

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЮМЕНСКИЙ ФИЛИАЛ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
БЮДЖЕТНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ НАУКИ ИНСТИТУТА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ИМ. С.А. ХРИСТИАНОВИЧА СО РАН

На правах рукописи

Боталов Андрей Юрьевич

Численное исследование движения тела с полостью,
частично или полностью заполненной вязкой жидкостью

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
С.П. Родионов

Тюмень – 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	11
ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	34
2.1. Общие уравнения	34
2.2. Плоские колебания маятника с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью	37
2.3. Движение тела с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки	39
2.4. Аналитические результаты и параметры расчета.....	44
2.5. Прямолинейные колебания тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью	47
ГЛАВА 3. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКИ	52
3.1. Дискретный аналог обобщенного уравнения переноса в криволинейной системе координат	52
3.2. Аппроксимация граничных условий.....	57
3.3. Построение расчетной сетки.....	61
3.4. Тестирование алгоритма	63
ГЛАВА 4. ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ	71
4.1. Случай полости квадратной формы.....	71
4.2. Случай замкнутого сосуда в форме эллипса.....	79
4.3. Заключение к главе 4	84

ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО ЗАМКНУТОГО СОСУДА, ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ	85
5.1. Случай $\omega_{z_0} = 0$	86
5.2. Случай $\omega_{z_0} > 0$	87
5.3. Заключение к главе 5	100
ГЛАВА 6. КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ	101
6.1. Течение жидкости в колеблющейся полости.....	101
6.2. Случай свободных колебаний	106
6.2. Случай вынужденных колебаний.....	115
6.3. Заключение к главе 6	121
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	122
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	125

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Задачи динамики тел с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью вот уже более ста лет привлекают внимание исследователей, представляя как практический, так и теоретический интерес. Являясь классическими задачами механики и находясь на стыке таких дисциплин, как теоретическая механика и гидродинамика, задачи движения тел с жидкостью в полостях имеют огромное практическое значение. Практическое приложение данных задач связано в первую очередь с динамикой летательных аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива, теорией движения кораблей и подводных лодок. В последнее время много внимания уделяется разработке эффективных демпферов колебаний различных высотных конструкций, которые представляют собой сосуды, частично заполненные жидкостью с частотой первой моды, согласующейся с собственной частотой колебания конструкции.

За более чем сто лет исследований задачи движения тел с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью, получили решение для некоторых частных случаев моделей жидкого наполнителя и моделей движения тела. Так, задача движения тела с полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, совершающей потенциальное движение, была сведена к решению задачи Неймана для конкретной формы полости. Задача движения тел, содержащих сильно вязкую жидкость, была сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а для случая движения тел с полостями, заполненными слабо вязкой жидкостью, были получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие движение в линейной постановке. Решение задач движения тел с полостями, частично заполненными жидкостью, удалось свести к решению задачи определения потенциала волнового движения и задачи движения тела с полостью, полностью заполненной жидкостью. В задачах разработки гасителей

колебаний основное внимание уделяется экспериментальному исследованию и численному исследованию приближенных уравнений динамики волнового движения жидкости (уравнения мелкой воды). Однако в настоящее время почти не исследовано движение тел с полостями, частично или полностью заполненными вязкой жидкостью, в полной нелинейной постановке, и мало данных по течению жидкости, возникающему в движущихся полостях.

Цели работы:

- исследовать влияние жидкого наполнителя на движение вокруг неподвижной оси или неподвижной точки тела с полостями различной формы под действием силы тяжести;
- провести анализ влияния полости, частично заполненной жидкостью, на диссипацию энергии колебаний твердого тела.

Научная новизна:

- численно исследовано движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной оси и неподвижной точки в полной нелинейной постановке;
- исследована зависимость скорости затухания плоских колебаний замкнутых сосудов в форме квадрата и эллипса от изменяющихся в широком диапазоне параметров системы;
- установлены траектории движения кубической полости вокруг неподвижной точки для различных значений начальной гироскопической угловой скорости;
- проведен сравнительный анализ влияния различных конфигураций вставок (вертикальные и горизонтальные перегородки, вертикальные решетки) на скорость диссипации энергии колебаний тела с полостью, частично заполненной жидкостью;
- получены картины течения жидкости в колеблющихся полостях различной формы, полностью заполненных жидкостью, и в прямоугольной полости, частично заполненной жидкостью и имеющей различные конфигурации вставок.

Научная и практическая значимость. Результаты исследований важны для понимания влияния оказываемого жидким наполнителем на движение тел с полостями, частично или полностью заполненными вязкой жидкостью. Результаты могут быть использованы при проектировании вязких демпферов для гашения нежелательных колебаний различных систем, а также при разработке быстро вращающихся роторов и гироскопов, имеющих жидкий наполнитель.

Достоверность результатов работы обеспечивается использованием общих законов и уравнений механики сплошной среды, применением хорошо апробированных численных методов, контролем получаемого решения с помощью аналитических интегралов, сравнением численного решения с известными асимптотическими решениями и проверкой сеточной сходимости численного решения.

На защиту выносятся результаты численного моделирования движения замкнутого сосуда, заполненного вязкой жидкостью, вокруг неподвижной оси и точки и поступательного движения тела с полостью, частично заполненной жидкостью:

- значения параметров задачи, при которых скорость диссипации энергии колебательного движения системы «тело с жидкостью» максимальна;
- структура вихревого течения жидкости в колеблющихся замкнутых сосудах с формой, отличной от цилиндрической, и открытых сосудах, имеющих различные конфигурации вставок;
- вывод о виде траекторий движения замкнутого кубического сосуда вокруг неподвижной точки при различных значениях начальной гироскопической угловой скорости;
- вывод о том, что полость со вставкой в виде двух вертикальных решеток с относительной высотой пластин, зависящей от амплитуды колебания тела, максимально увеличивает скорость диссипации энергии колебаний тела по сравнению с рассмотренными конфигурациями вставок.

Личный вклад автора заключается в написании программы для расчета задач динамики жидкости со свободной поверхностью с криволинейной геометрией стенок полости, проведении всех расчетов и анализе полученных результатов. Постановка задачи и обсуждение полученных результатов выполнены совместно с научным руководителем.

Апробация работы

- 54-ая Всероссийская молодёжная научная конференция с международным участием МФТИ «Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе», Москва-Долгопрудный-Жуковский, 2011;
- X Международная конференция молодых ученых «Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики», Новосибирск, 2012;
- Международная научная школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах», Москва, 2012;
- Семинар ТюмГУ под руководством проф. А.А. Вакулина, Тюмень, 2012;
- Семинар НИИ механики МГУ под руководством проф. В.П. Стулова, Москва, 2012;
- Семинар ТюмФ ИТПМ СО РАН под руководством проф. А.А. Губайдуллина, Тюмень, 2012, 2014;
- Пермский городской гидродинамический семинар им. Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого, Пермь, 2014.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 работ. Из них 3 статьи в журналах из перечня ВАК, 3 статьи в трудах международных и российских конференций, 3 – тезисы докладов конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, содержащего 123 наименования. Полный объем диссертации составляет 135 страниц, включает 58 рисунков и 3 таблицы.

Краткое содержание работы

В первой главе проводится обзор основной литературы по тематике динамики тел с жидкостью в полостях. Приводятся работы по исследованию движения тел с полостями, частично или полностью заполненными идеальной или вязкой жидкостью, работы, посвященные вопросам устойчивости таких движений. Представлена литература, посвященная численным методам расчета задач динамики жидкости, имеющей свободную поверхность. Также приводятся работы, посвященные исследованию проблем разработки эффективных жидкостных гасителей колебаний (TLD).

Во второй главе представлена постановка задачи исследования. Приведена система уравнений, описывающая динамику произвольного движения тела с полостями, полностью или частично заполненными вязкой жидкостью. Кроме того, приведены уравнения и краевые условия, описывающие частные виды движений – плоские колебания сосуда, полностью заполненного вязкой жидкостью, под действием силы тяжести, движение сосуда вокруг неподвижной точки как под действием силы тяжести, так и свободное движение, и прямолинейные колебания прямоугольного сосуда, частично заполненного жидкостью. Уравнения приведены как в размерном, так и безразмерном виде. Кроме того, приведены приближенные уравнения, полученные Ф.Л. Черноусько, для случаев движения тел с сильно или слабо вязкой жидкостью. Представлены параметры расчета.

В третьей главе приведено описание численной методики расчета задач динамики вязкой жидкости со свободной поверхностью. В данном методе используется совместный Эйлера-Лагранжев подход, в котором учитывается, что расчетная сетка двигается со скоростью отличной от скорости сплошной среды. В процессе счета расчетная сетка перестраивается на каждом шаге по времени в соответствии с движением свободной поверхности, что позволяет очень точно рассчитывать ее форму. Также в третьей главе описаны методы построения расчетной сетки, и приведена запись граничных условий в произвольной криволинейной системе координат.

В четвертой главе приведены результаты численного исследования задачи о плоских колебаниях маятника с квадратной полостью и полостью в форме эллипса, полностью заполненной вязкой жидкостью. Найдены характерные времена затухания колебаний для различных значений начального угла отклонения и значений Re_{Ω} . Показана немонотонная зависимость времени затухания колебаний от значений Re_{Ω} . Найдены значения параметра Re_{Ω} , при которых время затухания минимально. Кроме того, продемонстрирован механизм генерации вихрей в движущейся полости.

В пятой главе представлены результаты расчета задачи движения тела с жидкостью в полости вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести. Исследована зависимость режимов движения тела с жидкостью в полости от величины начального гироскопического момента. При этом получено, что в пределах изменения начальной гироскопической угловой скорости $0 \leq \omega_{z0} \leq 200$, можно выделить три различных режима движения тела. При $\omega_{z0} = 0$ движение тела представляет собой плоские колебания с уменьшающейся к нулю амплитудой колебания. При $\omega_{z0} > 0$ движение тела с жидкостью в полости приобретает трехмерный характер. В пределе большого времени движение тела выходит на стационарное вращение вокруг вертикальной оси – регулярную прецессию, причем переход к регулярной прецессии осуществляется различными способами при различных значениях начальной гироскопической угловой скорости: при $0 < \omega_{z0} < 80$ через колебания с поворотом плоскости колебаний, при $80 < \omega_{z0}$ через вращение вокруг оси, колеблющейся около начальной оси вращения с амплитудой, уменьшающейся с ростом ω_{z0} .

В шестой главе представлены результаты численного моделирования задачи о прямолинейных колебаниях конструкции, состоящей из твердого тела и прямоугольной полости, частично заполненной жидкостью. Рассматриваются два типа колебаний: свободные затухающие колебания и вынужденные колебания, возбуждаемые гармоническим воздействием на

конструкцию. Приведен сравнительный анализ скорости диссипации энергии колебаний тела в случаях полостей с различными конфигурациями вставок: вертикальные и горизонтальные перегородки и решетки. Показано, что среди рассмотренных случаев энергия диссипирует максимально быстро в случае размещения в полости двух вертикальных решеток. Также показано, что в зависимости от начальной энергии системы (энергии внешнего воздействия) максимально быстро рассеивают энергию колебаний тела полости с решетками с различной относительной длиной пластин. В задаче о вынужденных колебаниях конструкции приведены зависимости амплитуды колебания конструкции от частоты внешнего воздействия для различных случаев размещения в полости решеток и перегородок. Также в данной главе представлены картины течения (изолинии функции тока) жидкости при установившихся колебаниях полости для различных случаев размещения решеток и перегородок.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Задачи динамики твердого тела с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью, являются сложными задачами механики, находящимися на стыке таких дисциплин, как теоретическая механика и гидродинамика. Одним из первых подобными задачами начал заниматься Стокс [1], рассмотрев случаи полостей в форме прямоугольного параллелепипеда и кругового цилиндра. Стокс первый указал, что влияние жидкости может быть учтено добавочным твердым телом, с подходящим эллипсоидом инерции. Вслед за ним такие ученые, как Нейман [2] и Ламб [3] продолжили исследования задач динамики твердых тел с жидким наполнителем. Ламб рассмотрел только случай эллиптической полости, тогда как Нейман рассмотрел общую постановку задачи, учтя возможную многосвязность полости. Пожалуй, наиболее полное решение задачи о движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной несжимаемой и идеальной жидкостью, дал Н.Е. Жуковский [4]. В данной работе Н.Е. Жуковский изложил общую теорию движения тела с жидкостью, предполагая, что скорость жидкости имеет потенциал. При этом оказывается, что поступательное движение не оказывает никакого влияния на внутреннее движение жидкости, оно определяется только лишь вращением тела, а само движение тела происходит так, как будто бы жидкие массы были заменены эквивалентными твердыми телами. Массы этих тел равны массам жидкостей, а моменты инерции относительно любой оси, проходящей через центр тяжести, являются меньшими по сравнению с моментами инерции соответствующих масс жидкости. Если же тело имеет многосвязные полости, и находящимся в них жидким массам сообщено начальное движение, то помимо эквивалентных тел, необходимо присоединить еще некоторый гироскоп, направление оси вращения и начальный момент которого определяются начальным движением жидкости. Таким образом, движение

тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью, совершающей потенциальное движение, эквивалентно движению тела, тензор инерции которого складывается из тензора инерции твердого тела без жидкости и тензора инерции эквивалентного тела – тензора присоединенных масс, причем тензор присоединенных масс определяется лишь формой полости. В своей работе Н.Е. Жуковский определил моменты инерции эквивалентных тел для полостей различной формы: эллиптическая, цилиндрическая, полости в форме тела вращения, коническая полость и др. Также были изучены некоторые свойства движения жидкости, возникающие в движущейся полости, так вращение тела всегда опережает жидкость, совершающую внутри полости в форме эллипса вращение в обратную сторону. Кроме того, Н.Е. Жуковский рассмотрел простейшую форму вихревого движения – однородное вращение тела с полостью, содержащую жидкость, без учета трения и с учетом.

Очень важными как с теоретической, так и с прикладной точки зрения являются задачи устойчивости твердых тел с полостями, заполненными жидкостью. Одни из первых теоретических исследований таких задач принадлежат Гринхиллу [5], Хафу [6] и Пуанкаре [7], которые рассматривали однородное вихревое движение жидкости в эллипсоидальной полости. Например, Хаф исследовал малые колебания в окрестности равномерного вращения тела и жидкости в его полости, как одного целого, вокруг главной оси инерции, и получил необходимые условия устойчивости.

Развитие самолетной и ракетной техники стимулировало появление огромного числа работ, посвященных задачам динамики тел с полостями, заполненными жидкостью. Так С.Л. Соболев, исследовав линеаризованные уравнения движения тяжелого симметричного волчка с полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, установил некоторые условия устойчивости и рассмотрел два случая полостей: эллипсоид вращения и круговой цилиндр [8]. Помимо Соболева теоретическим исследованием данной задачи занимались А.Ю. Ишлинский и М.Е. Темченко [9], В.В. Румянцев [10], С.В. Жак [11] и другие. В работах [10] и [11], в отличие от

[8] устойчивость движения тела с полостью, наполненной жидкостью, исследовалась вторым методом Ляпунова [12]. Стоит отметить, что в общем случае система жидкость – твердое тело обладает бесконечным числом степеней свободы, однако в простейших случаях, когда жидкость является идеальной и совершает потенциальное или однородное вихревое движение, эту систему удастся описать конечным числом переменных. Это позволяет задачу об устойчивости тела с полостью, заполненной жидкостью, ставить как задачу об устойчивости в смысле Ляпунова для систем с конечным числом степеней свободы. Впервые это обстоятельство отметил Н.Г. Четаев для случая безвихревого движения жидкости [13]. Н.Г. Четаев дал решение задачи об устойчивости вращательных движений снаряда с полостями в форме кругового цилиндра, цилиндра с одной диафрагмой и цилиндра с крестовиной.

Для общего случая движения твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, возможна постановка задачи об устойчивости по отношению к конечной части переменных, а не ко всем переменным, характеризующим систему. Такими переменными могут быть переменные, определяющие движение самого твердого тела, и величины, интегральным образом характеризующие движение жидкости. В такой постановке к задаче об устойчивости тела с жидкостью в полости применимы методы исследования устойчивости по Ляпунову для систем с конечным числом степеней свободы. Развитие этого метода принадлежит главным образом В.В. Румянцеву [14-20]. В работах [14,15] дается понятие устойчивости по отношению к части переменных. В работах [16,17] исследуется устойчивость твердого тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, движущегося вокруг неподвижной точки в силовом поле. Устойчивость исследуется по отношению к проекциям мгновенной угловой скорости тела, направляющим косинусам и проекциям момента импульса жидкости. В процессе решения были найдены достаточные условия устойчивости, относительно этих переменных, причем это условие справедливо, как для вязкой, так и для идеальной жидкости. В частном случае движения по инерции, это условие гласит, что устойчивыми

по отношению к указанным переменным будут перманентные вращения тела с жидкостью в полости вокруг оси с наибольшим моментом инерции. Этот результат является дополнением к теореме Н.Е. Жуковского о движении по инерции свободного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, которая гласит, что движение такой системы будет стремиться к предельному состоянию, при котором одна из главных осей инерции займет направление главного момента начального импульса, и вся система будет вращаться около нее как одно тело с постоянной угловой скоростью, получаемой делением главного момента начального импульса на момент инерции системы относительно этой оси.

В работах [18-20] были исследованы задачи устойчивости стационарных движений и равновесий твердых тел с жидкостью в полостях. Было доказано, что вопрос об устойчивости такого движения сводится к задаче минимума, так называемой измененной потенциальной энергии, равной сумме потенциальной энергии системы и отношения квадрата интеграла площадей к моменту инерции тела относительно оси стационарного вращения. Например, в работе [19] найдены условия устойчивого положения горизонтальной оси вращения маятника с полостью, полностью или частично заполненной жидкостью, могущей вращаться вокруг вертикальной оси. В работе [20] было исследовано стационарное движение тела с полостью, частично заполненной жидкостью. Тело находилось под действием силы тяжести. Были получены достаточные условия устойчивости по отношению к проекциям мгновенной угловой скорости тела, косинусам углов между вектором силы тяжести и подвижными осями и к кинетической энергии системы. Из работ по устойчивости тел с жидкостью стоит также отметить работу Н.Н. Колесникова [21], в которой он исследовал устойчивость движения свободного тела с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, движущегося по круговой орбите, в центральном ньютоновском поле сил, и работы Р.К. Пожарицкого [22,23]. В работе [22] была решена задача определения минимума измененной потенциальной энергии и найдены условия устойчивости полости, частично

заполненной жидкостью. В работе [23] проведен анализ влияния вязкости на устойчивость стационарных движений частично заполненной полости. В работе С.В. Малашенко и М.Е. Темченко [24] представлены результаты экспериментальных исследований устойчивости движения волчка с полостью, заполненной жидкостью. Т.В. Руденко в работе [25] исследовал устойчивость движения тела с полостью в форме эллипсоида вращения, полностью заполненной идеальной жидкостью, на абсолютно шероховатой плоскости. А.В. Карапетян и О.В. Проконина провели исследование устойчивости перманентных вращений сферы с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, на плоскости с трением [26]. В работе [27] А.Ю. Ишлинский и М.Е. Темченко рассмотрели задачу устойчивости стационарного вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, подвешенного на нерастяжимой струне. Были найдены критические значения угловой скорости, при которых движение становится неустойчивым. Устойчивость движения тела с эллипсоидальной полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, подвешенного не на струне, а на стержне была исследована в [28]. При этом использовалась феноменологическая модель «внутреннего трения», предложенная В.А. Самсоновым [29]. Согласно этой модели трение жидкости учитывается путем введения в уравнения движения коэффициента внутреннего трения, который определяется из экспериментов. В работе [28] найдены все тривиальные и нетривиальные перманентные вращения системы, исследована их устойчивость и бифуркации.

Задачи динамики тел с полостями, содержащими вязкую жидкость, являются более сложными по сравнению с задачами динамики тел с идеальной жидкостью. Авторы, занимающиеся такими задачами, либо рассматривают какие-нибудь частные случаи движения тел с жидкостью, либо находят только асимптотические решения уравнений. Некоторые задачи о равномерном вращении полостей, заполненных жидкостью, имеются в книге [30]. В работе [31] П.С. Краснощеков рассмотрел малые колебания физического маятника,

имеющего полость, полностью заполненную вязкой жидкостью. Полость имела форму тела вращения с осью вращения перпендикулярной плоскости колебания, рассматривался случай большого числа Рейнольдса. П.С. Краснощеков в своей работе опирался на работу Н.Н. Моисеева [32], в которой был предложен асимптотический метод пограничного слоя для изучения нестационарных движений вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, которые возникают в результате колебаний тел как содержащих жидкость, так и погруженных в нее. Идея этого метода заключается в том, что при больших числах Рейнольдса возникающее вихревое движение в колеблющейся жидкости, находящейся в полости маятника, сосредоточено в тонком слое на стенках полости. Данный факт дает основания предположить, что производные по нормали к поверхности полости существенно больше, чем в касательном направлении. Затем, вводя так называемую «растягивающую» переменную, содержащую малый параметр, производится разложение скалярного и векторного потенциалов по этому параметру. В работе [31] найдено лишь нулевое приближение. Подробное описание метода пограничного слоя или метода Прандтля можно найти в работе [33] и в монографии [34], в которой представлено большое число различных методов поиска асимптотических решений дифференциальных уравнений. В дальнейшем, П.С. Краснощеков рассмотрел несколько обобщенную задачу [35], а также привел одну теорему, обосновывающую метод пограничного слоя для некоторых задач о колебаниях тела с жидкостью. В работах О.Б. Ивлевой [36,37] исследованы колебания тела с полостью сферической формы, заполненной жидкостью, в линейной постановке. В силу специфичности полости решение удалось найти в виде разложения по обобщенным сферическим функциям.

Часть работ посвящена исследованию динамики жидкости, находящейся внутри полости, движущейся по заданному закону. Так, в работах [38-40], методом пограничного слоя исследуется движение жидкости при равномерном вращении тел с полостями. Исследовано влияние геометрии

полости на время раскрутки. Результаты расчетов сравниваются с некоторыми экспериментальными данными, и отмечается хорошее совпадение теории и эксперимента. Другие работы, например [41], посвящены исследованию динамики жидкости в полостях, совершающих регулярную прецессию. В работе [41] авторы методом пограничного слоя исследуют движение жидкости в полости, мало отличающейся от сфероидальной. В работе [42] исследованы линеаризованные уравнения Навье-Стокса применительно к задаче о равномерном вращении тела с вязкой жидкостью. Авторами была доказана теорема единственности решения задачи в линейной постановке и на основе работы [43] было найдено асимптотическое решение в случае сильно вязкой жидкости. Этим же автором в работе [44] была доказана теорема существования для линейной задачи движения тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Работа [45] посвящена экспериментальному исследованию движения жидкости в сфероиде, совершающем регулярную прецессию.

Основные результаты по динамике твердых тел с полостями, заполненными вязкой жидкостью, принадлежат Ф.Л. Черноусько [46-50]. В своих работах Ф.Л. Черноусько построил асимптотические решения для некоторых моделей движения твердого тела с полостью. Основным допущением, сделанным автором в работе [46], является предположение о малости числа Рейнольдса: $Re \ll 1$. Тогда относительную скорость жидкости и давление можно представить в виде разложения по малому параметру. Затем, подставляя эти разложения в уравнения Навье-Стокса, получим краевые задачи для определения коэффициентов разложения. В работе найдено первое приближение в разложении. Момент импульса системы представляется в виде суммы двух слагаемых: момента импульса твердого тела с «замороженной» жидкостью и слагаемого, характеризующего движение жидкости в полости. Второе слагаемое определяется некоторым постоянным тензором, который зависит только от формы полости и характеризует диссипацию энергии за счет вязкости жидкости. В работе были вычислены компоненты этого тензора для некоторых форм полостей: сферической,

эллипсоидальной, цилиндрической и др. Используя такую запись момента импульса системы, решение исходной задачи сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Также в работе исследуются некоторые частные задачи. Изучены плоские колебания маятника с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, получен закон затухания колебаний. Рассмотрена задача о трехмерном движении свободного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. Получено качественное описание переходного процесса, приводящего к устойчивому движению, найдено время переходного процесса. В работе [47], в отличие от [46], исследуется случай большого значения числа Рейнольдса: $Re \gg 1$, кроме того задача рассматривается в линейной постановке, т.е. амплитуда движения тела с жидкостью предполагается малой. Опираясь на работу [33], Ф.Л. Черноусько применяет метод пограничного слоя для решения линеаризованных уравнений Навье-Стокса. Аналогично работе [46], момент импульса системы представляется в виде суммы двух слагаемых: момент импульса тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью при потенциальном движении, который полностью определяется потенциалами Жуковского, и слагаемое, учитывающее влияние вязкости. Второе слагаемое в выражении для момента импульса определяется постоянным тензором, который также может быть рассчитан для полостей различной формы. Благодаря такому представлению момента импульса системы, искомую задачу удастся свести к решению системы интегро-дифференциальных уравнений. Далее в этой работе исследуются малые свободные и вынужденные колебания маятника с полостью, заполненной маловязкой жидкостью. Вычислены коэффициенты затухания свободных колебаний тела за счет вязкости, найдены амплитуды свободных и вынужденных колебания тела. В работе [48] исследовано движение тела с жидкостью близкое к равномерному вращению, при этом получены некоторые свойства собственных колебаний жидкости, рассмотрены сферическая и эллиптическая полости. В работе [50] проведено исследование затухающих колебаний твердого тела с полостью тороидальной

формы, заполненной жидкостью произвольной вязкости, в предположении, что момент инерции жидкости много меньше момента инерции твердого тела.

В настоящее время задачи динамики тел с полостями, полностью заполненными вязкой жидкостью, рассматриваются для случаев полостей, имеющих упругие стенки, и при размещении в полости перегородок. В книге [51] рассматриваются задачи динамики упругих тонкостенных конструкций с жидкостью, причем основное внимание уделяется прикладной стороне проблемы. Рассмотрены вопросы демпфирования колебаний жидкостью в полостях с перегородками. Представлены результаты экспериментов по демпфированию колебаний цилиндрического сосуда с радиальными перегородками. В работе [52] численно рассмотрено вращательное движение цилиндрического сосуда с радиальными ребрами под действием постоянного внешнего раскручивающего момента. Численно определены силы, действующие на ребра со стороны жидкости. В работе [53] теми же авторами рассмотрены синусоидальные колебания цилиндрического сосуда с упругими радиальными ребрами. Причем вводится ограничение на движение ребер: форма вынужденных колебаний ребра вдоль радиальной координаты слабо отличается от формы свободных колебаний ребра вдоль радиальной координаты, что накладывает ограничения на амплитуду колебаний сосуда, в работе максимальная амплитуда была равной 0,1 рад.

Наряду с задачами динамики твердых тел с полостями, полностью заполненными жидкостью, огромное значение имеют задачи динамики тел с полостями, заполненными частично. В СССР такие задачи впервые были исследованы независимо Г.С. Наримановым и Д.Е. Охоцимским. Так, Г.С. Нариманов дал вывод уравнений движения тела с полостью, частично заполненной жидкостью, при заданных внешних силах и при кинематическом граничном условии на свободной поверхности [54]. Д.Е. Охоцимский получил решение обратной задачи динамики (определение сил по заданному движению тела) при условии постоянства давления на свободной поверхности и рассмотрел случай гармонических колебаний тела с полостью

цилиндрической формы [55]. Несколько более общее решение этой задачи было получено Б.И. Рабиновичем [56]. Важные результаты в решении задач динамики тел с полостями, частично заполненными идеальной жидкостью, были получены Н.Н. Моисеевым [57-61]. Так, в работах [57] и [58] изучены линейные колебания маятника, представляющего собой открытый сосуд, заполненный идеальной жидкостью. Суть метода, используемого Н.Н. Моисеевым, заключается в том, что скорость жидкости представляется в виде суммы двух слагаемых: слагаемого, определяемого потенциалом скоростей волнового движения жидкости, и слагаемого равного скорости жидких частиц в предположении, что свободная поверхность заменена твердой стенкой. Скорость жидкости в полости, в предположении, что свободная поверхность заменена твердой стенкой определяется через потенциалы Жуковского, которые являются решением задачи Неймана для данной полости. Для определения потенциала волнового движения необходимо решить задачу о собственных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде. Определив потенциалы Жуковского и собственные частоты колебания жидкости, искомую систему (тело с жидкостью) можно описать системой интегро-дифференциальных уравнений или счетным числом дифференциальных уравнений. Задаче определения потенциалов Жуковского посвящены работы [4] и [62], решение задач о собственных колебаниях жидкости в сосуде имеется в работах [58,62-64]. В работе [62] автор рассматривает приближенное решение задачи колебания идеальной жидкости в сосуде. Форма сосуда предполагается мало отличающейся от формы сосуда, для которой задача на собственные колебания решена: прямоугольной, цилиндрической и др. Тем самым, вводится малый параметр, определяемый разностью между формами сосудов, и решение задачи на собственные колебания жидкости в полости исходной формы ищется в виде разложения в ряд по этому малому параметру. Тем же методом автор определяет потенциалы Жуковского и компоненты тензора присоединенных масс. В работе [64] формулируется вариационная постановка задачи о

собственных колебаниях идеальной жидкости и решается для сосудов цилиндрической и тороидальной формы.

В работе [65] проводится исследование системы интегро-дифференциальных уравнений, записанной в операторном виде, и устанавливаются некоторые свойства спектра оператора. Важные экспериментальные данные представлены в работе [66].

Исследования колебаний сосудов, частично заполненных вязкой жидкостью, представляет намного более сложную задачу. Здесь ситуация во многом похожа на случай полностью заполненной полости, где удалось отыскать только асимптотические решения. Так, Ф.Л. Черноусько в работе [67] исследовал задачу о свободных колебаниях маловязкой жидкости в неподвижном сосуде, используя метод пограничного слоя. Им были получены выражения для собственных чисел и собственных функций задачи о колебании вязкой жидкости в сосуде, которые выражаются через собственные колебания и собственные функции задачи о свободных колебаниях идеальной жидкости в сосуде. В работе [68] Ф.Л. Черноусько, используя метод пограничного слоя, рассмотрел колебания полости, частично заполненной вязкой жидкостью, в предположениях линейности задачи и малой вязкости жидкости. Были выведены общие интегро-дифференциальные уравнения динамики тела с полостью произвольной формы, частично заполненной мало вязкой жидкостью. Коэффициенты этих уравнений зависят лишь от решения задачи о колебании тела с идеальной жидкостью. Отметим, что при отсутствии вязкости эти уравнения переходят в уравнения колебания тела с идеальной жидкостью, а при отсутствии свободной поверхности в уравнения, полученные в работе [47]. В работе [69] авторы методами функционального анализа исследуют различные линеаризованные задачи гидродинамики в ограниченном объеме. Исследуются задачи движения идеальной или вязкой жидкости, частично или полностью заполняющей подвижные или неподвижные сосуды. Проводится исследование спектра частот колебаний жидкости и находятся асимптотические решения для случая большой

вязкости. При этом авторы не рассматривают конкретные формы полостей, ограничиваясь исследованием полости произвольной формы. В работе приводится список литературы, содержащий 280 источников.

Что касается работ зарубежных авторов, то в первую очередь эти работы связаны с началом космической программы США. Так, в 1966 году была подготовлена монография под авторством Абрамсона, которая охватывала почти весь материал о движении жидкости со свободной поверхностью, находящейся в движущейся полости, накопленный за предыдущие годы исследований [70]. Спустя 44 года было выпущено дополненное переиздание, содержащее новые сведения о задачах динамики тел с полостями, частично заполненными жидкостью [71]. В данной монографии рассмотрено несколько вопросов динамики тел с жидкостью в полости: движение волн на поверхности жидкости для полостей различной формы: сферической, цилиндрической, прямоугольной и др. в линейной постановке при прямолинейном колебании полостей. Проведено исследование некоторых нелинейных эффектов, при этом все нелинейные эффекты авторы разделяют на три класса:

- 1) Эффекты, являющиеся следствием формы полости (наличие углов в прямоугольных полостях), такие эффекты, как отмечают авторы, присутствуют даже при малых колебаниях и часто должны быть учтены.
- 2) Нелинейные эффекты, которые возникают вследствие большой амплитуды колебаний.
- 3) Эффекты, связанные с развитием различных неустойчивостей.

В работе анализируются первые два класса нелинейных эффектов, без останавки на третьем, связанным с неустойчивостью течения. Также в работе рассматривается динамика сосудов, частично заполненных жидкостью, в условиях микрогравитации, когда преобладающий вклад в динамику жидкости вносят силы поверхностного натяжения. Кроме того, в работе рассмотрено движение жидкости во вращающихся полостях. В работе [72] получено аналитическое решение задачи о малых колебаниях вязкой жидкости в прямоугольном сосуде с учетом поверхностного натяжения.

Важной является монография 2005 года [73], содержащая обширную информацию по задачам динамики тел с полостями, частично заполненными жидкостью, накопленную за 40 лет. В конце монографии приведен список литературы, содержащий 1200 источников.

В работах по динамике тел с полостями, частично заполненными жидкостью, которые приведены выше, как правило исследуются задачи в линейной постановке. Это ведет к тому, что многие нелинейные эффекты остаются без внимания исследователей. Конечно, делались попытки учесть нелинейность движения, так, в работе [74] был предложен аналитический алгоритм для моделирования поверхностных волн, удовлетворяющий нелинейным условиям на поверхности. Однако учет некоторых существенно нелинейных эффектов возможен только при помощи численного моделирования.

Методы расчета течения жидкости со свободной поверхностью можно разделить на два класса: методы, в которых свободная поверхность восстанавливается (Interface capturing methods) и методы, в которых свободная поверхность явно отслеживается (Interface tracking methods). К первой группе относятся методы VOF (Volume of fluid) и методы функции уровня (Level set method). Ко второй группе можно отнести методы, основанные на применении совместного Эйлера-Лагранжева подхода (Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods).

Метод VOF был разработан Хиртом и Николсом [75] и заключается в введении специальной функции маркера, которая задает объемную долю жидкости в ячейке: принимает значение равное 1 в ячейках, полностью заполненных жидкостью, значение 0 в пустых ячейках и значение в промежутке от 0 до 1 в частично заполненных ячейках. При этом данная маркер – функция удовлетворяет уравнению переноса. Положение свободной поверхности определяется по частично заполненным ячейкам, в самой простой реализации – параллельно границам ячейки (SLIC-VOF) [76]. Обзор более сложных реализаций реконструкции свободной поверхности можно

найти в работе [77]. Недостатком данного метода является искусственное размытие свободной границы по растущему слою частично заполненных ячеек.

Описание метода функции уровня можно найти в [78]. Данный метод во многом похож на VOF метод с той лишь разницей, что если маркер – функция, используемая в VOF методе, задает объемную долю жидкости в ячейке, то функция уровня задает расстояние (со знаком) до свободной поверхности.

Эйлера-Лагранжев метод основывается на решении уравнений гидродинамики в подвижных разностных сетках, движущихся независимо от материальной среды, с возможными частными случаями: неподвижной сетки (подход Эйлера) и разностной сетки, узлы которой соответствуют элементам объема материальной среды (подход Лагранжа) [79]. При этом в уравнения движения материальной среды входит подлежащая определению скорость подвижной расчетной сетки. По способу определения скорости расчетной сетки алгоритмы, использующие ALE метод можно разделить на две группы. В первой группе алгоритмов непосредственно вычисляется скорость сетки с учетом условия, что на свободной поверхности скорость сетки совпадает со скоростью жидкости, а затем, при использовании найденной скорости происходит обновление положения узлов расчетной сетки на новом временном слое [80]. Во второй группе вначале рассчитываются положения узлов расчетной сетки на новом временном слое в соответствии с новой формой свободной поверхности, а затем по этим положениям рассчитывается скорость движения узлов сетки. Преимуществом ALE метода является точное отслеживание формы свободной поверхности, однако это достигается увеличением времени вычислений за счет дополнительных операций расчета положения узлов сетки (скорости узлов сетки). Обзор методов расчета сеток по заданной форме области можно найти в работах [81,82]. В статье [83] авторы используют ALE подход применительно к методу конечных элементов для решения серии различных задач. Одной из них является движение жидкости в колеблющемся по гармоническому закону прямоугольном сосуде.

Найдена первая и третья гармоники волнового движения и форма свободной поверхности при колебании сосуда с частотой, совпадающей с этими гармониками. Показано очень хорошее согласие результатов численного моделирования с экспериментом.

При помощи данных численных методов, было исследовано множество нелинейных эффектов в задачах о движении жидкости, имеющей свободную поверхность и находящейся в движущемся сосуде.

