

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования "Пермский  
государственный национальный исследовательский  
университет"**

**Кафедра фундаментальной математики**

**Авторы-составители: Павелкин Владимир Николаевич  
Скачкова Елена Александровна**

Рабочая программа дисциплины

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ**

Код УМК 59419

Утверждено  
Протокол №9  
от «22» мая 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Дифференциальная геометрия и топология

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в обязательную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **01.03.01** Математика  
направленность Программа широкого профиля

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины **Дифференциальная геометрия и топология** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**01.03.01** Математика (направленность : Программа широкого профиля)

**ОПК.1** Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности

#### **Индикаторы**

**ОПК.1.2** Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач

#### 4. Объем и содержание дисциплины

<b>Направления подготовки</b>	01.03.01 Математика (направленность: Программа широкого профиля)
<b>форма обучения</b>	очная
<b>№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины</b>	6
<b>Объем дисциплины (з.е.)</b>	3
<b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>	108
<b>Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:</b>	42
<b>Проведение лекционных занятий</b>	14
<b>Проведение практических занятий, семинаров</b>	28
<b>Самостоятельная работа (ак.час.)</b>	66
<b>Формы текущего контроля</b>	Входное тестирование (1) Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (2)
<b>Формы промежуточной аттестации</b>	Зачет (6 триместр)

## 5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

### Дифференциальная геометрия и топология

#### Входной контроль

Проверяются знания и умения решать задачи следующих разделов аналитической геометрии: 1) векторная алгебра, 2) линейные образы.

#### Векторный анализ

1. Переменный вектор. Вычисление производной векторной функции скалярного аргумента, производной от различных произведений векторов (произведение векторной функции на числовую функцию, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов).
2. Производная вектора постоянной длины, вектора постоянного направления, вектора, параллельного фиксированной плоскости (леммы №№ 1,2,3 векторного анализа).

#### Теория кривых

В разделе изучаются следующие вопросы

1. Понятие кривой линии в пространстве. Различные способы задания кривой. Примеры. Касательный вектор, касательная к кривой в данной точке.
2. Длина дуги кривой в пространстве. Натуральная параметризация. Понятие нормали, главная нормаль и бинормаль. Нормальная плоскость.
3. Соприкасающаяся плоскость: определение, утверждение, уравнение в натуральной и произвольной параметризации.
4. Уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника кривой в натуральной параметризации.
5. Уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника кривой в произвольной параметризации.
6. Репер Френе в натуральной и произвольной параметризации.
7. Формулы Серре–Френе.
8. Кривизна кривой: определение и утверждение. Точки спрямления.
9. Кручение кривой: определение и утверждение. Точки уплощения.
10. Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в натуральной параметризации.
11. Формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в произвольной параметризации.
12. Плоские кривые. Кручение и соприкасающаяся плоскость плоской кривой. Различные способы задания плоской кривой. Примеры. Касательный вектор плоской кривой.
13. Особые точки плоских кривых. Классификация особых точек. Примеры.
14. Однопараметрическое семейство плоских кривых. Огибающая и дискриминантная кривая семейства плоских кривых (теорема).
15. Формулы вычисления кривизны плоской кривой для различных видов уравнений.
16. Эволюта плоской кривой: определение и уравнения для натуральной и произвольной параметризации.
17. Эвольвента плоской кривой: определение, уравнение, свойство эквидистантности двух эвольвент. Связь эволюты и эвольвенты.

#### Теория поверхностей

Понятие поверхности. Различные виды задания поверхности в пространстве. Примеры. Правильная система криволинейных координат. Координатные векторы и координатные линии на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Длина дуги кривой на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Формула длины дуги кривой. Положительная определенность первой квадратичной формы.

Угол между кривыми на поверхности. Площадь области на поверхности.

Нормальная кривизна кривой на поверхности: определение, вывод формулы. Утверждение о

нормальной кривизне.

Вторая квадратичная форма поверхности. Различные формулы для коэффициентов второй квадратичной формы, виды представления второй квадратичной формы.

Нормальные сечения поверхности. Утверждение о кривизне нормального сечения. Выпуклые и вогнутые нормальные сечения.

Теорема Менье.

Индикатриса Дюпена: определение, вывод уравнения. Типы точек на поверхности и соответствующие им индикатрисы Дюпена. Примеры.

Приведение уравнения индикатрисы Дюпена к главным осям. Формула Эйлера. Экстремальные значения нормальной кривизны – главные кривизны поверхности в данной точке.

Система уравнений для нахождения главных направлений индикатрисы Дюпена. Характеристическое уравнение, характеристические корни. Полная и средняя кривизны поверхности. Вычисление главных кривизн в данной точке поверхности.

### **Контрольное мероприятие №1**

Лабораторная работа по теме "Сопровождающий трехгранник кривой", в которой студент должен записать для своей кривой уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника кривой. Ввести эти уравнения в файл программы 3d-Grafer и продемонстрировать движение (изменение) сопровождающего трехгранника при движении точки, в которой строится СТК вдоль кривой.

### **Контрольное мероприятие №2**

Тест на основные формулы векторного анализа и теории кривых, включает 2 варианта по 15 заданий .

