

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра фундаментальной математики**

**Авторы-составители: Еленский Юрий Наполеонович  
Скачкова Елена Александровна  
Левко Светлана Владимировна**

Рабочая программа дисциплины  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ II**  
Код УМК 46111

Утверждено  
Протокол №9  
от «22» мая 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Математический анализ II

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в вариативную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **01.03.02** Прикладная математика и информатика  
направленность Системное программирование и компьютерные технологии

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины **Математический анализ II** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**01.03.02** Прикладная математика и информатика (направленность : Системное программирование и компьютерные технологии)

**ПК.2** способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат

#### 4. Объем и содержание дисциплины

<b>Направления подготовки</b>	01.03.02 Прикладная математика и информатика (направленность: Системное программирование и компьютерные технологии)
<b>форма обучения</b>	очная
<b>№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины</b>	4
<b>Объем дисциплины (з.е.)</b>	4
<b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>	144
<b>Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:</b>	56
<b>Проведение лекционных занятий</b>	28
<b>Проведение практических занятий, семинаров</b>	28
<b>Самостоятельная работа (ак.час.)</b>	88
<b>Формы текущего контроля</b>	Входное тестирование (1) Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (2)
<b>Формы промежуточной аттестации</b>	Экзамен (4 триместр)

## 5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

### Математический анализ II. Четвертый триместр

#### Входной контроль

Входная контрольная работа. Проверяет остаточные знания элементарной математики, математического анализа I.

#### Введение в анализ

Операции над множествами и их свойства. Понятие рационального числа, свойства рациональных чисел, измерение отрезков на числовой прямой. Множество действительных чисел, приближение действительного числа рациональными. Арифметические операции над действительными числами, свойства действительных чисел. Принцип Архимеда, полнота множества действительных чисел. Ограниченные и неограниченные множества, определение точных граней. Теорема существования точных граней у ограниченного множества. Принцип вложенности отрезков, Дедекиндово сечение. Отображение множеств. Инъекция, сюръекция, биекция.

#### Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных

Определение функции. Определение предельного значения функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Односторонние пределы. Предел функции по базе. Бесконечно малые и бесконечно большие функции на бесконечности. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Критерий Коши существования предела функции. Определение непрерывности функции в точке и на множестве. Эквивалентность различных определений непрерывности. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Предел и непрерывность монотонной функции. Теорема существования обратной функции. Непрерывность сложной функции. Непрерывность основных элементарных функций. Свойство непрерывной функции сохранять знак. Свойства непрерывных функций на отрезке: теоремы Больцано-Коши, теоремы Вейерштрасса: равномерная непрерывность, теорема Кантора.

#### Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных

Определение производной функции в точке, геометрический и физический смысл производной. Односторонние производные. Понятие дифференцируемости функции в точке, связь между дифференцируемостью и непрерывностью. Основные правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Первый дифференциал, инвариантность его формы. Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Основные свойства дифференцируемых функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. Исследование функций с помощью производных. Условия постоянства функций, возрастания и убывания функций. Локальный экстремум функции, необходимые и достаточные условия локального экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции. Направление выпуклости графика функции и точки перегиба. Асимптоты графика функции.

#### Практическая работа №1 «Непрерывность и дифференцируемость функций одной и нескольких переменных»

Знание определения непрерывности функции одной переменной на языке окрестностей. Умение применить это определение для доказательства непрерывности функции одной переменной в некоторой точке.

Знание определения равномерной непрерывности функции одной или двух переменных. Умение применить это определение для исследования равномерной непрерывности функции одной или двух переменных в некоторой области.

Знание условий непрерывности и дифференцируемости функции одной переменной. Умение применить эти условия для нахождения параметров, при которых функция является непрерывной и дифференцируемой.

Умение применить правило Лопиталю к вычислению предела функции одной переменной.

Знание формулы Тейлора. Знание основных известных разложений функции по формуле Тейлора. Умение применить формулу Тейлора к вычислению предела функции одной переменной. Умение применить формулу Тейлора для приближённого вычисления значения функции. Умение оценить погрешность вычисления.

Умение исследовать на экстремум неявно заданную функцию двух переменных.

Умение решить текстовую задачу, сведя её к исследованию функции на условный экстремум.

Умение преобразовать дифференциальное уравнение

### **Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных**

Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла. Основные свойства неопределённого интеграла. Таблица основных неопределённых интегралов. Основные правила интегрирования: замена переменной, интегрирование по частям. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие; интегрирование рациональных функций, метод неопределённых коэффициентов, метод Остроградского. Интегрирование иррациональных выражений: дробно-линейных иррациональностей, квадратичных иррациональностей (подстановки Эйлера). Интегрирование дифференциального бинома (подстановки Чебышева). Интегрирование тригонометрических выражений.