В работах [84-91] исследованы задачи влияния твердых вставок на движение жидкости со свободной поверхностью. В работе [84], используя метод VOF, была рассмотрена задача о плоском колебании вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном сосуде, имеющем вертикальные и/или горизонтальные перегородки. Было показано, что влияние вертикальных перегородок более выражено при малой глубине жидкости, а влияние горизонтальных перегородок, которые вносят эффекты малой глубины жидкости (гидравлический прыжок, обрушение волн) заметнее при большей глубине. В работе [85] при помощи ALE метода совместно с методом конечных элементов, исследовано влияние горизонтальных перегородок на форму свободной поверхности и величину горизонтальной составляющей силы и момента сил, с которой жидкость действует на прямоугольный сосуд. Показано, что наличие перегородок приводит к уменьшению величины силы и момента. В работе [87] представлены результаты численного и экспериментального моделирования движения жидкости со свободной поверхностью в движущемся по гармоническому закону прямоугольном сосуде, имеющем вертикальные перегородки. Показано хорошее согласование численных расчетов с экспериментом. Получена зависимость собственной частоты колебаний от высоты центральной перегородки и исследовано влияние количества перегородок на затухание волн. Показано, что для двух вертикальных перегородок, расположенных симметрично относительно центра, затухание волн максимально, когда расстояние между ними $0,2L$, где L – длина области. Это связано с сильным вихревым взаимодействием между

перегородками, которое усложняется при увеличении числа вертикальных перегородок. В работе [89] представлены результаты численного моделирования трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, описывающих турбулентное движение жидкости со свободной поверхностью в баке в форме параллелепипеда, колеблющегося по синусоидальному закону. Для моделирования турбулентности авторы используют стандартную $k - \varepsilon$ модель, а для моделирования свободной поверхности VOF метод. В работе [90] автор представил результаты экспериментального, численного и аналитического анализа волнового движения жидкости в периодически движущемся прямоугольном сосуде, в котором расположена решетка. Рассматриваются случаи как малой глубины ($h/L = 0,12$), так и конечной глубины ($h/L = 0,4$). Исследуются зависимости максимального отклонения поверхности жидкости от частоты колебания сосуда для решеток с различной удельной площадью твердой части решетки. Исследуются нелинейные эффекты обрушения волн и разбивания волн о стенки сосуда и решетку. Численное моделирование свободной поверхности проводилось VOF методом, течение предполагалось ламинарным. Показано хорошее согласие расчетов с экспериментом при возбуждении первой моды, при возбуждении высших мод наблюдается расхождение расчетов и экспериментов. В работе [91] автор, используя метод функции уровня, анализирует задачу о турбулентном течении жидкости со свободной поверхностью в прямоугольном сосуде, совершающем гармонические колебания, причем в сосуде расположена эластичная перегородка. В расчетах используется смешанная $k - \varepsilon / k - \omega$ модель турбулентности. Рассмотрены случаи, когда перегородка закреплена в нижней части сосуда и в верхней части. Во всех случаях конец перегородки совпадал с уровнем жидкости в состоянии покоя. Проведено сравнение с экспериментом и получено неплохое согласие численных расчетов и экспериментальных данных.

Важным приложением задач динамики тел с полостями, частично заполненными жидкостью, является разработка эффективного поглотителя вибраций различных конструкций: высотных зданий во время землетрясений или при ветровой нагрузке, нефтяных платформ. Таким эффективным поглотителем могут служить резервуары, частично заполненные жидкостью, с частотой собственных колебаний жидкости, согласующейся с собственной частотой колебания конструкции (TLD – Tuned Liquid Damper). При этом жидкость воздействует на конструкцию с силой, находящейся в противофазе с внешней нагрузкой.

Впервые разработка TLD была начата в Японии в конце 90-х годов в связи с проблемами вибрации вышек [92]. В работе [92] авторы экспериментально анализируют возможность применения TLD на примере диспетчерской вышки аэропорта Нагасаки и морской башни Йокогамы. В данной работе показано, что применение TLD позволило снизить вибрацию диспетчерской вышки на 50%, а вибрация морской башни Йокогамы не ощущалась людьми даже при ветре 20 м/с, при этом масса жидкости составляла 0,59% и 1% от общей массы диспетчерской вышки и морской башни соответственно. С этого момента началось активное исследование механизмов диссипации энергии TLD с целью повышения эффективности их применения.

В работе [93] автор проводит теоретическое и экспериментальное исследование TLD, состоящего из прямоугольного контейнера. На основе теории мелкой воды автор предлагает модель, содержащую два эмпирических коэффициента, учитывающих влияние обрушения волн на затухание волнового движения и на изменение собственной частоты колебания жидкости. Проведенная серия экспериментов показывает эффективность данной модели для анализа TLD с малой глубиной жидкости. Проведена аналогия между TLD и TMD (Tuned Mass Damper), которая помогла в подборе оптимальных параметров TLD, т.е. таких параметров, при которых эффективность TLD максимальна. Такими параметрами являются: отношение

собственных частот колебания жидкости и конструкции (Ω), отношение массы жидкости к массе конструкции (μ) и нормированный на 2π логарифмический декремент затухания колебаний (ζ). В работе [94] найдены оптимальные параметры для TMD: $\Omega_{opt} = \frac{1}{1+\mu}$; $\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}$. При $\mu = 0,01$ и $\Omega = 1$ автор [93] исследовал влияние вязкости жидкости на амплитуду колебания конструкции с TLD и получил, что при вязкости такой, что $\zeta \approx \zeta_{opt}$ TLD является наиболее эффективным. Также было показано, что введение в жидкость легких шариков из полистирола или полипропилена значительно повышают эффективность использования TLD.

В работе [95] автор экспериментально исследовал волновое движение жидкости в колеблющихся прямоугольном и цилиндрическом сосудах, рассматривая случай малой глубины заполнения. На основе экспериментальных данных была разработана эффективная механическая модель (NSD – Non-linear Stiffness and Damping), представляющая из себя линейный осциллятор с коэффициентами упругости и затухания нелинейно зависящими от амплитуды внешней силы. Данная модель описывает колебание конструкции с одной степенью свободы, имеющую TLD с малой глубиной заполнения, и учитывает процессы обрушения волн.

В работе [96] представлены результаты экспериментального и численного моделирования взаимодействия конструкции с одной степенью свободы с TLD, имеющего малую глубину заполнения. Численное моделирование проводится на основе решения нелинейных уравнений теорий мелкой воды (NSW), которые учитывают обрушение волн на поверхности жидкости без введения эмпирических коэффициентов, как это было сделано в [95]. В результате показано, что данные уравнения хорошо описывают колебания конструкции с TLD при внешнем гармоническом возмущении, однако наблюдается сдвиг в частоте, при которой амплитуда колебания конструкции максимальна.

При разработке TLD основное внимание уделяется повышению скорости диссипации энергии колебания конструкции. При этом мало разработать демпфер, который будет максимально эффективным при заданном внешнем воздействии, необходимо еще, чтобы он оставался эффективным при изменении частоты воздействия в некотором диапазоне. Существенная нелинейность TLD при малой глубине заполнения приводит к тому, что его эффективность может упасть для частот внешнего возмущения, изменяющихся в достаточно широком диапазоне. Ситуацию может изменить использование TLD с глубоко заполненными баками (DTLD – Deep tuned liquid damper). В случае, когда глубина заполнения жидкости сравнима с размерами бака, влияние обрушения волн на затухание волнового движения уменьшается по сравнению со случаем малой глубины, это приводит к тому, что роль вязкого трения в диссипации энергии возрастает, и при использовании жидкости с малой вязкостью (вода) она не успевает диссипировать энергию, поступающую от конструкции. Эта энергия, накопленная в жидкости, переходит обратно в конструкцию, увеличивая амплитуду ее колебания [97]. Чтобы этого избежать применяют следующие модификации, интенсифицирующие диссипативные процессы в жидкости: поверхностные примеси [93], изменение геометрии дна бака [98-100] и размещение в баке перегородок или решеток [101-107].

Известно, что длинные волны в океане испытывают сильное затухание при движении у берега. Данный факт навел на мысль изменить геометрию дна бака, сделав его V-образным [98]. В работе [98] проведено экспериментальное исследование TLD с таким баком, при этом величина отклонения формы дна от горизонтальной составляла 30° . Показано, что такое изменение геометрии дна ведет к более эффективной диссипации энергии колебаний конструкции. В работе [99] авторы на основе экспериментальных данных разработали эффективную механическую модель (NSD) для TLD с баком V-образной формы. В работе [100] представлены результаты анализа

эффективности TLD с помещенными в бак твердыми частицами (DVTLD – Density Variable Tuned Liquid Damper) и с измененной геометрией дна (V –образной формы и W –образной формы) при сейсмической нагрузке на конструкцию. Показано, что наличие твердых частиц привело к увеличению эффективности TLD с W –образной формой дна по сравнению с V –образной, т.к. при такой форме большая часть частиц приходит в движение при начальном воздействии на систему.

В работе [101] была построена математическая модель волнового движения жидкости в прямоугольном сосуде с учетом демпфирующего действия расположенной в сосуде решетки. Данная модель является линейной и предполагает потенциальность течения жидкости. Демпфирующее действие сетки моделируется при помощи коэффициента сопротивления, определяемого из экспериментов, при этом предсказания модели хорошо согласуются с экспериментом. В работе [102] представлен численный алгоритм решения задач о движении прямоугольного контейнера, частично заполненного жидкостью. Алгоритм основан на решении уравнений Навье-Стокса методом конечных разностей с применением VOF метода для моделирования свободной поверхности. В работе [103] данный алгоритм применен для моделирования колебания сосуда прямоугольной формы в центре которого расположена решетка. Показано, что применение решеток существенно повышает эффективность TLD, также продемонстрировано согласие численных результатов с экспериментальными.

Большой вклад в разработку эффективных моделей для анализа TLD внес коллектив канадских ученых [104-109]. В диссертации [104] приведены результаты экспериментального и численного исследования влияния решеток на эффективность TLD. Рассмотрены решетки с различной величиной отношения площади твердой поверхности к площади всей решетки и различной высотой пластин решетки. Численное моделирование проведено на основе теории мелкой воды. В работе [105] предложена линейная и нелинейная модели для описания волнового движения жидкости в

прямоугольном сосуде, в котором расположены вертикальные решетки. Данные модели содержат эмпирические коэффициенты, учитывающие влияние решеток на затухание волнового движения. Проведено сравнение моделей с экспериментом и показано, что линейная модель способна адекватно оценивать диссипативные характеристики TLD, однако она не способна давать реалистичные значения амплитуды колебания свободной поверхности. В работе [106] для описания взаимодействия конструкции и TLD с решетками предложена линейная механическая модель с некоторыми эффективными массой, коэффициентом упругости и коэффициентом трения, которые определяются из решения задачи о колебании жидкости в прямоугольном сосуде в линейной постановке. Сравнения с экспериментом показали способность линейной модели предсказывать амплитуду колебания конструкции при внешнем гармоническом и случайном возбуждении, однако данная модель не описывает нелинейное поведение жидкости в сосуде, что приводит к заниженному значению амплитуды колебания жидкости. В работе [107] проведен сравнительный анализ трех моделей, описывающих движение жидкости в сосуде с расположенными в нем решетками: модель, основанная на уравнениях теории мелкой воды, мультимодальная модель для случая малой глубины и мультимодальная модель для случая средней глубины. Показано, что при заполнении сосуда на 5%-15% лучшее согласование с экспериментом наблюдается у первой и второй модели, а при заполнении сосуда на 15%-25% у третьей модели.

В работе [108] представлены результаты экспериментов и численного моделирования на основе теории мелкой воды задачи о построении TLD, который поглощает вибрации конструкции в двух ортогональных направлениях (2D-TLD). При этом в сосуде расположены четыре решетки по две на каждое направление.

В работе [109] были рассмотрены TLD в случае, когда сосуд имеет сложную геометрию. Представлена модель, описывающая волновое движение жидкости в сосуде сложной геометрии с учетом расположенных в нем

решеток. Данная модель была протестирована на сосудах простой формы: прямоугольной, цилиндрической и применена для одного сосуда со сложной геометрией.

В работе [110] представлены результаты численного расчета TLD. Автор использовал σ –преобразование координат и метод конечных разностей для решения нелинейных уравнений, описывающих потенциальное течение жидкости. Представлены некоторые результаты расчета взаимодействия конструкции, имеющей одну степень свободы, с сосудом прямоугольной формы, частично заполненным водой, при гармоническом возбуждении колебания конструкции с частотами из диапазона, содержащего резонансную частоту.

Как видно из приведенного обзора, исследования задач динамики твердых тел с полостями, содержащими жидкость, ведутся по трем основным направлениям: движение тел с полостями, заполненными вязкой или идеальной жидкостью, устойчивость различных систем, содержащих твердое тело и жидкость, и динамика тел с полостями, заполненными жидкостью частично. Что касается исследований задач первого направления, то была полностью решена задача движения тела с полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, совершающей потенциальное или однородное вихревое движение. Найдены асимптотические решения задач динамики тел с жидкостью для случая большой вязкости ($Re \ll 1$) и малой вязкости в линейной постановке ($Re \gg 1$). Рассмотрено численное решение некоторых частных задач динамики тел с полостями, заполненными вязкой жидкостью, например, вращение цилиндрической полости с радиальными вставками. В задачах второго направления найдены условия устойчивости тел с полостями, полностью заполненными идеальной жидкостью и условия устойчивости относительно конечного числа переменных тел с полостями, полностью или частично заполненными вязкой жидкостью.

Что касается задач движения полостей, частично заполненных жидкостью, в частности задачи разработки эффективных TLD, то здесь накоплено большое количество экспериментального материала и разработано множество эмпирических моделей и моделей, основанных на решении упрощенных уравнений: уравнений теории мелкой воды, уравнений, описывающих потенциальное течение жидкости. Очень мало работ, посвященных численному моделированию взаимодействия конструкций с сосудом, частично заполненным жидкостью, для случая конечного заполнения в полной постановке, включающей численное решение уравнений Навье – Стокса. При этом сосуд может содержать различные вставки в виде перегородок и решеток, иметь сложную геометрию, как стенок, так и дна.

Конечно, данный обзор не может претендовать на полноту. Так, почти не были рассмотрены работы, посвященные задачам динамики тел с жидкостью в случае деформируемых полостей [51,111], в случае частично заполненных полостей, находящихся в условиях микрогравитации, т.е. в условиях, когда важную роль в развитии волнового движения жидкости играют силы поверхностного натяжения. Не были рассмотрены задачи применения активных и полуактивных TLD. В обзоре численных методов решения задач динамики жидкости, имеющей свободную поверхность, не было рассмотрено множество методов: метод маркеров и ячеек (MAC), набирающий популярность метод сглаженных частиц (SPH), метод граничных элементов и т.д.

ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Общие уравнения

Рассмотрим движение твердого тела с полостью, частично или полностью заполненной однородной вязкой несжимаемой жидкостью. Введем в рассмотрение две системы координат: неподвижную и подвижную, связанную с твердым телом. Положение подвижной системы координат, а вместе с ней и твердого тела можно определить радиус-вектором и косинусами углов между неподвижными и подвижными осями.

Динамика твердого тела с жидкостью описывается следующей системой уравнений, записанной относительно неподвижных осей координат [57].

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{K}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{L}, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь, (2.1) – уравнение импульсов, (2.2) – уравнение моментов импульса, (2.3) – векторное уравнение Навье-Стокса, (2.4) – уравнение неразрывности.

Расшифруем входящие обозначения:

$\vec{Q} = M_1\vec{v}_c + \int \rho\vec{v} dV = M\vec{v}_c$ – импульс системы; $\vec{G} = \Theta_1 \cdot \vec{\omega} + \int \vec{r} \times \rho\vec{v} dV$ – момент импульса системы относительно начала координат; $\vec{K}, \vec{L}$ – главный вектор и главный момент относительно начала координат всех активных сил, приложенных к системе; $\vec{v}$ – поле скорости жидкости относительно неподвижной системы координат; $\vec{v}_c$ – вектор скорости центра масс системы; $M = M_1 + M_2$ – масса системы, состоящая из массы твердого

тела и массы жидкости; Θ_1 – тензор инерции твердого тела, $\vec{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости системы; $\vec{r}$ – радиус-вектор точек системы; ρ – плотность жидкости, $\vec{f}$ – плотность активных сил, действующих на жидкость. Интегрирование ведется по области, занятой жидкостью.

Перейдем к подвижной системе координат, связанной с твердым телом, по формулам:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad (2.5)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{u}, \quad (2.6)$$

где $\vec{r}_0$ – радиус вектор начала координат подвижной системы; $\vec{v}_0$ – вектор скорости начала координат подвижной системы; $\vec{u}$ – поле относительной скорости жидкости.

Тогда получим уравнения, описывающие движение твердого тела с жидкостью в подвижной неинерциальной системе отсчета:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{Q} = \vec{K}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{G} + \vec{v}_0 \times \vec{Q} = \vec{L}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} + \vec{f} - 2\vec{\omega} \times \vec{u} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \frac{d\vec{v}_0}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}_0 - \\ & - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.10)$$

где:

$$\vec{Q} = M_1(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_c) + \int \rho \vec{u} dV = M \vec{v}_c,$$

$$\vec{G} = \vec{r}_c \times M_1 \vec{v}_0 + \Theta_1 \cdot \vec{\omega} + \int \vec{r} \times \rho \vec{u} dV.$$

Во многих интересных случаях активные силы, действующие на систему, зависят от косинусов углов между осями неподвижной и подвижной систем координат. В этих случаях к уравнениям движения системы следует присоединить уравнения Пуассона:

$$\frac{d\vec{\gamma}_i}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\gamma}_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

где $\vec{\gamma}_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \gamma_{i3})$ – косинусы углов между i -й неподвижной и подвижными осями.

К данным уравнениям необходимо еще добавить граничные и начальные условия. Граничные условия включают в себя: условия прилипания или непротекания и скольжения на границах полости, кинематические и динамические граничные условия на свободной поверхности жидкости:

$\vec{u} = 0$ – условие прилипания,

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ – условие непротекания,

$\mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$ – условие идеального скольжения,

$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0$ – кинематическое граничное условие,

$\begin{cases} \mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = p_0 \\ \mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$ – динамические граничные условия. Здесь: $\vec{n}$ и $\vec{s}$ –

нормальный и касательный вектор к свободной поверхности, p_0 – постоянное давление, $\mathbf{P}$ – тензор напряжений.

Начальные условия включают в себя: начальные значения скорости жидкости и вектора угловой скорости, а также, если на систему действуют внешние силы, зависящие от косинусов углов между подвижной и неподвижной осями, начальные значения этих косинусов:

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0, \vec{\omega}|_{t=0} = \vec{\omega}_0, \vec{\gamma}_i|_{t=0} = \vec{\gamma}_{i0}. \quad (2.12)$$

Данная система (2.7)-(2.11) с указанными граничными и начальными условиями описывает общее движение твердого тела с полостью, частично или полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Рассмотрим теперь некоторые частные виды движения тела с жидкостью.

2.2. Плоские колебания маятника с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью

Рассмотрим случай плоских колебаний маятника с полостью в форме квадрата или эллипса, полностью заполненной вязкой жидкостью. Предположим, что масса твердого тела пренебрежимо мала. Колебания происходят под действием силы тяжести $m\vec{g}$. Введем неподвижную систему координат, направив ось η противоположно вектору силы тяжести, ось ζ перпендикулярно плоскости колебаний и ось ξ , дополнив систему координат до правой тройки. Введем также подвижную систему координат, связанную с телом, как показано на рис. 2.1, причем ось z направим по оси ζ .

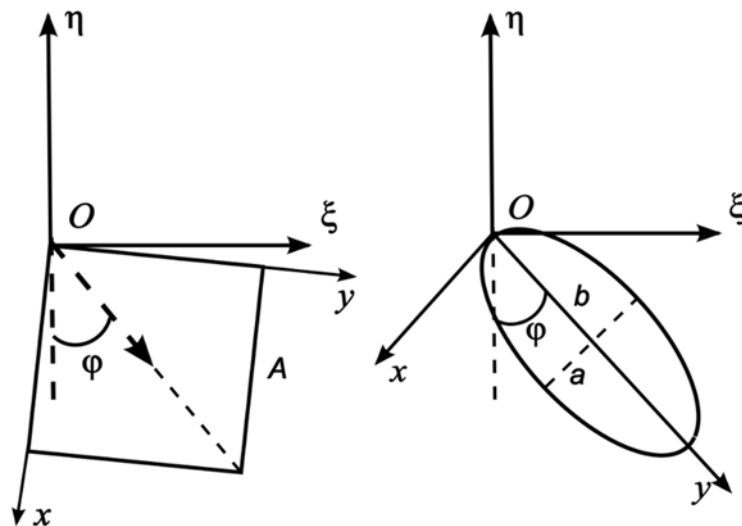


Рис. 2.1. Схема маятника

Тогда в уравнении (2.8) будет:

$$\vec{v} = (u, v, 0), \vec{v}_0 = 0, \vec{\omega} = (0, 0, \omega_z), \vec{G} = (0, 0, G_z), \vec{L} = (0, 0, -mg\xi_c),$$

где ξ_c – проекция радиус-вектора центра масс на неподвижную ось ξ . Вводя угол φ , как показано на рисунке, получим, что $\xi_c = l \sin \varphi$, где для квадратной полости $l = \frac{\sqrt{2}}{2} A$, для полости в форме эллипса $l = b$. Проекция момента импульса системы на ось z :

$$G_z = \Theta_z \omega_z + \rho \iint (vx - yu) dx dy,$$

где Θ_z – момент инерции полости с «замороженной» жидкостью относительно оси z : для квадрата $\Theta_z = \frac{2}{3}mA^2$, для эллипса $\Theta_z = \frac{m}{4}(a^2 + 5b^2)$ кроме того, из (2.11) получим, что $\omega_z = \dot{\phi}$.

Таким образом, получим, что проекция уравнения (2.8) на ось z :

$$\Theta_z \ddot{\phi} + mgl \sin \varphi = -\rho \frac{d}{dt} \iint (vx - yu) dx dy, \quad (2.13)$$

проекция векторного уравнений Навье-Стокса на подвижные декартовы оси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u + 2v\dot{\phi} + x\dot{\phi}^2 + y\ddot{\phi}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v - 2u\dot{\phi} + y\dot{\phi}^2 - x\ddot{\phi}, \quad (2.15)$$

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.16)$$

Запишем также начальные и граничные условия:

$$\phi|_{t=0} = \varphi_0, \dot{\phi}|_{t=0} = 0, u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0. \quad (2.17)$$

Здесь p' – отклонение от гидростатического давления.

Полученную систему уравнений (2.13)-(2.16) с краевыми условиями (2.17) приведем к безразмерному виду, вводя формулы обезразмеривания:

$$\tau = t \frac{\Omega}{2\pi}, U = u \frac{2\pi}{L\Omega}, V = v \frac{2\pi}{L\Omega}, P = \frac{4\pi^2 p'}{\rho \Omega^2 L^2}, X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, \Omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{4L}}, \quad (2.18)$$

здесь для квадратной полости $L = A$, для полости в форме эллипса $L = b$.

Тогда искомая система уравнений запишется в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re_{\Omega}} \Delta U + 2V\dot{\phi} + X\dot{\phi}^2 + Y\ddot{\phi}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re_{\Omega}} \Delta V - 2U\dot{\phi} + Y\dot{\phi}^2 - X\ddot{\phi}, \quad (2.21)$$

$$\ddot{\phi} + A_{\Omega} \sin \phi = -A_{\Pi} \frac{d}{d\tau} \iint (VX - UY) dXdY. \quad (2.22)$$

Где введены следующие параметры: $A_{\Omega} = 4\pi^2$, $A_{\Pi} = \frac{3}{2}$ для полости в форме квадрата, $A_{\Omega} = \frac{64\pi^2}{3\left(5+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}$, $A_{\Pi} = \frac{4}{\pi\frac{a}{b}\left(5+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)}$ для полости в форме эллипса и $Re_{\Omega} = \frac{\Omega A^2}{2\pi\nu}$.

Начальные условия примут вид:

$$\phi|_{\tau=0} = \phi_0, \dot{\phi}|_{\tau=0} = 0, \quad U|_{\tau=0} = V|_{\tau=0} = 0. \quad (2.23)$$

Граничные условия примут вид:

$$U|_{\Gamma} = V|_{\Gamma} = 0. \quad (2.24)$$

2.3. Движение тела с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки

Второй тип движения, который рассмотрен в работе, это движение твердого тела с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки. Считаем инерционные характеристики твердого тела пренебрежительно малыми по сравнению с инерционными характеристиками жидкости, другими словами считаем, что масса и тензор инерции твердого тела равны нулю и нулевому тензору соответственно. Примем за начало координат неподвижной и подвижной системы координат неподвижную точку закрепления тела. Направим оси неподвижной системы координат (ξ, η, ζ) как показано на рис. 2.2. Оси подвижной системы координат (x, y, z) направим по главным осям инерции заданного кубического сосуда и назовем их главными осями.

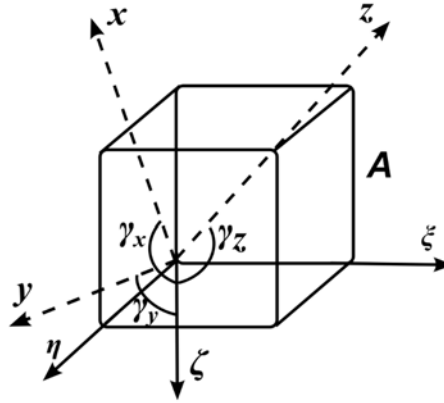


Рис. 2.2. Исследуемая область

Тогда уравнение Эйлера (2.8) в проекциях на главные подвижные оси примут вид:

$$\Theta_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (\Theta_z - \Theta_y) = mg(z_c \gamma_y - y_c \gamma_z) - \rho \frac{d}{dt} G_x + \rho(\omega_z G_y - \omega_y G_z), \quad (2.25)$$

$$\Theta_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z (\Theta_x - \Theta_z) = mg(x_c \gamma_z - z_c \gamma_x) - \rho \frac{d}{dt} G_y + \rho(\omega_x G_z - \omega_z G_x), \quad (2.26)$$

$$\Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (\Theta_y - \Theta_x) = mg(y_c \gamma_x - x_c \gamma_y) - \rho \frac{d}{dt} G_z + \rho(\omega_y G_x - \omega_x G_y). \quad (2.27)$$

Здесь $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$ – главные моменты инерции куба: $\Theta_x = \Theta_y = \frac{11}{12} mA^2$, $\Theta_z = \frac{1}{6} mA^2$; $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ – косинусы углов между осью ζ и подвижными осями; x_c, y_c, z_c – координаты центра масс в подвижной системе координат. Так как жидкость однородная и несжимаемая, то $x_c = y_c = 0, z_c = \frac{\sqrt{3}}{2} A$. G_x, G_y, G_z – проекции момента импульса жидкости на главные подвижные оси.

Так как компоненты вектора силы тяжести зависят от косинусов углов между осью ζ и подвижными осями, то к системе уравнений Эйлера необходимо присоединить уравнений Пуассона (2.11):

$$\frac{d\gamma_x}{dt} = \omega_z \gamma_y - \omega_y \gamma_z, \quad (2.28)$$

$$\frac{d\gamma_y}{dt} = \omega_x \gamma_z - \omega_z \gamma_x, \quad (2.29)$$

$$\frac{d\gamma_z}{dt} = \omega_y \gamma_x - \omega_x \gamma_y. \quad (2.30)$$

В силу особенностей геометрии области находим проекции поля скорости на декартовые оси, направленные по ребрам куба, которые назовем «декартовые оси». Уравнения Навье-Стокса в проекциях на эти оси будут:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u - (\dot{\tilde{\omega}}_y \tilde{z} - \dot{\tilde{\omega}}_z \tilde{y}) - 2(\tilde{\omega}_y w - \tilde{\omega}_z v) - \\ & - \tilde{\omega}_x (\tilde{\omega}_x \tilde{x} + \tilde{\omega}_y \tilde{y} + \tilde{\omega}_z \tilde{z}) + \tilde{x} \tilde{\omega}^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v - (\dot{\tilde{\omega}}_z \tilde{x} - \dot{\tilde{\omega}}_x \tilde{z}) - 2(\tilde{\omega}_z u - \tilde{\omega}_x w) - \\ & - \tilde{\omega}_y (\tilde{\omega}_x \tilde{x} + \tilde{\omega}_y \tilde{y} + \tilde{\omega}_z \tilde{z}) + \tilde{y} \tilde{\omega}^2, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w - (\dot{\tilde{\omega}}_x \tilde{y} - \dot{\tilde{\omega}}_y \tilde{x}) - 2(\tilde{\omega}_x v - \tilde{\omega}_y u) - \\ & - \tilde{\omega}_z (\tilde{\omega}_x \tilde{x} + \tilde{\omega}_y \tilde{y} + \tilde{\omega}_z \tilde{z}) + \tilde{z} \tilde{\omega}^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Здесь p' – отклонение от гидростатического давления, $\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}_x^2 + \tilde{\omega}_y^2 + \tilde{\omega}_z^2$, а $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$ – проекции вектора угловой скорости на декартовые оси. Таким образом, приходим к необходимости пересчета компонент вектора угловой скорости из главных осей в декартовые и пересчета компонент вектора момента импульса жидкости из декартовых осей в главные. Для этого нам необходимы формулы перехода между декартовыми и главными осями. Данные формулы перехода имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{y} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tilde{z}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{x} - \tilde{y}), \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}} (\tilde{x} + \tilde{y} + \tilde{z}), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = -\frac{1}{\sqrt{6}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{z}{\sqrt{3}}, \\ \tilde{y} = -\frac{1}{\sqrt{6}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y + \frac{z}{\sqrt{3}}, \\ \tilde{z} = \sqrt{\frac{2}{3}} x + \frac{z}{\sqrt{3}}. \end{array} \right.$$

Здесь $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ – декартовые оси; x, y, z – главные оси.

Таким образом, формулы пересчета компонент вектора угловой скорости из главных в декартовые оси и компонент вектора момента импульса жидкости из декартовых в главные имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_x = -\frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{G}_x - \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{G}_y + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tilde{G}_z, \\ G_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{G}_x - \tilde{G}_y), \\ G_z = \frac{1}{\sqrt{3}} (\tilde{G}_x + \tilde{G}_y + \tilde{G}_z), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_x = -\frac{1}{\sqrt{6}} \omega_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_y + \frac{\omega_z}{\sqrt{3}}, \\ \tilde{\omega}_y = -\frac{1}{\sqrt{6}} \omega_x - \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_y + \frac{\omega_z}{\sqrt{3}}, \\ \tilde{\omega}_z = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_x + \frac{\omega_z}{\sqrt{3}}. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Компоненты вектора момента импульса жидкости в декартовых осях имеют вид:

$$\tilde{G}_x = \int \tilde{y}w - \tilde{z}v dV; \quad \tilde{G}_y = \int \tilde{z}u - \tilde{x}w dV; \quad \tilde{G}_z = \int \tilde{x}v - u\tilde{y} dV.$$

Кроме того, для полного определения движения нам необходимы еще начальные условия:

$$\begin{aligned} \omega_x|_{t=0} = \omega_{x_0}, \omega_y|_{t=0} = \omega_{y_0}, \omega_z|_{t=0} = \omega_{z_0}, \\ \gamma_x|_{t=0} = \gamma_{x_0}, \gamma_y|_{t=0} = \gamma_{y_0}, \gamma_z|_{t=0} = \gamma_{z_0}, u|_{t=0} = v|_{t=0} = w|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (2.35)$$

и граничные условия:

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} = 0. \quad (2.36)$$

Запишем систему уравнений (2.25)-(2.33) в безразмерной форме, используя формулы обезразмеривания аналогичные (2.18), за исключением значения Ω , которое в данном случае равно: $\Omega = \sqrt{\frac{6\sqrt{3}}{11}} \frac{g}{a}$. Тогда искомая система уравнений в безразмерной форме будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re_{\Omega}} \Delta U - (\dot{\tilde{\omega}}_y Z - \dot{\tilde{\omega}}_z Y) - 2(\tilde{\omega}_y W - \tilde{\omega}_z V) - \\ - \tilde{\omega}_x (\tilde{\omega}_x X + \tilde{\omega}_y Y + \tilde{\omega}_z Z) + X \tilde{\omega}^2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re_{\Omega}} \Delta V - (\dot{\tilde{\omega}}_z X - \dot{\tilde{\omega}}_x Z) - 2(\tilde{\omega}_z U - \tilde{\omega}_x W) - \\ - \tilde{\omega}_y (\tilde{\omega}_x X + \tilde{\omega}_y Y + \tilde{\omega}_z Z) + Y \tilde{\omega}^2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\frac{dW}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{Re_\Omega} \Delta W - (\dot{\tilde{\omega}}_x Y - \dot{\tilde{\omega}}_y X) - 2(\tilde{\omega}_x V - \tilde{\omega}_y U) - \tilde{\omega}_z(\tilde{\omega}_x X + \tilde{\omega}_y Y + \tilde{\omega}_z Z) + Z\tilde{\omega}^2, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{d\omega_x}{d\tau} - \frac{9}{11} \omega_y \omega_z = 4\pi^2 \gamma_y - \frac{d}{dt} G_x + (\omega_z G_y - \omega_y G_z), \quad (2.41)$$

$$\frac{d\omega_y}{d\tau} + \frac{9}{11} \omega_x \omega_z = -4\pi^2 \gamma_x - \frac{d}{dt} G_y + (\omega_x G_z - \omega_z G_x), \quad (2.42)$$

$$\frac{d\omega_z}{d\tau} = -\frac{d}{dt} G_z + (\omega_y G_x - \omega_x G_y), \quad (2.43)$$

$$\frac{d\gamma_x}{d\tau} = \omega_z \gamma_y - \omega_y \gamma_z, \quad (2.44)$$

$$\frac{d\gamma_y}{d\tau} = \omega_x \gamma_z - \omega_z \gamma_x, \quad (2.45)$$

$$\frac{d\gamma_z}{d\tau} = \omega_y \gamma_x - \omega_x \gamma_y. \quad (2.46)$$

где G_x, G_y, G_z и $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$ пересчитываются по формулам (2.34) с

$$\tilde{G}_x = \int YW - ZV dV; \tilde{G}_y = \int ZU - XW dV; \tilde{G}_z = \int XV - UY dV.$$

Начальные и граничные условия аналогичны (2.35) и (2.36).

В случае свободного движения тела, т.е. в случае, когда на тело не действуют внешние силы, изменятся только уравнения Эйлера, которые примут вид:

$$\frac{d\omega_x}{d\tau} - \frac{9}{11} \omega_y \omega_z = -\frac{d}{dt} G_x + (\omega_z G_y - \omega_y G_z), \quad (2.47)$$

$$\frac{d\omega_y}{d\tau} + \frac{9}{11} \omega_x \omega_z = -\frac{d}{dt} G_y + (\omega_x G_z - \omega_z G_x), \quad (2.48)$$

$$\frac{d\omega_z}{d\tau} = -\frac{d}{dt} G_z + (\omega_y G_x - \omega_x G_y). \quad (2.49)$$

После решения системы уравнений (2.37)-(2.46) или вместо (2.41)-(2.43) уравнения (2.47)-(2.49) определяется поле скорости течения жидкости, поле давления, мгновенные угловые скорости вращения тела и косинусы углов между подвижными главными осями и неподвижной осью ζ . Для

окончательного определения положения тела находятся еще три угла Эйлера θ, ψ, φ – угол нутации, прецессии и собственного вращения соответственно [112]. Данные углы можно определить из двух соотношений и одного интеграла [113]:

$$\theta = \arccos \gamma_z,$$

$$\varphi = \arctg \frac{\gamma_x}{\gamma_y},$$

$$\psi = \psi_0 + \int \frac{1}{\gamma_z} \left(\omega_z - \frac{\gamma_y \dot{\gamma}_x - \dot{\gamma}_y \gamma_x}{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} \right) d\tau.$$

2.4. Аналитические результаты и параметры расчета

Для проверки численных расчетов используем результаты, полученные Ф.Л. Черноусько в работах [46,47]. Так, в [47] при исследовании плоских колебаний маятника, заполненного маловязкой жидкостью, было получено интегро-дифференциальное уравнение, описывающее эти колебания:

$$\Theta_z^* \ddot{\varphi} + \frac{E\rho\sqrt{v}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + mgl \sin \varphi = 0. \quad (2.50)$$

Здесь E – константа, определяемая формой полости, а Θ_z^* – момент инерции эквивалентного тела относительно оси колебания маятника. Для квадратной полости было получено, что $\Theta_z^* = 1.0522 \frac{mA^2}{2}$ и $E = 1.125A^3$.

