

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра вычислительной и экспериментальной механики**

Авторы-составители: **Лутманов Сергей Викторович**

Рабочая программа дисциплины

**КОНЕЧНОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Код УМК 82480

Утверждено  
Протокол №6  
от «16» июня 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Конечномерная оптимизация и вариационное исчисление

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в базовую часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **01.03.03** Механика и математическое моделирование  
направленность Программа широкого профиля

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины **Конечномерная оптимизация и вариационное исчисление** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**01.03.03** Механика и математическое моделирование (направленность : Программа широкого профиля)

**ОПК.8** способность использовать базовые знания основных разделов дифференциальной геометрии и топологии, комплексного и функционального анализа, методов конечномерной оптимизации и вариационного исчисления, устойчивости движения, физики в будущей профессиональной деятельности

#### 4. Объем и содержание дисциплины

|   |  |
|---|--|
| <b>Направления подготовки</b>   | 01.03.03 Механика и математическое моделирование<br>(направленность: Программа широкого профиля)   |
| <b>форма обучения</b>   | очная  |
| <b>№№ триместров,<br/>выделенных для изучения<br/>дисциплины</b>            | 5  |
| <b>Объем дисциплины (з.е.)</b>  | 4  |
| <b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>   | 144  |
| <b>Контактная работа с<br/>преподавателем (ак.час.),<br/>в том числе:</b>   | 56   |
| <b>Проведение лекционных<br/>занятий</b>                                    | 28   |
| <b>Проведение практических<br/>занятий, семинаров</b>                       | 28   |
| <b>Проведение лабораторных<br/>работ, занятий по<br/>иностранному языку</b> | 0  |
| <b>Самостоятельная работа<br/>(ак.час.)</b>                                 | 88   |
| <b>Формы текущего контроля</b>  | Входное тестирование (1)<br>Защищаемое контрольное мероприятие (1)<br>Итоговое контрольное мероприятие (1)<br>Письменное контрольное мероприятие (2) |
| <b>Формы промежуточной<br/>аттестации</b>                                   | Экзамен (5 триместр)   |

## **5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины**

### **КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ**

Примеры содержательных задач на минимум и максимум . Евклидовы пространства. Постановка задачи оптимизации. Две стороны задачи оптимизации. Точная нижняя грань и минимизирующие последовательности. Локальный минимум.

Экстремум гладких функций. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Теорема Ферма.

Задачи на условный экстремум с ограничениями типа равенств и неравенств. Постановка задачи.

Необходимые условия локального минимума.

Достаточные условия локального минимума. Задачи на условный экстремум с ограничениями типа равенств.

Эквивалентные постановки задач. Условия локального минимума в задачах на условный экстремум с ограничениями типа равенств. Линейное программирование. Пример прикладной задачи линейного программирования. Постановка задачи .

Графический метод решения задачи линейного программирования . Угловые точки в задачах линейного программирования.(с доказательством). Обоснование симплекс метода.(с доказательством).

Построение начальной угловой точки.)

#### **1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ**

Евклидово пространство. Две стороны задачи оптимизации.

#### **входной контроль**

#### **2. ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ**

Постановка задачи. Необходимые условия локального минимума. Достаточные условия локального минимума. Иллюстрирующие примеры. Оптимизация гладких функций с ограничениями типа равенств.

#### **3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Постановка задачи линейного программирования. Графический метод решения задачи линейного программирования. Угловые точки в задачах линейного программирования. Обоснование симплекс-метода. Выбор начальной угловой точки.

#### **Контрольная по теме « ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ»**

#### **Индивидуальное задание по теме «ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»**

#### **Входной контроль**

### **ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Примеры содержательных задач вариационного исчисления. Задача о брахистохроне. Задача Дидоны. Задача о наборе максимальной скорости ракетой в однородном поле тяжести в среде с сопротивлением.

Некоторые сведения из теории функционалов, определенных на линейных нормированных пространствах.. Линейные пространства. Вариация функционала.

Линейные нормированные пространства. Необходимые условия локального экстремума функционала.

Простейшая вариационная задача. Постановка простейшей вариационной задачи. Сильный и слабый локальный минимум.

Необходимые условия локального минимума первого порядка. Дифференциальное уравнение Эйлера – Лагранжа

Необходимые условия локального минимума второго порядка. Условия Лежандра. Необходимые условия слабого локального минимума. Достаточные условия слабого локального минимума.

Необходимые условия сильного локального минимума. достаточные условия сильного локального минимума . Обобщения простейшей вариационной задачи. Экстремали, содержащие угловые точки.

