

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования "Пермский**  
**государственный национальный исследовательский**  
**университет"**

**Кафедра фундаментальной математики**

Авторы-составители: **Аптуков Валерий Нагимович**  
**Скачкова Елена Александровна**

Рабочая программа дисциплины  
**ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**  
Код УМК 61389

Утверждено  
Протокол №9  
от «22» мая 2020 г.

Пермь, 2020

## **1. Наименование дисциплины**

Тензорное исчисление

## **2. Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Дисциплина входит в обязательную часть Блока « Б.1 » образовательной программы по направлениям подготовки (специальностям):

Направление: **01.03.01** Математика

направленность Программа широкого профиля

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

В результате освоения дисциплины **Тензорное исчисление** у обучающегося должны быть сформированы следующие компетенции:

**01.03.01** Математика (направленность : Программа широкого профиля)

**ОПК.1** Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности

#### **Индикаторы**

**ОПК.1.2** Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач

#### 4. Объем и содержание дисциплины

<b>Направления подготовки</b>	01.03.01 Математика (направленность: Программа широкого профиля)
<b>форма обучения</b>	очная
<b>№№ триместров, выделенных для изучения дисциплины</b>	4
<b>Объем дисциплины (з.е.)</b>	3
<b>Объем дисциплины (ак.час.)</b>	108
<b>Контактная работа с преподавателем (ак.час.), в том числе:</b>	42
<b>Проведение лекционных занятий</b>	14
<b>Проведение практических занятий, семинаров</b>	28
<b>Самостоятельная работа (ак.час.)</b>	66
<b>Формы текущего контроля</b>	Входное тестирование (1) Итоговое контрольное мероприятие (1) Письменное контрольное мероприятие (2)
<b>Формы промежуточной аттестации</b>	Зачет (4 триместр)

## 5. Аннотированное описание содержания разделов и тем дисциплины

### Введение

Основные понятия и утверждения дисциплины

### Входной контроль

Позволяет определить уровень студентов, а также актуализировать знания, необходимые для освоения дисциплины

### Основная часть

#### Векторное пространство

размерность векторного пространства, базис, ковариантные и контравариантные координаты вектора, фундаментальная матрица, основной и сопряженный базис

#### Тензоры

диадное произведение векторов, двухвалентный тензор, метрический тензор, валентность тензора, компоненты тензора в основном, взаимном и смешанном базисе

#### Операции над тензорами

Сложение, умножение на число, тензорное произведение, скалярное произведение тензоров (свертка), двойное скалярное произведение тензоров (двойная свертка), свойства, след тензора

#### Тензоры второго ранга.

сопряженный и самосопряженный тензор, главные векторы и главные значения тензора, характеристическое уравнение, инварианты тензора, свойства главных векторов и главных значений, разложение тензора по главным векторам, теорема Гамильтона-Кэли

#### Вектор тензора

физический смысл и применение, шаровые тензоры и девиаторы тензора, нормальная и касательная к плоскости сечения проекции вектора тензора напряжений

#### Элементы тензорного анализа

производная вектора, набла-оператор. дивергенция тензора, ротор тензора, лапласиан

#### Итоговое контрольное мероприятие

- 1) Знать основные определения и операции над тензорами. Знать правила тензорного анализа.
- 2) Уметь умножать вектор на тензор, тензор на тензор, вычислять скалярное и двойное скалярное произведение тензоров.
- 3) Уметь определять компоненты фундаментального (метрического) тензора.
- 4) Уметь вычислять ковариантные и контравариантные компоненты тензора (вектора).
- 5) Уметь определять собственные значения и собственные вектора симметричного тензора второго ранга.

## **6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Освоение дисциплины требует систематического изучения всех тем в той последовательности, в какой они указаны в рабочей программе.

Основными видами учебной работы являются аудиторские занятия. Их цель - расширить базовые знания обучающихся по осваиваемой дисциплине и систему теоретических ориентиров для последующего более глубокого освоения программного материала в ходе самостоятельной работы. Обучающемуся важно помнить, что контактная работа с преподавателем эффективно помогает ему овладеть программным материалом благодаря расстановке необходимых акцентов и удержанию внимания интонационными модуляциями голоса, а также подключением аудио-визуального механизма восприятия информации.

Самостоятельная работа преследует следующие цели:

- закрепление и совершенствование теоретических знаний, полученных на лекционных занятиях;
- формирование навыков подготовки текстовой составляющей информации учебного и научного назначения для размещения в различных информационных системах;
- совершенствование навыков поиска научных публикаций и образовательных ресурсов, размещенных в сети Интернет;
- самоконтроль освоения программного материала.

Обучающемуся необходимо помнить, что результаты самостоятельной работы контролируются преподавателем во время проведения мероприятий текущего контроля и учитываются при промежуточной аттестации.

Обучающимся с ОВЗ и инвалидов предоставляется возможность выбора форм проведения мероприятий текущего контроля, альтернативных формам, предусмотренным рабочей программой дисциплины. Предусматривается возможность увеличения в пределах 1 академического часа времени, отводимого на выполнение контрольных мероприятий.