### **Итоговое контрольное мероприятие**

Письменный экзамен: 2 вопроса 1) векторный анализ и теория кривых, 2) теория поверхностей. В каждом вопросе - основные понятия, утверждения теоремы, некоторые из них с доказательствами, формулы характеристик и уравнения геометрических объектов с выводом. В каждом вопросе 1 доказательство или 1 вывод

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии: учебное пособие / А. П. Норден. - Москва, 1958. - 244.
2. Павелкин В. Н. Дифференциальная геометрия и топология. учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров "Математика" и "Механика и математическое моделирование" Ч. 1. Дифференциальная геометрия / В. Н. Павелкин ; М-во науки и высш. образования РФ, Перм. гос. нац. исслед. ун-т, 2018, ISBN 978-5-7944-3152-0. - Библиогр.: с. 109-110  
<https://elis.psu.ru/node/509661>

### Дополнительная:

1. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач: учебное пособие для университетов / Н. И. Кованцов [и др.]. - Киев: Вища школа, 1982. - 375.
2. Топологические, метрические и нормированные пространства: метод. указания для студентов заоч. отделения / Перм. гос. ун-т. - Пермь, 1980. - 30.

## **9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины**

<http://window.edu.ru/> Единое окно доступа к образовательным ресурсам

<http://www.mathnet.ru/> Общероссийский математический портал

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Образовательный процесс по дисциплине **Дифференциальная геометрия и топология** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

Образовательный процесс по дисциплине предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
- офисный пакет приложений «LibreOffice», Alt Linux;
- 3D Grapher 1.2

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ ([student.psu.ru](http://student.psu.ru)).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

- система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).
- система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.
- система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.

Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Дифференциальная геометрия и топология**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.  
Индикаторы и критерии их оценивания**

**ОПК.1**

**Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности**

Компетенция (индикатор)	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения
<p><b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач</p>	<p>Знает: уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника. Умеет: составлять уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника для конкретной пространственной кривой</p>	<p align="center"><b>Неудовлетворител</b> Не знает уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника. Не умеет составлять уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника.</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b> Знает 2 уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника. Умеет составлять 2 уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника.</p> <p align="center"><b>Хорошо</b> Знает 4 уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника. Умеет составлять 4 уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника.</p> <p align="center"><b>Отлично</b> Знает уравнения всех граней и ребер сопровождающего трехгранника. Умеет составлять уравнения всех граней и ребер сопровождающего трехгранника.</p>

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : СУОС

**Вид мероприятия промежуточной аттестации :** Зачет

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов :** 100

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 43 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 43 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>Входной контроль</b>	Входной контроль <b>Входное тестирование</b>	Умение использовать условие коллинеарности и компланарности векторов, находить площади и объемы фигур; умение записывать уравнения прямой на плоскости, прямой и плоскости в пространстве
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Контрольное мероприятие №1 <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Умение записывать уравнения граней и ребер сопровождающего трехгранника кривой
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Контрольное мероприятие №2 <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	Умение решать задачи на вычисление кривизны и кручение кривой, координат векторов репера Френе, уравнение эволюты плоской кривой, особые точки плоской кривой, сопровождающий трехгранник плоской кривой
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Итоговое контрольное мероприятие <b>Итоговое контрольное мероприятие</b>	1 вопрос: Векторный анализ. Теория кривых. 2 вопрос: Теория поверхностей.

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### Входной контроль

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

Показатели оценивания	Баллы
Умеет использовать условие коллинеарности и компланарности векторов, находить площади и объемы фигур; умение записывать уравнения прямой на плоскости, прямой и плоскости в пространстве	40
Умеет использовать условие коллинеарности и компланарности векторов, находить площади и объемы фигур; умеет записывать уравнения прямой на плоскости	30
Умеет использовать условие коллинеарности и компланарности векторов, находить площади и объемы фигур	20
Умеет использовать условие коллинеарности и компланарности векторов	10

### Контрольное мероприятие №1

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Правильно написаны уравнения граней СТК	15
Правильно написаны уравнения ребер СТК	15

### Контрольное мероприятие №2

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **1 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **13**

Показатели оценивания	Баллы
Выполнил верно задание 1 теста	2
Выполнил верно задание 15 теста	2
Выполнил верно задание 3 теста	2
Выполнил верно задание 4 теста	2
Выполнил верно задание 5 теста	2
Выполнил верно задание 6 теста	2
Выполнил верно задание 7 теста	2
Выполнил верно задание 8 теста	2
Выполнил верно задание 9 теста	2
Выполнил верно задание 10 теста	2
Выполнил верно задание 11 теста	2
Выполнил верно задание 12 теста	2
Выполнил верно задание 13 теста	2
Выполнил верно задание 14 теста	2
Выполнил верно задание 2 теста	2

## **Итоговое контрольное мероприятие**

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **17**

<b>Показатели оценивания</b>	<b>Баллы</b>
Верно записаны определения основных понятий	10
Приведено верное доказательство двух утверждений или теорем или выводов формул или уравнений (по одному в каждом вопросе)	10
Верно записаны основные уравнения геометрических объектов	10
Верно записаны формулировки теорем и утверждений	10