Задача с подвижными концами. Задача Больца (с доказательством). Функционалы, зависящие от вектор-функций. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка. Условный экстремум в задачах вариационного исчисления.

Простейшая изопериметрическая задача вариационного исчисления. Задача Лагранжа с одной голономной связью. Задача Лагранжа с одной неголономной связью.

### **1. ПРИМЕРЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Задача о брахистохроне. Задача Дидоны. Задача о наборе максимальной скорости ракетой в однородном поле тяжести.

### **2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ЛИНЕЙНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Линейные пространства. Вариация функционала. Линейные нормированные пространства. Необходимые условия локального экстремума функционала.

### **3. ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА**

Постановка простейшей вариационной задачи. Сильный и слабый локальный минимум. Необходимые условия локального минимума первого порядка. Интегро-дифференциальное уравнение Эйлера-Лагранжа. Частные случаи интегрирования уравнения Эйлера-Лагранжа. Необходимые условия локального минимума второго порядка. Условия Лежандра. Условия Якоби. Достаточные условия слабого локального минимума. Необходимые условия сильного локального минимума. Достаточные условия сильного локального минимума.

### **4. ОБОБЩЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ**

. Экстремали, содержащие угловые точки. Задача с подвижными границами. Задача Больца. Функционалы, зависящие от вектор-функций. Функционалы, зависящие от производных высших порядков.

### **5. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

Изопериметрическая задача вариационного исчисления. Задача Лагранжа с голономной и неголономной связями.

## **Контрольная по теме «ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»**

### **ЭКЗАМЕН**

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Оптимальное управление/Э. М. Галеев [и др.] ; под ред.: Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова.- Москва:Изд-во МЦНМО,2008, ISBN 978-5-94057-367-8.-320.-Библиогр.: с. 311-312. - Предм. указ.: 319-320
2. Лутманов С. В. Курс лекций по методам оптимизации/С. В. Лутманов.-Ижевск:Издательство РХД,2001, ISBN 5-93972-061-7.-368.-Библиогр.: с. 361 - 363

### Дополнительная:

1. Лутманов С. В. Вариационное исчисление и теория оптимального управления в примерах и упражнениях:учебное пособие для студентов, обучающихся по группе математических и механических специальностей/С. В. Лутманов.-Пермь,2010, ISBN 978-5-7944-1279-6.-200.-Библиогр.: с. 198-199
2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач:учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика"/Ф. П. Васильев.-Москва:Наука,1988, ISBN 5-02-013796-0.-552.-Библиогр.: с. 531-545
3. Лутманов С. В.,Аюпов В. В.,Гамилова Л. В. Задачи оптимизации в конечномерных пространствах:учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по группе мат. и мех. спец./С. В. Лутманов, В. В. Аюпов, Л. В. Гамилова.-Пермь:ПГУ,2007, ISBN 5-7944-0929-0.-160.-Библиогр.: с. 157-159

## 9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ  
<http://window.edu.ru/> Единое окно доступа к образовательным ресурсам

## 10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Образовательный процесс по дисциплине **Конечномерная оптимизация и вариационное исчисление** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
- офисный пакет приложений «LibreOffice»;

Специализированное программное обеспечение не требуется.

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ ([student.psu.ru](http://student.psu.ru)).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

- система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).
- система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.
- система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## 11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с

доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Конечномерная оптимизация и вариационное исчисление**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции и  
критерии их оценивания**

| Компетенция   | Планируемые результаты обучения  | Критерии оценивания результатов обучения  |
|---|--|---|
| <p><b>ОПК.8</b><br/>способность использовать базовые знания основных разделов дифференциальной геометрии и топологии, комплексного и функционального анализа, методов конечномерной оптимизации и вариационного исчисления, устойчивости движения, физики в будущей профессиональной деятельности</p> | <p>В результате обучения студент должен знать основы теории методов оптимизации и вариационного исчисления, уметь решать конкретные задачи, владеть навыками конечномерной оптимизации и вариационного исчисления.</p> | <p align="center"><b>Неудовлетворител</b><br/>Не знает основных формул для выполнения индивидуального задания. Задание выполнено не в полном объеме</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b><br/>Знает основные формулы для выполнения индивидуального задания. Задание выполнено в полном объеме.</p> <p align="center"><b>Хорошо</b><br/>Знает основные формулы для выполнения индивидуального задания. Задание выполнено в полном объеме. Умеет обосновывать выкладки при выводе рабочих формул.</p> <p align="center"><b>Отлично</b><br/>Знает основные формулы для выполнения индивидуального задания. Задание выполнено в полном объеме. Умеет обосновывать выкладки при выводе рабочих формул. Владеет материалом из граничных разделов</p> |