Таким образом, уравнение, описывающее малые плоские колебания квадратной полости, полностью заполненной слабо вязкой жидкостью:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1.1246 \sqrt{v}}{1.0522 \sqrt{\pi}} \frac{2}{A} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{\sqrt{2}}{1.0522 A} g \sin \varphi = 0,$$

или в безразмерном виде:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1.0688}{\sqrt{\pi} \sqrt{Re}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{\varphi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{1}{1.0522} \frac{16}{3} \pi^2 \sin \varphi = 0.$$

Для полости в форме эллипса [4,47]: $\Theta_z^* = mb^2 \left[1 + \frac{1}{4} \frac{(1-(a/b)^2)^2}{1+(a/b)^2} \right]$, $E = 4b^3 \pi \frac{(a/b)^2}{(1+(a/b)^2)}$. Уравнение, описывающее плоские колебания полости в форме эллипса, будет иметь вид:

$$\ddot{\phi} + \frac{4}{\alpha \pi^{0.5} \sqrt{Re}} \frac{a/b}{1 + (a/b)^2} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{\phi} d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \frac{16}{3\alpha} \pi^2 \sin \phi = 0, \text{ где}$$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{4} \frac{(1 - (a/b)^2)^2}{1 + (a/b)^2}.$$

В работе [46] было исследовано свободное движение твердого тела с полостью, полностью заполненной сильно вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки. В результате были получены следующие уравнения описывающие такое движение:

$$\begin{aligned} \Theta_x \dot{\omega}_x + (\Theta_z - \Theta_y) \omega_y \omega_z &= \\ &= \frac{\rho P}{\nu \Theta_x \Theta_y \Theta_z} \omega_x (\Theta_z (\Theta_x - \Theta_z) (\Theta_x + \Theta_z - \Theta_y) \omega_z^2 + \Theta_y (\Theta_x - \Theta_y) (\Theta_x + \Theta_y - \Theta_z) \omega_y^2), \\ \Theta_y \dot{\omega}_y + (\Theta_x - \Theta_z) \omega_z \omega_x &= \\ &= \frac{\rho P}{\nu \Theta_x \Theta_y \Theta_z} \omega_y (\Theta_x (\Theta_y - \Theta_x) (\Theta_y + \Theta_x - \Theta_z) \omega_x^2 + \Theta_z (\Theta_y - \Theta_z) (\Theta_y + \Theta_z - \Theta_x) \omega_z^2), \\ \Theta_z \dot{\omega}_z + (\Theta_y - \Theta_x) \omega_x \omega_y &= \\ &= \frac{\rho P}{\nu \Theta_x \Theta_y \Theta_z} \omega_z (\Theta_y (\Theta_z - \Theta_y) (\Theta_z + \Theta_y - \Theta_x) \omega_y^2 + \Theta_x (\Theta_z - \Theta_x) (\Theta_z + \Theta_x - \Theta_y) \omega_x^2). \end{aligned}$$

Для случая куба имеем главные моменты инерции: $\Theta_x = \Theta_y = \frac{11}{12}$, $\Theta_z = \frac{1}{6}$; и $P \approx 0.00156$.

Таким образом, имеем следующую систему уравнений, записанную уже в безразмерном виде:

$$\dot{\omega}_x - \frac{9}{11}\omega_y\omega_z = 0.000253Re_\Omega\omega_x\omega_z^2,$$

$$\dot{\omega}_y + \frac{9}{11}\omega_x\omega_z = 0.000253Re_\Omega\omega_y\omega_z^2,$$

$$\dot{\omega}_z = -0.00766Re_\Omega\omega_z(\omega_x^2 + \omega_y^2).$$

Параметры расчета

Для решения системы уравнений Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности использовался метод контрольного объема применительно к модифицированному алгоритму SIMPLER на структурированной криволинейной сетке [114-116]. Для задачи о колебании квадратной полости число контрольных объемов (КО), на которые разбивалась расчетная область, изменялось от 50×50 до 200×200 в зависимости от значения параметра Re_Ω . Для задачи о колебании полости в форме эллипса расчетная область разбивалась на число КО, изменяющееся от 50×100 до 150×300 . Для трехмерной задачи использовалась равномерная расчетная сетка с числом КО $50 \times 50 \times 50$. Шаг по времени удовлетворял критерию Куранта, как для двухмерной, так и для трехмерной задачи.

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений плоских колебаний, уравнений Эйлера и Пуассона использовался BDF метод (Backward Differentiation Formula) второго порядка точности [117].

Для задачи о плоских колебаниях маятника с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, расчеты проводились для значения параметра Re_Ω , изменяющегося в диапазоне $5 \leq Re_\Omega \leq 5700$, и начального отклонения $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$. В случае, когда полость имеет форму эллипса имеем еще один параметр: отношение малой полуоси к большой, значение которого изменялось в пределах: $0.25 \leq \frac{a}{b} \leq 1$.

В задаче о движении тела с жидкостью в полости вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести: $Re_\Omega = 100$, $\gamma_{x_0} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \gamma_{y_0} = 0, \gamma_{z_0} =$

$-\sqrt{\frac{1}{3}}$. Также задавалась начальная угловая скорость относительно гироскопической оси, изменяющаяся в диапазоне: $0 \leq \omega_{z_0} \leq 200$.

Достоверность полученных результатов подтверждается сеточной сходимостью, проверкой выполнения аналитических интегралов и сравнением численного решения с асимптотическим решением, полученным Ф.Л. Черноусько.

2.5. Прямолинейные колебания тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью

Рассмотрим движение системы, представляющей собой тело массы M с полостью прямоугольной формы размером $L \times H$, частично заполненной вязкой несжимаемой жидкостью массы m с глубиной h (рис. 2.3), пружину с коэффициентом жесткости K под действием которой происходят прямолинейные колебания тела и сопротивление, которое действует на тело с коэффициентом трения C [118].

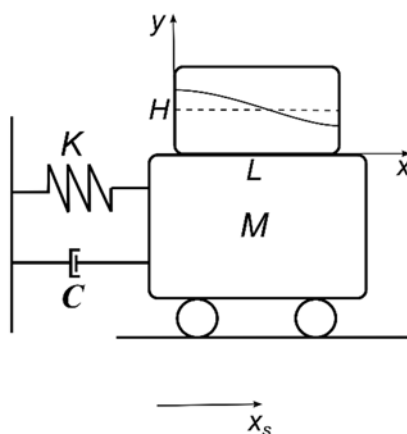


Рис. 2.3. Схема конструкции

Такие колебания описываются следующим уравнением:

$$(M + m)\ddot{x}_s + 2C\dot{x}_s + Kx_s = F_{ex} + F_{slosh}, \quad (2.51)$$

здесь F_{ex} – внешняя сила, действующая на тело, F_{slosh} – сила, с которой жидкость действует на тело:

$$F_{slosh} = -\frac{d}{dt} \int_0^L \int_0^{\zeta(x)} \rho u dy dx,$$

$y = \zeta(x)$ – уравнение свободной поверхности.

Для того чтобы вычислить F_{slosh} необходимо найти поле проекции вектора скорости жидкости на подвижную ось x , которое удовлетворяет системе уравнений Навье-Стокса, записанной в неинерциальной системе отсчета:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u - \ddot{x}_s, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v - g. \quad (2.53)$$

Для замыкания системы к этим уравнениям необходимо добавить уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.54)$$

начальные условия:

$$x_s|_{t=0} = x_0, \dot{x}_s|_{t=0} = 0, u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0,$$

граничные условия:

$$\text{при } y = 0: u = v = 0,$$

$$\text{при } x = 0, L: u = 0, \frac{dv}{dx} = 0.$$

На свободной поверхности $y = \zeta(x, t)$ справедливы кинематические и динамические граничные условия:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v - u \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\begin{cases} \mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = 0, \\ \mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} = 0. \end{cases}$$

Приведем систему (2.51)-(2.54) к безразмерному виду, используя следующие формулы обезразмеривания:

$$\tau = t \sqrt{\frac{g}{L}}, U = u \sqrt{\frac{1}{gL}}, V = v \sqrt{\frac{1}{gL}}, P = \frac{p - p_{atm}}{\rho g}, X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, X_s = \frac{x_s}{\alpha}, \quad (2.55)$$

$$\ddot{X}_s + 2\delta_s \omega_0 \dot{X}_s + \omega_0^2 X_s = F_{ex} - \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{1}{\varepsilon \tilde{h}} \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \int_0^{\zeta(X)} U dY dX, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re_g} \Delta U - \varepsilon \ddot{X}_s, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re_g} \Delta V - 1. \quad (2.59)$$

С начальными и граничными условиями:

$$X_s|_{\tau=0} = X_0, \dot{X}_s|_{\tau=0} = 0, U|_{\tau=0} = V|_{\tau=0} = 0,$$

при $Y = 0$: $U = V = 0$,

при $X = 0, 1$: $U = 0, \frac{dV}{dX} = 0$,

при $Y = \zeta(X, \tau)$: $\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = V - U \frac{\partial \zeta}{\partial X}, \begin{cases} \mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \\ \mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$

Здесь безразмерные параметры имеют вид:

$$Re_g = \frac{\sqrt{gL}L}{\nu}, \omega_0 = \sqrt{\frac{KL}{(M+m)g}}, \delta_s = \frac{c}{\sqrt{(m+M)K}}, \tilde{h} = \frac{h}{L}, \mu = \frac{m}{M}, \varepsilon = \frac{\alpha}{L}.$$

Рассматриваются случаи свободных колебаний тела при заданном начальном отклонении x_0 и случаи вынужденных колебаний при заданной внешней силе $F_{ex} = F \sin(\omega t)$.

Свободные колебания тела.

В этом случае за параметр α выбираем x_0 , тогда $X_0 = 1, F_{ex} = 0$.

В проведенных расчетах безразмерные параметры были выбраны равными: $Re_g = 3 \cdot 10^6, \delta_s = 0.01, \tilde{h} = 0.5, \mu = 0.01$. Помимо данных

параметров введем еще отношение собственных частот колебания тела и колебания жидкости в сосуде $\Omega = \frac{\omega_0}{\omega_f}$, которое задавалось равным: $\Omega = 1$.

Параметр ε , отвечающий за величину начального отклонения, варьировался в пределах: $0.001 \leq \varepsilon \leq 0.01$.

Вынужденные колебания тела.

В этом случае за параметр α выбираем величину $\frac{LF}{mg}$, тогда $X_0 = 0, F_{ex} = \sin(\omega\tau)$.

Значения $Re_g, \delta_s, \tilde{h}, \mu$ и Ω остаются без изменения.

Параметр ε , отвечающий за величину внешнего воздействия: $\varepsilon = 0.00075$. Данное значение ε соответствует случаю, когда колебания конструкции происходят вследствие действия ветровой нагрузки [119].

Введем еще параметр $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$ – отношение частоты внешнего воздействия к собственной частоте колебания тела. Данный параметр изменялся в диапазоне: $0.9 \leq \beta \leq 1.1$ с шагом: $\Delta\beta = 0.1$.

Таким образом, система содержит 7 безразмерных параметров: $Re_g, \delta_s, \tilde{h}, \mu, \Omega, \varepsilon, \beta$, пять из которых были заданы постоянными, а два варьировались. Диапазон изменения параметров задачи соответствует случаю волнового движения жидкости без обрушения волн.

Помимо вариации данных параметров полость содержала различные конфигурации перегородок и решеток. Рассматривались три различные конфигурации вставок: вертикальные перегородки (рис. 2.4а), горизонтальные перегородки (рис. 2.4б) и вертикальные решетки (рис. 2.4в). Высота вертикальных перегородок варьировалась: $0.3 \leq d \leq 0.9$, где d – высота по отношению к глубине заполнения жидкости h . Помимо одной перегородки были рассмотрены две, три и четыре перегородки, расстояние между которыми $0.2L$. Симметрично расположенные горизонтальные перегородки имели длину: $l = 0.25L$, а высота расположения изменялась: $0.3 \leq d \leq 0.9$. Помимо одной решетки, расположенной в центре, рассматривались две, три и

четыре решетки, расстояние между которыми равно $0.2L$. Высота решеток варьировалась: $0.3 \leq d \leq 0.9$, что соответствует случаям полного погружения решеток в жидкость [104]. Геометрические характеристики решеток также варьировались: $0.4 \leq S_n \leq 0.7$, где $S_n = \frac{d_s}{d_l + d_s}$.

Численное решение уравнений гидродинамики (2.57)-(2.59) было найдено, используя методику, описанную в главе 3. Для нахождения численного решения уравнения (2.56) использовался BDF-метод второго порядка точности [117].

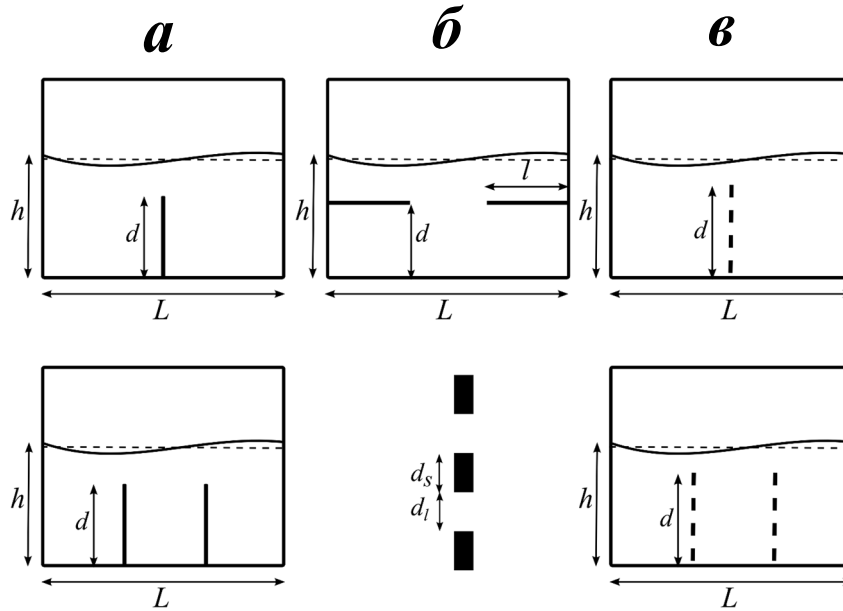


Рис. 2.4. Структура перегородок

ГЛАВА 3. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКИ

3.1. Дискретный аналог обобщенного уравнения переноса в криволинейной системе координат

Численное моделирование задачи о прямолинейном колебании тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью, проводилось методом контрольного объема с использованием Эйлера-Лагранжева (ALE) подхода и алгоритма SIMPLER.

Использование ALE подхода для моделирования движения жидкости со свободной поверхностью подразумевает запись дискретного аналога искомой системы уравнений в подвижной криволинейной расчетной сетке. Для этого введем в области занятой течением криволинейную систему координат $x_i = x_i(x, y, z, t)$.

Рассмотрим фиксированный момент времени t_0 и разобьем расчетную область на непересекающиеся контрольные объемы (КО) структурированной сеткой, таким образом, чтобы расчетные точки находились в центре КО.

Теперь, следуя [116], рассмотрим обобщенное уравнение переноса, записанное в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \Phi dW + \oiint [(\vec{u} - \vec{v})\vec{n}(\rho\Phi) - \Gamma\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)] d\sigma = \iiint S dW. \quad (3.1)$$

В данном уравнении учтено, что КО могут изменяться с течением времени, и конвективный поток через грань КО записан с учетом движения грани ($\vec{v}$ – скорость грани КО).

При $\Phi = 1, S = 0$ – получим уравнение неразрывности (2.10).

При $\Phi = \vec{u}, \vec{S} = -\nabla p + \vec{f} - 2\vec{\omega} \times \vec{u} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \frac{d\vec{v}_0}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ – векторное уравнение Навье-Стокса (2.9).

Введем локальную нумерацию узлов, как показано на рисунке (3.1) [116], при этом грань, лежащая между нулевой и k -й точкой имеет номер k .

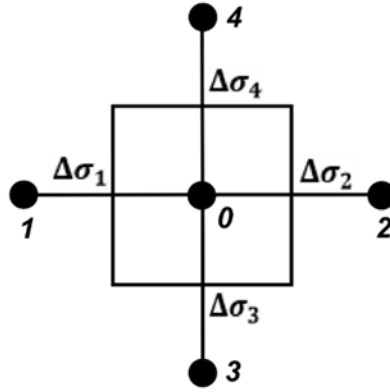


Рис. 3.1. Нумерация узлов

Тогда аппроксимация конвективного и диффузионного слагаемых запишется в виде [116]:

$$\oint (\vec{u} - \vec{v}) \vec{n}(\rho\Phi) d\sigma \approx \frac{\sum_k [(-1)^k (u^i - v^i) \rho(\Phi)_k] \Delta\sigma_k}{|\vec{e}^i|}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \oint \Gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\sigma \approx & \frac{\sum_k \left[\frac{\Gamma(-1)^k g^{ii} (\Phi_k - \Phi_0)}{\Delta x_k} \right] \Delta\sigma_k}{|\vec{e}^i|} + \\ & + \frac{\sum_k [\Gamma(-1)^k g^{ij} \Delta_j \Phi] \Delta\sigma_k}{|\vec{e}^i|}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь i, j изменяются в пределах от 1 до n , где n – размерность задачи. Суммирование ведется по j и по k , при этом k изменяется в пределах от $2i - 1$ до $2i$, в последнем слагаемом (3.3) при суммировании по j : $j \neq i$, u^i – контравариантные компоненты вектора скорости, $\vec{e}^i$ – векторы дуального базиса, $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$ – контравариантные компоненты метрического тензора, $(\Delta_j \Phi)_k$ – конечно-разностная аппроксимация производных вдоль k -й грани, $(\Phi)_k$ – значение зависимой переменной на k -й грани.

Как видно из (3.2) аппроксимация конвективного потока содержит неизвестную зависимую переменную на грани КО. Выбор способа интерполяции зависимой переменной на грань КО во многом определяет

сходимость и устойчивость численного метода. Воспользуемся хорошо зарекомендовавшим себя способом, представленном в книге С. Патанкара [114]. Для этого запишем общую формулировку дискретного аналога [114]:

$$a_0 \Phi_0 = \sum_k a_k \Phi_k + b_0, \quad (3.4)$$

где коэффициенты:

$$a_k = D_k A(|P_k|) + \max[(-1)^{k+1} F_k, 0], \quad (3.5)$$

$$a_0 = \sum_k a_k + \frac{\rho_0^{old} \Delta W^{old}}{\Delta t} - S_p \Delta W, \quad (3.6)$$

$$b_0 = S_c \Delta W + \frac{\rho_0^{old} \Delta W^{old}}{\Delta t} \Phi_0^{old} + S_\Phi, \quad (3.7)$$

$$D_k = \frac{\left[\frac{\Gamma(-1)^k g^{ii}}{\Delta x_k} \right]_k \Delta \sigma_k}{|\vec{e}^i|}, F_k = \frac{[(-1)^k u^i \rho(\Phi)_k]_k \Delta \sigma_k}{|\vec{e}^i|}, P_k = \frac{F_k}{D_k}, \quad (3.8)$$

$$S_\Phi = \frac{\sum_k [\Gamma(-1)^k g^{ij} \Delta_j \Phi]_k \Delta \sigma_k}{|\vec{e}^i|}, \text{ при суммировании по } j: i \neq j. \quad (3.9)$$

Суммирования по i нет, при суммировании по $k: k = 2i - 1 \dots 2i$.

В данном дискретном аналоге применили неявную схему при аппроксимации производной по времени, при этом величины с предыдущего шага обозначили индексом *old*. Выбирая теперь различные выражения для функции $A(|P|)$, получаем различные численные схемы. Для расчетов, представленных в данной работе, была выбрана схема со степенным законом [114]: $A(|P|) = \max[0, (1 - 0,1|P|)^5]$.

Рассмотрим случай $\vec{\Phi} = \vec{u}$, тогда в источниковый член входит выражение с градиентом давления: $\iiint \nabla p dW$, дискретный аналог которого обозначим $\vec{b}_p$.

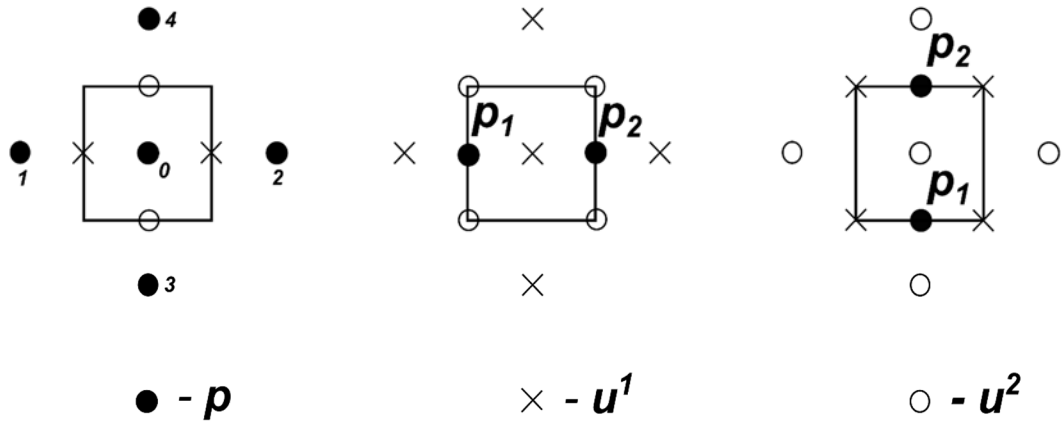


Рис. 3.2. Нумерация и положение узлов для различных зависимых переменных

Для записи дискретного аналога интегрального уравнения (3.1) при $\Phi = \vec{u}$ разобьем область на КО сеткой с шахматным расположением узлов (рис. 3.2) [114,116]. Дискретный аналог будет иметь вид:

$$a_0 \vec{u}_0 = \sum a_k \vec{u}_k + \vec{b}_0 - \vec{b}_p. \quad (3.10)$$

Рассмотрим отдельно член $\vec{b}_p$ [116]:

Спроектируем его на $\vec{e}_i$ – локальный базис криволинейной системы координат:

$$\begin{aligned}
 (\vec{b}_p \cdot \vec{e}_i)_0 &\approx (\vec{e}_i)_0 \iiint \nabla p dW \approx \left(\vec{e}_i \vec{e}^j \frac{\partial p}{\partial x^j} \right)_0 \Delta W = \left(\frac{\partial p}{\partial x^i} \right)_0 \Delta W \\
 &\approx \frac{\Delta W}{\Delta x_i} (p_2 - p_1).
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь p_1, p_2 – значение давления на границах КО (рис. 3.2): при $i = 1$ p_1, p_2 рассчитываются на левой и правой границах, при $i = 2$ p_1, p_2 рассчитываются на нижней и верхней границах.

Таким образом, при использовании смещенной шахматной сетки и проекции уравнения импульса на векторы локального базиса криволинейной

системы координат, градиент давления определяется по значениям на границе КО.

Проектируя дискретный аналог (3.10) на векторы $\vec{e}_i$ с учетом (3.11), получим:

$$a_0(\vec{u} \cdot \vec{e}_i)_0 = \sum a_k(\vec{u}_k \cdot \vec{e}_{i_0}) + (\vec{b} \cdot \vec{e}_i)_0 - (\vec{b}_p \cdot \vec{e}_i)_0,$$

$$a_0 u_0^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)_0 = \sum a_k u_k^j (\vec{e}_{j_k} \cdot \vec{e}_{i_0}) + b_0^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)_0 - \frac{\Delta W}{\Delta x_i} (p_2 - p_1).$$

Перенесем члены, содержащие $(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)$ при $i \neq j$, в источниковый член и сделаем переобозначение:

$$a_0 = a_0(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i)_0,$$

$$a_k = a_k(\vec{e}_{i_k} \cdot \vec{e}_{i_0}),$$

$$b_{i_0} = b_0^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i)_0 - a_0 u_0^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)_0 - \sum a_k u_k^j (\vec{e}_{j_k} \cdot \vec{e}_{i_0}), i \neq j. \quad (3.12)$$

Тогда дискретный аналог векторного уравнения (3.1) при $\vec{\Phi} = \vec{u}$ будет иметь вид:

$$a_0 u_0^i = \sum a_k u_k^i + b_{i_0} - \frac{\Delta W}{\Delta x_i} (p_2 - p_1). \quad (3.13)$$

Данный дискретный аналог по форме совпадает с дискретным аналогом в [114] для случая декартовой системы координат. Этот факт позволяет перенести без изменения хорошо зарекомендовавшие себя SIMPLE–подобные алгоритмы, разработанные для случая декартовой системы координат, на случай криволинейных неортогональных систем координат.

В данной работе применяется модифицированный алгоритм SIMPLER [115], особенностью которого является отказ от использования поправок для скорости и давления.

Не проводя подробных выкладок и вводя обозначение:

$$\hat{u}_0^i = \frac{\sum a_k u_k^i + b_{i_0}}{a_0}, \quad (3.14)$$

где коэффициенты взяты из (3.11), запишем дискретный аналог уравнения для давления [116]:

$$a_0 p_0 = \sum a_k p_k - \sum (\hat{u}^i n_i \rho)_k \Delta \sigma_k, \quad (3.15)$$

где:

$$a_k = \frac{\Delta W}{\Delta x_i} \frac{\Delta \sigma_k}{a_{0k}}, \quad (3.16)$$

$$a_0 = \sum a_k.$$

Здесь a_{0k} – коэффициент a_0 в (3.11), определенный на k –й грани КО для давления.

3.2. Аппроксимация граничных условий

Для использования ALE подхода запишем граничные условия в криволинейной системе координат. Для простоты рассмотрим случай двух измерений: $\begin{cases} \xi = \xi(x, y, t), \\ \eta = \eta(x, y, t). \end{cases}$

На твердой поверхности задаются два типа граничных условий:

- 1) условия прилипания, которые гласят, что на неподвижной твердой поверхности вектор скорости $\vec{u}$ и, следовательно, все компоненты этого вектора равны нулю;
- 2) условия непротекания и идеального скольжения, согласно которым на неподвижной твердой поверхности обращается в нуль нормальная компонента вектора скорости: $u_n = 0$ и касательная компонента тензора напряжений: $\mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$.

На свободной поверхности задаются динамические условия: нормальная компонента тензора напряжений $\mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = p_0$ и касательная составляющая тензора напряжений $\mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} = 0$ и кинематическое условие: $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v - u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

Запись граничных условий в криволинейной системе координат

Рассмотрим поверхность $y = \zeta(x, t)$. Это может быть, как твердая поверхность, так и свободная. Введем криволинейную систему координат ξ, η и пусть $\vec{n}, \vec{s}$ – вектора нормали и касательной к поверхности $y = \zeta(x, t)$ соответственно (рис. 3.3): $\vec{n} = \frac{\vec{e}^2}{|\vec{e}^2|}, \vec{s} = \frac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}$,

здесь $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – локальный базис криволинейной системы координат ξ, η :

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{e}_y, \vec{e}_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{e}_y,$$

$(\vec{e}^1, \vec{e}^2)$ – дуальный базис: $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i$.

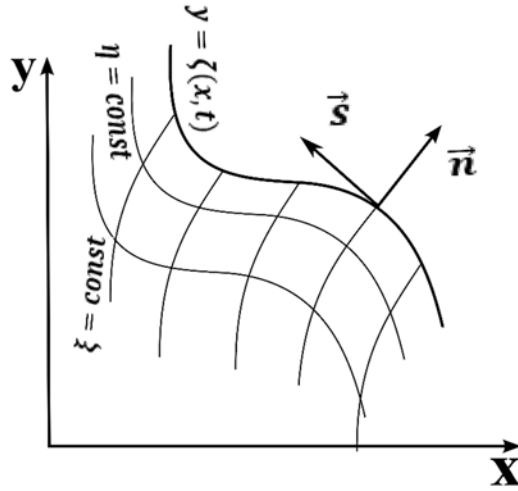


Рис. 3.3. Криволинейная граница

Запишем нормальную компоненту вектора скорости в системе координат ξ, η :

$$u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} = (u^1 \vec{e}_1 + u^2 \vec{e}_2) \cdot \frac{\vec{e}^2}{|\vec{e}^2|} = \frac{u^1}{|\vec{e}^2|} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}^2 + \frac{u^2}{|\vec{e}^2|} \vec{e}_2 \cdot \vec{e}^2 = \frac{u^2}{|\vec{e}^2|}.$$

Запишем касательную компоненту тензора напряжений в криволинейной системе координат:

$$\mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{s} = [-p \delta_i^j + \mu (\nabla_i u^j + \nabla^j u_i)] \frac{e_i^2}{|\vec{e}^2|} \frac{e_1^j}{|\vec{e}_1|} = \frac{\mu}{|\vec{e}^2| |\vec{e}_1|} (\nabla_2 u^1 + \nabla^1 u_2).$$

Так как вектор $\vec{e}^2$ имеет ковариантные компоненты (0,1), а вектор $\vec{e}_1$ имеет контравариантные компоненты (1,0). Далее используем определение ковариантной производной контравариантного вектора:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha u^\beta &= \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + u^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\beta - \text{символы Кристоффеля,} \\ \frac{\mu}{|\vec{e}^2||\vec{e}_1|} (\nabla_2 u^1 + \nabla^1 u_2) &= \frac{\mu}{|\vec{e}^2||\vec{e}_1|} (\nabla_2 u^1 + g^{11} g_{22} \nabla_1 u^2) = \\ &= \frac{\mu}{|\vec{e}^2||\vec{e}_1|} \left[\frac{\partial u^2}{\partial \xi} + u^1 \Gamma_{11}^2 + u^2 \Gamma_{21}^2 + g^{11} g_{22} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \eta} + u^1 \Gamma_{12}^1 + u^2 \Gamma_{22}^1 \right) \right] = \\ &= \frac{\mu}{|\vec{e}^2||\vec{e}_1|} \left[\frac{\partial u^2}{\partial \xi} + g^{11} g_{22} \frac{\partial u^1}{\partial \eta} + u^1 (\Gamma_{11}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{12}^1) + u^2 (\Gamma_{21}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{22}^1) \right].\end{aligned}$$

Аналогично запишем нормальную компоненту тензора напряжений:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} &= [-p \delta^{ij} + \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i)] \frac{e_i^2}{|\vec{e}^2|} \frac{e_j^2}{|\vec{e}^2|} = -p + \frac{2\mu}{|\vec{e}^2|^2} \nabla^2 u^2 = \\ &= -p + \frac{2\mu}{|\vec{e}^2|^2} g^{22} \nabla_2 u^2 = -p + \frac{2\mu}{|\vec{e}^2|^2} g^{22} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \eta} + u^1 \Gamma_{12}^2 + u^2 \Gamma_{22}^2 \right).\end{aligned}$$

По определению $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$, следовательно $g^{22} = |\vec{e}^2|^2$, тогда:

$$\mathbf{P} \cdot \vec{n} \cdot \vec{n} = -p + 2\mu \left(\frac{\partial u^2}{\partial \eta} + u^1 \Gamma_{12}^2 + u^2 \Gamma_{22}^2 \right).$$

Таким образом, на твердой неподвижной поверхности $y = \zeta(x, t)$ задается одно из следующих граничных условий:

условие прилипания:

$$u^1 = u^2 = 0; \quad (3.17)$$

условия непротекания и идеального скольжения:

$$\frac{u^2}{|\vec{e}^2|} = 0 \text{ или } u^2 = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\mu}{|\vec{e}^2||\vec{e}_1|} \left[\frac{\partial u^2}{\partial \xi} + g^{11} g_{22} \frac{\partial u^1}{\partial \eta} + u^1 (\Gamma_{11}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{12}^1) + u^2 (\Gamma_{21}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{22}^1) \right] = 0,$$

или:

$$\frac{\partial u^2}{\partial \xi} + g^{11} g_{22} \frac{\partial u^1}{\partial \eta} + u^1 (\Gamma_{11}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{12}^1) + u^2 (\Gamma_{21}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{22}^1) = 0. \quad (3.19)$$

В случае, когда поверхность $y = \zeta(x, t)$ является свободной, задаются следующие граничные условия:

динамические граничные условия:

$$-p + 2\mu \left(\frac{\partial u^2}{\partial \eta} + u^1 \Gamma_{12}^2 + u^2 \Gamma_{22}^2 \right) = p_0, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial \xi} + g^{11} g_{22} \frac{\partial u^1}{\partial \eta} + u^1 (\Gamma_{11}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{12}^1) + u^2 (\Gamma_{21}^2 + g^{11} g_{22} \Gamma_{22}^1) = 0; \quad (3.21)$$

кинематическое граничное условие:

Следуя [120], запишем кинематическое граничное условие в криволинейной системе координат ξ, η :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u^2 - u^1 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}. \quad (3.22)$$

Для аппроксимации граничных условий на твердой поверхности и динамического условия на свободной поверхности используем квадратичный профиль зависимой переменной между расчетными точками, что дает второй порядок аппроксимации граничных условий [116].

Для определения формы свободной поверхности на новом временном слое используем кинематическое граничное условие. Следуя [120], производную по времени аппроксимируем методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности, применяя то, что на предыдущем шаге по времени:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^{old} = 0.$$

Частные производные по ξ аппроксимируем разностями вверх по потоку 5-го порядка точности. После определения формы свободной поверхности в криволинейных координатах, находим изменение формы свободной поверхности в декартовых координатах:

$$y_i = y_i^{old} + (\zeta - \zeta^{old}) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right)^{old}. \quad (3.23)$$

3.3. Построение расчетной сетки

При использовании ALE подхода необходимо на каждом шаге по времени в соответствии с новой границей расчетной области обновлять расчетную сетку. Есть множество методов построения сетки по заданным границам. В работе используется метод эллиптических уравнений, который заключается в решении уравнений Пуассона, удовлетворяющих заданным условиям, которые есть ни что иное, как координаты границ расчетной области [82]:

$$g_{22}(\vec{x}_{\xi\xi} + P\vec{x}_{\xi}) - 2g_{12}\vec{x}_{\xi\eta} + g_{11}(\vec{x}_{\eta\eta} + Q\vec{x}_{\eta}) = 0. \quad (3.24)$$

Здесь $\vec{x} = (x, y)$, P, Q – функции управления, g_{ij} – ковариантные компоненты метрического тензора.

Данный метод обладает рядом преимуществ по сравнению с другими: возможность получения гладкого решения, учет всех границ области и гарантия взаимно-однозначности отображения физической и вычислительной областей, однако данные преимущества достигаются повышением затрат ресурсов на построение сетки. Для решения алгебраической системы уравнений, соответствующей уравнению Пуассона (3.24), используем итерационный метод переменных направлений с применением схемы блочной коррекции [121]. В качестве начального приближения берется расчетная сетка с предыдущего шага по времени, экстраполированная на новую область. Для задания начального приближения расчетной сетки на первом шаге по времени используется метод трансфинитной интерполяции [82].

Качество сетки, например, такие параметры как ортогональность и неравномерность ячеек [82], может влиять на точность численного решения уравнений Навье-Стокса, поэтому для повышения точности решения уравнений Навье-Стокса в задачах со свободными границами, а также для упрощения записи граничных условий на свободной поверхности строится расчетная сетка ортогональная к свободным границам. Есть два подхода

построения сетки ортогональной к границе. Подход Неймана, который заключается в перемещении граничных точек вдоль границы так, чтобы одно из семейств координатных линий было перпендикулярно границе. Вторым подходом – это подход Дирихле, в котором при фиксированных граничных точках для обеспечения ортогональности к границе положение изменяют внутренние точки расчетной сетки [82]. Недостатком подхода Неймана является возможность образования сильной неравномерности распределения расчетных точек на границе, что может привести к потере точности вычисления формы свободной поверхности. Недостатком подхода Дирихле является медленная сходимость решения уравнения Пуассона по сравнению с подходом Неймана.

В данном алгоритме для построения расчетной сетки, ортогональной к границе, которая является свободной поверхностью, используется подход Дирихле с равномерным распределением точек на границе.

В численной методике решения уравнений Навье-Стокса, описанной выше, различные зависимые переменные вычисляются на различных расчетных сетках, что делает необходимым расчет нескольких сеток. Так как применение способа, при котором необходимо решать уравнения Пуассона (3.24), для нескольких сеток слишком обременительно, то рассчитывается только одна сетка, а смещенная получается из первоначальной путем интерполяции узлов. Интерполяция узлов проводится при помощи кубических сплайнов, что повышает точность численного решения уравнений Навье-Стокса по сравнению с линейной интерполяцией [120].

Структура алгоритма

Таким образом, алгоритм численного решения уравнений Навье-Стокса состоит из следующих шагов:

- 1) из кинематического граничного условия (3.22) и данных с n -го шага по времени находятся декартовы координаты границы области, занятой течением в момент времени $n + 1$;

- 2) решением уравнений Пуассона (3.24), строится структурированная расчетная сетка;
- 3) рассчитываются геометрические характеристики (ко- и контравариантные компоненты метрического тензора, якобиан, площади ячеек контрольных объемов) и контравариантные компоненты скорости граней КО;
- 4) вычисляются коэффициенты (3.12) и из выражения (3.14) находятся $\hat{u}^i$;
- 5) вычисляются коэффициенты и решается уравнение для давления (3.15);
- 6) при помощи найденного поля давления и граничных условий (3.17) или (3.18), (3.19) решаются уравнения для контравариантных компонент скорости (3.13);
- 7) решаются уравнения для дополнительных зависимых переменных: температура, векторы напряженности электромагнитного поля и т.д.;
- 8) далее пункты 1 – 7 повторяются до остановки счета.

3.4. Тестирование алгоритма

Для проверки работоспособности приведенного выше алгоритма протестируем его на ряде задач, которые имеют аналитическое, известное численное решение или по которым имеются экспериментальные данные:

- 1) затухание гравитационных волн малой амплитуды в прямоугольном сосуде конечной глубины [72];
- 2) резонансные колебания прямоугольной полости, частично заполненной жидкостью [83];
- 3) колебание прямоугольной полости, частично заполненной вязкой жидкостью и имеющей вертикальную перегородку [87];
- 4) колебание прямоугольной полости с жидкостью, в случае, когда в полости расположены две вертикальные решетки [104];

- 5) прямолинейные колебания тела, имеющего прямоугольную полость, частично заполненную жидкостью [110].

