

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Многомерный анализ, интегралы и ряды
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Искусственный интеллект и большие данные Сетевое обучение кафедра высшей математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 168 час.

Подготовка к экзамену: 0 час.

Всего часов: 288, всего зач. ед.: 8

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: О.К. Подлипский, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 30.08.2022

Аннотация

Изучаются функции многих переменных. Понятие предела функции в точке, непрерывность функции в точке. Одним из основополагающих определений раздела является понятие дифференцируемости функции многих переменных в точке. Исследуются свойства функций, дифференцируемых в точке. Вводятся понятия частных производных, дифференциала и дифференциалов высших порядков для функций многих переменных. Заканчивается раздел изучением формулы Тейлора.

Вводятся понятия определенного интеграла и функции, интегрируемой на отрезке. Исследуются классы интегрируемых функций. Доказывается формула Ньютона-Лейбница.

Определяются несобственные интегралы. Изучаются сходящиеся и сходящиеся абсолютно несобственные интегралы (признаки и критерий).

Вводятся понятия числового ряда, сходящегося и абсолютно сходящегося ряда. Изучаются признаки и критерии сходимости знакоположительных рядов. Изучаются свойства абсолютно сходящихся числовых рядов.

Функциональные последовательности и функциональные ряды вводятся и изучаются параллельно. Определяются равномерно сходящиеся на множестве функциональные ряды (функциональные последовательности). Исследуются свойства равномерно сходящихся функциональных рядов (почленное дифференцирование, интегрирование и переход к пределу).

Как частный случай функциональных рядов изучаются степенные ряды, в частности, ряды Тейлора.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Является формирование базовых знаний по математическому анализу для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах с естественнонаучным содержанием; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов;
подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
приобретение навыков в применении методов математического анализа в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Применяет базовые понятия, основную терминологию и знания основных положений и концепций в области математических и естественных наук
	ОПК-1.2 Осуществляет первичный сбор и анализ материала, интерпретирует различные математические объекты
	ОПК-1.3 Использует практический опыт решения стандартных математических задач

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

свойства функций многих переменных, понятия предела, непрерывности, частных производных и дифференциала;
 свойства определенного интеграла Римана, несобственных интегралов, криволинейных интегралов, свойства числовых, функциональных и степенных рядов;
 признаки сходимости несобственных интегралов со степенными, логарифмическими и экспоненциальными особенностями; аналогичные признаки сходимости числовых и функциональных рядов;
 основные разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

уметь:

вычислять частные производные первого и высших порядков от функций многих переменных (в частности, заданных неявно); исследовать дифференцируемость функций;
 выполнять замену переменных в дифференциальных уравнениях (обыкновенных и с частными производными);
 вычислять определенные интегралы и криволинейные интегралы (в частности, возникающие в геометрических и физических задачах);
 исследовать сходимость числовых рядов, равномерную сходимость функциональных рядов;
 раскладывать элементарные функции в степенные ряды и находить их радиусы сходимости.

владеть:

аппаратом дифференциального исчисления функций многих переменных, а также аппаратом интегрального исчисления для решения различных задач, возникающих в физике, технике, экономике и других прикладных дисциплинах;
 понятием равномерной сходимости функциональных рядов для обоснования некоторых математических преобразований, применяемых в физике.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	11	10		28
2	Определенный интеграл, его применение	11	7		28
3	Несобственный интеграл	9	11		28
4	Числовые ряды	9	8		28
5	Функциональные последовательности и ряды	10	12		28
6	Степенные ряды	10	12		28
Итого часов		60	60		168
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		288 час., 8 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1.1. Точечное n -мерное евклидово пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n -мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества; точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

1.2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения по Гейне и Коши, их эквивалентность. Повторные пределы и пределы по направлениям. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам. Предел функции по множеству.

1.3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте – ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

1.4. Частные производные функций нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

1.5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным числом в формах Лагранжа и Пеано.

2. Определенный интеграл, его применение

2.1. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом – непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

2.3. Геометрические приложения определенного интеграла – площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.

2.4. Криволинейный интеграл первого рода. Независимость выражения интеграла через параметризацию кривой от допустимой замены параметра. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода, выражение через параметризацию кривой.

3. Несобственный интеграл

3.1. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного предела интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признаки сравнения сходимости. Интегралы от знакопеременных функций; абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля.

4. Числовые ряды

4.1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Произведение абсолютно сходящихся рядов.

5. Функциональные последовательности и ряды

5.1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда их непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Дирихле и Абеля.

6. Степенные ряды

6.1. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши-Адамара для радиуса сходимости. Вторая теорема Абеля. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.

6.2. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости при почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда в круге сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд; ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным числом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряды Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплексной функции .