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : Базовая

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Экзамен

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 44 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 44 балла

| Компетенция  | Мероприятие текущего контроля   | Контролируемые элементы результатов обучения   |
|--|---|--|
| <b>Входной контроль</b><br><b>ОПК.8</b><br>способность использовать базовые знания основных разделов дифференциальной геометрии и топологии, комплексного и функционального анализа, методов конечномерной оптимизации и вариационного исчисления, устойчивости движения, физики в будущей профессиональной деятельности | входной контроль<br><b>Входное тестирование</b>   | Уметь решать системы линейных алгебраических уравнений и обыкновенные дифференциальные уравнения |
| <b>ОПК.8</b><br>способность использовать базовые знания основных разделов дифференциальной геометрии и топологии, комплексного и функционального анализа, методов конечномерной оптимизации и вариационного исчисления, устойчивости движения, физики в будущей профессиональной деятельности                            | Контрольная по теме « <b>ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ</b> »<br><b>Письменное контрольное мероприятие</b> | Умение решать гладкую задачу математического программирования                                    |

| Компетенция  | Мероприятие текущего контроля  | Контролируемые элементы результатов обучения   |
|--|--|--|
| <p><b>ОПК.8</b><br/> способность использовать базовые знания основных разделов дифференциальной геометрии и топологии, комплексного и функционального анализа, методов конечномерной оптимизации и вариационного исчисления, устойчивости движения, физики в будущей профессиональной деятельности</p> | <p>Индивидуальное задание по теме «ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»<br/> <b>Защищаемое контрольное мероприятие</b></p>                           | <p>Умение решать задачу линейного программирования графически, симплекс-методом и на ЭВМ</p>                 |
| <p><b>ОПК.8</b><br/> способность использовать базовые знания основных разделов дифференциальной геометрии и топологии, комплексного и функционального анализа, методов конечномерной оптимизации и вариационного исчисления, устойчивости движения, физики в будущей профессиональной деятельности</p> | <p>Контрольная по теме «ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»<br/> <b>Письменное контрольное мероприятие</b></p> | <p>Уметь провести полное исследование простейшей вариационной задачи</p>                                     |
| <p><b>ОПК.8</b><br/> способность использовать базовые знания основных разделов дифференциальной геометрии и топологии, комплексного и функционального анализа, методов конечномерной оптимизации и вариационного исчисления, устойчивости движения, физики в будущей профессиональной деятельности</p> | <p><b>ЭКЗАМЕН</b><br/> <b>Итоговое контрольное мероприятие</b></p>   | <p>Знать доказательство основных теорем по конечно мерным задачам оптимизации и вариационному исчислению</p> |

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### входной контроль

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

| Показатели оценивания                           | Баллы |
|---|-------|
| Получить верные ответы о заданиям               | 5     |
| привести обоснования решения по первой задачи   | 2     |
| привести обоснования решения по второй задачи   | 2     |
| Не допустить арифметических ошибок при расчетах | 1     |

### **Контрольная по теме «ЭКСТРЕМУМ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ»**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **10**

Проходной балл: **5**

| Показатели оценивания                                  | Баллы |
|--|-------|
| Получить формально верный ответ                        | 5     |
| Проверить выполнение достаточных условий оптимальности | 3     |
| Проверить выполнение всех ограничений задачи           | 2     |

### **Индивидуальное задание по теме «ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **10 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

| Показатели оценивания                    | Баллы |
|--|-------|
| Получить формально верный ответ          | 13    |
| Обосновать приведенные в работе выкладки | 12    |
| Ответить на дополнительные вопросы       | 5     |

### **Контрольная по теме «ПОЛНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ»**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **20**

Проходной балл: **9**

| Показатели оценивания           | Баллы |
|---------------------------------|-------|
| обосновать приведенные выкладки | 13    |
| Получить формально верный ответ | 4     |
| Сделать проверку                | 3     |

### **ЭКЗАМЕН**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: 17

| <b>Показатели оценивания</b>  | <b>Баллы</b> |
|---|--------------|
| Представить корректные доказательства сформулированных теорем                       | 17           |
| ответить на дополнительные вопросы  | 13           |
| Продemonстрировать умение применить доказанные теоремы для решения конкретных задач | 10           |