евклидовом пространстве; длины векторов; углы между векторами; ортогональность векторов; ортогональное дополнение вектора и линейного подпространства; ортогональные и ортонормированные базисы.

Линейные преобразования евклидовых пространств.

В подразделе рассмотрены частные виды линейных преобразований евклидовых пространств: преобразование, сопряженное данному линейному преобразованию; самосопряженные и ортогональные преобразования.

Раздел 6. Билинейные и квадратичные формы.

В разделе дается определение билинейной формы над полями R и C , ее частных видов и ее матрицы. Квадратичная форма определяется как симметрическая билинейная форма. Рассмотрено приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному видам над полями R и C . Введены понятия: ранг квадратичной формы; положительный и отрицательный индексы инерции; дефект квадратичной формы. Доказан закон инерции квадратичной формы на поле R . Рассмотрены знакоопределенные и распадающиеся квадратичные формы.

Билинейные формы.

В разделе дается определение билинейной формы над полями R и C , ее частных видов и ее матрицы.

Квадратичные формы и их свойства.

В подразделе квадратичная форма определяется как симметрическая билинейная форма. Рассмотрено приведения квадратичной формы к каноническому и нормальному видам над полями R и C . Введены понятия: ранг квадратичной формы; положительный и отрицательный индексы инерции; дефект квадратичной формы. Доказан закон инерции квадратичной формы на поле R . Рассмотрены знакоопределенные и распадающиеся квадратичные формы.

ИКМ

Экзамен проводится в письменном виде по билетам. Билеты составляются по вопросам, предложенным для подготовки к экзамену.

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная:

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру: В 3-х ч. Ч.2. Линейная алгебра — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009. — 368 с. — ISBN 978-5-94057-454-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система БиблиоТех : [сайт]. <https://bibliotech.psu.ru/Reader/Book/8336>
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру: В 3-х ч. Ч.1.: Основы алгебры — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009. — 272 с. — ISBN 978-5-94057-453-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система БиблиоТех : [сайт]. <https://bibliotech.psu.ru/Reader/Book/8335>
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру: В 3-х ч. Ч.3. Основные структуры алгебры — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009. — 272 с. — ISBN 978-5-94057-455-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система БиблиоТех : [сайт]. <https://bibliotech.psu.ru/Reader/Book/8337>
4. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 340 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01179-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/436467>

Дополнительная:

1. Емельянова, Т. В. Линейная алгебра. Решение типовых задач : учебное пособие / Т. В. Емельянова, А. М. Кольчатова. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 184 с. — ISBN 978-5-4486-0331-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. <http://www.iprbookshop.ru/74559.html>
2. Коневских Т. М., Оглезнева А. Н. Алгебра и аналитическая геометрия. Алгебра: учебно-методическое пособие / Т. М. Коневских, А. Н. Оглезнева. — Пермь: ПГНИУ, 2019, ISBN 978-5-7944-3363-0.-114.- Библиогр.: с. 113 <https://elis.psu.ru/node/600327>

9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Образовательный процесс по дисциплине **Линейная алгебра** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- 1) презентационные материалы (слайды по темам лекционных и практических занятий);
- 2) доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- 3) доступ в электронную информационно-образовательную среду университета;
- 4) интернет-сервисы и электронные ресурсы (поисковые системы, электронная почта);

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:
- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
офисный пакет приложений «LibreOffice».

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ (student.psu.ru).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

- система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).
- система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.
- система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная: специализированной мебелью, презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения семинарских (практических) занятий требуется аудитория, оснащенная: специализированной мебелью, презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации аудитория, оснащенная: специализированной мебелью, ноутбуком/компьютером, меловой (и) или маркерной доской, проектором, экраном.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными

компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине
Линейная алгебра**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.
Индикаторы и критерии их оценивания**

ОПК.1

Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
<p>ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности</p>	<p>ЗНАТЬ: основные понятия и утверждения линейной алгебры.</p> <p>УМЕТЬ: производить расчеты в стандартных постановках задач линейной алгебры, давать содержательную интерпретацию результатов вычислений, контролировать правильность вычислений; самостоятельно приобретать новые знания.</p> <p>ВЛАДЕТЬ: основным понятийным аппаратом линейной алгебры; навыками решения задач линейной алгебры.</p>	<p align="center">Неудовлетворител</p> <p>Не знает основные понятия и утверждения линейной алгебры. Не умеет производить расчеты в стандартных постановках задач, давать содержательную интерпретацию результатов вычислений, контролировать правильность вычислений.</p> <p align="center">Удовлетворительн</p> <p>Общие, но не структурированные знания основных понятий и утверждений линейно алгебры. Демонстрирует частично сформированное умение производить расчеты в стандартных постановках задач линейной алгебры, давать содержательную интерпретацию результатов вычислений.</p> <p align="center">Хорошо</p> <p>Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания основных понятий линейно алгебры В целом успешные, но содержащие отдельные пробелы умения производить расчеты в стандартных постановках задач, давать содержательную интерпретацию результатов вычислений. Умеет контролировать правильность вычислений; самостоятельно приобретать новые знания. Владеет основным понятийным аппаратом линейной алгебры. В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение навыков решения задач.</p> <p align="center">Отлично</p> <p>Сформированные систематические знания основных понятий линейно алгебры. Сформированное умение производить расчеты в стандартных постановках задач,</p>

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
		<p style="text-align: center;">Отлично</p> <p>давать содержательную интерпретацию результатов вычислений, контролировать правильность вычислений; самостоятельно приобретать новые знания. Успешное и систематическое применение навыков решения задач.</p>

Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : 2024

Вид мероприятия промежуточной аттестации : Экзамен

Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации : Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

Максимальное количество баллов : 100

Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 43 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 43 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
Входной контроль	Входной контроль Входное тестирование	Минимальные необходимые сведения из теории множеств, алгебры, общей топологии и теории категорий
ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности	КР 1 Защищаемое контрольное мероприятие	Действия с комплексными числами; вычисление определителей 3, 4 и n-ного порядков; решение матричных уравнений.
ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности	КР 2 Защищаемое контрольное мероприятие	СЛОУ и СНОУ на основе правил, следующих из теоремы Кронекера-Капелли.
ОПК.1.1 Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использует их в профессиональной деятельности	ИКМ Итоговое контрольное мероприятие	Теоретические и практические задания по курсу линейной алгебры.

Спецификация мероприятий текущего контроля

Входной контроль

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставяемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

Показатели оценивания	Баллы
Знает понятия теории множеств.	25
Знает понятия алгебры	25
Знает понятия общей топологии	25
Знает понятия теории категорий	25

КР 1

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставяемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Умеет выполнять действия с комплексными числами	5
Умеет вычислять определители 3,4 и n-ного порядков	10
Умеет решать матричные уравнения	15

КР 2

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставяемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Умеет решать СЛОУ на основе правил, следующих из теоремы Кронекера-Капелли. Контролирует правильность преобразований.	15
Умеет решать СНОУ на основе правил, следующих из теоремы Кронекера-Капелли. Контролирует правильность преобразований.	15

Итоговое контрольное мероприятие

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставяемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

Показатели оценивания	Баллы
Знает основные определения курса. Умеет воспроизвести четкую формулировку основных определений курса.	16
Умеет воспроизвести доказательство основных теорем курса. Контролирует правильность преобразований.	15
Знает основные теоремы курса.	9