Тест 1

Первая тестовая задача представляет собой задачу о затухании гравитационных волн в прямоугольном сосуде конечной глубины. Данная задача имеет аналитическое решение для случая малой амплитуды колебания уровня жидкости. В работе [72] авторы нашли аналитическое решение, применяя преобразование Лапласа.

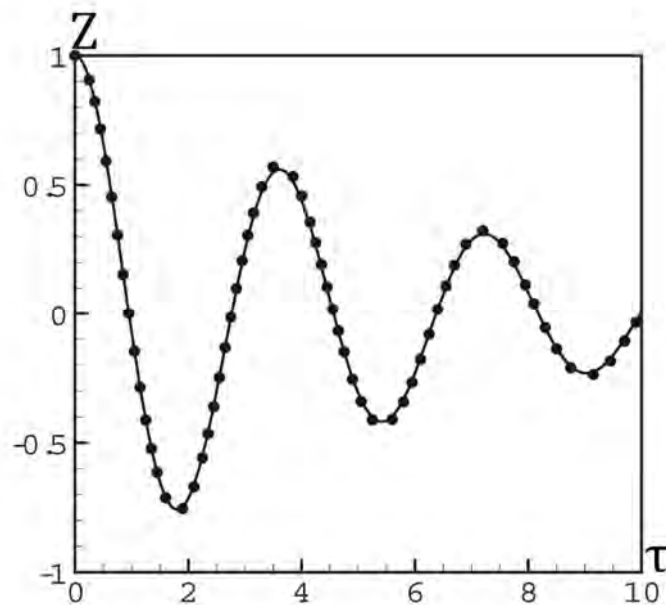


Рис. 3.4. Зависимость величины отклонения высоты свободной поверхности у левой границы полости от времени; линия – аналитическое решение [72], точки – численное решение

Сравнение аналитического решения с численным приведено на рис. 3.4. На данном графике представлена зависимость безразмерного отклонения высоты свободной поверхности от начальной у левой границы полости $Z = \frac{\zeta - 1}{0,01}$ при заданном начальном профиле:

$$\zeta(x) = 1 + 0,01 \cos(2\pi x).$$

В качестве времени выбрано безразмерное время $\tau = t \sqrt{\frac{g}{h}}$, h – глубина жидкости, расчеты проводились на сетке 20×20 при $Re_g = 100$.

Из данного графика видно хорошее согласие численных результатов с аналитическим решением.

Тест 2

Во второй тестовой задаче рассмотрены резонансные колебания прямоугольной полости, частично заполненной жидкостью. Длина полости: $L = 0.8$ м, глубина заполнения: $h = 0.3$ м. На полость действует внешняя сила: $F_{ex} = mAgsin(\omega t)$, где g – ускорение свободного падения, $A = 0.01$ [83]. Частоту ω выбираем равной первой моде колебания жидкости в сосуде. В результате расчетов получено, что $\omega = 0.89$, что хорошо согласуется с результатом, полученным в [83] и с результатом экспериментов. Расчеты проводились на сетке с числом КО: 21×21 .

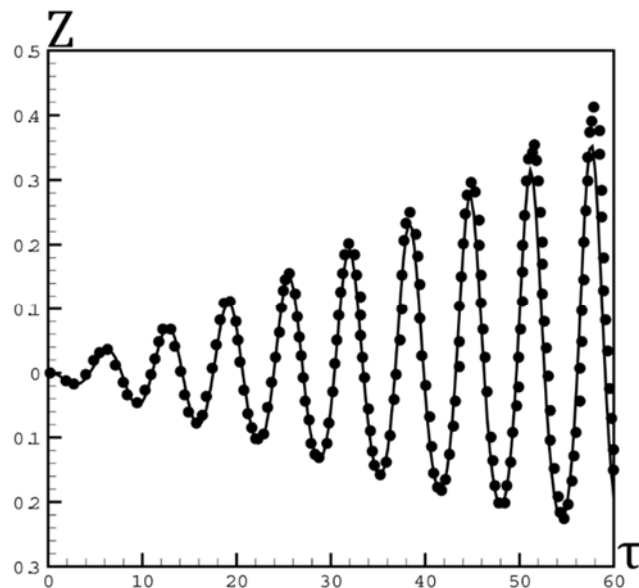


Рис. 3.5. Зависимость относительного отклонения высоты свободной поверхности от времени, точки - экспериментальные данные [83], сплошная линия – численное решение

На рис. 3.5 показан график зависимости относительного отклонения высоты свободной поверхности $Z = \frac{\zeta - h}{h}$ от безразмерного времени $\tau = t \sqrt{\frac{g}{h}}$ у левой границы.

Из данного графика видно хорошее согласие численного результата, полученного описанным выше методом, с результатом, полученным в [83], но амплитуда колебания свободной поверхности меньше амплитуды, полученной в работе [83]. Это может быть связано с низким порядком точности степенной схемы, для улучшения результатов возможно использовать схемы с более высоким порядком аппроксимации конвективных членов.

Тест 3

В третьем тесте, как и в четвертом, проверяется способность метода рассчитывать течения со свободной поверхностью при наличии вставок. Вставки моделируются методом, описанным в [121]. Данный метод заключается в блокировании КО, которые приходятся на вставку. Третий тест представляет собой задачу о колебании жидкости в прямоугольном сосуде, имеющем вертикальную перегородку, при синусоидальном внешнем воздействии: $F_{ex} = mx_0\omega^2\sin(\omega t)$. Перегородка расположена в центре полости и имеет относительную высоту: $0.1 \leq d \leq 0.9$. Длина полости равна: $L = 0.6$ м, глубина заполнения: $h = 0.3$ м, $\frac{x_0}{L} = 0.004$, $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$, где ω_0 основная частота колебания жидкости в прямоугольном сосуде: $\omega_0 = \sqrt{\frac{\pi g}{L} \tanh(\frac{\pi h}{L})}$. При заданных параметрах $\omega_0 = 6.86$ [87].

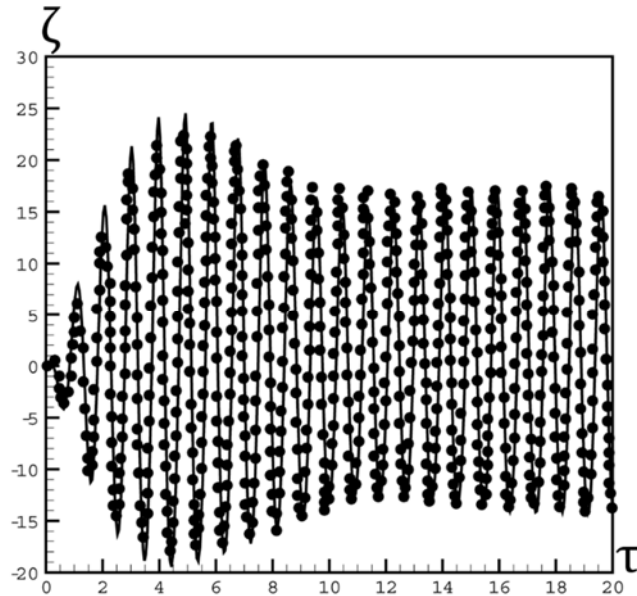


Рис. 3.6. Зависимость отклонения высоты свободной поверхности (мм) в точке $x = 40$ мм от времени при $d = 0.5$, точки – экспериментальные данные [87], сплошная линия – численное решение

На рис. 3.6 изображен график зависимости отклонения высоты свободной поверхности от начального уровня (мм) в точке $x = 40$ мм от времени в сравнении с экспериментальными данными, полученными в [87]. Расчеты проводились на сетке с числом КО: 200×100 .

На рис. 3.7 приведено сравнение численного решения с экспериментальными данными резонансной собственной частоты колебания жидкости в прямоугольном сосуде при различных высотах перегородки.

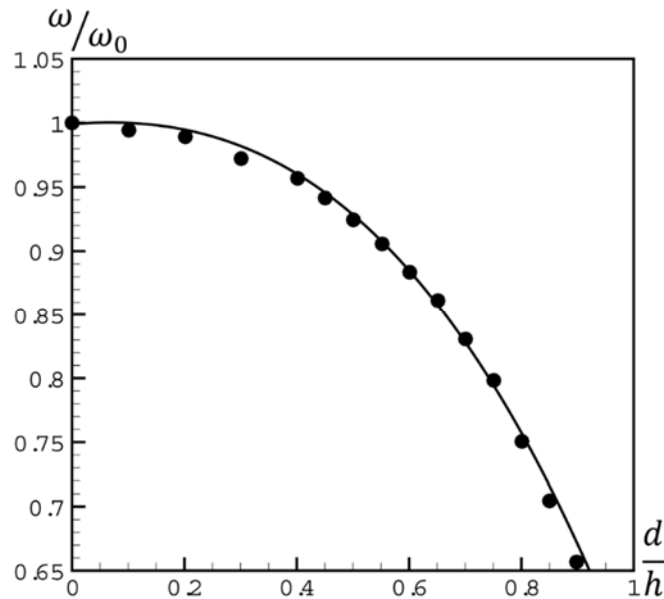


Рис. 3.7. Зависимость резонансной нормированной собственной частоты от относительной высоты перегородки, точки – экспериментальные данные [87], сплошная линия – численное решение

Из данного графика видно хорошее согласие расчета с экспериментальными данными, полученными в работе [87].

Тест 4

В четвертом тесте рассмотрена задача колебания прямоугольного сосуда, частично заполненного жидкостью с двумя вертикальными решетками. Решетки располагались на расстоянии $x = 0.4L$ и $0.6L$. Геометрические параметры полости: $L = 0.966$ м, $h = 0.119$ м, $\frac{x_0}{L} = 0.0078$. Высота пластин 5 мм, расстояние между пластинами 7 мм [104]. Расчеты проводились на сетке с числом КО: 260×119 . На рис. 3.8 представлено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными, представленными в работе [104]. На рис. 3.8 показано относительное отклонение свободной поверхности от начального уровня в точке $x = 0.05L$ в установившемся режиме, при этом отсчет времени производится от момента, когда движение жидкости уже установилось.

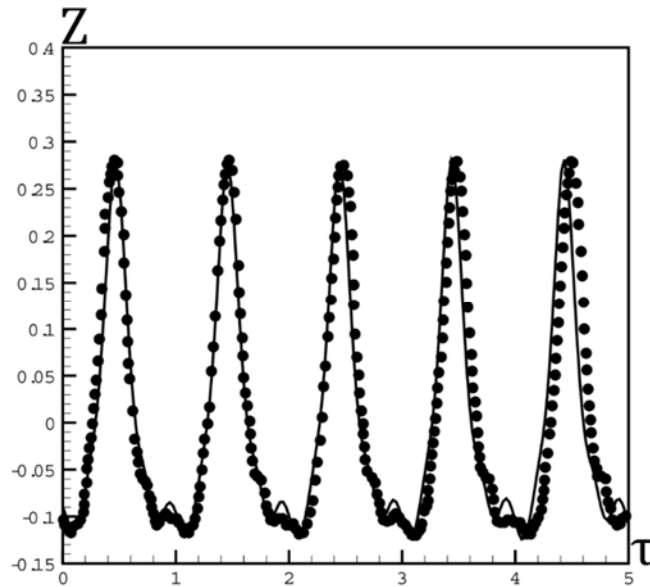


Рис. 3.8. Зависимость относительного отклонения свободной поверхности в точке $x = 0.05L$ от времени, точки – экспериментальные данные [104], сплошная линия – численное решение

Тест 5

Пятый тест направлен на проверку метода моделирования движения тела, имеющего одну степень свободы с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. Движение твердого тела подчиняется уравнению (2.50) с безразмерными параметрами: $M + m = 202$, $2C = 0.63$, $K = 290.96$, $\mu = 0.01$, $F_{ex} = A \cos(\omega t)$ [110]. В качестве характерной длины выбрана глубина заполнения полости h , тогда безразмерные параметры полости: $L = 2$, $\tilde{h} = 1$. На рис. 3.9 показан график зависимости отклонения тела от положения равновесия от времени при $\Omega = 1$, $\beta = 0.97$, $\varepsilon = \frac{A}{\rho g h^2} = 0.102$. На данном графике проиллюстрированы расчеты, представленные в работе [110] и расчеты, полученные при помощи описанной выше методики, которые проводились на сетке с 40×20 КО. Данный график показывает способность алгоритма моделировать движение тела с полостью, частично заполненной жидкостью.

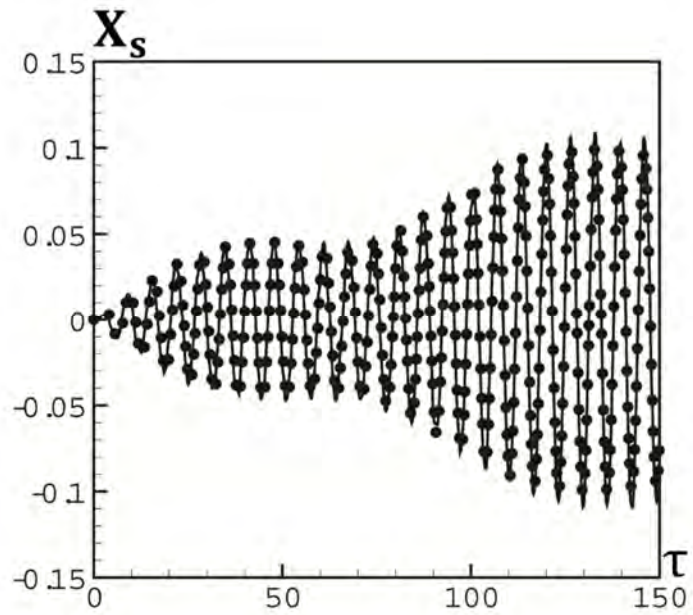


Рис. 3.9. Зависимость положения тела от времени; сплошная линия – результаты расчета, представленные в работе [110], точки – численное решение

ГЛАВА 4. ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ПОЛНОСТЬЮ ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Прежде чем перейти к результатам расчетов необходимо отметить, что выбранные значения шагов по пространству и по времени, приводят к удовлетворительному совпадению численного и асимптотического по параметру Re_Ω решения линейной задачи. Так, на рис. 4.1 показана зависимость угла отклонения маятника от времени при $\varphi_0 = 0.1$ и $Re_\Omega = 1140$ для случаев квадратной формы полости. Из приведенных графиков видно, что численное решение хорошо согласуется с асимптотикой. Однако, при увеличении начального отклонения, например, до $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ такого совпадения не наблюдается, что говорит о проявлении нелинейных эффектов (рис. 4.1).

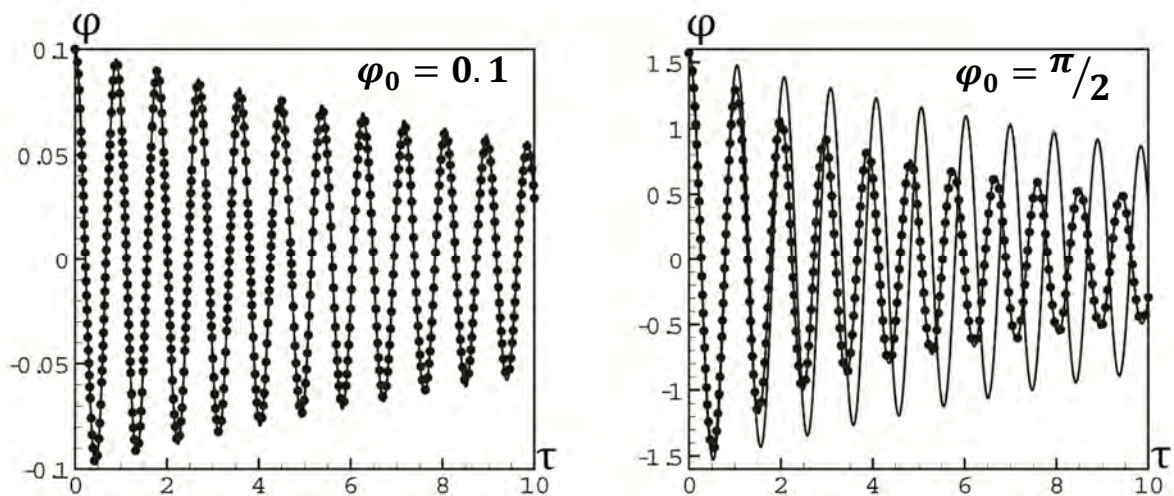


Рис. 4.1. Зависимость угла отклонения от времени. Численное (точки) и асимптотическое (линия) решение при $Re_\Omega = 1140$ и $\varphi_0 = 0.1$ и $\pi/2$

4.1. Случай полости квадратной формы

Вращательное движение замкнутого сосуда приводит к возникновению течения жидкости внутри сосуда. На рис. 4.2 изображены изолинии функции тока в различные моменты времени при $\varphi_0 = 3\pi/4$ и $Re_\Omega = 15$, причем

отрицательное значение функции тока – движение жидкости по часовой стрелке, положительное – против. В начальный момент времени течение жидкости в неинерциальной системе отсчета представляет собой равномерное вращение. По мере движения маятника, жидкость в полости начинает менять свое направление, что сопровождается генерацией в углах полости вихрей, вращающихся в сторону, противоположную вращению центрального вихря. Данные вторичные вихри с течением времени растут, отрываются от стенок и переносят возмущение к центру полости. Спустя некоторое время вторичные вихри сливаются в один, при этом вся жидкость вращается в одну сторону – сторону вращения вторичных вихрей. Далее этот процесс периодически повторяется: смена направления вращения жидкости каждые полпериода сопровождается возникновением вторичных вихревых течений. При увеличении значения параметра Re_{Ω} (рис. 4.3) качественная картина не меняется, но возникающие вторичные вихри в процессе роста постоянно меняют свою форму и, по мере продвижения к центру, не сливаются в один, а продолжают оказывать влияние на течение, взаимодействуя с новыми, возникающими вихрями. Однако, спустя некоторое время колебательный процесс выходит на квазипериодический режим, и вихри образуются по единой вышеописанной схеме, пока движение маятника окончательно не затухнет.

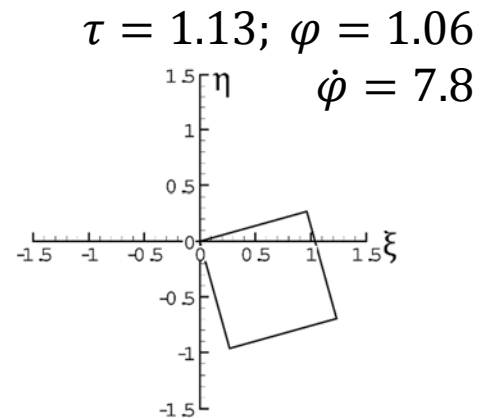
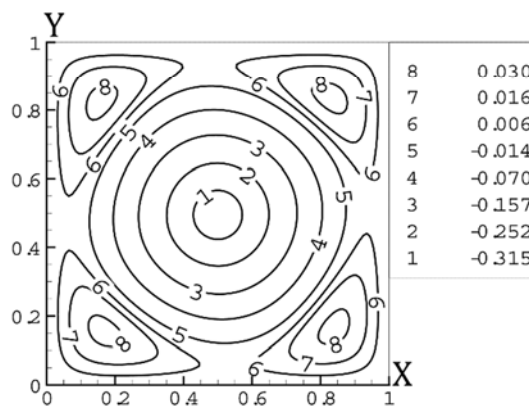
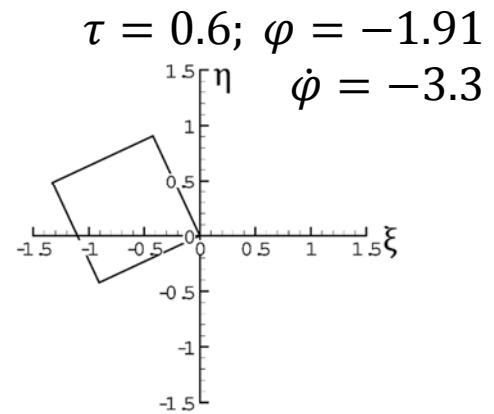
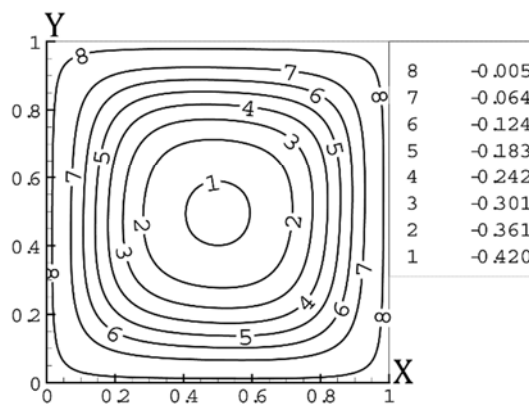
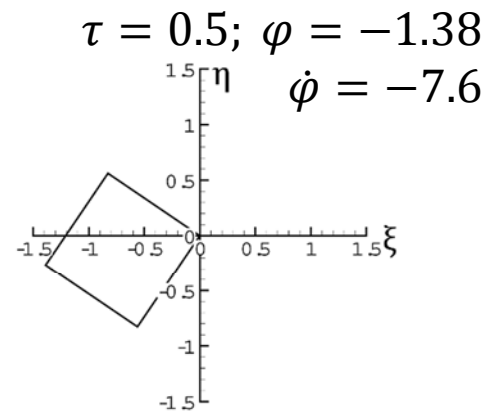
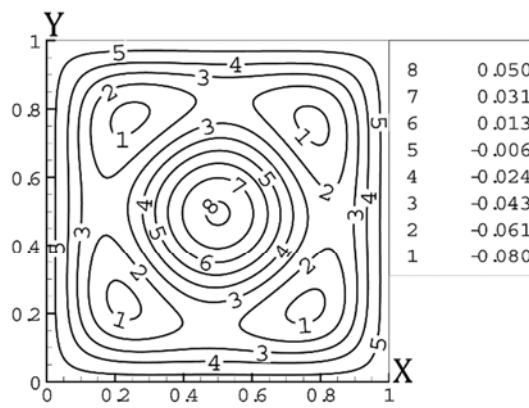
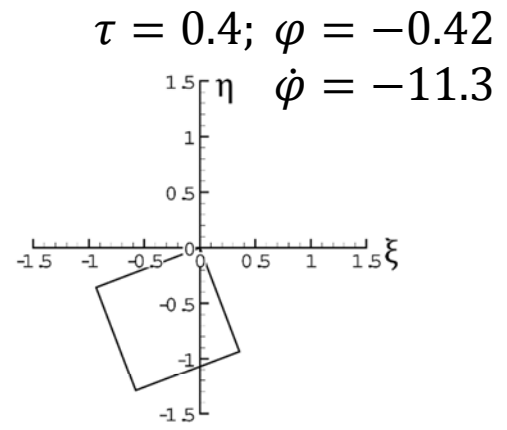
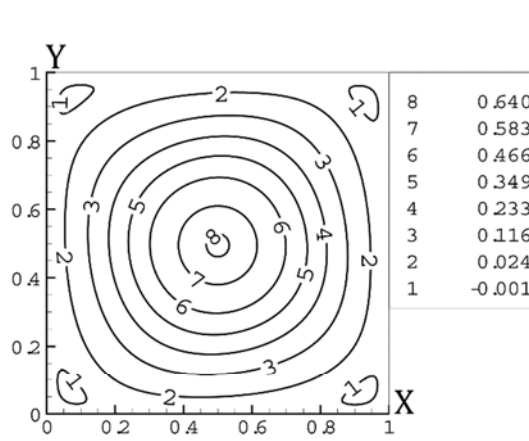


Рис. 4.2. Изолинии функции тока при $\varphi_0 = 3\pi/4$ и $Re_\Omega = 15$

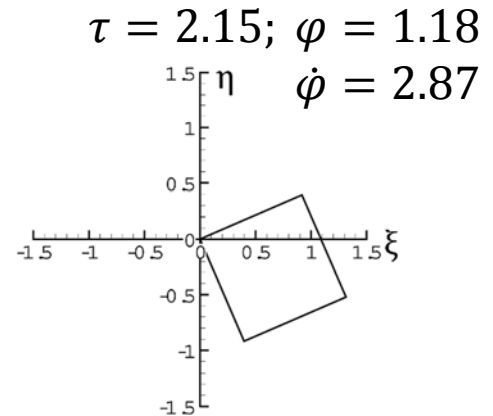
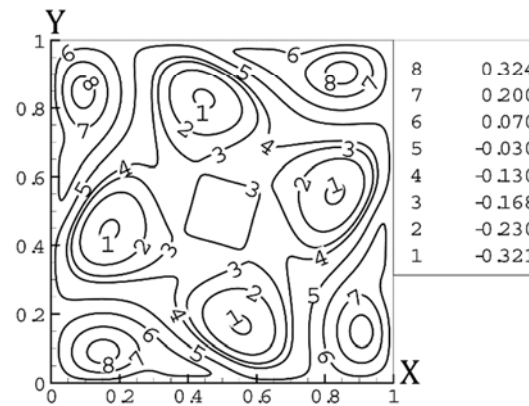
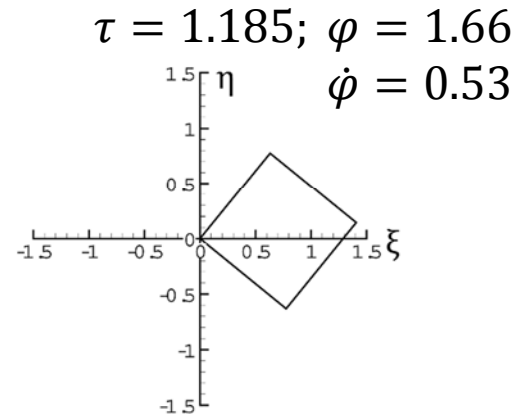
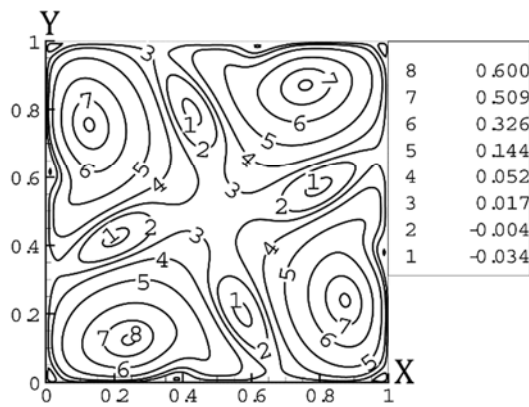
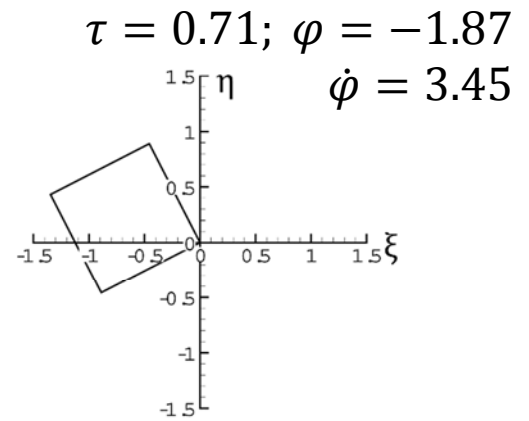
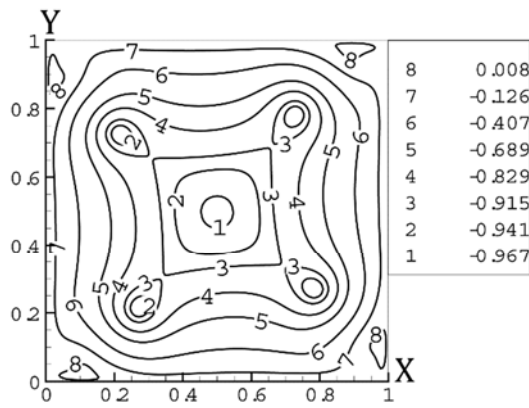
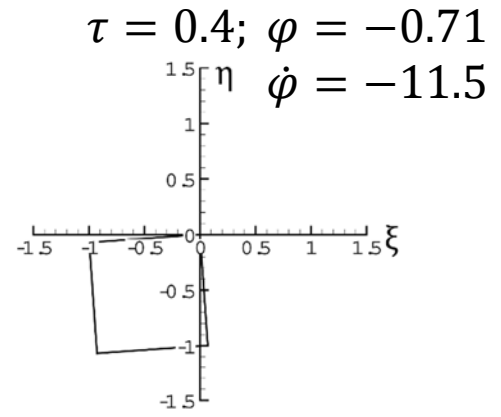
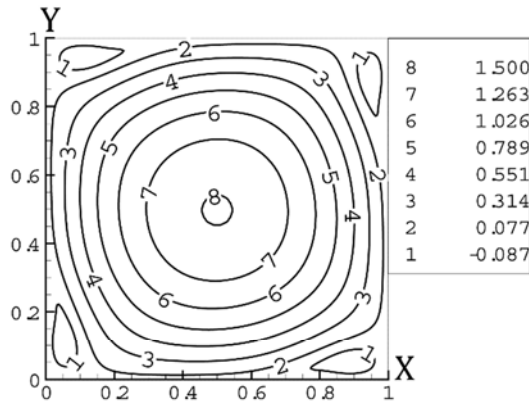


Рис. 4.3. Изолинии функции тока при $\varphi_0 = 3\pi/4$ и $Re_\Omega = 5700$

Наличие подвижной жидкой массы в колеблющемся маятнике приводит к изменению периода и амплитуды колебаний по сравнению с колебанием полностью твердого тела. Изменение периода происходит вследствие того, что жидкая масса приходит во вращение не вся сразу, что приводит к уменьшению кинетической энергии вращательного движения по сравнению с кинетической энергии вращения твердого тела. Поэтому большая по сравнению с твердым телом, часть потенциальной энергии передается поступательному движению маятника, что и приводит к уменьшению периода. Так, при $\varphi_0 = \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ уменьшение периода в ранние моменты времени по сравнению с твердым телом происходит на 10.8%, 13.1% и 20.3% соответственно. Наличие диссипативных сил в жидкости приводит к постепенному затуханию колебаний, что в свою очередь также приводит к постепенному уменьшению периода колебаний. Характерное время затухания, которое определим как уменьшение амплитуды колебаний в 1000 раз по сравнению с начальной, зависит как от значения Re_Ω , так и от величины начального отклонения, причем зависимость времени затухания от Re_Ω является немонотонной. Это следует из рассмотрения предельных случаев большого и малого значений Re_Ω . Так, при большом значении параметра Re_Ω (приближение идеальной жидкости) скорость диссипации энергии мала и колебания затухают медленно. При малом Re_Ω (приближение твердого тела) диссипация также мала. Следовательно, между этими предельными случаями есть значение Re_Ω , при котором диссипация будет максимальной, а время затухания будет минимальным. Это значение Re_Ω зависит от величины начального отклонения. В работе найдено, что при $\varphi_0 = \pi/4$ время полного затухания минимально при $Re_\Omega = 13 \pm 0.5$ и равно $\tau = 27.39$. С увеличением φ_0 параметр Re_Ω , при котором время затухания будет минимальным, растет. Так, при $\varphi_0 = \pi/2$ он составляет $Re_\Omega = 14 \pm 0.5$ и $\tau = 27.1$, а при $\varphi_0 = 3\pi/4$ $Re_\Omega = 15 \pm 0.5$ и $\tau = 27.46$ [122]. На рис. 4.4 изображена зависимость φ от времени при $\varphi_0 = 3\pi/4$,

$Re_{\Omega} = 15$, $Re_{\Omega} = 570$ и $Re_{\Omega} = 5700$ – максимальное значение данного параметра, выбранное в работе.

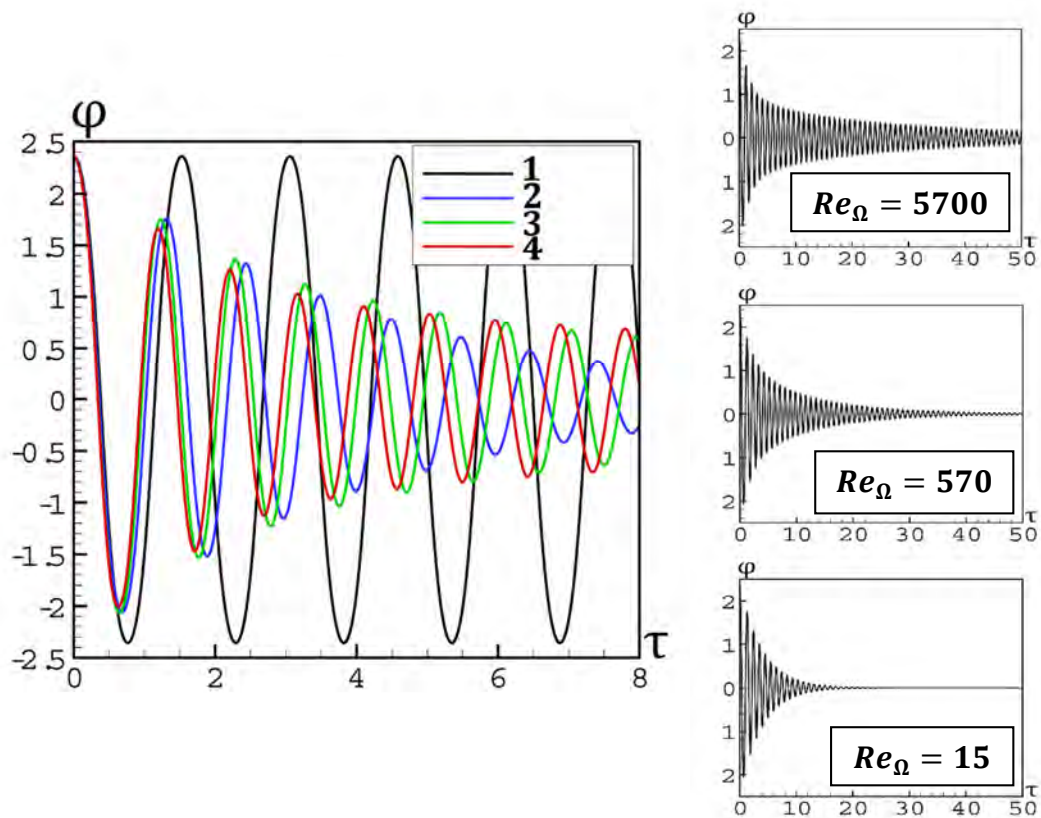


Рис. 4.4. Зависимость угла отклонения маятника от времени при $\varphi_0 = 3\pi/4$, 1 – абсолютно твердое тело, 2 – $Re_{\Omega} = 15$, 3 – $Re_{\Omega} = 570$, 4 – $Re_{\Omega} = 5700$

Из этого рисунка видно, что при $Re_{\Omega} = 15$ колебания начинают затухать быстрее по сравнению с $Re_{\Omega} = 5700$ только начиная с некоторого τ , приблизительно равного: $\tau \approx 3,5$. Это связано с тем, что при большом значении Re_{Ω} поле скоростей в ранние моменты является более неоднородным. Как видно из рис. 4.5а, при $Re_{\Omega} = 570$ и $Re_{\Omega} = 5700$ на основное колебание скорости, частота которого совпадает с частотой колебания маятника, накладываются вторичные колебания, которые являются следствием вторичных вихревых течений и приводят к большей диссипации в ранние моменты времени. Стоит отметить, что эти вторичные колебания довольно

быстро затухают, и устанавливается квазипериодический режим. При уменьшении значения Re_{Ω} амплитуда и частота вторичных колебаний уменьшается, пока они совсем не перестают оказывать влияние на течение.

