

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра фундаментальной математики**

**Авторы-составители: Скачкова Елена Александровна  
Зорин Игорь Витальевич**

Рабочая программа дисциплины  
**АНАЛИЗ НА КЛАССАХ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**  
Код УМК 29044

Утверждено  
Протокол №9  
от «22» мая 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Анализ на классах разрывных функций

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в вариативную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление подготовки: **01.03.01** Математика  
направленность Программа широкого профиля

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины **Анализ на классах разрывных функций** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**01.03.01** Математика (направленность : Программа широкого профиля)

**ПК.1** Способен решать профессиональные задачи, возникающие при проведении научных и прикладных исследований

#### **Индикаторы**

**ПК.1.1** Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований

**ПК.1.2** Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований

#### 4. Объем и содержание дисциплины

<b>Направление подготовки</b>	01.03.01 Математика (направленность: Программа широкого профиля)
<b>форма обучения</b>	очная
<b>№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины</b>	10
<b>Объем дисциплины (з.е.)</b>	3
<b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>	108
<b>Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:</b>	42
<b>Проведение лекционных занятий</b>	14
<b>Проведение практических занятий, семинаров</b>	28
<b>Самостоятельная работа (ак.час.)</b>	66
<b>Формы текущего контроля</b>	Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (2)
<b>Формы промежуточной аттестации</b>	Зачет (10 триместр)

## 5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

### Анализ на классах разрывных функций. Первый семестр

Цели курса – Повторение и закрепление ранее изученных вопросов по темам “Обобщённые функции” и “Теория меры”, знакомство студентов с современными подходами к решению задач математической физики, а именно – с оригинальным методом введения обобщённых функций как мер, понимаемых в более широком, чем классическое, смысле. Задачи изучения дисциплины: освоение понятия аппроксимативного предела, знакомство студентов с общими подходами введения обобщённых функций, с понятием пространства обобщённых мер со значениями в Банаховом пространстве, с представлением классических формул математического анализа в обобщённом виде, дифференцированием обобщённых функций-мер.

#### 1 Введение

Повторение таких основных, базовых понятий математического анализа, как предел, сходимость, точные грани (супремум и инфимум), равномерная сходимость. Понятие обобщённой функции, различные подходы введения обобщённых объектов в разных разделах математики. Классический путь введения обобщённых функций.

Тема 1. Понятие обобщённой функции, различные подходы их введения.

Различные подходы введения обобщённых объектов в разных разделах математики. Классический путь введения обобщённых функций.

Тема 2. Идея дифференцирования обобщённых функций.

Интегрирование по частям и формула Грина. Подходящее множество основных функций.

#### 2 Обобщённая мера и интеграл.

Тема 3. Аддитивные функции множества и меры.

Проблема измеримости. Мера Жордана и мера Лебега. Алгебра множеств и  $\sigma$ -алгебра, примеры, Борелевская  $\sigma$ -алгебра. Аддитивные и счётно-аддитивные функции множества. Непрерывность. Мера.

Тема 4. Полная вариация и пространство мер.

Полная вариация меры. Пространство мер –  $CA$ , норма, полнота пространства  $CA$ .

Абсолютная непрерывность мер. Регулярные меры, разложение измеримого множества по регулярной мере.

Тема 5. Измеримые функции и интеграл.

Последовательности функций и разные виды сходимости. Интеграл по абстрактной мере, его свойства.

Предельный переход под знаком интеграла. Интеграл, как аддитивная функция множества.

#### КТ №1

Проверяется практическое умение находить производные обобщённых функций, вычислять аппроксимативный предел, находить вариацию множества

#### 3 Анализ в пространствах разрывных функций

Тема 6. Определение обобщённой производной. Критерий дифференцируемости.

Классическое определение обобщённой производной и производная как мера. Теорема существования.

Вычисление производных-мер от разрывных функций в  $R^1$   $R^2$ .

Множества с конечным периметром.

Тема 7. Множества и функции ограниченной вариации.

Функции ограниченной вариации. Примеры. Множества ограниченной вариации. Периметр множества. Пространство BV функций, первые обобщённые производные которых являются мерами. Критерий принадлежности.

Тема 8. Аппроксимативный предел и непрерывность.

Точки плотности и разряжения области определения функцию. F-плотность и F-разряжение. Аппроксимативный предел функции, предел по множеству. Регулярные точки функции. Теорема об определяющем векторе. Аппроксимативная непрерывность функции. Скачок.

Тема 9. Структура функций, имеющих обобщённую производную.

Существенная граница множества. Нормаль. Структура функций пространства BV.

Тема 10. Формулы дифференцирования.

Проблема возможности введения произведения обобщённых функций. Усреднённая суперпозиция. Формула дифференцирования произведения функций. Дифференцирование суперпозиции.

#### **4 Интегральные формулы**

Тема 11. След функции на границе и формула Грина.

Градиент характеристической функции множества. След функции на границе. Дифференцирование произведения функции и характеристической функции множества. Формула Грина. Множества класса G. Полный скачок функции на множестве. Интегрирование по частям.

Тема 12. Понятие пространства функций с суммируемыми в квадрате обобщёнными производными.

