

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования "Пермский
государственный национальный исследовательский
университет"

Кафедра фундаментальной математики

Авторы-составители: **Волочков Александр Андреевич**

Рабочая программа дисциплины

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Код УМК 64335

Утверждено
Протокол №9
от «22» мая 2020 г.

Пермь, 2020

1. Наименование дисциплины

Теория чисел

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина входит в вариативную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление подготовки: **01.03.01** Математика
направленность Программа широкого профиля

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины **Теория чисел** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

01.03.01 Математика (направленность : Программа широкого профиля)

ПК.1 Способен решать профессиональные задачи, возникающие при проведении научных и прикладных исследований

Индикаторы

ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований

ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований

4. Объем и содержание дисциплины

Направление подготовки	01.03.01 Математика (направленность: Программа широкого профиля)
форма обучения	очная
№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины	8
Объем дисциплины (з.е.)	3
Объем дисциплины (ак.час.)	108
Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:	42
Проведение лекционных занятий	14
Проведение практических занятий, семинаров	28
Самостоятельная работа (ак.час.)	66
Формы текущего контроля	Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (2)
Формы промежуточной аттестации	Зачет (8 триместр)

5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

Теория чисел. Первый семестр

Элементарная теория чисел - теория колец классов вычетов, колец целых чисел Гаусса, Эйзенштейна и Гурвица, ее приложения, квадратичный закон взаимности.

Арифметика колец классов вычетов

Описание арифметики колец классов вычетов, некоторые ее приложения.

Китайская теорема об остатках

Китайская теорема об остатках в различных формах, решение систем сравнений, упрощение вычислений, разложение колец в декартово произведение.

Практическая работа 1

Практическая работа на модулярную арифметику и китайскую теорему об остатках.

Мультипликативная группа кольца классов вычетов

Классические теоремы о строении мультипликативной группы кольца классов вычетов.

Функция Эйлера

Определение функции Эйлера как порядка мультипликативной группы кольца, классическое определение функции Эйлера, равносильность данных определений для колец классов вычетов, мультипликативность функции Эйлера, значения функции Эйлера на степенях простых чисел, формулы для функции Эйлера.

Порядок по модулю

Приложение теоретико-группового понятия порядка элемента группы к кольцам классов вычетов. Нахождение порядков по модулю, примитивных элементов, первообразных корней.

Теорема Эйлера и малая теорема Ферма

Теорема Эйлера об одноименной функции, малая теорема Ферма как ее следствие, приложения.

Структура мультипликативной группы кольца классов вычетов

Классические результаты о разложении мультипликативной группы кольца классов вычетов в прямое произведение. Доказывается теорема об экспоненте конечной абелевой группы, из нее выводится теорема о цикличности любой конечной подгруппы мультипликативной группы поля. Отсюда следует цикличность мультипликативной группы любого конечного поля и, в частности, поля классов вычетов по простому модулю. Затем доказывается цикличность мультипликативной группы кольца классов вычетов по нечетному примарному модулю. Далее описывается строение мультипликативной группы кольца классов вычетов по четному примарному модулю. Через китайскую теорему об остатках это дает описание структуры мультипликативной группы кольца классов вычетов по любому модулю. Решается вопрос о цикличности данной группы.

Квадратичный закон взаимности

Квадратичный закон взаимности Гаусса. Символы Лежандра и Якоби.

Практическая работа 2

Работа на функцию Эйлера, теоремы Эйлера и Ферма, квадратичный закон взаимности, символы Лежандра и Якоби.

Целые числа Гаусса, Эйзенштейна, Липшица и Гурвица

Алгебраическая теория чисел колец целых чисел Гаусса, Эйзенштейна и Гурвица с приложениями диофантовым уравнениям и другим вопросам.

Итоговое контрольное мероприятие

Итоговое контрольное мероприятие - беседа и задачи на все пройденные темы.

6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная:

1. Ларин, С. В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля : учебное пособие для академического бакалавриата / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 160 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05567-2. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/441295>
2. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 123 с. — (Антология мысли). — ISBN 978-5-534-12085-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/447009>

Дополнительная:

1. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел / З. И. Борович, И. Р. Шафаревич. -М.:Наука,1985.-504.
2. Нестерова, Л. Ю. Теория чисел : учебник и практикум для среднего профессионального образования / Л. Ю. Нестерова, С. В. Напалков. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 150 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-15322-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. <https://urait.ru/bcode/488423>

9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

<https://elis.psu.ru> Электронная библиотека ПГНИУ.

<https://link.springer.com> Книги издательства Springer.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Образовательный процесс по дисциплине **Теория чисел** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
- офисный пакет приложений «LibreOffice».

Специализированное программное обеспечение не требуется.