Понятие определённого интеграла, сумма Римана. Суммы Дарбу и их свойства. Необходимое условие интегрируемости. Необходимое и достаточное условия существования определённого интеграла.

Классы интегрируемых функций. Свойства определённого интеграла: арифметические операции над интегрируемыми функциями; свойства интеграла, выраженные неравенствами; теоремы о среднем.

Свойства определённого интеграла с верхним переменным пределом, связь определённого интеграла с неопределённым. Основная формула интегрального исчисления. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

Геометрические приложения определённого интеграла: вычисление длины дуги спрямляемой кривой, площади криволинейной трапеции и криволинейного сектора, вычисление объёма тел вращения.

Несобственные интегралы, признаки сходимости, главное значение.

### **Практическая работа №2 «Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных»**

Знание формул для вычисления массы кривой. Умение применять эти формулы.

Знание формул для вычисления работы векторного поля вдоль некоторого контура. Умение применять эти формулы.

Знание формул для вычисления массы поверхности. Умение применять эти формулы.

Знание формул для вычисления циркуляции векторного поля. Умение применять эти формулы.

Знание формул для вычисления потока векторного поля через замкнутую поверхность. Умение применять эти формулы.

Умение применять эйлеровы интегралы к вычислению несобственных интегралов.

### **Ряды**

Числовой ряд и его сходимость. Критерий Коши. Основные свойства сходящихся рядов, необходимое условие сходимости. Критерий сходимости знакоположительного ряда. Признаки сравнения в простой и предельной форме. Признаки Даламбера, Коши, интегральный признак.

Абсолютная и условная сходимость знакпеременных рядов. Признак Лейбница. Признак Абеля-Дирихле.

Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Равномерная сходимость на множестве, критерий Коши равномерной сходимости. Достаточные признаки равномерной сходимости: признак Вейерштрасса, признак Абеля-Дирихле, признак Дини. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов: непрерывность суммы (предельной функции), почленное интегрирование и дифференцирование.

Степенной ряд и область его сходимости, теорема Коши-Адамара. Функциональные свойства степенных рядов. Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора. Оценка погрешностей.

Ортогональные системы функций. Свойства периодических функций. Определение коэффициентов Фурье; случай четной и нечетной функций.

Разложение функций в ряд Фурье. Интеграл Дирихле. Основная лемма. Принцип локализации. Теорема о сходимости ряда Фурье в точке. Разложение функций, заданных на отрезке, в неполные ряды Фурье.

### **Итоговое контрольное мероприятие**

Знание основных понятий математического анализа, используемых при изучении курса, и умение их формулировать (в том числе на языке окрестностей).

Знание основных теорем математического анализа и умение их формулировать. Умение применять эти теоремы для установления свойств функций одной и нескольких переменных.

Умение решать практические задания на основании понятий, методов и теорем, освоенных при изучении курса.

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.



## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Математический анализ. Сборник заданий : учебное пособие для вузов / В. В. Логинова [и др.] ; под общей редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 206 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-11516-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/454528>
2. Математический анализ и дискретная математика : учебное пособие для вузов / Е. Г. Плотникова, С. В. Левко, В. В. Логинова, Г. М. Хакимова ; под общей редакцией Е. Г. Плотниковой. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 300 с. — (Университеты России). — ISBN 978-5-534-07545-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/441347>
3. Веретенников, В. Н. Сборник задач по математике. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / В. Н. Веретенников. — Санкт-Петербург : Российский государственный гидрометеорологический университет, 2011. — 340 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. <http://www.iprbookshop.ru/17964>
4. Геворкян, Э. А. Математика. Математический анализ : учебное пособие / Э. А. Геворкян, А. Н. Малахов. — Москва : Евразийский открытый институт, 2010. — 344 с. — ISBN 978-5-374-00369-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. <http://www.iprbookshop.ru/10715>

### Дополнительная:

1. Ильин В. А. Математический анализ. учебник : в 2 ч. Ч. 2 / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов ; ред. А. Н. Тихонов ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Проспект, 2007, ISBN 978-5-482-01431-8. — 368
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. — Москва: АСТ, 2003, ISBN 5-17-010062-0. — 558.
3. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. учебник для студентов высших учебных заведений: в 2 т. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л. Д. Кудрявцев. — 3-е изд., перераб. — Москва: Физматлит, 2009, ISBN 978-5-9221-0184-4 (Т. 1). — 400

## **9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины**

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ

<http://www.mathnet.ru/> Общероссийский математический портал

<http://window.edu.ru/> Единое окно доступа к образовательным ресурсам

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Образовательный процесс по дисциплине **Математический анализ II** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
- офисный пакет приложений «LibreOffice».