Пространство BV<sup>2</sup>. Оценка для нормы. Теорема о полноте. Вложение в пространство L<sup>2</sup>.

#### **КТ №2**

Проверяется умение вычислить производные - меры от разрывных функций в R<sup>1</sup> R<sup>2</sup>, след функции на границе

#### **ИКМ**

Проверяется умение доказывать теоретические утверждения, ориентироваться в новых понятиях данной дисциплины

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа: [учебник] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006, ISBN 5-9221-0266-4. - 572. - Библиогр.: с. 568-570
2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 3 : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 351 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02795-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/468649>

### Дополнительная:

1. Вольперт А. И., Худяев С. И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики / А. И. Вольперт, С. И. Худяев. - Москва: Наука, 1975. - 394. - Библиогр.: с. 385-387
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга ; пер. с англ.: В. И. Благодатских ; ред. Р. В. Гамкрелидзе. - Москва: Наука, 1977. - 624. - Библиогр.: с. 615
3. Порошкин А. Г. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие / А. Г. Порошкин. - Москва: Вузовская книга, 2004, ISBN 5-9502-0050-0. - 432. - Библиогр.: с. 410-413
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной: учебное пособие для вузов / И. П. Натансон. - Москва: Наука, 1974. - 480.

## **9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины**

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ

<http://window.edu.ru/> Единое окно доступа к образовательным ресурсам

<http://www.mathnet.ru/> Общероссийский математический портал

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Образовательный процесс по дисциплине **Анализ на классах разрывных функций** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
- офисный пакет приложений «LibreOffice».

Специализированное программное обеспечение не требуется.

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ ([student.psu.ru](http://student.psu.ru)).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).

система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.

система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными

компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Анализ на классах разрывных функций**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.  
Индикаторы и критерии их оценивания**

**ПК.1**

**Способен решать профессиональные задачи, возникающие при проведении научных и прикладных исследований**

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
<p><b>ПК.1.1</b> Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований</p>	<p>Знает понятие корректной постановки математической задачи, умеет математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p>	<p align="center"><b>Неудовлетворител</b> Не знает понятие корректной постановки математической задачи, не умеет математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b> Демонстрирует частично сформированное знание понятие корректной постановки математической задачи, частично сформированное умение математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p> <p align="center"><b>Хорошо</b> Демонстрирует сформированное, но содержащее пробелы знание понятие корректной постановки математической задачи, сформированное, но содержащее пробелы умение математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p> <p align="center"><b>Отлично</b> Демонстрирует сформированное знание понятие корректной постановки математической задачи, сформированное умение математически корректно формулировать проблемы научных и прикладных исследований</p>
<p><b>ПК.1.2</b> Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении</p>	<p>Знает способы решения задач, касающихся области обобщенных функций, умеет решать задачи, связанные с обобщенными функциями</p>	<p align="center"><b>Неудовлетворител</b> Не знает понятий в области обобщенных функций, меры, не умеет находить производные обобщенных функций</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b> Демонстрирует частично сформированные знания понятий в области обобщенных</p>

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
научных и прикладных исследований		<p style="text-align: center;"><b>Удовлетворительн</b></p> <p>функций, меры, не умеет находить производные обобщенных функций, частично сформированные умения находить производные обобщенных функций</p> <p style="text-align: center;"><b>Хорошо</b></p> <p>Демонстрирует сформированные, но содержащие пробелы знания понятий в области обобщенных функций, меры, сформированные, но содержащие пробелы умения находить производные обобщенных функций</p> <p style="text-align: center;"><b>Отлично</b></p> <p>Демонстрирует сформированные знания понятий в области обобщенных функций, меры, сформированные умения находить производные обобщенных функций</p>

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : СУОС

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Зачет

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 43 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 43 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>ПК.1.2</b> Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований	КТ №1 <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Проверяется практическое умение находить производные обобщённых функций, вычислять аппроксимативный предел, находить вариацию множества
<b>ПК.1.2</b> Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований	КТ №2 <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Проверяется умение вычислить производные - меры от разрывных функций в $R^1$ $R^2$ , след функции на границе
<b>ПК.1.2</b> Решает профессиональные задачи, предполагающие многообразие выбора, при проведении научных и прикладных исследований <b>ПК.1.1</b> Математически корректно формулирует проблемы научных и прикладных исследований	ИКМ <b>Итоговое контрольное мероприятие</b>	Проверяется умение доказывать теоретические утверждения, ориентироваться в новых понятиях данной дисциплины

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### КТ №1

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставяемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Корректно найдена производная обобщённой функции	10
Корректно найдена вариация множества	10
Корректно вычислен аппроксимативный предел	10

### **КТ №2**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставяемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
корректно вычислена производная - мера от разрывной функций в R1	10
корректно вычислена производная - мера от разрывной функций в R2	10
след функции на границе	10

### **ИКМ**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставяемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Корректно доказано утверждение первое	10
Раскрыто понятие из задания четыре, приведен пример	10
Раскрыто понятие из задания три, приведен пример	10
Корректно доказано утверждение второе	10