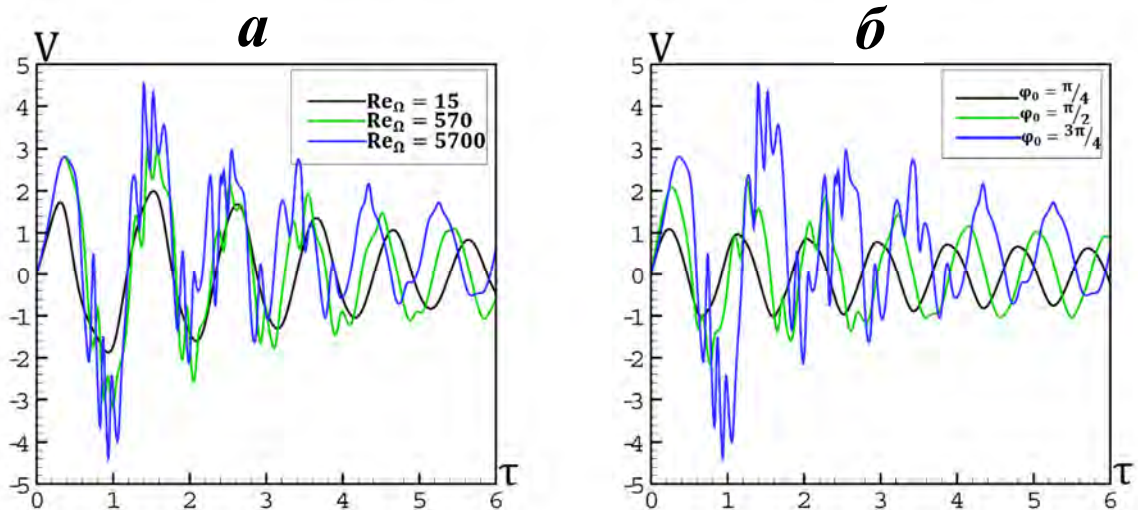


Рис. 4.5. Зависимость Y — составляющей вектора скорости в точке $(0.75; 0.75)$ от времени, (а) — $\varphi_0 = 3\pi/4$, (б) — при $Re_{\Omega} = 1140$

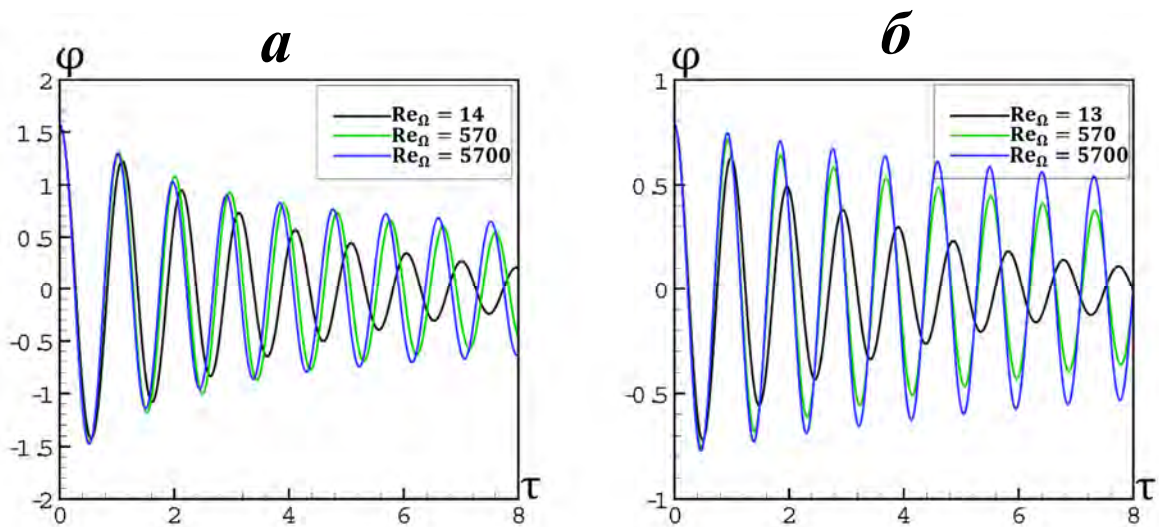


Рис. 4.6. Зависимость угла отклонения маятника от времени, (а) — $\varphi_0 = \pi/2$, (б) — $\varphi_0 = \pi/4$

Кроме того, как видно из рис. 4.5б, при увеличении угла начального отклонения амплитуда вторичных колебаний также возрастает. Следствием этого является тот факт, что при увеличении угла начального отклонения скорость затухания колебаний возрастает. Особенно отчетливо это видно из таблицы 4.1 при больших значениях параметра Re_{Ω} .

На рис. 4.6 изображена зависимость угла отклонения маятника от времени при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\varphi_0 = \pi/4$. Видно, что качественное поведение данной зависимости не меняется при изменении параметров задачи. Стоит только отметить, что в отличие от $\varphi_0 = 3\pi/4$, при $\varphi_0 = \pi/2$ скорость затухания при $Re_\Omega = 5700$ меньше, чем при $Re_\Omega = 14$ на все времена, что связано с уменьшением амплитуды вторичных колебаний при уменьшении начального отклонения. Однако если увеличить значение Re_Ω , например, до 570, то при $\tau < 4$ скорость затухания при $Re_\Omega = 5700$ будет больше, чем при $Re_\Omega = 570$. При $\varphi_0 = \pi/4$ скорость затухания при $Re_\Omega = 5700$ меньше для всех выбранных расчетных значений параметра Re_Ω .

В результате расчетов было получено характерное время затухания колебаний при различных начальных отклонениях и значениях Re_Ω . Результаты приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

$Re_\Omega \backslash \varphi_0$	7	14	55	110	570	1140	5700
$\pi/4$	30.9	27.32	35.19	43.94	85.15	113.56	248.76
$\pi/2$	30.7	27.09	34.54	43.34	80.98	106.72	216.05
$3\pi/4$	31.2	27.52	34.05	42.42	77.76	100.78	205.65

На рис. 4.7 также представлен график зависимости характерного времени затухания от значения параметра Re_Ω при $\varphi_0 = \pi/2$. При других значениях φ_0 качественное поведение данной зависимости не меняется.

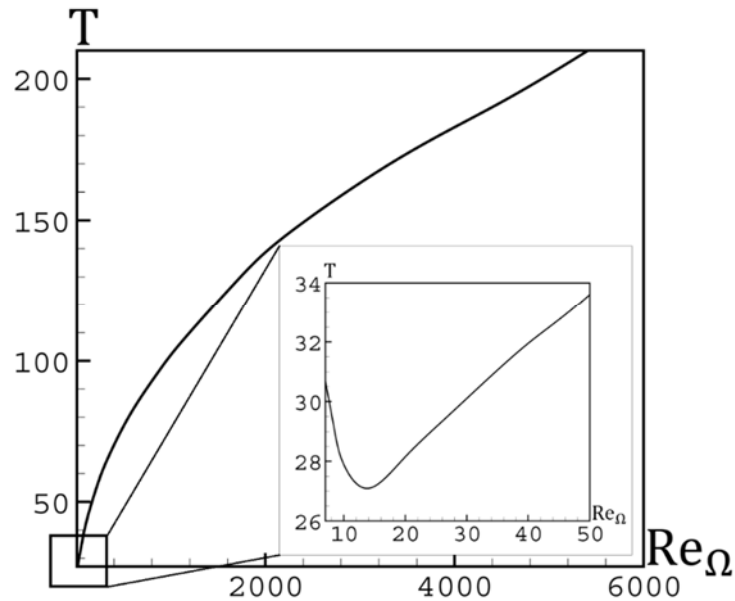


Рис. 4.7. Зависимость характерного времени затухания от параметра Re_{Ω} при $\varphi_0 = \pi/2$

4.2. Случай замкнутого сосуда в форме эллипса

Для сосуда в форме эллипса остаются в силе рассуждения, приведенные выше, об изменении периода колебания маятника с жидкостью и о существовании значения параметра Re_{Ω} , при котором характерное время затухания маятника минимально. В результате расчетов было найдено данное значение параметра Re_{Ω} , для случаев $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{a}{b} = 0.25, 0.5, 0.75$. Так, при $\frac{a}{b} = 0.25$ это значение равно $Re_{\Omega} = 37$, при $\frac{a}{b} = 0.5$ $Re_{\Omega} = 10$ и при $\frac{a}{b} = 0.75$ $Re_{\Omega} = 5$, время затухания равно $\tau = 129.4, 37.46, 21.05$ соответственно. Из данных результатов следует, что увеличение отношения малой и большой полуосей $\frac{a}{b}$ приводит к уменьшению Re_{Ω} , при котором характерное время затухания минимально и уменьшению данного времени затухания. Вообще, увеличение $\frac{a}{b}$ до единицы приводит к уменьшению характерного времени затухания (рис. 4.8), т.к. при стремлении $\frac{a}{b}$ к единице растет масса жидкости, вовлекаемая в движение, при колебании эллиптической полости, достигая максимума при

$\frac{a}{b} = 1$, т.е. в случае, когда полость является круговым цилиндром. На рис. 4.8 также изображена зависимость времени затухания колебаний от $\frac{a}{b}$, полученная из решения линейного интегро-дифференциального уравнения (2.50). Из данного рисунка видно, что по мере уменьшения $\frac{a}{b}$ растет разница между численным и асимптотическим решением. Это связано с тем, что при уменьшении $\frac{a}{b}$ течение жидкости становится все более нелинейным, интенсивность вторичных вихревых течений растет. При $\frac{a}{b} \rightarrow 1$ интенсивность вторичных вихрей падает до нуля, и численное решение становится очень близким к асимптотическому.

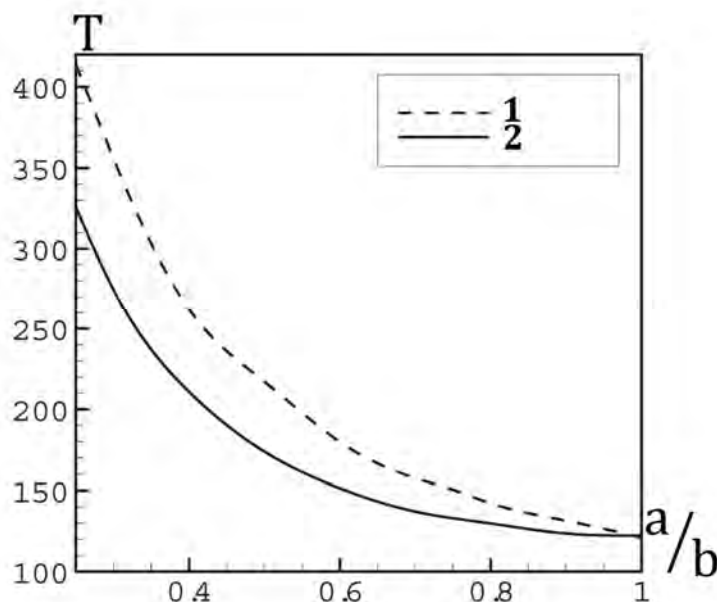


Рис. 4.8. Зависимость характерного времени затухания от $\frac{a}{b}$,
1 – численное решение, 2 – асимптотическое решение задачи в линейной постановке

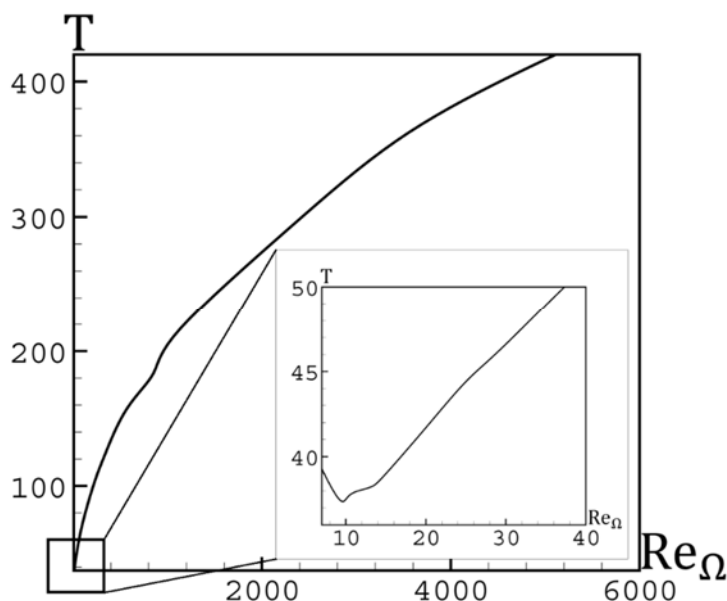


Рис. 4.9. Зависимость характерного времени затухания от параметра Re_{Ω}

На рис. 4.9 приведен график зависимости характерного времени затухания колебаний от значения Re_{Ω} при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{b} = 0.5$. Данная зависимость, как и для случая полости квадратной формы, является немонотонной. Из этого графика также видно, что в случае полости квадратной формы диссипация энергии происходит быстрее, чем в случае формы эллипса. Это связано с нелинейностью течения жидкости в квадратной полости из-за наличия углов. Данная нелинейность проявляется в более интенсивном вихреобразовании, что и приводит к повышению диссипации энергии. Отсюда же можно предположить, что расположение в полости различных конфигураций вставок или решеток приведет к уменьшению времени затухания сосуда.

Остановимся подробнее на картинах возникающего течения при колебании маятника. Так, на рис. 4.10 изображены изолинии функции тока в различные моменты времени при $\varphi_0 = \pi/2$, $\frac{a}{b} = 0.5$ и $Re_{\Omega} = 10$, причем, как и в случае квадратной полости, отрицательное значение функции тока – движение жидкости по часовой стрелке, положительное – против. По мере движения маятника в областях, симметрично смещенных в сторону движения

маятника относительно линии $x = 0$, зарождаются вихри, которые вращаются в сторону, противоположную вращению центрального вихря. Данные вторичные вихри с течением времени растут, и по мере их движения направление вращения жидкости меняется на противоположное. Спустя некоторое время вторичные вихри сливаются в один, при этом вся жидкость вращается в одну сторону – сторону вращения вторичных вихрей. Далее этот процесс периодически повторяется. Смена направления вращения жидкости каждые полпериода сопровождается возникновением вторичных вихревых структур. При $\frac{a}{b} = 1$ (случай полости в форме кругового цилиндра) отсутствуют вторичные вихревые течения. Из данного факта следует, что смена направления вращения жидкости в полости, совершающей вращательные колебания, сопровождается возникновением вторичного вихревого течения только при отклонении формы полости от цилиндрической.

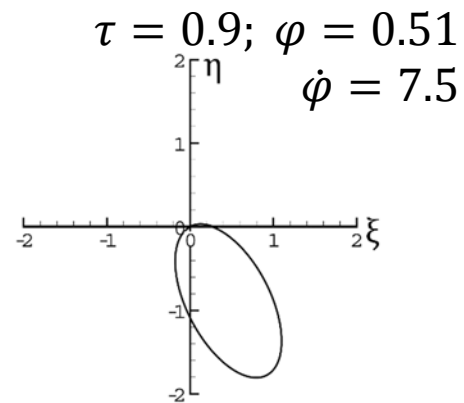
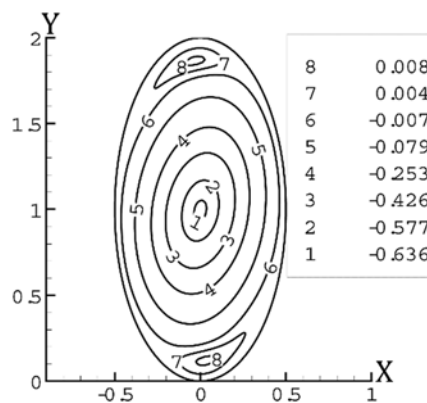
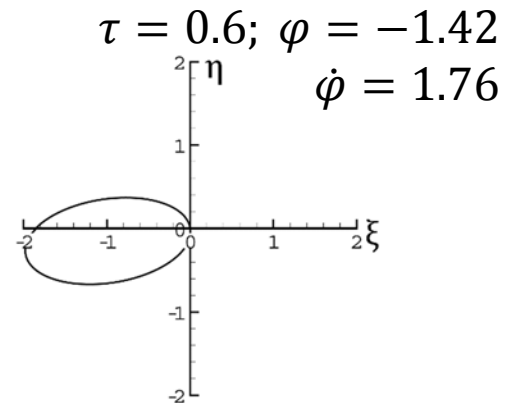
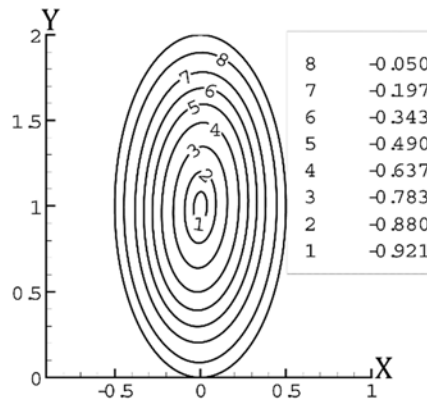
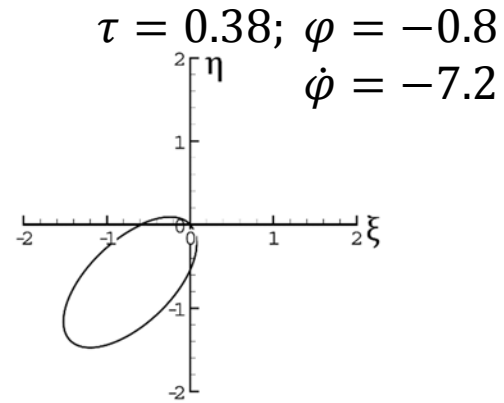
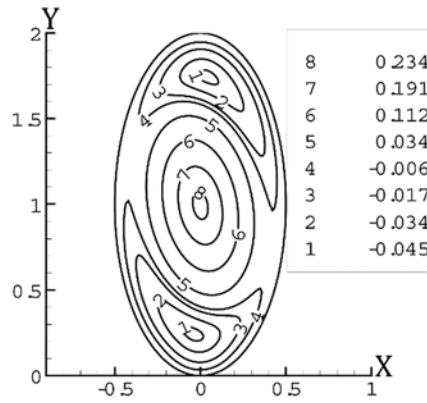
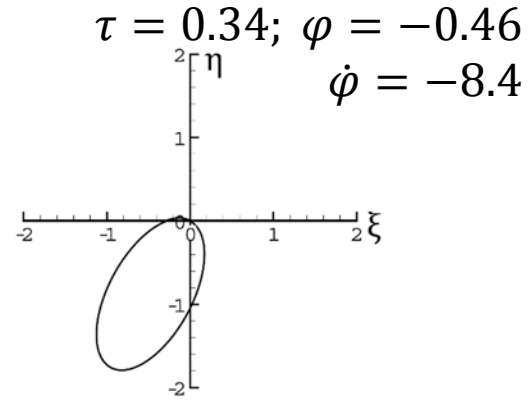
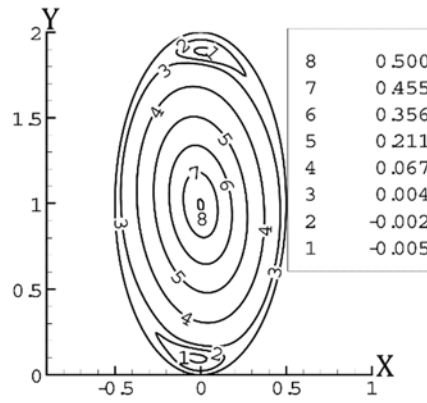


Рис. 4.10. Изолинии функции тока при $\varphi_0 = \pi/2$, $a/b = 0.5$ и $Re_\Omega = 10$

4.3. Заключение к главе 4

В результате расчетов была получена численная зависимость угла отклонения маятника от времени при различных значениях параметра Re_Ω и различных начальных отклонениях для случаев полости квадратной формы и полости в форме эллипса. При этом было обнаружено, что для квадратной полости в ранние моменты времени при большом начальном отклонении скорость затухания колебаний прямо пропорциональна Re_Ω . Кроме того, определено характерное время затухания для различных значений Re_Ω и φ_0 , и, так как это время является немонотонной функцией параметра Re_Ω , с точностью до единицы было найдено значение Re_Ω , при котором время затухания минимально: $Re_\Omega = 13$ при $\varphi_0 = \pi/4$, $Re_\Omega = 14$ при $\varphi_0 = \pi/2$ и $Re_\Omega = 15$ при $\varphi_0 = 3\pi/4$. Для колебаний маятника в форме эллипса данное значение Re_Ω зависит еще от отношения малой полуоси к большой: $Re_\Omega = 10$ при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\frac{a}{b} = 0.5$. Также найдены поля течения жидкости в полостях различной формы, и продемонстрирован эффект генерации и диффузии вихрей при смене направления вращения жидкости в полости. Приведено сравнение колебаний полостей различной формы и показано, что в случае, когда полость имеет квадратную форму, время затухания меньше по сравнению с полостью эллиптической формы, что связано с наличием углов в квадратной полости.

ГЛАВА 5. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО ЗАМКНУТОГО СОСУДА, ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ИМЕЮЩЕГО ОДНУ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

Приведем сравнение численного решения задачи о свободном движении кубического замкнутого сосуда, полностью заполненного сильновязкой жидкостью, с асимптотическим решением, полученным Ф.Л. Черноусько ($Re_\Omega \ll 1$). Причем рассмотрим задачу перехода движения сосуда из стационарных вращений вокруг оси, не совпадающей с главной осью инерции полости с жидкостью, к ее устойчивому перманентному вращению. В качестве начальной оси вращения примем ось, совпадающую с ребром заданного кубического сосуда (ось ζ). Не проводя расчетов, можно сделать вывод о предельном движении сосуда, используя теорему Жуковского, которая гласит, что если ось вращения не совпадает с главной осью инерции, то движение тела с жидкостью в полости будет происходить так, чтобы ось вращения совпала с главной осью инерции тела [4]. С.Л. Соболев и В.В. Румянцев усилили теорему Н.Е. Жуковского, доказав, что данное перманентное вращение будет устойчиво, если оно совершается вокруг оси с наибольшим моментом инерции. Для рассматриваемого движения сосуда кубической формы с неподвижной точкой, совпадающей с угловой точкой, осью с максимальным моментом инерции является ось, перпендикулярная z , следовательно угол нутации будет стремиться к значению $\frac{\pi}{2}$, а угол собственного вращения – к некоторой константе.

На рис 5.1 показана зависимость угла нутации от времени для случая $Re_\Omega = 0.1$; $\omega_\zeta = 100$. Из этого рисунка видно согласие времен затухания численного и асимптотического решения. Так как в пределе решение должно выходить на константу, то осцилляции асимптотического решения являются результатом ошибки приближения.

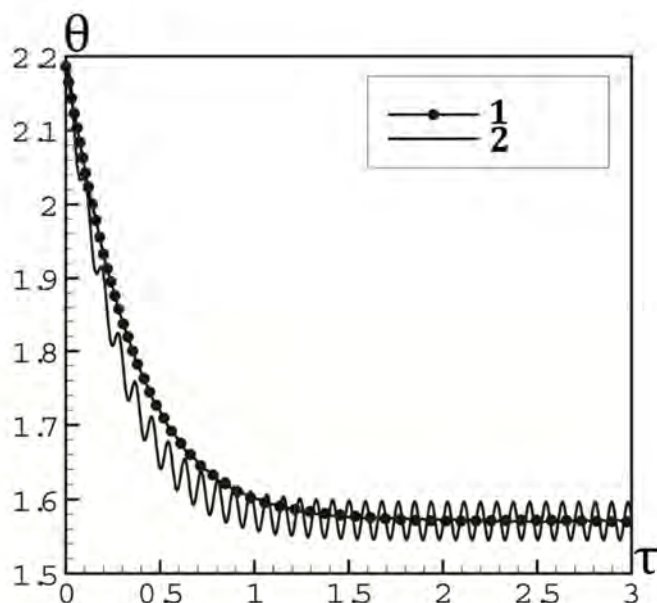


Рис. 5.1. Зависимость угла нутации от времени при $Re_{\Omega} = 0.1$,
1 – численное решение, 2 – асимптотическое

Рассмотрим результаты численного моделирования задачи о трехмерном движении сосуда в форме куба, имеющего одну неподвижную точку и полностью заполненного вязкой жидкостью. Исследуем влияние величины начальной угловой скорости относительно оси динамической симметрии куба (гироскопической угловой скорости) на характер движения сосуда [123].

5.1. Случай $\omega_{z_0} = 0$

При $\omega_{z_0} = 0$ движение сосуда сводится к плоским колебаниям: $\psi = const$, $\varphi = const$, $\theta = \theta(\tau)$. Для данного случая справедливы выводы, сделанные в главе 4, о существовании значения Re_{Ω} , при котором диссипация энергии будет максимальна, т.е. время затухания колебаний будет минимально. Характерное время затухания определим как время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в 100 раз. В работе было найдено это значение $\tau = 27.85$ при начальном отклонении $\theta_0: \cos(\theta_0) = -1/\sqrt{3}$. Данное

время затухания реализуется при значении $Re_{\Omega} = 27$. В главе 4 значение Re_{Ω} , при котором время затухания было минимальным $Re_{\Omega} = 15$, время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в 100 раз: $\tau = 18.4$. Сравнивая эти результаты, видим, что, при колебании сосуда вокруг неподвижной точки, как время затухания, так и значение Re_{Ω} увеличились по сравнению с колебанием вокруг оси. Это следует из того, что диссипация прямо пропорциональна квадрату тензора скоростей деформаций и обратно пропорциональна Re_{Ω} . В случае колебания вокруг неподвижной точки течение в сосуде является трехмерным, квадрат тензора скоростей деформаций в этом случае будет иметь большую величину, чем в случае колебания вокруг неподвижной оси, когда течение имеет двухмерный характер. Следовательно, для достижения максимальной величины диссипации значение Re_{Ω} должно быть больше для случая неподвижной точки, по сравнению со случаем неподвижной оси.

5.2. Случай $\omega_{z0} > 0$

При $\omega_{z0} > 0$ движение тела с жидкостью в полости становится существенно трехмерным. Причем наличие жидкости в полости изменяет характер движения тела по сравнению с движением абсолютно твердого тела. Так, на рис. 5.2 показана траектория центра масс сосуда при $\omega_{z0} = 5$ и $Re_{\Omega} = 100$, для времени, изменяющемся от 0 до 2.5. На том же рисунке справа изображена траектория центра масс абсолютно твердого тела.

Причиной отличия прецессионного движения сосуда с жидкостью от движения абсолютно твердого тела является быстрое убывание гироскопической угловой скорости ω_z сосуда с жидкостью (рис. 5.3), тогда как ω_z твердого тела остается постоянной. Т.е. для сосуда с жидкостью влияние момента силы тяжести на прецессионное движение уменьшается.

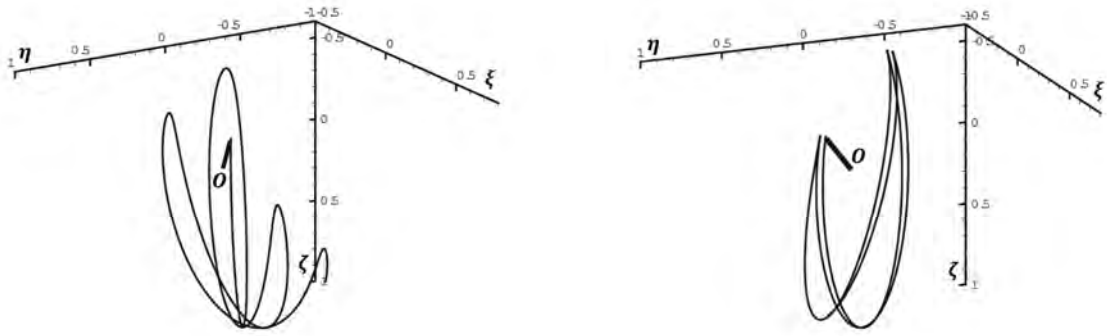


Рис. 5.2. Траектория центра масс тела с жидкостью в полости при $\omega_{z0} = 5$ и $Re_{\Omega} = 100$ (слева) и абсолютно твердого тела (справа)

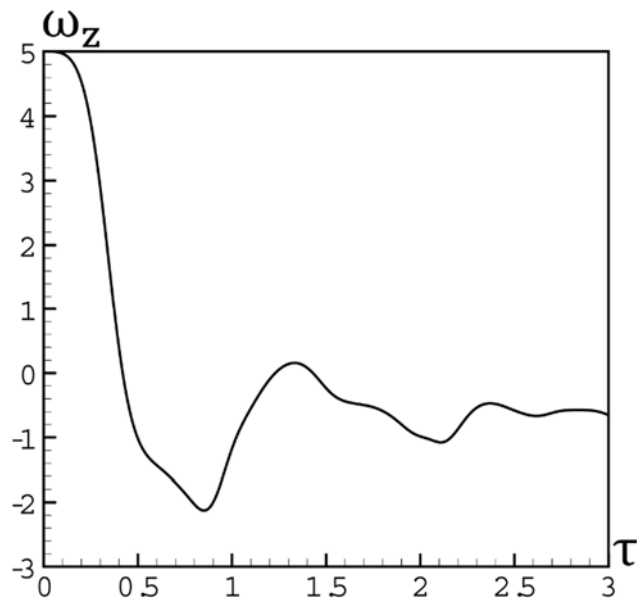


Рис. 5.3. Зависимость ω_z от времени при $\omega_{z0} = 5$ и $Re_{\Omega} = 100$

Получив в начальный момент, когда ω_z максимальна, импульс в направлении $\vec{r}_c \times \vec{g}$, сосуд с жидкостью продолжает прецессионное движение по инерции. Конечно, так как ω_z впоследствии становится отрицательной, то момент силы тяжести уменьшает скорость поворота плоскости колебания.

Зная влияние жидкости в полости на характер движения сосуда, рассмотрим особенности траектории движения при различных значениях отношения центробежной силы инерции, вызванной вращением сосуда, к силе

тяжести. Так, при данном отношении много меньшем единицы, т.е. в случае, когда сила тяжести преобладает над центробежной силой инерции, в характере траектории движения сосуда будут преобладать колебания, плоскость которых поворачивается в направлении действия начального момента силы тяжести. При увеличении начальной гироскопической угловой скорости влияние силы тяжести будет уменьшаться, скорость поворота плоскости колебаний будет увеличиваться, а амплитуда нутаций будет уменьшаться, и движение сосуда, в пределе большой величины отношения центробежной силы инерции к силе тяжести, перейдет во вращение вокруг некоторой оси. Действительно, рассматривая случай большой величины отношения центробежной силы инерции к силе тяжести, приходим к приближению свободного движения тела, для которого справедлива теорема Жуковского. Следовательно, в данном случае, движение сосуда будет происходить таким образом, чтобы главная ось инерции с максимальным моментом инерции была близкой к начальной оси вращения.

Рассмотрим теперь результаты расчетов.

На рис. 5.4 показана траектория центра масс при $\omega_{z0} = 10$ и $\omega_{z0} = 50$ для $\tau = 0..2.5$. Из данных графиков видно, что увеличение начальной гироскопической угловой скорости приводит к росту скорости поворота плоскости колебаний полости. Дальнейшее увеличение ω_{z0} приводит к тому, что начальный импульс, создаваемый силой тяжести, оказывается таким, что значение угла нутации превосходит начальное, и движение системы переходит с колебательного с поворотом плоскости колебания на вращение вокруг некоторой оси, которая сама в свою очередь движется, причем с ростом ω_{z0} амплитуда ее движения уменьшается. Так, на рис. 5.5 показана траектория центра масс при $\omega_{z0} = 85, 100$ и 150 . На том же рисунке изображено изменение нутационного угла. Видно, что при $\omega_{z0} = 100$ и 150 максимум угла нутации превосходит начальное значение.

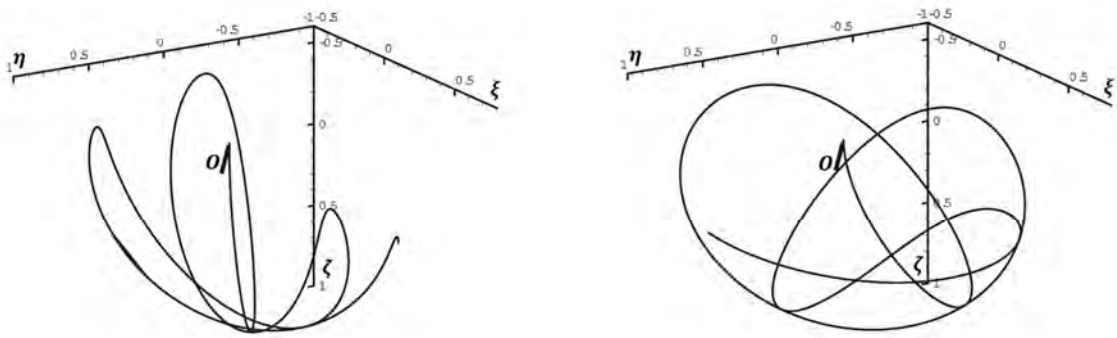


Рис. 5.4. Траектория центра масс при $\omega_{z0} = 10$ (слева) и 50 (справа) и $Re_{\Omega} = 100$, $\tau = 0..2.5$

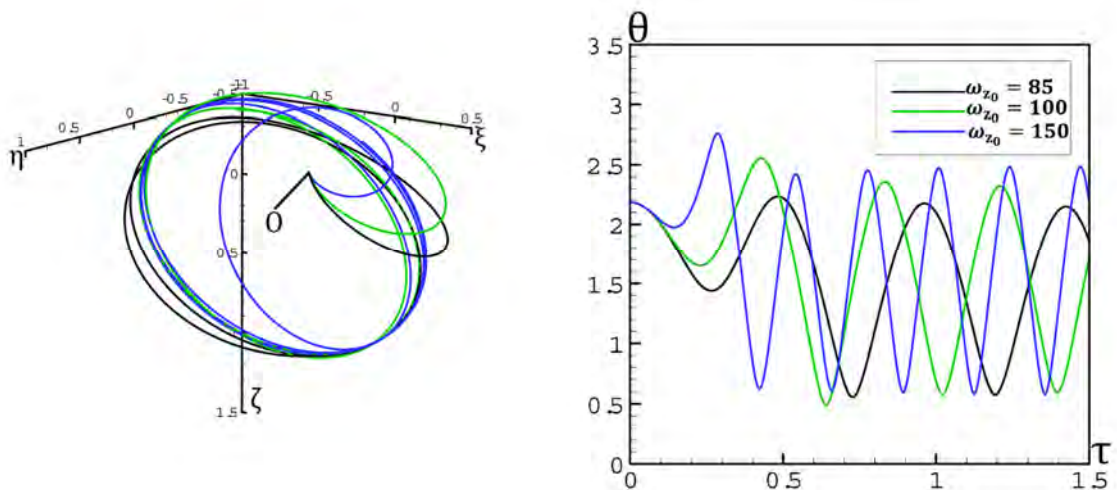


Рис. 5.5. Зависимость траектории центра масс (слева) и угла нутации от времени (справа) при $Re_{\Omega} = 100$

Предельным движением полости с жидкостью является регулярная прецессия – вращение вокруг вертикальной оси с постоянной скоростью. Это следует из того, что влияние вязкой жидкости на движение полости приводит к затуханию нестационарных нутационных колебаний, оставляя только регулярную прецессию. На рис. 5.6 изображена зависимость угла нутации от времени для различных значений ω_{z0} . Из графика видно, что в течение расчетного времени для всех ω_{z0} , кроме 150, движение вышло на регулярную

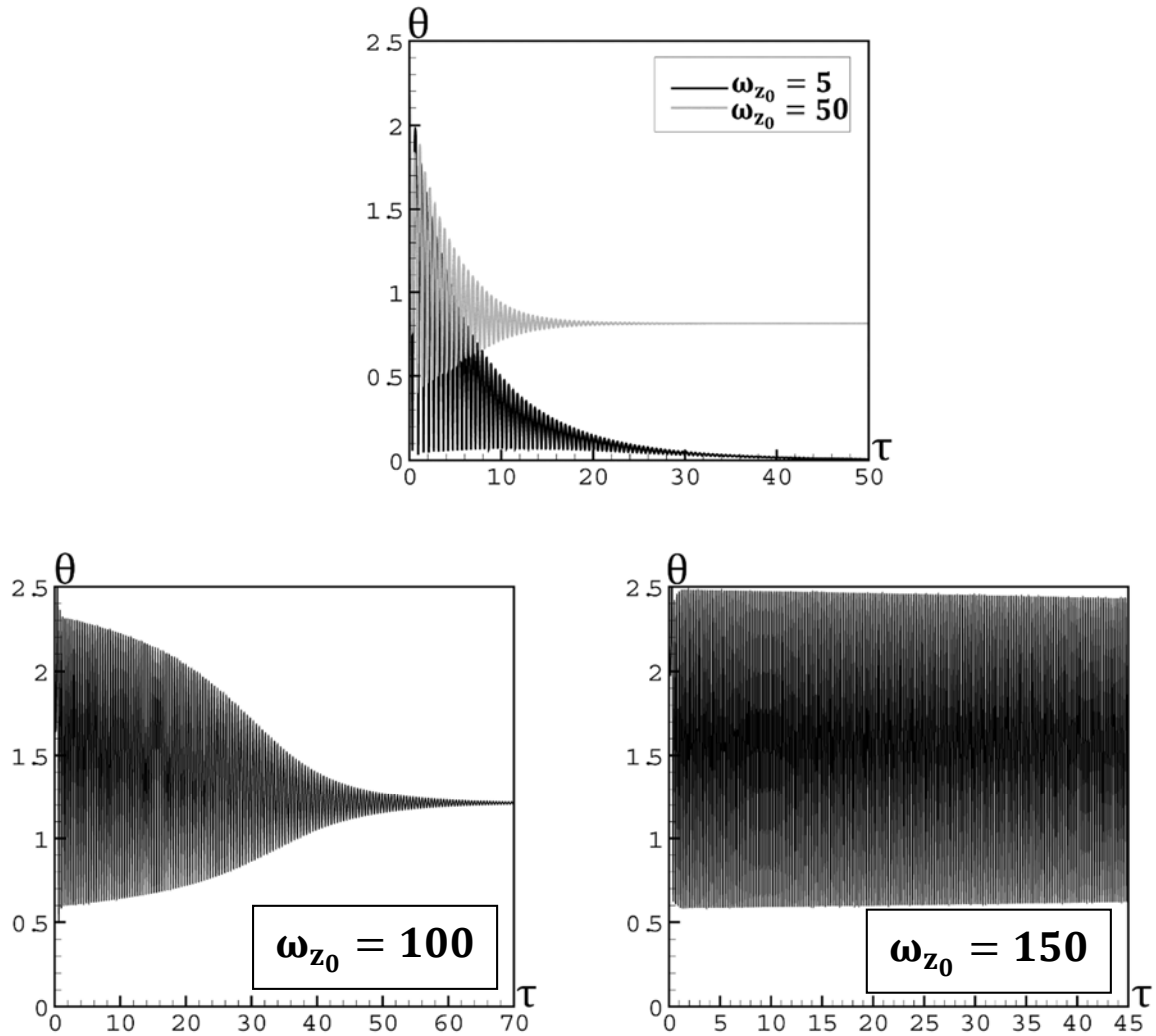


Рис. 5.6. Зависимость угла нутации от времени $Re_\Omega = 100$

прецессию – угол θ вышел на постоянное значение, причем при $\omega_{z0} > 80$ время выхода движения на регулярную прецессию существенно увеличилось. Это связано как раз с тем, что при росте начальной гироскопической угловой скорости движение системы переходит во вращение вокруг некоторой подвижной оси. При $\omega_{z0} = 150$ угол θ изменяется по закону близкому к периодическому и слабо изменяется в амплитуде. Вообще говоря, так как при регулярной прецессии тела движение жидкости должно полностью затухнуть, т.е. полость с жидкостью должна вести себя как одно целое твердое тело, определим время выхода на стационарное движение как время, при котором кинетическая энергия движения жидкости будет порядка 10^{-4} . Времена

выхода на стационарное движение в указанном смысле приведены в таблице 5.1:

Таблица 5.1

ω_{z0}	5	10	15	25	40	45	50	60	75	100
τ	28.8	35.9	22.3	21.4	20	19.8	21.4	22.1	23.9	61.4

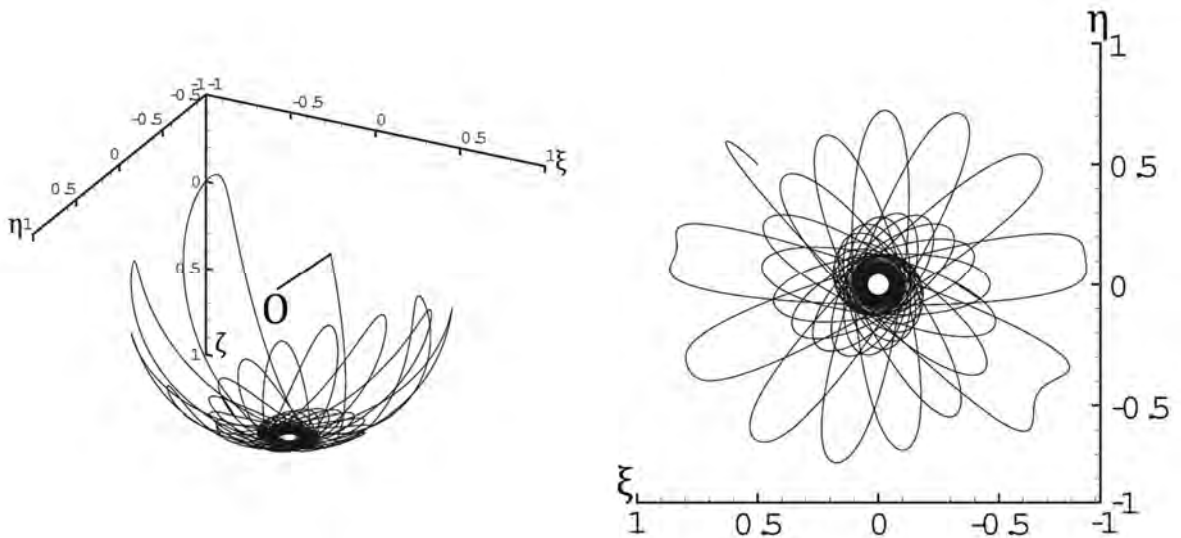


Рис. 5.7. Траектория центра масс при $\omega_{z0} = 10$ и $Re_{\Omega} = 100$

Анализируя времена выхода движения системы на стационарный режим, а также поведение траектории центра масс сосуда с жидкостью, можно условно выделить два режима движения системы, определяемые начальной гироскопической угловой скоростью. Первый тип – это движение полости при малых значениях ω_{z0} ($\omega_{z0} < 80$). Так, на рис. 5.7 изображена траектория центра масс при $\omega_{z0} = 10$ для $\tau = 0.50$. При таком значении начальной угловой скорости движение полости представляет собой колебания с поворотом плоскости колебаний и постепенным уменьшением амплитуды колебаний. Начиная с некоторого момента времени, амплитуда колебаний уменьшается настолько, что движение переходит в регулярную прецессию.