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин .— 5-е изд. — М. : БИНОМ. Лаб. знаний, 2013 .— 672 с.
2. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 1 : Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2010, 2012 .— 496 с.
3. Сборник задач по математическому анализу [Текст] : в 3 т. Т. 2 : Интегралы. Ряды : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев [и др.] .— 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Физматлит, 2003, 2009, 2012 .— 504 с.
6. Бесов О.В. Лекции по математическому анализу. – М.: Физматлит, 2014.
7. Петрович А.Ю. Лекции по математическому анализу. Ч.2. Многомерный анализ, интегралы и ряды. – М.: МФТИ, 2012.

Дополнительная литература

1. Курс математического анализа [Текст] : в 3т. : учебник для вузов:рек.М-вом образования РФ / Л. Д. Кудрявцев .— 5-е изд., перераб.и доп. — М. : Дрофа, 2004 .— .— (Высшее образование : Современный учебник).-Предм.-имен.указ.:с.706-713.-5000экз.-ISBN 5-7107-5003-4(в пер.) .— Т.2 : Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. - 2004. - 720 с.
2. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 1 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 464 с.
3. Курс математического анализа [Текст] : в 2 т. : учебник для вузов : доп. М-вом образования СССР. Т. 2 / С. М. Никольский .— 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1983 .— 448 с.
4. Лекции по математическому анализу [Текст] : [в 2 ч.]. Ч. 1 : учеб. пособие для вузов : рек. УМО МФТИ / Г. Н. Яковлев .— М. : Физматлит, 2001 .— 400 с.
5. Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] : 3 т. : учеб. пособие для вузов / Г. М. Фихтенгольц .— 8-е изд. — М. : Физматлит : Лаб. знаний, 2003 .— Т. 2. - 2003. - 864 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.math.mipt.ru>

<http://lib.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Приведены в ежегодно разрабатываемых домашних заданиях.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Искусственный интеллект и большие данные
Сетевое обучение
кафедра высшей математики
курс: 1
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - зачет

Разработчик: О.К. Подлипский, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Применяет базовые понятия, основную терминологию и знания основных положений и концепций в области математических и естественных наук
	ОПК-1.2 Осуществляет первичный сбор и анализ материала, интерпретирует различные математические объекты
	ОПК-1.3 Использует практический опыт решения стандартных математических задач

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Многомерный анализ, интегралы и ряды» обучающийся должен:

знать:

свойства функций многих переменных, понятия предела, непрерывности, частных производных и дифференциала;
свойства определенного интеграла Римана, несобственных интегралов, криволинейных интегралов, свойства числовых, функциональных и степенных рядов;
признаки сходимости несобственных интегралов со степенными, логарифмическими и экспоненциальными особенностями; аналогичные признаки сходимости числовых и функциональных рядов;
основные разложения элементарных функций в ряд Тейлора.

уметь:

вычислять частные производные первого и высших порядков от функций многих переменных (в частности, заданных неявно); исследовать дифференцируемость функций;
выполнять замену переменных в дифференциальных уравнениях (обыкновенных и с частными производными);
вычислять определенные интегралы и криволинейные интегралы (в частности, возникающие в геометрических и физических задачах);
исследовать сходимость числовых рядов, равномерную сходимость функциональных рядов;
раскладывать элементарные функции в степенные ряды и находить их радиусы сходимости.

владеть:

аппаратом дифференциального исчисления функций многих переменных, а также аппаратом интегрального исчисления для решения различных задач, возникающих в физике, технике, экономике и других прикладных дисциплинах;
понятием равномерной сходимости функциональных рядов для обоснования некоторых математических преобразований, применяемых в физике.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умение решать задачи.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Предел последовательности точек в n -мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества. Компактные множества. Критерий компактности.
2. Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора). Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.
3. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл. Независимость градиента дифференцируемой функции от выбора прямоугольной системы координат.
4. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
5. Определение измеримости по Жордану множества в n -мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана. Измеримость и мера цилиндра в $(n+1)$ -мерном пространстве. Измеримость и мера графика непрерывной на компакте функции. Мера декартова произведения множеств.
6. Определенный интеграл Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу. Свойства сумм Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле. Первая и вторая теоремы о среднем для интеграла.
7. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
8. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Формула длины кривой. Условие потенциальности векторного поля.
9. Несобственный интеграл. Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения. Интегралы от знакопеременных функций, сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
10. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признак сравнения, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, сходимость и абсолютная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Произведение абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана о перестановке членов ряда сходящегося, но не абсолютно сходящегося.
11. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
12. Степенные ряды с комплексными членами. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Первая теорема Абеля. Вторая теорема Абеля.

13. Степенные ряды с действительными членами. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность представления функции степенным рядом. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$. Разложение в степенной ряд функции e^z комплексного переменного z , формулы Эйлера. Аналитические функции. Аналитичность функции внутри круга сходимости. Аналитичность суммы, произведения и частного аналитических функций.

14. Формулы Валлиса и Стирлинга.

Примеры экзаменационных билетов

Билет № 1

- 1) Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.
- 2) Интегральный признак сходимости числовых рядов.

Билет № 2

- 1) Теорема о независимости смешанной частной производной от порядка дифференцирования.
- 2) Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении зачета обучающемуся предоставляется один час (астрономический) на подготовку.

Во время проведения зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.