При освоении материала и выполнении заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ (student.psu.ru).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

- система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).
- система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.
- система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.
2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине
Теория чисел**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.
Индикаторы и критерии их оценивания**

ПК.1

Способен решать профессиональные задачи, возникающие при проведении научных и прикладных исследований

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
<p>ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований</p>	<p>Студент овладел элементарной теорией чисел, ее алгебраическим и аналитическим аппаратом, умеет решать стандартные задачи.</p>	<p align="center">Неудовлетворител Студент не владеет определениями и базовыми фактами, касающимися функции Эйлера, квадратичного закона взаимности, символов Лежандра и Якоби, не может решить простейшие задачи на указанные темы.</p> <p align="center">Удовлетворительн Студент может воспроизвести определения и базовые факты, касающиеся функции Эйлера, квадратичного закона взаимности, символов Лежандра и Якоби. Способен решить простейшие задачи.</p> <p align="center">Хорошо Студент в основном понимает базовую теорию, касающуюся функции Эйлера, квадратичного закона взаимности, символов Лежандра и Якоби. Способен решать стандартные задачи.</p> <p align="center">Отлично Студент хорошо понимает базовую теорию, касающуюся функции Эйлера, квадратичного закона взаимности, символов Лежандра и Якоби. Способен решать задачи, слегка отклоняющиеся от стандартных.</p>
<p>ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований</p>	<p>Знает актуальные проблемы, стоящие перед теорией чисел, умеет находить интересные вопросы и исследовать их.</p>	<p align="center">Неудовлетворител Студент не знает симметричной или несимметричной записи кольца классов вычетов, или не владеет модулярной арифметикой, или не может сформулировать китайскую теорему об остатках, или не может решить простейшие задачи на указанные темы.</p> <p align="center">Удовлетворительн Студент знает симметричную и несимметричную запись кольца классов</p>

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
		<p style="text-align: center;">Удовлетворительн</p> <p>вычетов, владеет модулярной арифметикой, может сформулировать китайскую теорему об остатках, может решить простейшие задачи на указанные темы.</p> <p style="text-align: center;">Хорошо</p> <p>Студент в основном понимает теорию, стоящую за симметричной и несимметричной записью кольца классов вычетов, модулярной арифметикой, китайской теоремой об остатках, может решить стандартные задачи на указанные темы.</p> <p style="text-align: center;">Отлично</p> <p>Студент хорошо понимает теорию, стоящую за симметричной и несимметричной записью кольца классов вычетов, модулярной арифметикой, китайской теоремой об остатках, может решать задачи на указанные темы, чуть отклоняющиеся от вычислительных и стандартных.</p>

Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : ПК электив

Вид мероприятия промежуточной аттестации : Зачет

Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации : Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

Максимальное количество баллов : 100

Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 43 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 43 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований	Практическая работа 1 Письменное контрольное мероприятие	Модулярная арифметика и китайская теорема об остатках.
ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований	Практическая работа 2 Письменное контрольное мероприятие	Функция Эйлера, порядок элемента группы, порядок по модулю, теоремы Эйлера и Ферма, первообразные корни.

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<p>ПК.1.2 Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований</p> <p>ПК.1.1 Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований</p>	<p>Итоговое контрольное мероприятие</p> <p>Итоговое контрольное мероприятие</p>	<p>Кольца, коммутативные кольца, идеалы, операции над ними, связь идеалов и делимости, главные идеалы, факторкольца, кольца классов вычетов, симметричная и несимметричная запись колец классов вычетов, два алгоритма деления с остатком, тождество Безу, арифметика по модулю, обращение по модулю, возведение в высокие степени с помощью теорем Эйлера и Ферма, соображений из теории групп, китайская теорема об остатках, два определения функции Эйлера, их равносильность, значения функции Эйлера на примарных целых числах, формулы для функции Эйлера, теоремы Эйлера и Ферма, структура мультипликативной группы кольца классов вычетов, квадратичный закон взаимности, символы Лежандра и Якоби, целые числа Гаусса, Эйзенштейна, Липшица и Гурвица.</p>

Спецификация мероприятий текущего контроля

Практическая работа 1

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Владение китайской теоремой об остатках	15
Владение модулярной арифметикой	15

Практическая работа 2

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы самостоятельной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Первообразные корни.	15
Функция Эйлера, порядок элемента группы, порядок по модулю, теоремы Эйлера и Ферма.	15

Итоговое контрольное мероприятие

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

Показатели оценивания	Баллы
Кольца, коммутативные кольца, идеалы, операции над ними, связь идеалов и делимости, главные идеалы, факторкольца.	10
Целые числа Гаусса, Эйзенштейна, Липшица и Гурвица.	10
Возведение в высокие степени с помощью теорем Эйлера и Ферма, соображений из теории групп, китайская теорема об остатках, два определения функции Эйлера, их равносильность, значения функции Эйлера на примарных целых числах, формулы для функции Эйлера, теоремы Эйлера и Ферма, структура мультипликативной группы кольца классов вычетов, квадратичный закон взаимности, символы Лежандра и Якоби.	10
кольца классов вычетов, симметричная и несимметричная запись колец классов вычетов, два алгоритма деления с остатком, тождество Безу, арифметика по модулю, обращение по модулю.	10