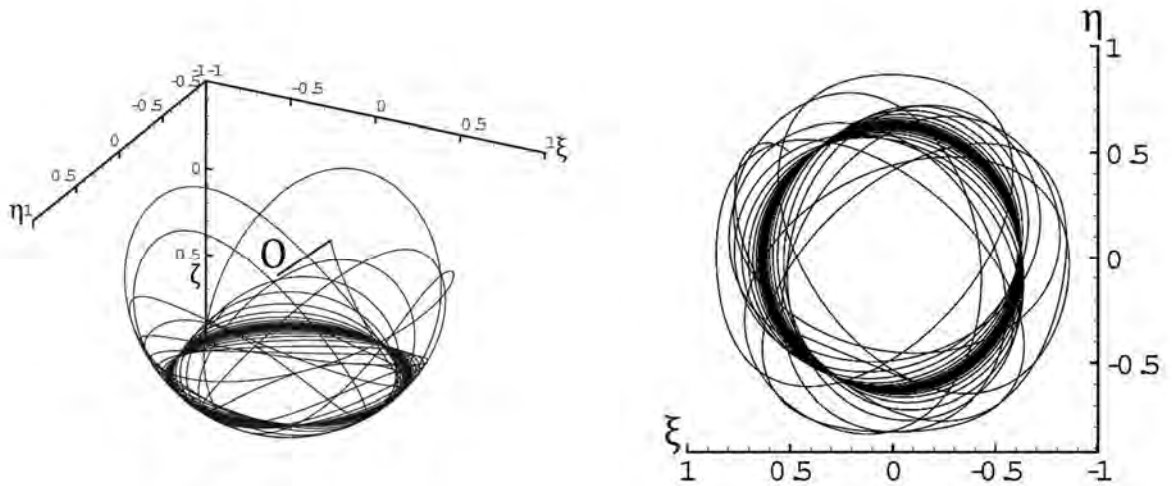


Рис. 5.8. Траектория центра масс при $\omega_{z_0} = 50$ и $Re_{\Omega} = 100$

При увеличении ω_{z_0} растет скорость поворота плоскости колебаний сосуда и радиус вращения сосуда в стационарном движении (рис. 5.8). При этом, как видно из таблицы, до определенного значения ω_{z_0} уменьшается время выхода на стационарное вращение.

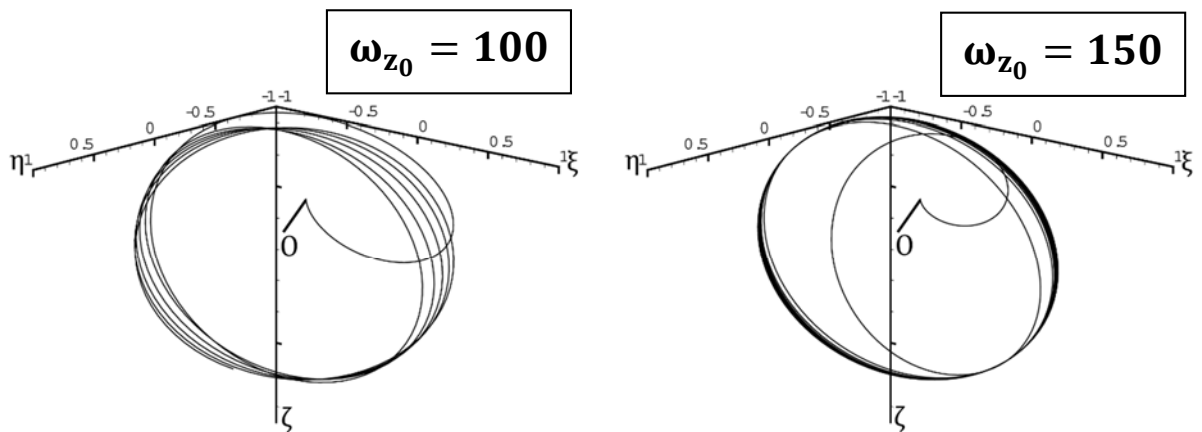


Рис. 5.9. Траектория центра масс при $Re_{\Omega} = 100$

Второй тип движения – это движение, совершающееся при больших значениях ω_{z_0} ($\omega_{z_0} > 80$). В данном случае, как уже было сказано выше, движение переходит во вращение вокруг оси, двигающейся вокруг начальной

оси вращения с амплитудой, уменьшающейся при росте ω_{z0} , при этом происходит возрастание времени установления (рис 5.9).

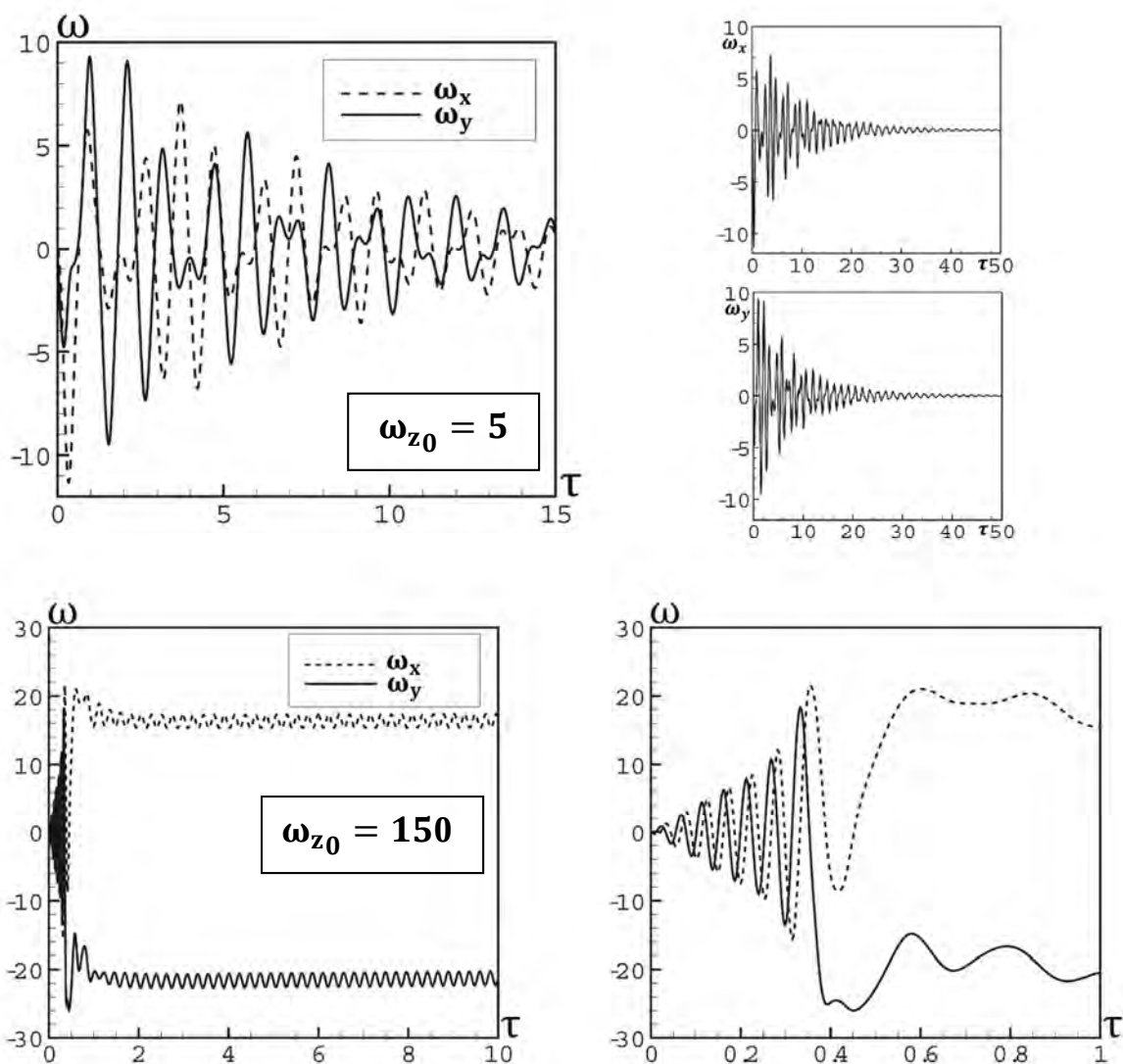


Рис. 5.10. x, y – проекции вектора угловой скорости при $Re_\Omega = 100$

В соответствии с этими двумя режимами движения будут иметь качественное отличие и изменение других характеристик системы. Так, на рис. 5.10 изображены проекции вектора угловой скорости на подвижные оси x и y . При $\omega_{z0} = 5$ значения ω_x и ω_y стремятся к значениям близким к нулю. Сделав частотный анализ данных графиков (рис. 5.11), можно выделить две основные частоты колебания ω_x и ω_y . Меньшая частота соответствует изменению нутационного угла, а большая – изменению угла собственного вращения.

Причем большая энергия сосредоточена именно в частоте, связанной с нутационными колебаниями полости.

При $\omega_{z_0} = 150$ значения ω_x и ω_y колеблются около некоторых значений с частотой, приведенной на рис. 5.11, значение которой хорошо согласуется с законом сохранения момента импульса: $\Theta_z \omega_{z_0} \approx \Theta_x \omega \Rightarrow \omega \approx 27.2$. На рис. 5.10 также виден начальный участок быстрого изменения проекций вектора угловой скорости.

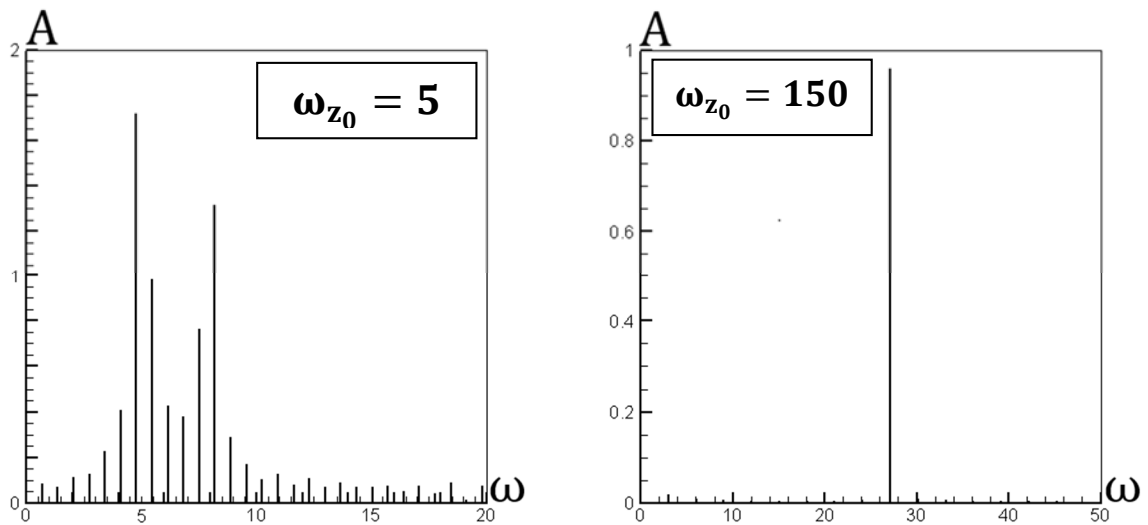


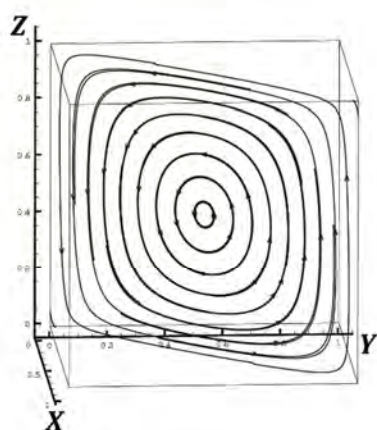
Рис. 5.11. Частотный анализ x – проекции вектора угловой скорости при $Re_\Omega = 100$

Рассмотрим течение, возникающее в полости, движущейся вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести при $\omega_{z_0} = 0$ и $Re_\Omega = 27$. В этом случае полость совершает плоские колебания, и течение жидкости, возникающее при этом, будет качественно похоже на движение жидкости, проанализированное в главе 4.

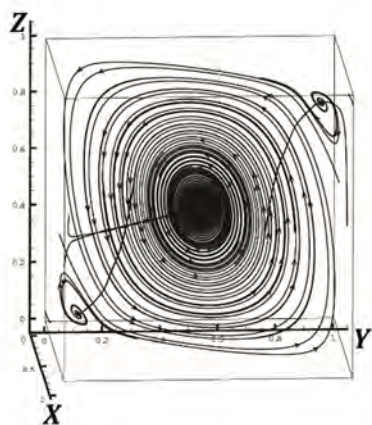
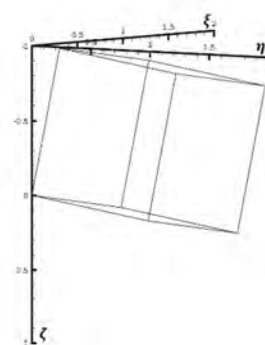
На рис. 5.12 изображены последовательные картины течения жидкости в полости. В начальный момент течение жидкости в неинерциальной системе отсчета представляет собой равномерное вращение. Начиная с некоторого момента времени, течение жидкости меняет свое направление на противоположное, что сопровождается возникновением вихрей в углах

полости. Данные вихри растут, деформируются и, отрываясь от стенок полости, перемещаются к центру области. В отличие от плоского случая, рассмотренного в главе 4, в трехмерной ситуации из центров возникающих вихрей выходят линии тока, которые сворачиваются в спиральные структуры ($\tau \approx 0.56$). В некоторый момент времени ($\tau \approx 0.65$) все вихри сливаются, и течение жидкости представляет собой вращение в сторону, противоположную начальному вращению. В следующие моменты времени в углах снова образуются вихревые структуры, которые также перемещаются к центру полости. Далее этот процесс повторяется периодически: жидкость меняет направление вращения, что сопровождается возникновением вихрей, пока колебания сосуда не затухнут окончательно.

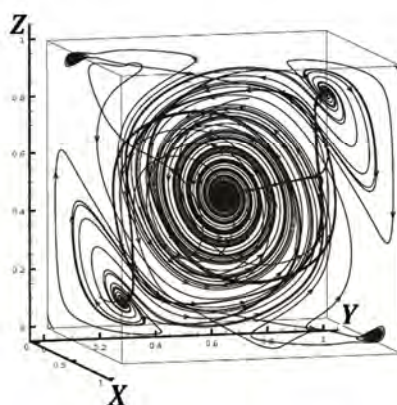
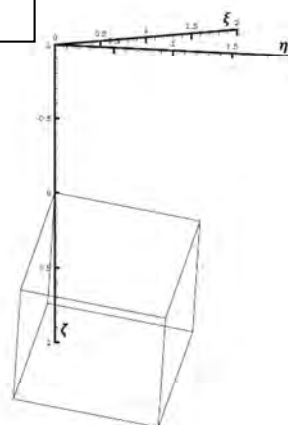
Если начальная гироскопическая угловая скорость не равно нулю, то центральный вихрь начинает поворачиваться (рис. 5.13), при этом также возникают различные вторичные вихревые структуры, которые сопровождают смену направления течения жидкости. При увеличении ω_{z0} картины течения усложняются.



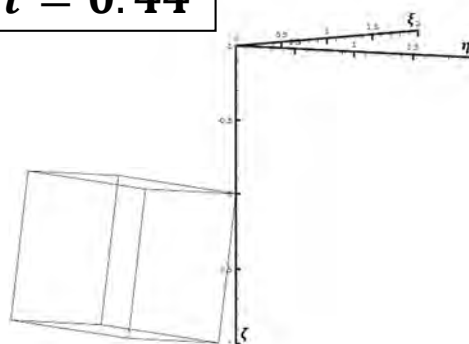
$$\tau = 0.1$$

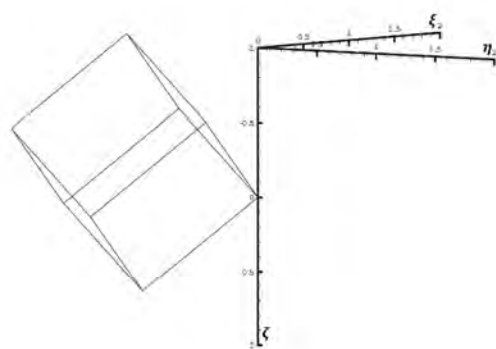
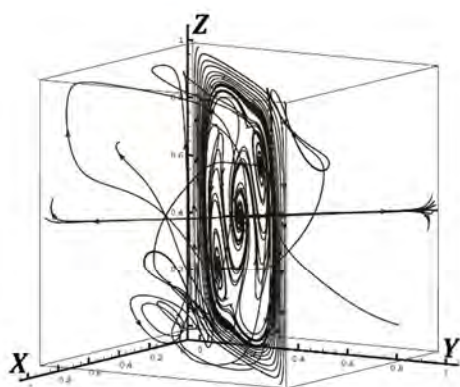


$$\tau = 0.3$$

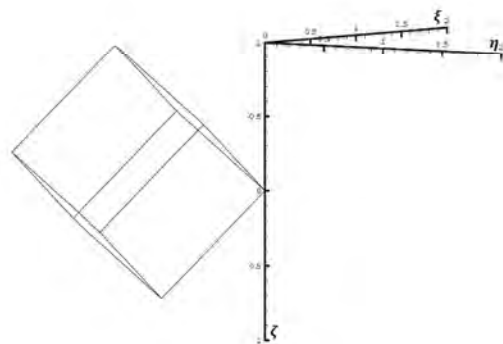
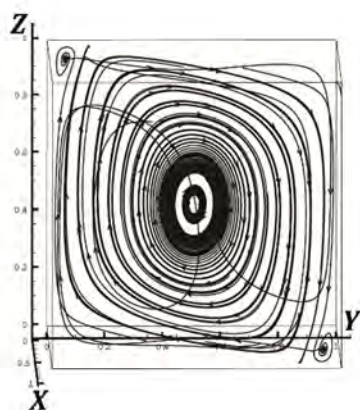


$$\tau = 0.44$$

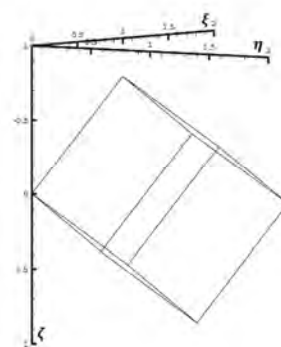
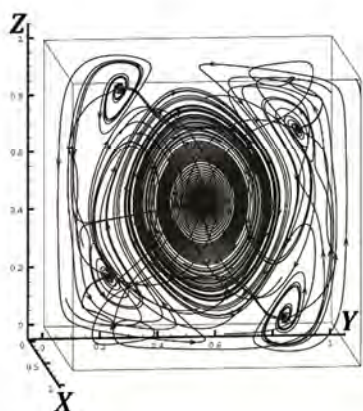




$$\tau = 0.56$$



$$\tau = 0.76$$



$$\tau = 1.15$$

Рис. 5.12. Картины течения жидкости в различные моменты времени при $\omega_{z0} = 0$ и $Re_{\Omega} = 27$

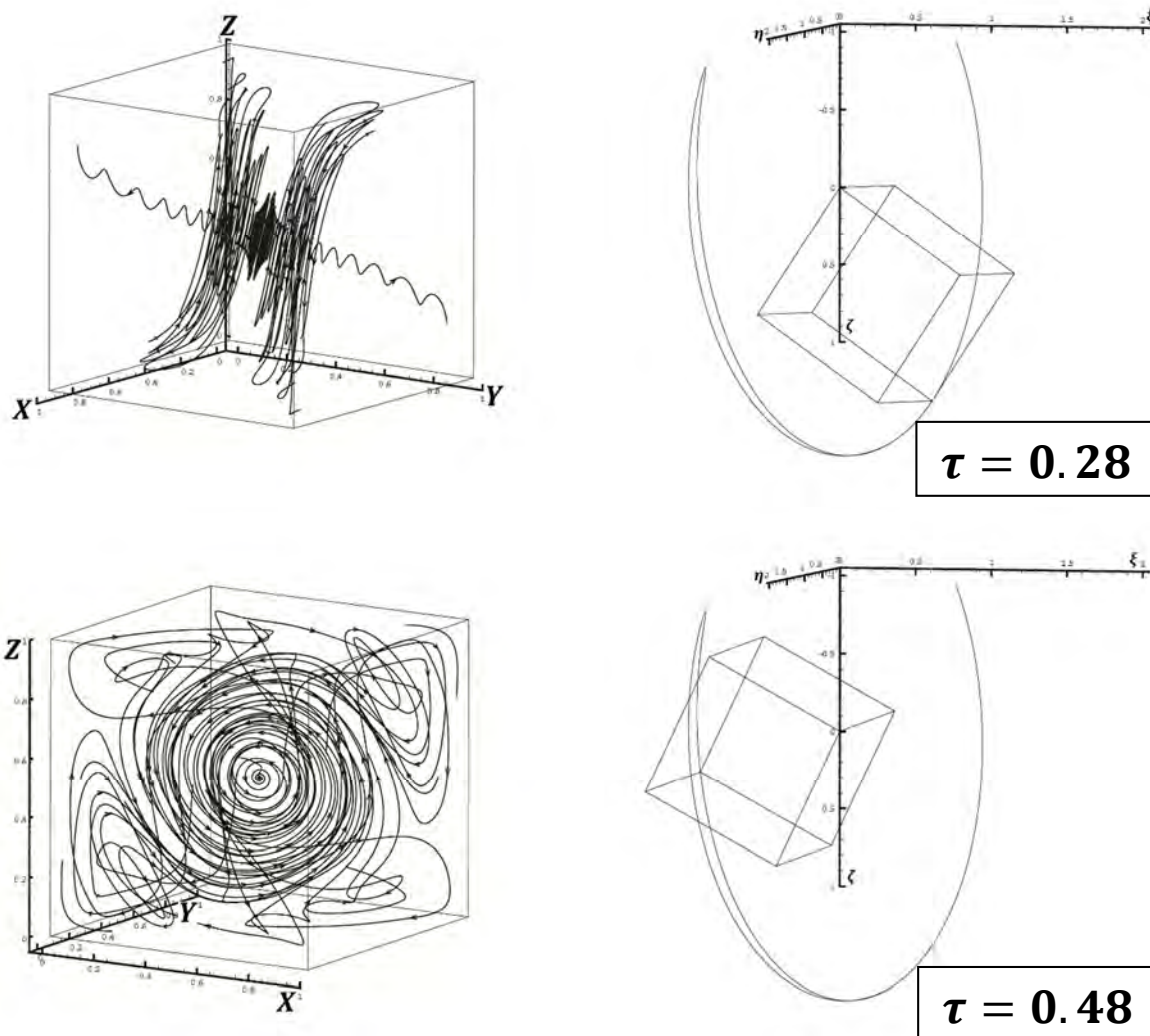


Рис. 5.13. Картины течения жидкости в различные моменты времени при $\omega_{z_0} = 1$ и $Re_{\Omega} = 100$

5.3. Заключение к главе 5

В данной главе рассмотрено движение тела с кубической полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести. При этом получено, что в пределах изменения начальной гироскопической угловой скорости $0 \leq \omega_{z_0} \leq 200$ можно выделить три различных режима движения тела. При $\omega_{z_0} = 0$ движение тела представляет собой плоские колебания с уменьшающейся к нулю амплитудой колебания. При $\omega_{z_0} > 0$ движение тела с жидкостью в полости приобретает трехмерный характер. В пределе большого времени движение тела выходит на стационарное вращение вокруг вертикальной оси – регулярную прецессию, причем переход к регулярной прецессии осуществляется различными способами при различных значениях начальной гироскопической угловой скорости: при $0 < \omega_{z_0} \lesssim 80$ через колебания с поворотом плоскости колебания, при $80 \lesssim \omega_{z_0}$ через вращение вокруг оси, колеблющейся около начальной оси вращения с амплитудой, уменьшающейся с ростом ω_{z_0} . Также приведены картины течения для случаев $\omega_{z_0} = 0$ и $\omega_{z_0} = 1$ и продемонстрирован эффект генерации и диффузии вихрей в полости. При $\omega_{z_0} = 0$ полость совершает плоские затухающие колебания, причем значение Re_Ω , при котором затухание максимально $Re_\Omega = 27$, а характерное время затухания $\tau = 27.85$.

ГЛАВА 6. КОЛЕБАНИЯ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

6.1. Течение жидкости в колеблющейся полости

Рассмотрим течение жидкости, возникающее в прямоугольной полости, движущейся по закону $-0.002\sin(\omega\tau)$ для различных случаев расположения в полости перегородок и решеток. Течение жидкости изображаем изолиниями функции тока. Положительному значению функции тока соответствует течение слева на право, замкнутой изолинии с положительным значением – вихрь, вращающийся против часовой стрелки, а с отрицательным значением – вихрь, вращающийся по часовой стрелке.

На рис. 6.1 изображены изолинии функции тока для случая размещения в полости вертикальной решетки. Как видно из данного рисунка, в момент времени, когда полость находится в крайнем левом положении поток жидкости направлен влево (рис. 6.1а), по мере движения сосуда вправо около решеток развиваются вихревые структуры (рис. 6.1б). Как видно из рисунка 6.2а, у нижних пластин и у предпоследней верхней пластины развивается пара вихрей. В дальнейшем интенсивность вихрей растет, причем у нижних пластин развивается только один вихрь из пары, тогда как второй затухает (рис. 6.2б). В моменты времени, когда высота свободной поверхности максимальна у левой границы, происходит смена направления течения жидкости, которая сопровождается возникновением крупных вихревых структур (рис. 6.1г). Далее данный процесс повторяется периодически.

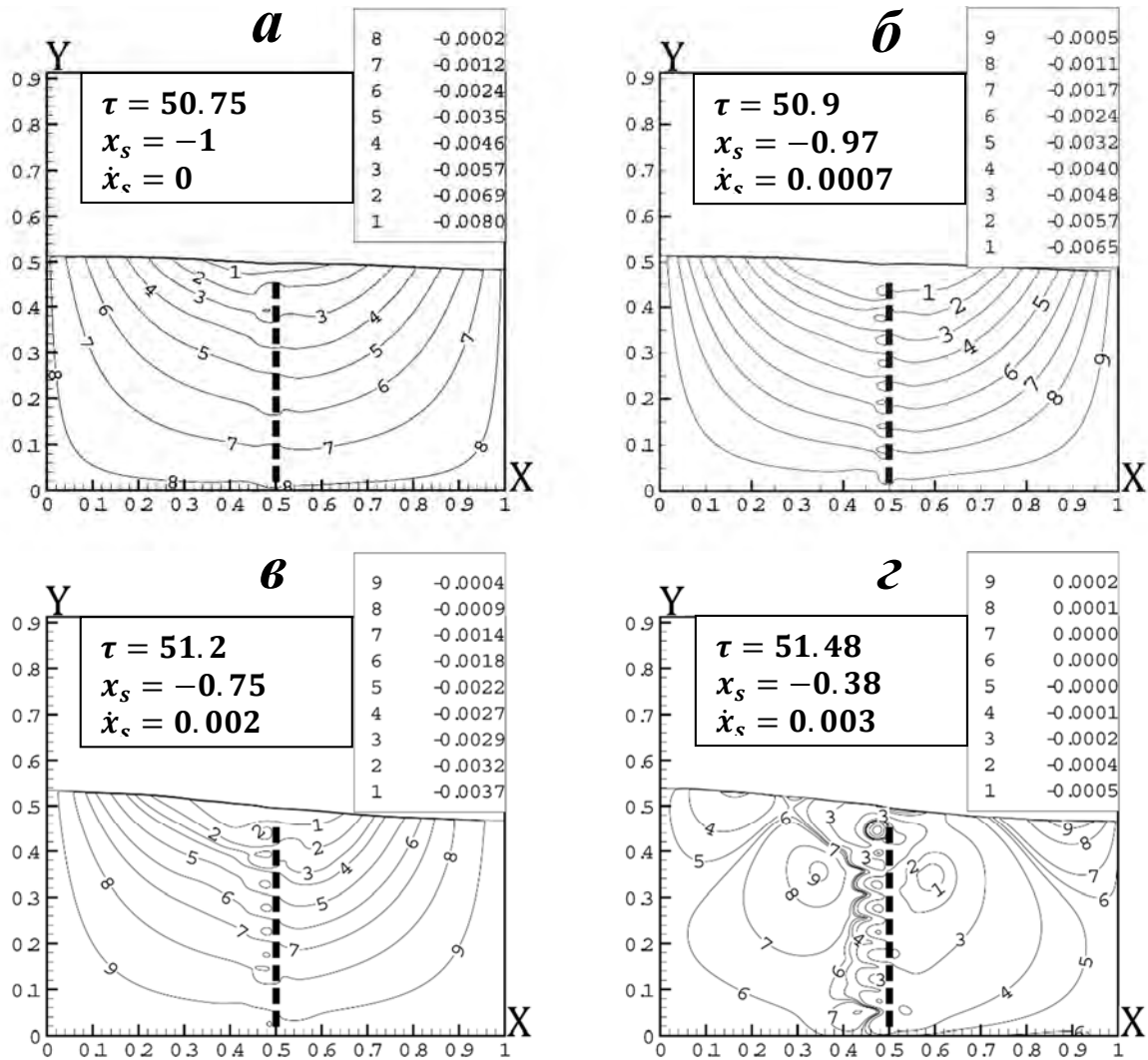


Рис. 6.1. Изолинии функции тока для случая вертикальной решетки высотой $h = 0.9$

Случай двух решеток (рис. 6.3) похож на случай одной решетки, причем мелкие вихревые структуры генерируются возле каждой пластины и интенсивность их тем выше, чем выше они расположены. Важно отметить, что в данном случае осуществляется влияние решеток друг на друга, следствием чего является рост интенсивности вихревого течения между решетками.

При увеличении расстояния между решетками их влияние друг на друга уменьшается, что приводит к снижению интенсивности вихревого течения и снижению диссипации энергии жидкости. На рис. 6.3б и на рис. 6.4 показаны картины течения в моменты времени, когда высота свободной поверхности максимальна у левой границы.

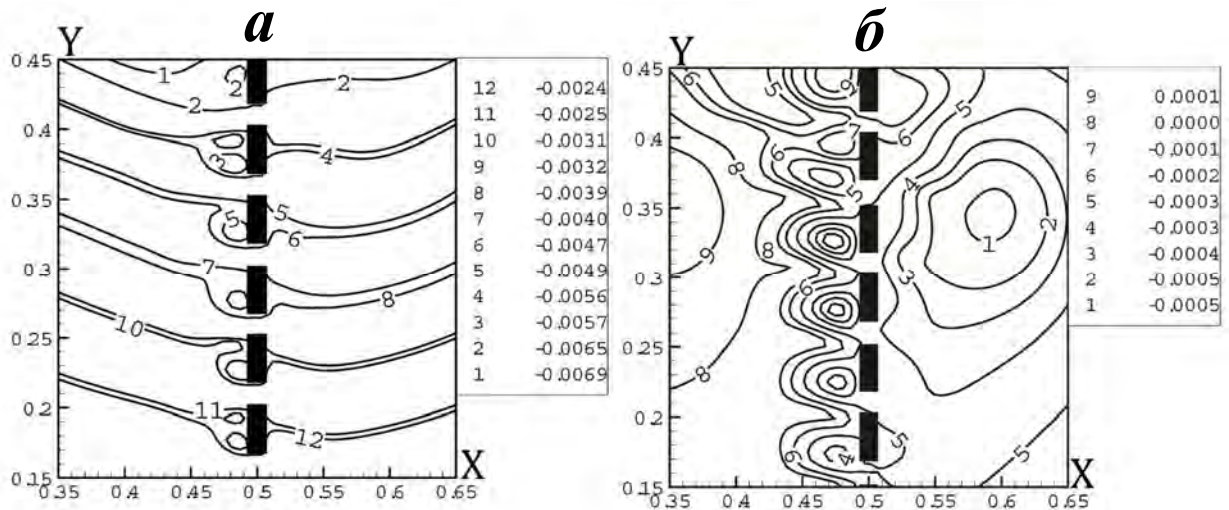


Рис. 6.2. Изолинии функции тока для случая вертикальной решетки высотой $h = 0.9$; $a - \tau = 51.2$, $b - \tau = 51.48$

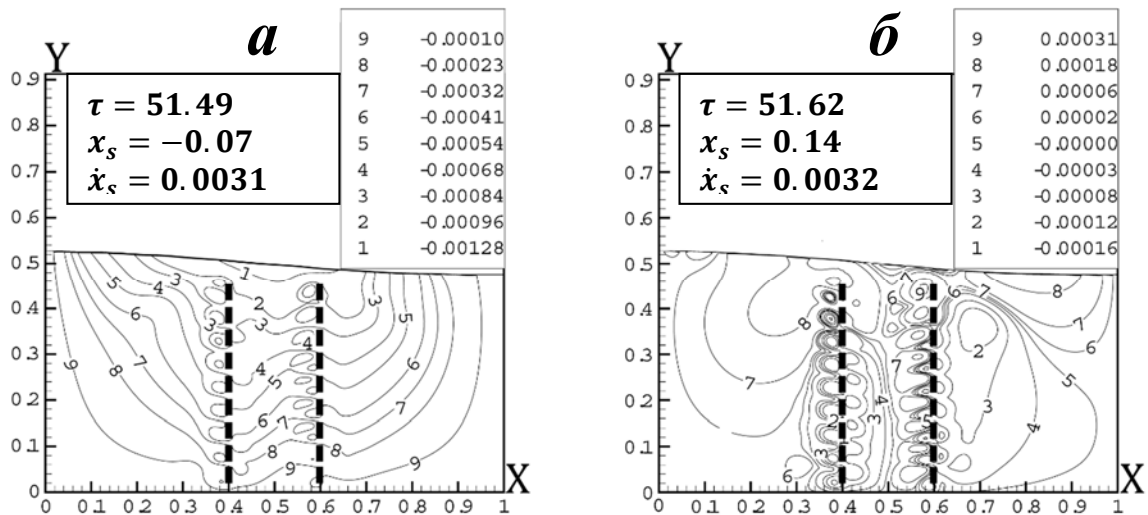


Рис. 6.3. Изолинии функции тока для случая двух вертикальных решеток высотой $h = 0.9$

На рис. 6.5 и рис. 6.6 изображены изолинии функции тока в колеблющемся прямоугольном сосуде в различные моменты времени при размещении в сосуде сплошных перегородок.