Процедура оценивания результатов обучения инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья по дисциплине предусматривает предоставление информации в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации.

При проведении текущего контроля применяются оценочные средства, обеспечивающие передачу информации, от обучающегося к преподавателю, с учетом психофизиологических особенностей здоровья обучающихся.

## **7. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине**

При самостоятельной работе обучающимся следует использовать:

- конспекты лекций;
- литературу из перечня основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля);
- текст лекций на электронных носителях;
- ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимые для освоения дисциплины;
- лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение из перечня информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине;
- методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

## 8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### Основная:

1. Игнаточкина Л. А. Руководство к решению задач по тензорной алгебре векторных пространств: Учебное пособие/Игнаточкина Л. А.-Москва:Московский педагогический государственный университет,2014, ISBN 978-5-4263-0159-7.-64. <http://www.iprbookshop.ru/31762>
2. Мусин, Ю. Р. Тензорный анализ. Вводный курс с приложениями к анализу и геометрии : учебное пособие для академического бакалавриата / Ю. Р. Мусин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 184 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-06198-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. <https://www.urait.ru/bcode/438945>

### Дополнительная:

1. Келлер И. Э. Тензорное исчисление:учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению 151600 "Прикладная механика"/И. Э. Келлер.-Санкт-Петербург:Лань,2012, ISBN 978-5-8114-1352-2.-175.-Библиогр.: с. 169-170
2. Акивис М. А.,Гольдберг В. В. Тензорное исчисление:учебное пособие для студентов втузов/М. А. Акивис, В. В. Гольдберг.-Москва:ФИЗМАТЛИТ,2005, ISBN 5-9221-0424-1.-304.-Библиогр.: с. 294-295

## **9. Перечень ресурсов сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины**

<http://www.psu.ru/elektronnye-resursy-dlya-psu> Электронные ресурсы для ПГНИУ

<http://window.edu.ru/> Единое окно доступа к образовательным ресурсам

<http://www.mathnet.ru/> Общероссийский математический портал

## **10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

Образовательный процесс по дисциплине **Тензорное исчисление** предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

Образовательный процесс по дисциплине предполагает использование следующего программного обеспечения и информационных справочных систем:

- доступ в режиме on-line в Электронную библиотечную систему (ЭБС);
- доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

Необходимое лицензионное и (или) свободно распространяемое программное обеспечение:

- приложение позволяющее просматривать и воспроизводить медиаконтент PDF-файлов «Adobe Acrobat Reader DC»;
- офисный пакет приложений «LibreOffice»;

Специализированное программное обеспечение не требуется

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ ([student.psu.ru](http://student.psu.ru)).

При освоении материала и выполнения заданий по дисциплине рекомендуется использование материалов, размещенных в Личных кабинетах обучающихся ЕТИС ПГНИУ ([student.psu.ru](http://student.psu.ru)).

При организации дистанционной работы и проведении занятий в режиме онлайн могут использоваться:

система видеоконференцсвязи на основе платформы BigBlueButton (<https://bigbluebutton.org/>).

система LMS Moodle (<http://e-learn.psu.ru/>), которая поддерживает возможность использования текстовых материалов и презентаций, аудио- и видеоконтент, а так же тесты, проверяемые задания, задания для совместной работы.

система тестирования Indigo (<https://indigotech.ru/>).

## **11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Для лекционных занятий требуется аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для проведения практических занятий - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.

Для групповых (индивидуальных) консультаций - аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, компьютер/ноутбук) с соответствующим программным обеспечением, меловой (и) или маркерной доской.



Для проведения текущего контроля - аудитория, оснащенная меловой (и) или маркерной доской.  
Самостоятельная работа студентов: аудитория, оснащенная компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет», с обеспеченным доступом в электронную информационно-образовательную среду университета, помещения Научной библиотеки ПГНИУ.

Помещения научной библиотеки ПГНИУ для обеспечения самостоятельной работы обучающихся:

1. Научно-библиографический отдел, корп.1, ауд. 142. Оборудован 3 персональными компьютера с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

2. Читальный зал гуманитарной литературы, корп. 2, ауд. 418. Оборудован 7 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

3. Читальный зал естественной литературы, корп.6, ауд. 107а. Оборудован 5 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

4. Отдел иностранной литературы, корп.2 ауд. 207. Оборудован 1 персональным компьютером с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

5. Библиотека юридического факультета, корп.9, ауд. 4. Оборудована 11 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

6. Читальный зал географического факультета, корп.8, ауд. 419. Оборудован 6 персональными компьютерами с доступом к локальной и глобальной компьютерным сетям.

Все компьютеры, установленные в помещениях научной библиотеки, оснащены следующим программным обеспечением:

Операционная система ALT Linux;

Офисный пакет Libreoffice.

Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»

**Фонды оценочных средств для аттестации по дисциплине  
Тензорное исчисление**

**Планируемые результаты обучения по дисциплине для формирования компетенции.  
Индикаторы и критерии их оценивания**

**ОПК.1**

**Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических наук, и использовать их в профессиональной деятельности**

<b>Компетенция (индикатор)</b>	<b>Планируемые результаты обучения</b>	<b>Критерии оценивания результатов обучения</b>
<p><b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач</p>	<p>ЗНАТЬ постановки классических задач тензорного исчисления; УМЕТЬ применить знания в области тензорного исчисления для решения прикладных задач; ВЛАДЕТЬ основными понятиями и определениями тензорного исчисления.</p>	<p align="center"><b>Неудовлетворител</b></p> <p>Не знает постановки классических задач тензорного исчисления; не умеет применить знания в области тензорного исчисления для решения прикладных задач; не владеет основными понятиями и определениями тензорного исчисления.</p> <p align="center"><b>Удовлетворительн</b></p> <p>Слабо знает постановки классических задач тензорного исчисления; Слабо умеет применить знания в области тензорного исчисления для решения прикладных задач; Слабо владеет основными понятиями и определениями тензорного исчисления.</p> <p align="center"><b>Хорошо</b></p> <p>Хорошо знает постановки классических задач тензорного исчисления; Хорошо умеет применить знания в области тензорного исчисления для решения прикладных задач; Хорошо владеет основными понятиями и определениями тензорного исчисления.</p> <p align="center"><b>Отлично</b></p> <p>Уверенно знает постановки классических задач тензорного исчисления; Уверенно умеет применить знания в области тензорного исчисления для решения прикладных задач; Уверенно владеет основными понятиями и определениями тензорного исчисления.</p>

## Оценочные средства текущего контроля и промежуточной аттестации

Схема доставки : СУОС

**Вид мероприятия промежуточной аттестации : Зачет**

**Способ проведения мероприятия промежуточной аттестации :** Оценка по дисциплине в рамках промежуточной аттестации определяется на основе баллов, набранных обучающимся на контрольных мероприятиях, проводимых в течение учебного периода.

**Максимальное количество баллов : 100**

### Конвертация баллов в отметки

«отлично» - от 81 до 100

«хорошо» - от 61 до 80

«удовлетворительно» - от 50 до 60

«неудовлетворительно» / «незачтено» менее 50 балла

Компетенция (индикатор)	Мероприятие текущего контроля	Контролируемые элементы результатов обучения
<b>Входной контроль</b>	Входной контроль <b>Входное тестирование</b>	основные понятия дисциплин Алгебра и Аналитическая геометрия
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Контрольная работа №1 <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	основной базис, взаимный базис, контравариантные компоненты, ковариантные компоненты, скалярное произведение векторов.
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Контрольная работа №2 <b>Письменное контрольное мероприятие</b>	тензор, метрический тензор, скалярное произведение тензоров, двойное скалярное произведение тензоров.
<b>ОПК.1.2</b> Применяет фундаментальные знания в области математики для решения прикладных задач	Итоговое контрольное мероприятие <b>Итоговое контрольное мероприятие</b>	тензор, характеристическое уравнение, собственные значения тензора, собственные векторы тензора, свойства собственных векторов тензора, основные определения тензорного исчисления, основные теоремы тензорного исчисления.

### Спецификация мероприятий текущего контроля

#### Входной контроль

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **0**

Проходной балл: **0**

Показатели оценивания	Баллы
Приведено верное с подробными объяснениями решение первого задания.	25
Приведено верное с подробными объяснениями решение четвертого задания.	25
Приведено верное с подробными объяснениями решение третьего задания.	25
Приведено верное с подробными объяснениями решение второго задания.	25

### Контрольная работа №1

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **15**

Показатели оценивания	Баллы
Умение определить компоненты векторов взаимного базиса	10
Умение определить скалярное произведение векторов в основном и взаимном базисе	10
Умение определить ковариантные компоненты вектора во взаимном базисе	10

### Контрольная работа №2

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **30**

Проходной балл: **15**

Показатели оценивания	Баллы
Умение определить результат скалярного произведения вектора на тензор в произвольном базисе	10
Умение определить результат двойного скалярного произведения тензора на тензор	10
Умение определить результат скалярного произведения тензора на тензор	10

### Итоговое контрольное мероприятие

Продолжительность проведения мероприятия промежуточной аттестации: **2 часа**

Условия проведения мероприятия: **в часы аудиторной работы**

Максимальный балл, выставляемый за мероприятие промежуточной аттестации: **40**

Проходной балл: **20**

Показатели оценивания	Баллы
Умение определить собственные значения и собственные векторы симметричного тензора	10
Знание основных теорем тензорного исчисления. Умение сформулировать основные теоремы тензорного исчисления	10
Знание основных определений и понятий тензорного исчисления. Умение сформулировать основные определения и понятия тензорного исчисления	10
Умение проверить и подтвердить основные свойства собственных векторов тензора	10