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ (**student.psu.ru**).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).

система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.

система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Математический анализ II**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции и  
критерии их оценивания**

Компетенция	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
<p><b>ПК.2</b> способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат</p>	<p><b>ЗНАТЬ:</b> основные понятия и утверждения математического анализа.</p> <p><b>УМЕТЬ:</b> решать различные задачи методами математического анализа; контролировать правильность вычислений; приобретать новые знания.</p> <p><b>ВЛАДЕТЬ:</b> основным понятийным аппаратом математического анализа, навыками теоретического анализа полученных результатов.</p>	<p align="center"><b>Неудовлетворител</b></p> <p>Не знает основные понятия и утверждения теории математического анализа. Не знает основные формулы математического анализа и не умеет применять их при решении задач. Не контролирует правильность вычислений.</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b></p> <p>Имеет общие знания основных понятий и утверждений математического анализа. Умеет решать ограниченный набор задач, используя основные формулы.</p> <p align="center"><b>Хорошо</b></p> <p>Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания основных понятий и утверждений теории математического анализа. Умеет решать стандартные задачи. Контролирует правильность вычислений.</p> <p align="center"><b>Отлично</b></p> <p>Сформированные систематические знания основных понятий и утверждений теории математического анализа. Умеет решать задачи в усложнённых постановках. Контролирует правильность вычислений. Самостоятельно приобретает новые знания</p>

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : СУОС

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Экзамен

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 43 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 43 балла

Компетенция	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>Входной контроль</b>	Входной контроль <b>Входное тестирование</b>	Нахождение предела. Нахождение производной и дифференциала первого и второго рода. Методы интегрирования. Вычисление площади и объема с помощью кратных интегралов. Исследование ряда на сходимость.
<b>ПК.2</b> способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Практическая работа №1 «Непрерывность и дифференцируемость функций одной и нескольких переменных» <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Исследование равномерной непрерывности. Нахождение первой и второй производных параметрически заданной функции. Нахождение первой и второй производных неявно заданной функции. Исследование на условный экстремум ФНП.
<b>ПК.2</b> способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Практическая работа №2 «Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных» <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Знание определения несобственных интегралов, зависящих от параметра. Умение определять область сходимости интегралов. Знание достаточных признаков равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, умение применять их на практике. Знание интегралов Эйлера, умение вычислять интегралы с помощью интегралов Эйлера.

Компетенция	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>ПК.2</b> способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	Итоговое контрольное мероприятие <b>Итоговое контрольное мероприятие</b>	Знание основных понятий математического анализа, используемых при изучении курса, и умение их формулировать (в том числе на языке окрестностей). Знание основных теорем математического анализа и умение их формулировать. Умение применять эти теоремы для установления свойств функций одной и нескольких переменных. Умение решать практические задания на основании понятий, методов и теорем, освоенных при изучении курса.

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### Входной контроль

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

Показатели оценивания	Баллы
Вычисление площади и объема с помощью кратных интегралов.	3
Нахождение предела	2
Нахождение производной и дифференциала первого и второго рода.	2
Методы интегрирования.	2
Исследование ряда на сходимость.	1

#### Практическая работа №1 «Непрерывность и дифференцируемость функций одной и нескольких переменных»

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **6 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Нахождение первой и второй производных параметрически заданной функции.	8.5
Нахождение первой и второй производных неявно заданной функции.	8.5
Исследование на условный экстремум ФНП.	7
Исследование равномерной непрерывности.	6

## Практическая работа №2 «Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных»

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **8 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Знание достаточных признаков равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, умение применять их на практике.	10
Знание интегралов Эйлера, умение вычислять интегралы с помощью интегралов Эйлера.	10
Умение определять область сходимости интегралов.	7
Знание определения несобственных интегралов, зависящих от параметра.	3

## Итоговое контрольное мероприятие

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

Показатели оценивания	Баллы
Умение решать практические задания на основании понятий, методов и теорем, освоенных при изучении курса.	15
Умение применять эти теоремы для установления свойств функций одной и нескольких переменных.	10
Знание основных понятий математического анализа, используемых при изучении курса, и умение их формулировать (в том числе на языке окрестностей).	8
Знание основных теорем математического анализа и умение их формулировать.	7