На рис. 6.5 показан случай двух вертикальных перегородок, размещенных на расстоянии 0.1 от центра полости. В момент времени, когда высота свободной поверхности у левой границы максимальна (полость, двигаясь вправо, проходит положение равновесия) наблюдаются три крупных

вихря, сопровождающих разворот потока жидкости в противоположную сторону (рис. 6.5а).

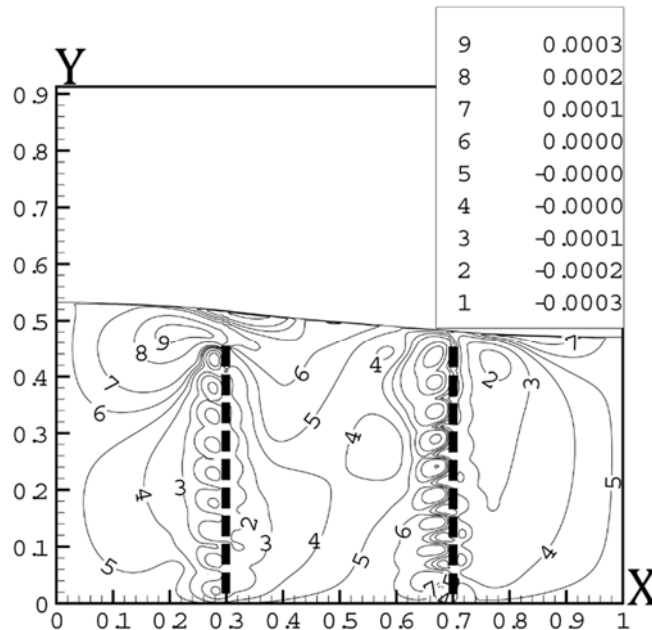


Рис. 6.4. Изолинии функции тока для случая двух вертикальных решеток высотой $h = 0.9$, расстояние между решетками 0.4 , $\tau = 51.53$

В дальнейшем у перегородок возникают вихри, вращающиеся против часовой стрелки (рис. 6.5б), величина которых растёт. Наконец в момент времени, когда высота свободной поверхности у левой границы минимальна (полость проходит положение равновесия, двигаясь влево), жидкость у свободной поверхности сворачивается в вихрь, который вращается в сторону, противоположную вращению вихрей, генерируемых перегородкой (рис. 6.5в). Далее поток жидкости разворачивается в противоположную сторону (рис. 6.5г).

На рис. 6.6 изображены изолинии функции тока для случая двух горизонтальных перегородок, расположенных симметрично относительно прямой $x = 0.5$ на высоте $h = 0.7$. В момент времени, когда полость проходит положение равновесия (6.6а), наблюдаются три вихря: один вихрь около правой перегородки и два вихря, вращающиеся в противоположные стороны, у левой перегородки. В процессе движения полости верхний левый вихрь

исчезает, разворачивая поток жидкости, при этом часть потока, взаимодействуя с правым вихрем, сворачивается в вихрь, который быстро затухает (6.6б). Далее, у кромки перегородки генерируется вихрь, который, развиваясь, разворачивает поток жидкости (6.6г,в), и картина периодически повторяется.

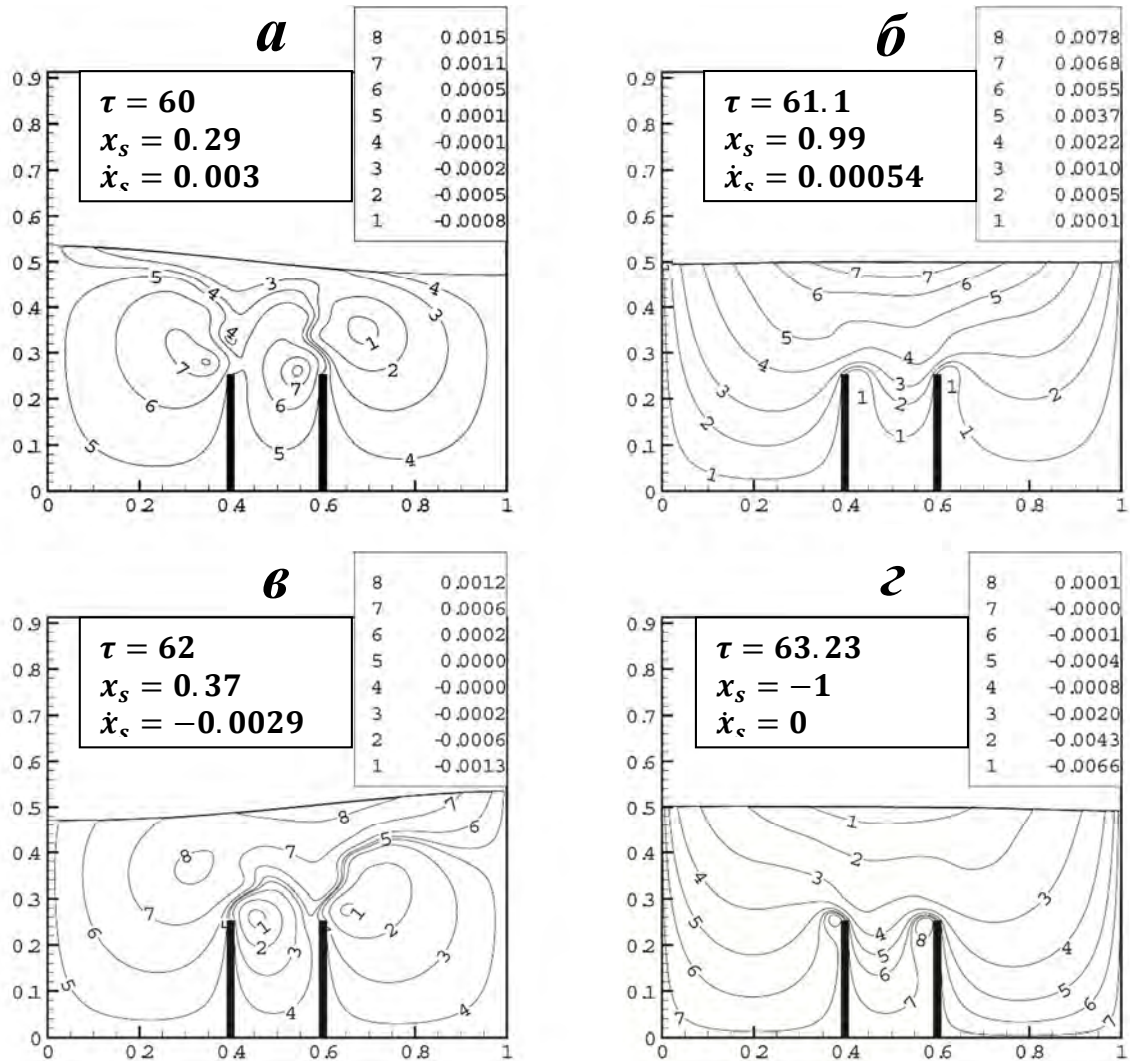


Рис. 6.5. Изолинии функции тока для случая двух вертикальных перегородок высотой $h = 0.9$

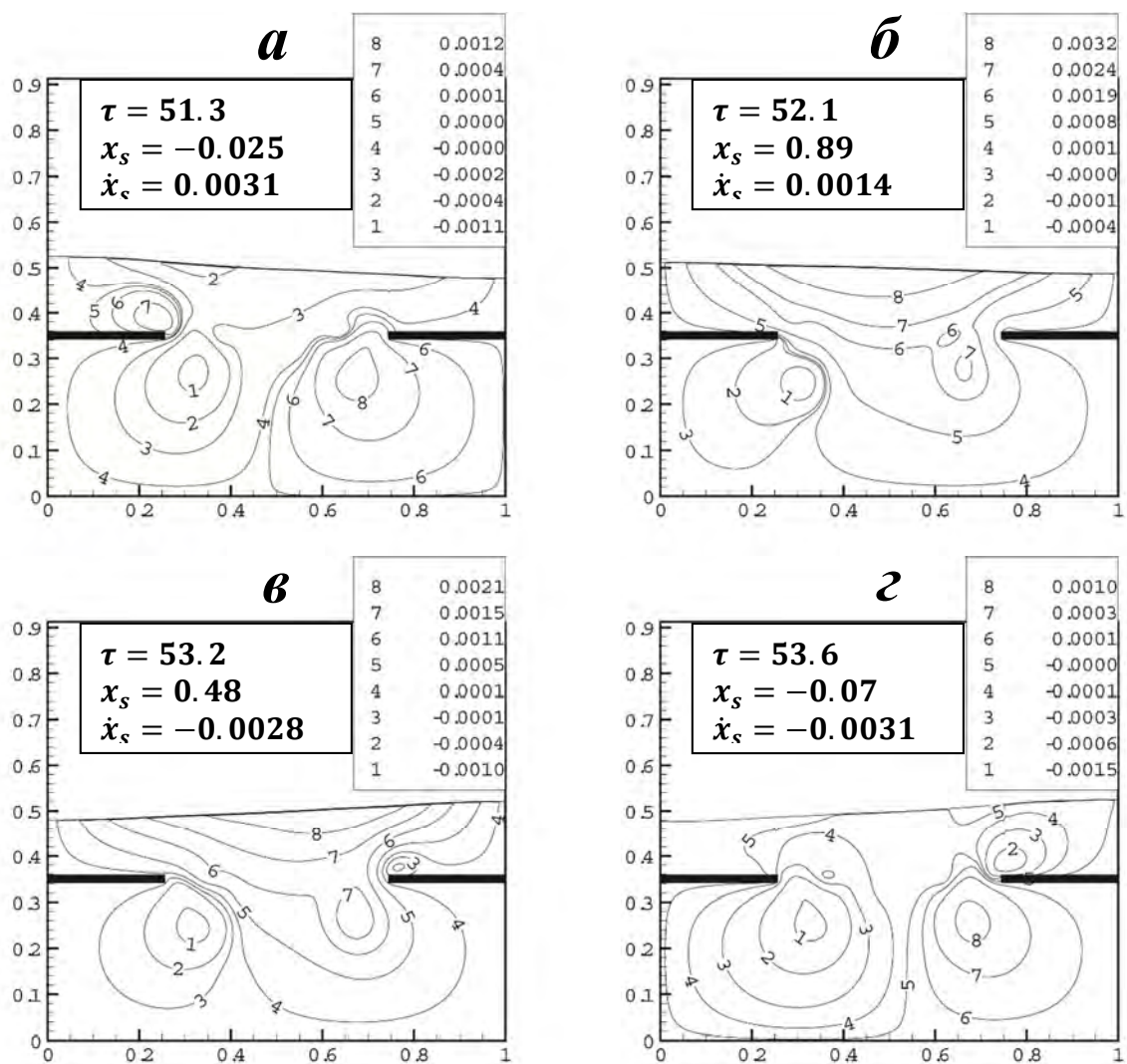


Рис. 6.6. Изолинии функции тока для случая двух горизонтальных перегородок высотой $h = 0.7$

6.2. Случай свободных колебаний

Рассмотрим результаты численного моделирования задачи о свободных прямолинейных колебаниях тела с полостью прямоугольной формы, частично заполненной жидкостью.

На рис. 6.7 изображена зависимость положения тела от времени для случаев, когда тело имеет полость с жидкостью с перегородкой и без и не имеет полости при $\mu = 0.01$, $\Omega = 1$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 0.005$

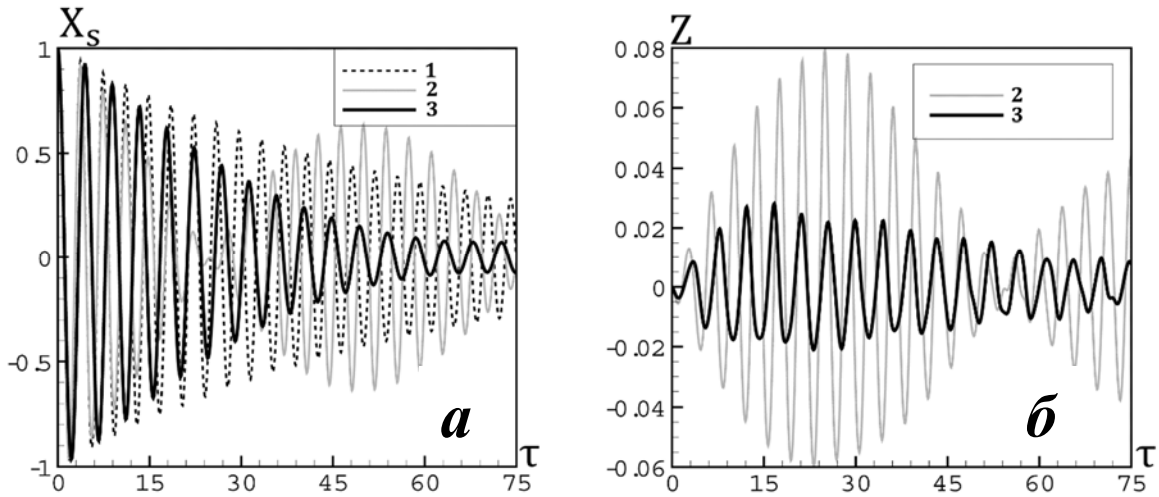


Рис 6.7. (а) – зависимость x_s от времени при $\varepsilon = 0.005$, (б) – изменение отклонения высоты свободной поверхности у левой границы полости, 1 – без полости с жидкостью, 2 – с полостью с жидкостью, 3 – с полостью, в которой размещена вертикальная перегородка $d = 0.7$

Как видно из этого рисунка, наличие полости с жидкостью приводит к росту скорости уменьшения амплитуды колебания тела только при $\tau < 25$. При большем времени амплитуда колебания тела периодически растет и уменьшается, т.е. наблюдаются биения. Наличие биений объясняется тем, что энергия колебания тела, переходящая в энергию движущейся жидкости, не успевает диссипировать и передается обратно телу. Следовательно, для повышения эффективности TLD необходимо интенсифицировать диссипативные процессы в жидкости.

Как отмечено в обзоре литературы, для того чтобы повысить диссипативные свойства TLD применяют различные конфигурации перегородок и решеток. В работе рассмотрены три типа таких конфигураций: вертикальные перегородки, горизонтальные перегородки и вертикальные решетки.

Рассмотрим влияние вертикальных перегородок на скорость диссипации энергии колебаний тела с полостью, содержащей жидкость.

Из рис. 6.7а видно, что размещение вставки в виде перегородки существенно повысило скорость диссипации энергии колебаний тела по

сравнению с полостью без перегородки, т.к. наличие перегородки приводит к увеличению диссипации энергии жидкостью, что приводит к уменьшению амплитуды колебания уровня жидкости в полости (рис. 6.7б).

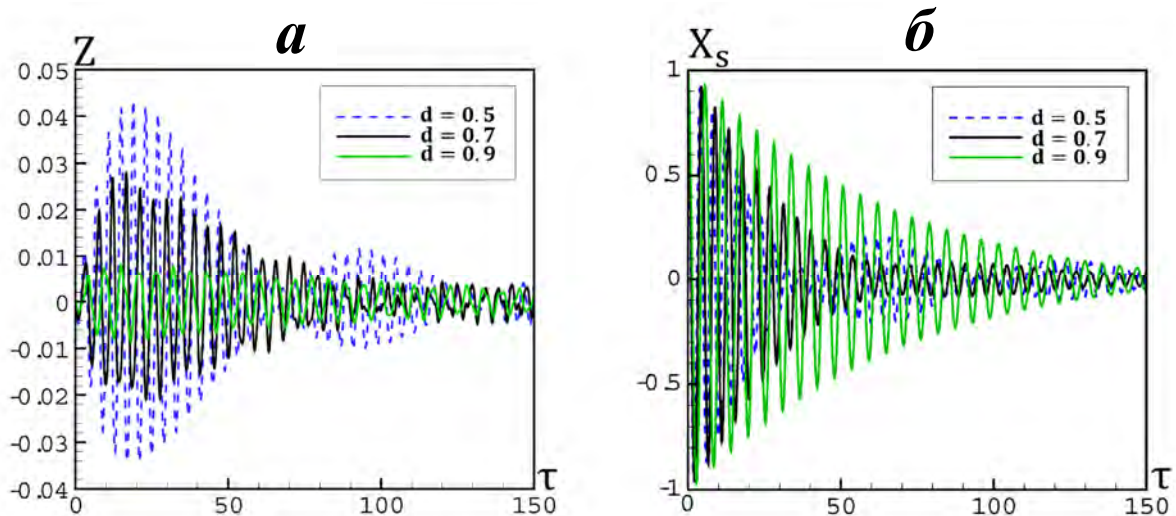


Рис. 6.8. (а) – изменение отклонения высоты свободной поверхности от начальной (Z) с течением времени у левой границы полости при размещении в полости перегородки, (б) – зависимость положения тела (x_s) от времени при размещении в полости перегородки при $\varepsilon = 0.005$

На рис. 6.8а показан график изменения отклонения высоты свободной поверхности от начальной у левой границы с течением времени при размещении в полости перегородок высотой: $d = 0.5$, $d = 0.7$ и $d = 0.9$.

Из этого графика видно, что увеличение высоты перегородки приводит к уменьшению амплитуды колебания свободной поверхности. Из данного факта следует, что увеличение высоты перегородки приводит к снижению влияния полости на движение тела и к уменьшению интенсивности биений вплоть до их полного затухания.

На рис. 6.8б показан график зависимости x_s от времени для случаев перегородок различной высоты. При $d = 0.5$ амплитуда колебания свободной поверхности и влияние полости на движение тела велики, что приводит к быстрому уменьшению амплитуды колебания тела в начальное время, однако наблюдаются биения колебаний. При увеличении высоты перегородки происходит уменьшение амплитуды биений, и при $d = 0.9$ биения вообще

отсутствуют, однако при таком значении d амплитуда колебания свободной поверхности мала, и эффективность TLD меньше, чем при более низких значениях d , что также хорошо видно из графика зависимости полной энергии системы, отнесенной к начальному значению, от времени (рис. 6.9). Таким образом, при высоте перегородки $d = 0.7$ наблюдается быстрое снижение амплитуды колебаний твердого тела при малой амплитуде биений колебания.

Увеличение числа перегородок не приводит к существенному изменению демпфирующих свойств жидкости в прямоугольной полости (рис. 6.10).

Рассмотрим влияние горизонтальных перегородок на затухание колебаний тела с прямоугольной полостью, частично заполненной жидкостью. На рис. 6.11 показано отклонение высоты свободной поверхности от начальной у левой границы и положение тела x_s в зависимости от времени.

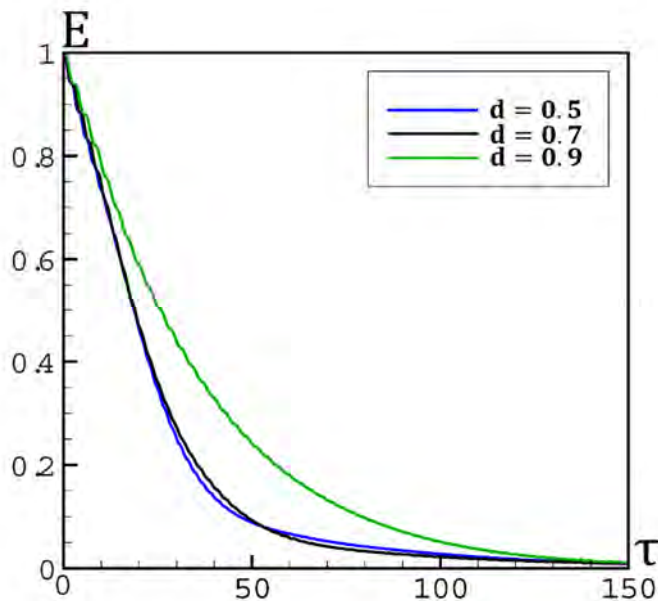


Рис. 6.9. Зависимость нормированной полной энергии системы от времени при размещении перегородки в полости при $\varepsilon = 0.005$

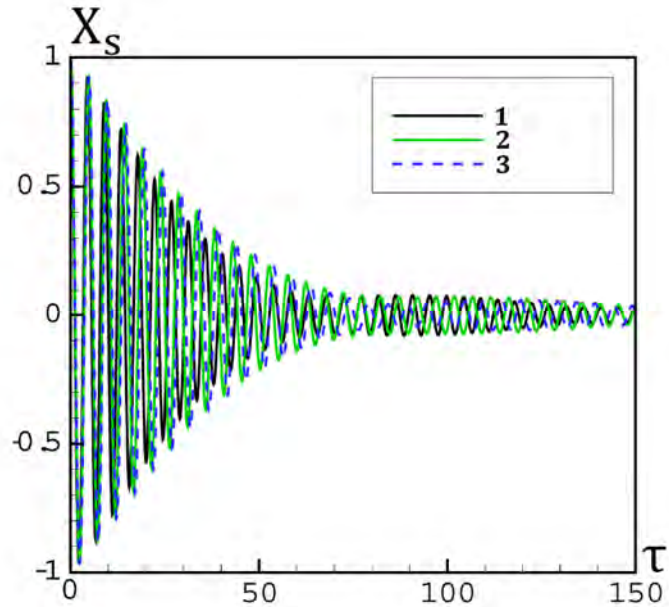


Рис. 6.10. Зависимость x_s от времени при $\varepsilon = 0.005$, 1 – одна перегородка, 2 – две перегородки, 3 – три перегородки, $d = 0.7$

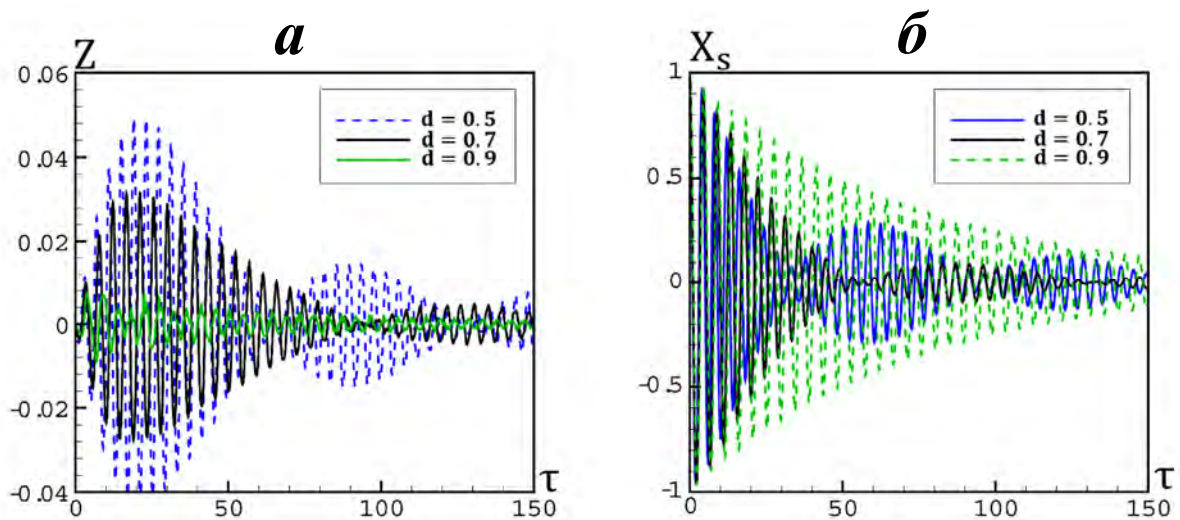


Рис. 6.11. (а) – Изменение отклонения высоты свободной поверхности от начальной с течением времени у левой границы полости при размещении в полости горизонтальных перегородок, (б) – зависимость x_s от времени при размещении в полости горизонтальных перегородок

Из данного рисунка видно, что увеличение высоты расположения горизонтальных перегородок приводит к уменьшению амплитуды колебания свободной поверхности, что аналогично случаю с вертикальной перегородкой. Следствием этого является существование высоты расположения перегородок, при которой диссипация энергии колебания твердого тела будет

наиболее быстрой. Как видно из рис. 6.11б, среди рассмотренных, такой высотой является $d = 0.7$.

Рассмотрим теперь влияние вертикальных решеток на затухание колебаний тела с прямоугольной полостью, частично заполненной жидкостью.

На рис. 6.12 изображена зависимость положения тела от времени для случаев расположения в полости решеток с относительной высотой пластин $S_n = 0.5$. Из данного рисунка видно, что при использовании двух решеток скорость диссипации энергии колебаний выше по сравнению с одной решеткой. Применение трех и более решеток слабо сказывается на скорости диссипации энергии (рис. 6.13), однако усложняет конструкцию TLD.

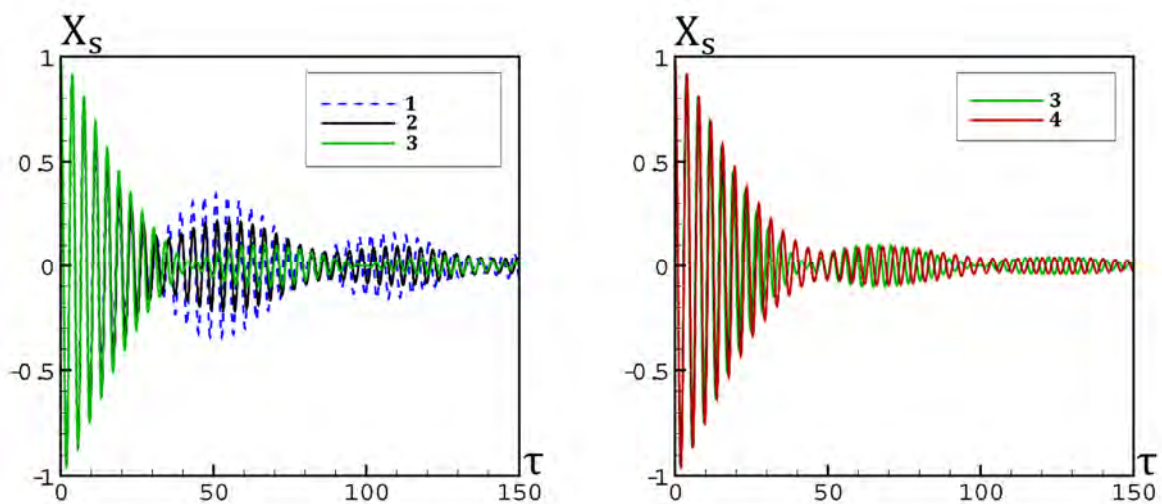


Рис. 6.12. Зависимость x_s от времени при размещении вертикальных решеток в полости, 1 – одна решетка, $d = 0.7$, 2 – одна решетка, $d = 0.9$, 3 – две решетки, $d = 0.9$, 4 – три решетки, $d = 0.9$

Рассмотрим влияние параметра S_n (относительная длина пластин решеток) на диссипацию энергии колебаний тела с прямоугольной полостью с вертикальными решетками. На рис. 6.13 изображена зависимость x_s от времени и нормированная полная энергия системы для случаев размещения в полости двух решеток с $S_n = 0.4, 0.5, 0.6$ при $\varepsilon = 0.005$. Как видно из этого рисунка, при использовании решеток с $S_n = 0.5$ скорость диссипации энергии колебаний тела выше по сравнению с $S_n = 0.4$. Увеличение значения S_n до 0.6

еще уменьшает амплитуду биений колебаний, однако при этом снижается диссипация энергии на время $\tau < 50$. Как видно из рисунка, скорость диссипации энергии для случая $S_n = 0.6$ мало отличается от скорости диссипации энергии для случая $S_n = 0.5$ по сравнению с отличием между $S_n = 0.5$ и $S_n = 0.4$.

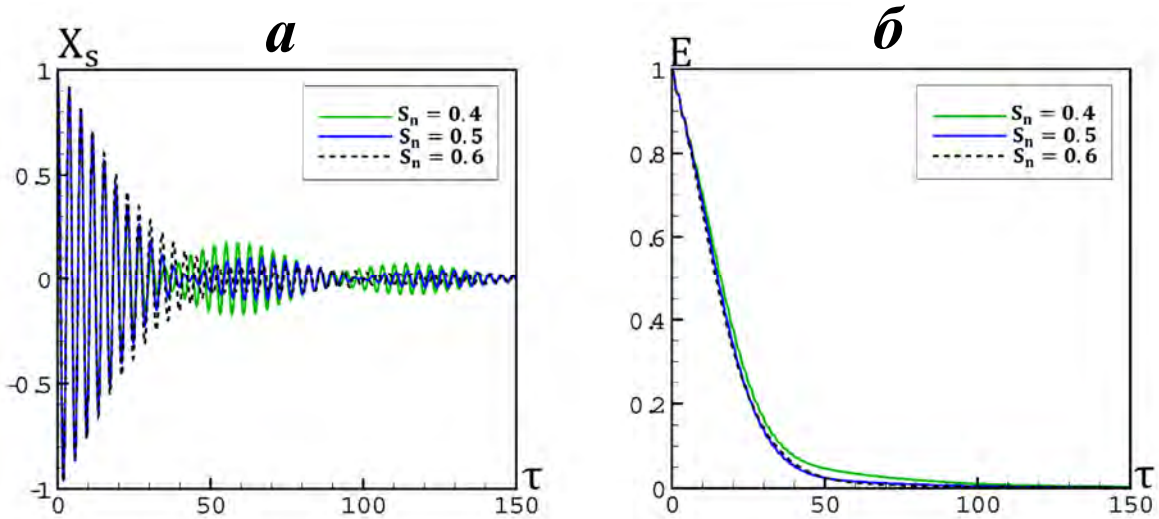


Рис. 6.13. **(а)** – Зависимость x_s от времени при размещении двух вертикальных решеток в полости, **(б)** – зависимость нормированной полной энергии от времени при $\varepsilon = 0.005$

Так как система является нелинейной, то ее поведение зависит от амплитуды воздействия. На рис. 6.14 изображена зависимость x_s и нормированной полной энергии от времени при наличии двух решеток в полости и значении параметра, отвечающего за начальную энергию системы: $\varepsilon = 0.001$. Из этого рисунка видно, что диссипация энергии максимальная при $S_n = 0.7$, в этом случае биения отсутствуют. При $S_n = 0.6$ скорость диссипации энергии мало отличается от скорости диссипации энергии при $S_n = 0.7$, но амплитуда отклонения конструкции в этом случае меньше, чем в случае $S_n = 0.7$, за исключением лишь некоторых моментов времени, когда отклонение максимально.

Случай $\varepsilon = 0.01$ показан на рисунке 6.15. В этом случае скорость диссипации энергии максимальна при $S_n = 0.5$. Причем среди трех случаев

$\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.005$ и $\varepsilon = 0.01$, именно при $\varepsilon = 0.01$ скорость диссипации энергии максимальная.

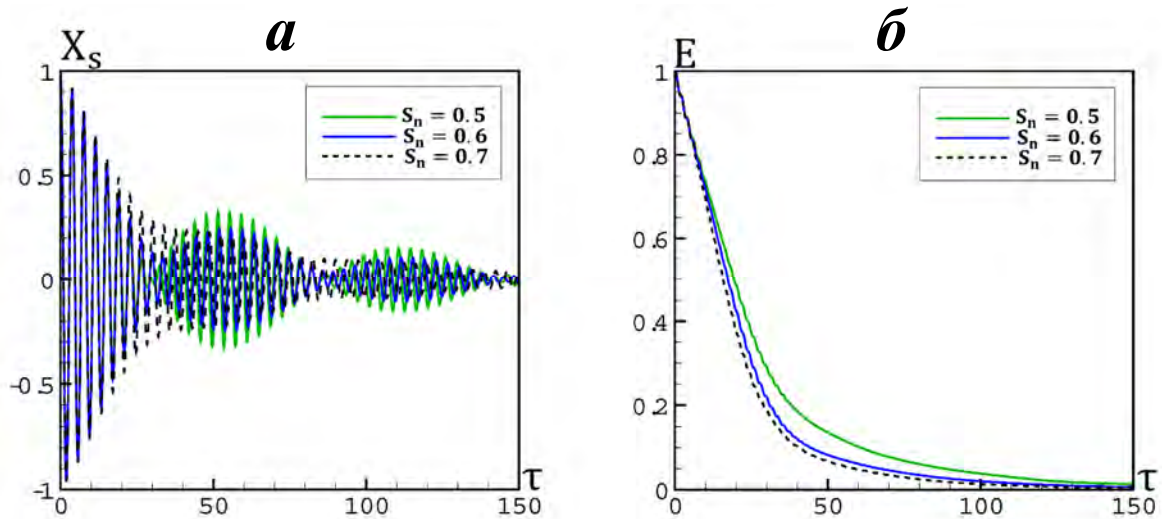


Рис. 6.14. **(а)** – Зависимость x_s от времени при размещении двух вертикальных решеток в полости, **(б)** – зависимость нормированной полной энергии от времени при $\varepsilon = 0.001$

Таким образом, в зависимости от значения параметра ε эффективными оказываются TLD с различными конфигурациями решеток. Это говорит о том, что учет изменения геометрических характеристик демпферов (решеток) в полости в зависимости от амплитуды колебания конструкции приведет к повышению эффективности TLD. В частности, можно использовать решетки с пластинами, которые могут менять угол наклона в зависимости от начальной энергии (энергии внешнего воздействия), что позволит изменять эффективную площадь пластин. Конечно, вопрос о разработке эффективной TLD, способной динамически подстраиваться под интенсивность внешнего воздействия остается открытым, однако даже на данном уровне исследования TLD можно утверждать, что «полуактивные» системы гашения колебаний эффективнее полностью пассивных систем.

Наконец, приведем сравнение эффективности TLD в случаях размещения в полости вертикальной перегородки, двух вертикальных решеток и двух горизонтальных перегородок. Как видно из рис. 6.16, при использовании двух вертикальных решеток скорость диссипации энергии

максимальна по сравнению с другими случаями. Кроме того, как уже говорилось выше, применение решеток позволяет путем изменения параметра S_n подстраивать TLD под конкретные значения интенсивности внешнего воздействия.

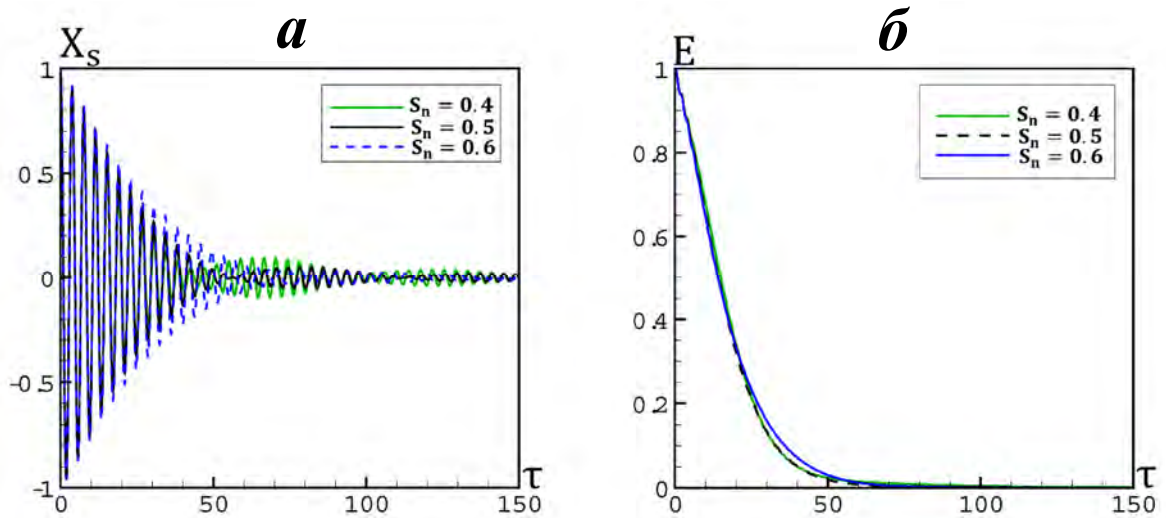


Рис. 6.15. (а) – Зависимость x_s от времени при размещении двух вертикальных решеток в полости, (б) – зависимость нормированной полной энергии от времени при $\varepsilon = 0.01$

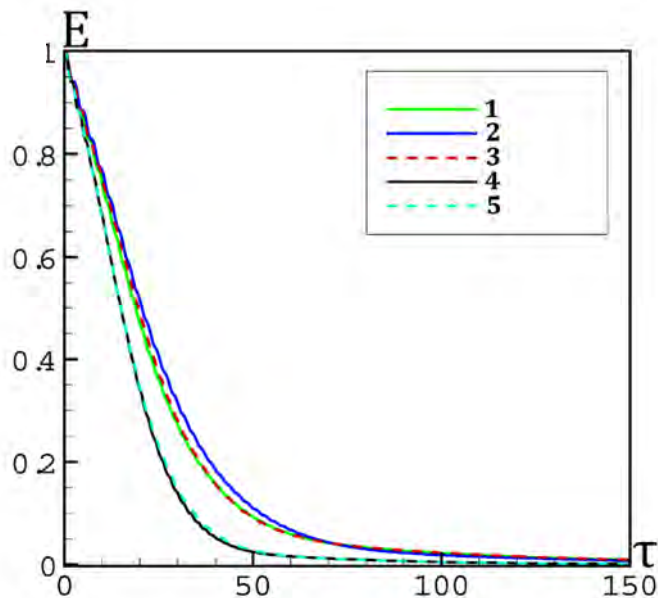


Рис. 6.16. Зависимость нормированной полной энергии от времени при $\varepsilon = 0.005$, 1 – одна перегородка ($d = 0.7$), 2 – две перегородки ($d = 0.7$), 3 – две горизонтальные перегородки ($d = 0.7$), 4 – две решетки, 5 – три решетки

6.2. Случай вынужденных колебаний

Рассмотрим теперь результаты численного моделирования задачи о вынужденных прямолинейных колебаниях тела с полостью прямоугольной формы, частично заполненной жидкостью.

На рис. 6.17 изображен график зависимости x_s от времени при воздействии на конструкцию с силой, изменяющейся по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной, для случаев без TLD ($\beta = 1$) и с TLD ($\beta = 1.03$). Из данного рисунка видно, что использование TLD снижает амплитуду отклонения конструкции, однако, как и в случае свободных колебаний, для увеличения скорости диссипации энергии необходимо применять различные демпферы (перегородки, решетки).

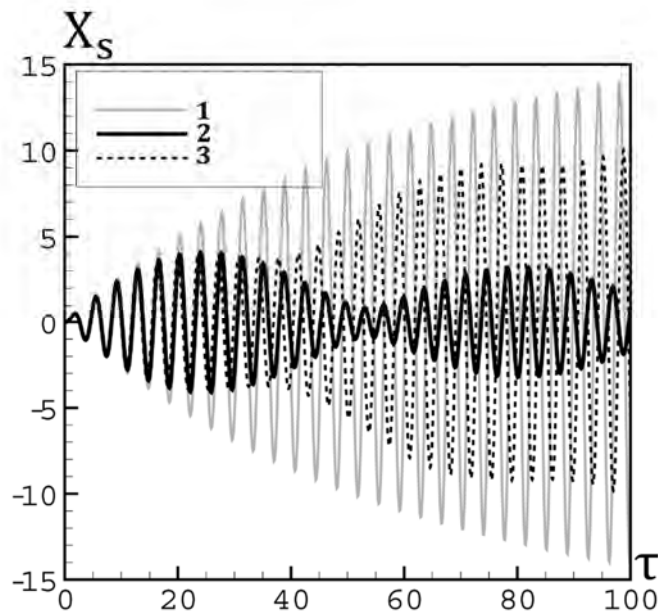


Рис. 6.17. Зависимость x_s от времени, 1 – случай без TLD ($\beta = 1$), 2 – случай с TLD ($\beta = 1.03$), 3 – случай с TLD ($\beta = 1$)

На рис. 6.18-6.20 изображены графики зависимости амплитуды колебания тела в установившемся режиме от относительной частоты внешнего воздействия. Используем данные зависимости для оценки эффективности

TLD. Для этого рассмотрим три параметра, характеризующие данные зависимости: $\bar{X}_S$ – среднее значение амплитуды колебаний, $X_{S_{max}}$ – максимальное значение амплитуды колебаний и σ_S – среднеквадратичное отклонение амплитуды колебаний от среднего значения (характеризует устойчивость TLD к изменению частоты внешнего воздействия):

$$\bar{X}_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{S_i}, \sigma_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{S_i} - \bar{X}_S)^2.$$

В таблице 6.1 указаны значения данных параметров для случаев изображенных на рис. 6.18-6.20:

Таблица 6.1

Одна перегородка	$\bar{X}_S$	σ_S	$X_{S_{max}}$
$d = 0.2$	4.2	2.17	9.19
$d = 0.3$	4.13	1.45	7.17
$d = 0.4$	4.56	1.63	8.03
Одна решетка	$\bar{X}_S$	σ_S	$X_{S_{max}}$
$d = 0.5$	4.22	1.95	8.08
$d = 0.7$	4.16	1.53	7.33
$d = 0.9$	4.41	1.46	7.11
Две решетки	$\bar{X}_S$	σ_S	$X_{S_{max}}$
$S_n = 0.3$	4.25	1.37	7.13
$S_n = 0.4$	4.33	1.27	6.09
$S_n = 0.5$	4.47	1.54	6.84
$S_n = 0.6$	4.49	2.06	8.67
Три решетки	$\bar{X}_S$	σ_S	$X_{S_{max}}$
$S_n = 0.3$	4.51	1.92	8.88
$S_n = 0.4$	4.6	1.69	7.48
$S_n = 0.5$	4.74	1.84	7.89
$S_n = 0.6$	4.95	2.31	9.82

На рис. 6.18 изображен случай прямоугольной полости со вставкой в центре в виде вертикальной перегородки. В данном случае зависимость амплитуды колебаний от относительной частоты внешнего воздействия имеет два максимума. Из таблицы видно, что параметры, характеризующие

эффективность TLD, немонотонно зависит от высоты перегородки и принимают минимальные значения в случае $d = 0.3$.

Как показано в предыдущем пункте, и как видно из таблицы, использование решеток в качестве гасителей колебаний жидкости является предпочтительным по сравнению со сплошными перегородками. Действительно, $X_{S_{max}}$ и σ_S принимают минимальные значения в случае размещения в полости двух решеток с относительной длиной пластин $S_n = 0.4$.

На рис. 6.19 изображена зависимость амплитуды колебаний тела от относительной частоты для случая размещения решетки в центре полости. Как видно из данного графика при высоте решетки $d = 0.5$ зависимость имеет два ярко выраженных максимума, при увеличении высоты решетки разность между максимумом и минимумом уменьшается, так что при $d = 0.9$ остается только один максимум.

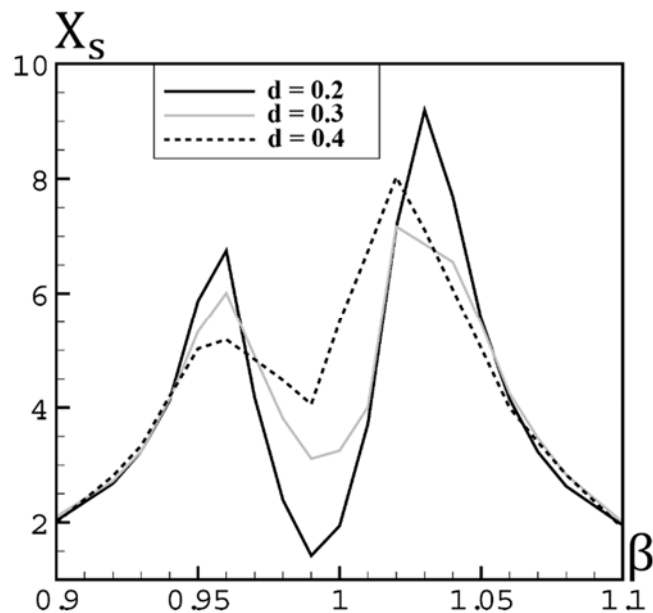


Рис. 6.18. Зависимость амплитуды колебания конструкции от внешней частоты в случае размещения перегородки в центре полости

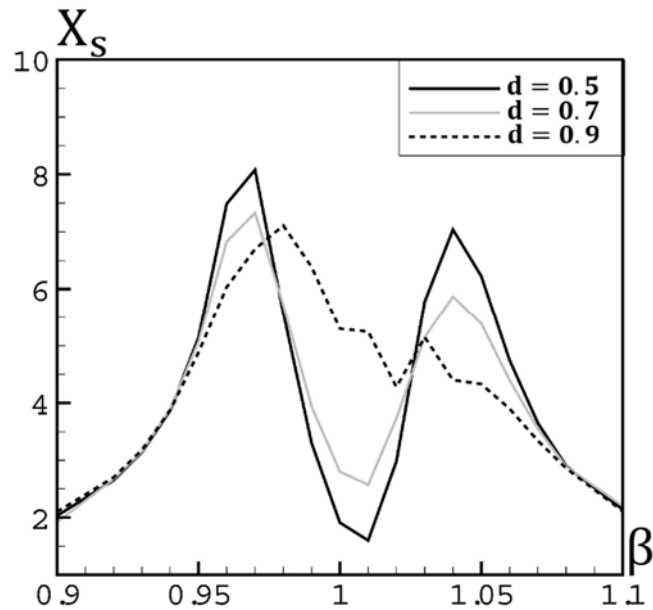


Рис. 6.19. Зависимость амплитуды колебания конструкции от внешней частоты в случае размещения решетки в центре полости

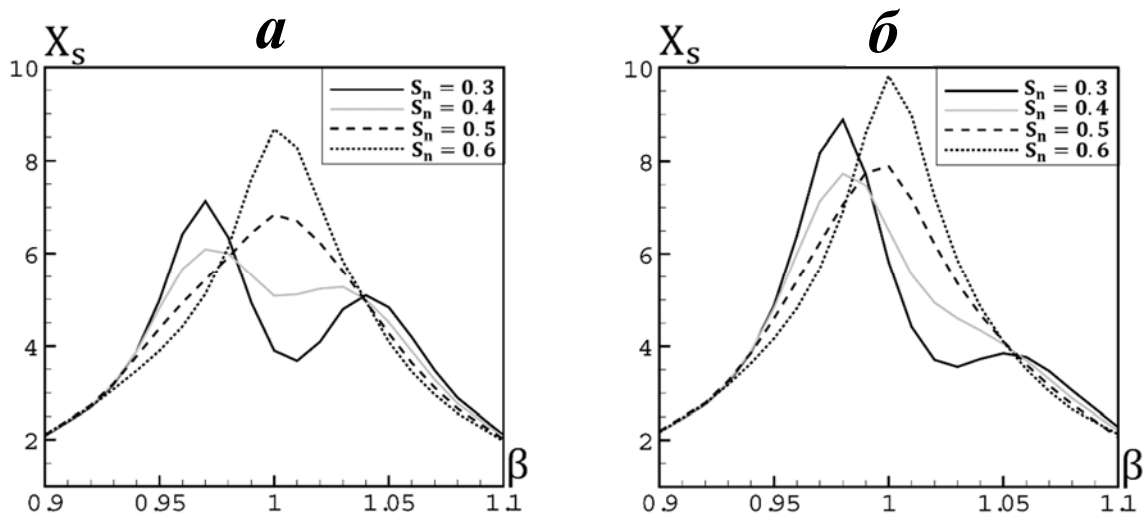


Рис. 6.20. Зависимость амплитуды колебания конструкции от внешней частоты, (а) – две решетки, $d = 0.9$, (б) – три решетки, $d = 0.9$

Зависимость амплитуды колебаний тела от относительной частоты для случая размещения двух решеток изображена на рис. 6.20а. Как видно из этого рисунка, увеличение относительной длины пластин приводит к тому, что два локальных максимума переходят в один, причем величина максимума растет с ростом S_n . При применении трех решеток, отстоящих друг от друга на расстоянии $0.2L$, величина локального максимума возрастает (рис. 6.20б).

На рис. 6.21 показана зависимость амплитуды колебания высоты свободной поверхности у левой границы для случаев размещения одной и двух решеток. Из данного рисунка видно, что с ростом высоты одной решетки, а затем и ростом относительной длины пластин для случая двух решеток максимальное значение амплитуды колебания свободной поверхности уменьшается. Можно сделать следующий вывод об изменении зависимости амплитуды колебаний тела от частоты внешнего воздействия при изменении амплитуды колебания свободной поверхности. При малом демпфирующем эффекте вставок, когда амплитуда колебания свободной поверхности велика, зависимость x_s от β имеет два ярко выраженных локальных максимума. При уменьшении амплитуды колебания свободной поверхности происходит уменьшение разности между максимумами и минимумом, которые затем переходят в один максимум. При дальнейшем уменьшении амплитуды колебания свободной поверхности происходит рост локального максимума. Исходя из сказанного выше, можно так подобрать амплитуду колебания свободной поверхности путем применения решеток с различным значением S_n , чтобы либо уменьшить полуширину кривой, но увеличить максимум (две решетки, $S_n = 0.6$), либо уменьшить максимум, но увеличить полуширину амплитудно-частотной кривой (две решетки, $S_n = 0.4$). Кроме того, изменение параметров $X_{S_{max}}$ и σ_S при изменении демпфирующего эффекта вставок (амплитуды колебания высоты свободной поверхности) происходят не монотонно. Данные параметры принимают минимальное значение в случае размещения двух решеток при $S_n = 0.4$.

Выше говорилось об установившихся колебаниях тела с полостью, но для разработки TLD также представляют интерес максимальные значения отклонения тела от положения равновесия. Кривая зависимости максимального отклонения тела от положения равновесия от относительной частоты внешнего воздействия изображена на рис. 6.22. Из данного рисунка видно, что максимальные значения отличаются от значений в установившемся

режиме только при частотах, лежащих вне некоторого диапазона, включающего собственную частоту конструкции.

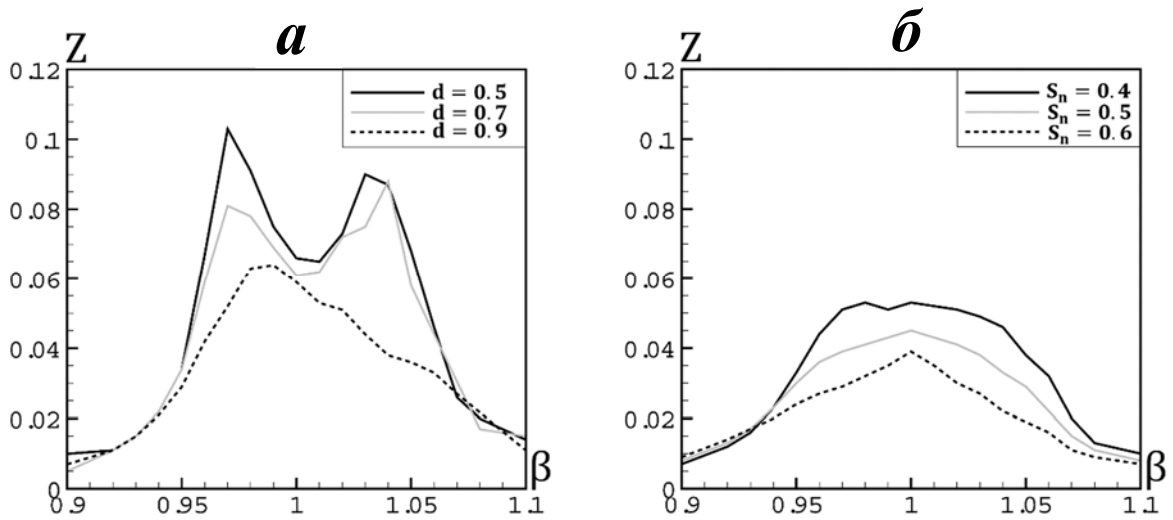


Рис. 6.21. Зависимость отклонения высоты свободной поверхности от времени, (а) – одна решетка, $S_n = 0.5$, (б) – две решетки, $d = 0.9$

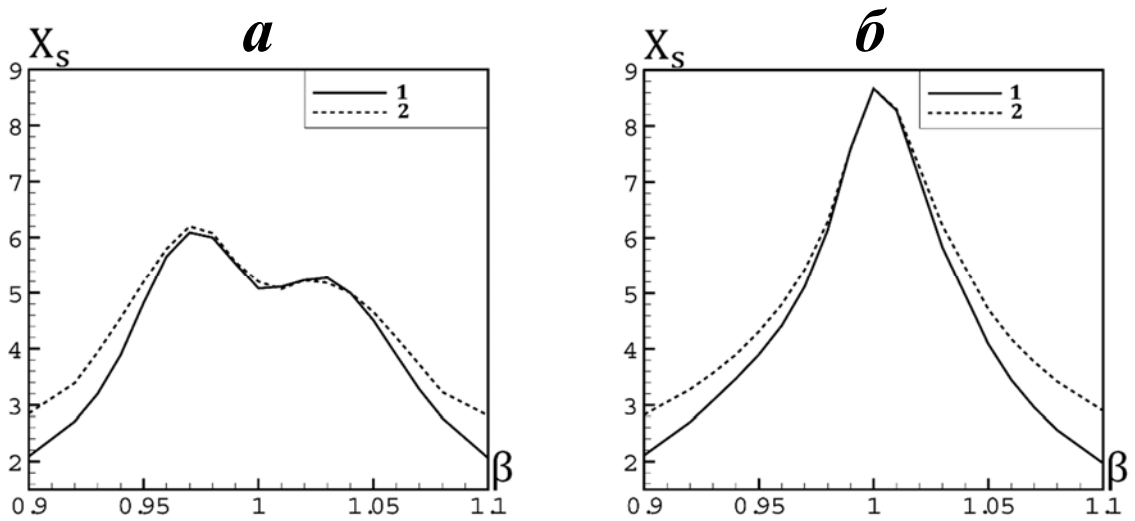


Рис. 6.22. Зависимость амплитуды колебания конструкции от внешней частоты в случае размещения двух решеток в полости, (а) – $S_n = 0.4$, (б) – $S_n = 0.6$, 1 – значения в установившемся режиме, 2 – максимальные значения

6.3. Заключение к главе 6

В результате численного моделирования задачи о затухающих свободных колебаниях конструкции, состоящей из твердого тела и полости, частично заполненной жидкостью, получили, что размещение в полости двух решеток увеличивает скорость диссипации энергии по сравнению с другими рассмотренными случаями. Кроме того, применение решеток позволяет изменением эффективной площади пластин путем их поворота, подстраивать TLD под конкретные значения начальной энергии тела с полостью. В задаче о вынужденных колебаниях полости показано, что повышение интенсивности диссипативных процессов в жидкости путем размещения в полости различных вставок приводит к качественному изменению амплитудно-частотной характеристики конструкции при изменении частоты внешнего воздействия в окрестности собственной частоты конструкции: два локальных максимума переходят в один. На основе анализа зависимостей амплитуды колебания тела от относительной частоты внешнего воздействия показано, что при заданной амплитуде внешнего воздействия наиболее эффективно рассеивает энергию полость с двумя решетками с относительной длиной пластин $S_n = 0.4$. Представлены картины течения жидкости в полости при ее установившихся колебаниях. Показано, что в случае размещения перегородок и решеток смена направления течения сопровождается серией вихревых структур, которые возникают при их обтекании. Также показано, что размещение нескольких решеток приводит к интенсификации вихревого течения жидкости между решетками, что является причиной увеличения скорости диссипации энергии колебаний тела с полостью, в которой размещены несколько решеток, по сравнению с другими рассмотренными случаями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численно исследована динамика вращательного движения полностью заполненного сосуда различной формы и поступательного движения твердого тела с полостью прямоугольной формы, частично заполненной жидкостью. Рассмотрены плоские колебания и движение вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести тела с полостью, полностью заполненной жидкостью и прямолинейные колебания твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью.

Для задач с полностью заполненной полостью получены следующие результаты. В пределах изменения начальной гироскопической угловой скорости $0 \leq \omega_{z_0} \leq 200$ можно выделить три различных режима движения тела. При $\omega_{z_0} = 0$ движение тела представляет собой плоские колебания с уменьшающейся амплитудой колебания. При $\omega_{z_0} > 0$ движение тела с жидкостью в полости приобретает трехмерный характер. В пределе большого времени движение тела выходит на стационарное вращение вокруг вертикальной оси – регулярную прецессию, причем переход к регулярной прецессии осуществляется различными способами при различных значениях начальной гироскопической угловой скорости. При $0 < \omega_{z_0} \lesssim 80$ переход к регулярной прецессии осуществляется через колебания с поворотом плоскости колебаний, при $80 \lesssim \omega_{z_0}$ через вращение вокруг оси, колеблющейся около начальной оси вращения с амплитудой, уменьшающейся с ростом ω_{z_0} .

Выявлена немонотонная зависимость характерного времени выхода на стационарное движение от величины Re_Ω . Найдены значения Re_Ω , при которых это время минимально. Для плоских колебаний маятника квадратной формы это значение Re_Ω зависит от угла начального отклонения: $Re_\Omega = 13$ при $\varphi_0 = \pi/4$, $Re_\Omega = 14$ при $\varphi_0 = \pi/2$ и $Re_\Omega = 15$ при $\varphi_0 = 3\pi/4$. Для

колебаний маятника в форме эллипса данное значение Re_{Ω} зависит еще от отношения малой полуоси к большой: $Re_{\Omega} = 10$ при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\frac{a}{b} = 0.5$.

Приведены картины течения жидкости при плоских колебаниях полостей различной формы. Основная масса жидкости вовлечена в движение в центральном вихре, направление вращения которого меняется в соответствии с движением полости, и изменение направления сопровождается возникновением вторичных вихревых течений.

Для задачи о свободных колебаниях прямоугольной полости, частично заполненной жидкостью, проведено сравнение влияния различных вставок на скорость диссипации энергии колебаний тела движущейся жидкостью в полости. Рассмотрены три типа вставок: вертикальные перегородки, горизонтальные перегородки и вертикальные решетки. В результате расчетов можно сделать вывод о том, что применение решеток увеличивает скорость диссипации энергии колебаний тела по сравнению со сплошными перегородками. Оптимальным является применение двух решеток, т.к. использование большого количества решеток слабо сказывается на скорости диссипации энергии, но приводит к усложнению конструкции TLD. Показано изменение относительной высоты пластин решеток, при которой скорость диссипации энергии колебаний максимальна, от начального отклонения тела с полостью: $S_n \approx 0.7$ при $\varepsilon = 0.001$, $0.5 < S_n < 0.6$ при $\varepsilon = 0.005$ и $0.4 < S_n < 0.5$ при $\varepsilon = 0.01$. Таким образом, меняя эффективную площадь пластин решеток путем изменения их угла наклона относительно потока жидкости, можно контролировать интенсивность диссипативных процессов в жидкости, что позволяет в реальном времени подстраивать TLD под конкретные значения амплитуды колебания конструкции.

В задаче о вынужденных колебаниях получены зависимости амплитуды колебания конструкции от относительной частоты внешнего воздействия для различных вариантов размещения в полости перегородок и решеток. На основе анализа данных зависимостей показано, что при заданной амплитуде

внешнего воздействия наиболее эффективно рассеивает энергию полость с двумя решетками с относительной длиной пластин $S_n = 0.4$. Также проведен анализ течения жидкости в полости при установившихся колебаниях. Показано, что размещение нескольких решеток приводит к интенсификации вихревого течения жидкости между решетками, что является причиной увеличения скорости диссипации энергии колебаний тела с полостью, в которой размещены несколько решеток, по сравнению с другими рассмотренными случаями. Причем интенсивность течения между решетками зависит от расстояния между ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes G. Mathematical and physical papers. Vol. 1. Cambridge, 1880. 335 p.
2. Neumann C. Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig, 1883. 368 p.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 930 с.
4. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною каплею жидкостью. Избранные сочинения. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 31–152.
5. Greenhill A.G. On the general motion of a liquid ellipsoid. Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 4. 1880. P. 4–14.
6. Hough S.S. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1895. Vol. 186. P. 469–506.
7. Poincare H. Sur la precession des corps deformables // Bulletin Astronomique. 1910. Vol. 27. P. 321–356.
8. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // ПМТФ. 1960. Т. 1(3). С. 20–55.
9. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // ПМТФ. 1960. Т. 1(3). С. 65–75.
10. Румянцев В.В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21(6). С. 740–748.
11. Жак С.В. Об устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа, содержащего жидкие массы // ПММ. 1958. Т. 22. С. 245–249.
12. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения: Собр. соч. М.: АН СССР. 1956. Т. 2. С. 7–271.
13. Четаев Н.Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21(2). С. 157–168.

14. Румянцев В.В. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением // ПММ. 1959. Т. 23(6). С. 1057–1065.
15. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1957. № 4. С. 9–16.
16. Румянцев В.В. Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движения твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Мех. и машиностр. 1963. № 6. С. 119–140.
17. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью // ПММ. 1960. Т. 24(4). С. 603–609.
18. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30(5). С. 922–933.
19. Румянцев В.В. Об устойчивости равномерных вращений механических систем // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механ. и машиностр. 1962. № 6. С. 113–121.
20. Румянцев В.В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. 1962. Т. 26(6). С. 977–991.
21. Колесников Н.Н. Об устойчивости свободного твердого тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью // ПММ. 1962. Т. 26(4). С. 606–612.
22. Пожарицкий Г.К. О влиянии вязкости на устойчивость равновесия и стационарных вращений твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // ПММ. 1964. Т. 28(1). С. 60–68.
23. Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ. 1963. Т. 27(1). С. 16–26.
24. Малашенко С.В., Темченко М.Е. Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью // ПМТФ. 1960. Т. 1(3). С. 76–80.

25. Руденко Т.В. Об устойчивости стационарных движений гиростата с жидкостью в полости // ПММ. 2002. Т. 66(2). С. 183–191.
26. Карапетян А.В., Проконина О.В. Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением // ПММ. 2000. Т. 64(1). С. 85–91.
27. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. Об устойчивости вращения на струне твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30(1). С. 30–41.
28. Карапетян А.В., Сумин Т.С. Перманентные вращения подвешенного на стержне тела с вязким наполнителем // ПММ. 2008. Т. 72(3). С. 355–373.
29. Досаев М.З., Самсонов В.А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем // ПММ. 2002. Т. 66(3). С. 427–433.
30. Слезкин Н.А. Динамика вязкой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 521 с.
31. Краснощеков П.С. Малые колебания твердого тела, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью // ЖВМ и МФ. 1966. Т. 6(4). С. 258–266.
32. Моисеев Н.Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье–Стокса в случае, когда вязкость мала // ЖВМ и МФ. 1961. Т. 1(3). С. 548–550.
33. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12(5). С. 3–122.
34. Найфэ А.Х. Методы возмущения: Пер. с англ.-М.: Мир, 1976. 474 с.
35. Краснощеков П.С. О колебаниях физического маятника, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью // ПММ. 1963. Т. 27(2). С. 193–202.
36. Иевлева О.Б. Малые колебания маятника со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью // ПММ. 1964. Т. 28(6). С. 1132–1134.
37. Иевлева О.Б. О колебаниях тела, наполненного вязкой жидкостью // ПМТФ. 1966. Т. 7(6). С. 27–34.

38. Greenspan H.P., Howard L.N. On a time dependent motion of a rotating fluid // Journal of fluid mechanics. 1963. Vol. 17(3). P. 385–404.
39. Greenspan H.P. On the transient motion of a contained rotating fluid // Journal of fluid mechanics. 1964. Vol. 20(4). P. 673–696.
40. Greenspan H.P. On the general theory of contained rotating fluid motions // Journal of fluid mechanics. 1965. Vol. 22(3). P. 449–462.
41. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body // Journal of fluid mechanics. 1963. Vol. 17(1). P. 1–20.
42. Нго Зуи Кан. О вращательном движении твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11(6). С. 1488–1497.
43. Крейн С. Г., Нго Зуи Кан. Асимптотический метод в задаче о колебаниях сильно вязкой жидкости // ПММ. 1969. Т. 33. С. 456–466.
44. Нго Зуи Кан. О движении твердого тела с полостями, наполненными несжимаемой вязкой жидкостью // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8(4). С. 914–917.
45. Wilde P.D., Vanyo J.P. Observation of liquid in a precessing oblate spheroid // Physics of The Earth and Planetary Interiors. 1995. Vol. 91. P. 31–39.
46. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5(6). С. 1049–1070.
47. Черноусько Ф.Л. Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рейнольдса // ПММ. 1966. Т. 30(3). С. 476–494.
48. Черноусько Ф.Л. Вращательные движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью // ПММ. 1967. Т. 31(3). С. 416–432.
49. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 232 с.
50. Пивоваров М.Л., Черноусько Ф.Л. Колебания твердого тела с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // ПММ. 1990. Т. 54(2). С. 164–168.

51. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 564 с.
52. Богоряд И.Б., Лаврова Н.П. Численное моделирование вращения твердого тела с заполненной жидкостью полостью, имеющей радиальные ребра // ПМТФ. 2007. Т. 48(2). С. 135–139.
53. Богоряд И.Б., Лаврова Н.П. Численная модель течения жидкости во вращающемся цилиндре с упругими радиально расположенными ребрами // ПМТФ. 2013. Т. 54(2). С. 59–64.
54. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // ПММ. 1956. Т. 20(1). С. 3–20.
55. Нариманов Г.С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // ПММ. 1956. Т. 20(1). С. 21–38.
56. Рабинович Б.И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью // ПММ. 1956. Т. 20(1). С. 39–50.
57. Моисеев Н.Н. О двух маятниках, наполненных жидкостью // ПММ. 1952. Т. 16(6). С. 671–678.
58. Моисеев Н.Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность // Математический сборник. 1953. Т. 32(1). С. 61–96.
59. Моисеев Н.Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью // ДАН СССР. 1952. Т. 85(4). С. 719–722.
60. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
61. Моисеев Н.Н. О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде // ДАН СССР. 1952. Т. 85(5). С. 963–965.
62. Петров А.А. Приближенный метод расчета собственных колебаний жидкости в сосудах произвольной формы и потенциалов Жуковского для этих сосудов // ЖВМ и МФ. 1963. Т. 3(5). С. 958–964.

63. Петров А.А. Моисеев Н.Н. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
64. Петров А.А., Попов Ю.П., Пухначев Ю.В. Вычисление собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах вариационным методом // ЖВМ и МФ. 1964. Т. 4(5). С. 880–895.
65. Крейн С.Г., Моисеев Н.Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью // ПММ. 1957. Т. 21(2). С. 169–174.
66. Микишев Г.Н., Невская Е.А., Мельникова И.М., Дорожкин Н.Я. Об экспериментальном исследовании возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Космические исследования. 1965. Т. 3(2). С. 208–220.
67. Черноусько Ф.Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде // ПММ. 1966. Т. 30(5). С. 836–847.
68. Черноусько Ф.Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // ПММ. 1966. Т. 30(6). С. 476–494.
69. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. 416 с.
70. Abramson H. N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. Technical Report SP-106. NASA, 1966. 467 p.
71. Dodge F. T. The new 'Dynamic behavior of liquids in moving containers'. San Antonio: Southwest Research Institute, 2000. 195 p.
72. Prosperetti A. Motion of two superposed viscous fluids // Phys. Fluids. 1981. Vol. 24. P. 1217–1223.
73. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: Theory and Application. New York: Cambridge University Press, 2005. 948 p.
74. Faltinsen O.M. A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks // Journal of Ship Research. 1974. Vol. 18. P. 224–241.
75. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. // Journal of computational physics. 1981. Vol. 39. P. 201–226.

76. Noh W.F., Woodward P.R. SLIC (Simple Line Interface Calculation), In proceedings of 5th International Conference of Fluid Dynamics, edited by A. I. van de Vooren & P.J. Zandbergen // Lecture Notes in Physics. 1976. Vol. 59. P. 330–340.
77. E. Pilliod Jr., Puckett E.G. Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces // Journal of Computational Physics. 2004. Vol. 199(2). P. 465–502.
78. Sethian J.A. Level set methods and fast marching methods. New York: Cambridge University Press, 1999. 378 p.
79. Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds // J. Comput. Phys. 1974. Vol. 14. P. 227–253.
80. Souli M., Zolesio J.P. Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free surface methods in fluid mechanics // J. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2001. Vol. 191. P. 451–466.
81. Thompson J. F., Warsi Z.U.A., Mastin Wayne C. Numerical grid generation: Foundations and Applications. New York: Elsevier, 1985. 483 p.
82. Thompson J. F., Soni B.K., Weatherhill N. (Eds.) Handbook of Grid Generation. CRC Press, 1999. 1136 p.
83. Huerta A., Liu W.K. Viscous flow with large free surface motion // Computer methods in applied mechanics and engineering. 1988. Vol. 69. P. 277–324.
84. Akyildiz H., Celebi M.S. Numerical computation of pressure in a rigid rectangular tank due to large amplitude liquid sloshing // Turk. J. Engin. Environ. Sci. 2001. Vol. 25. P. 659–674.
85. Cho J.R., Lee H.W. Numerical study on liquid sloshing in based tank by nonlinear finite element method // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2004. Vol. 193. P. 2581–2598.
86. Sue Y.C., Chern M.J., Hwang R.R. Interaction of nonlinear progressive viscous waves with a submerged obstacle // Ocean Engineering. 2005. Vol. 32. P. 893–923.

87. Wu C.H., Faltinsen O.M., Chen B.F. Numerical study of sloshing liquid in tanks with baffles by time-independent finite difference and fictitious cell method // *Computers & Fluids*. 2012. Vol. 63. P. 9–26.
88. Akyildiz H. A numerical study of the effects of the vertical baffle on liquid sloshing in two-dimensional rectangular tank // *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. P. 41–52.
89. Jung J.H., Yoon H.S., Lee C.Y., Shin S.C. Effect of the vertical baffle height on the liquid sloshing in a three-dimensional rectangular tank // *Ocean Engineering*. 2012. Vol. 44. P. 79-89.
90. Firoozkoobi R. Experimental, numerical and analytical investigation of the effect screen on sloshing. PhD thesis. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim. 2013. 242 p.
91. Paik K.J. Simulation of fluid-structure interaction for surface ships with linear/nonlinear deformations. PhD thesis. University of Iowa, Iowa City, 2010. 125 p.
92. Fujii K., Tamura Y., Sato T., Wakahara T. Wind-induced vibration of tower and practical applications of tuned sloshing damper // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1990. Vol. 33. P. 263–272.
93. Sun L. Semi-analytical modeling of Tuned Liquid Damper (TLD) with emphasis on damping of liquid sloshing. PhD thesis. University of Tokyo, Tokyo. 1991. 156 p.
94. Warburton G.B., Ayorinde E.O. Optimum absorber parameters for simple systems // *Earthquake engineering and structural dynamics*. 1980. Vol. 8. P. 197–217.
95. Yu J.K. Nonlinear characteristics of Tuned Liquid Dampers. PhD thesis. University of Washington, Seattle. 1997. 133 p.
96. Krabbenhoft J. Shallow water Tuned Liquid Damper: modelling, simulation and experiments. PhD thesis. Technical University of Denmark, Copenhagen. 2010. 124 p.

97. Kaneko S., Yoshida O. Modeling of Deepwater-Type Rectangular Tuned Liquid Damper With Submerged Nets // *Journal of Pressure Vessel Technology*. 1999. Vol. 121. P. 413–422.
98. Gardarsson S., Yeh H., Reed D. Behavior of sloped-bottom Tuned Liquid Dampers // *J. Eng. Mech.* 2001. Vol. 127. P. 266–271.
99. Olson D.E., Reed D.A. A nonlinear numerical model for sloped-bottom tuned liquid dampers // *Earthquake Engng Struct. Dyn.* 2001. Vol. 30. P. 731–743.
100. Xin Y., Chen G., Menglin L. Seismic response control with density-variable tuned liquid dampers // *Earthq Eng & Eng Vib.* 2009. Vol. 8. P. 537–546.
101. Warnitchai P., Pinkaew T., Modelling of liquid sloshing in rectangular tanks with flow-dampening devices // *Engineering Structure*. 1998. Vol. 20(7). P. 593–600.
102. Maravani M., Hamed M.S. Numerical simulation of structure response outfitted with a tuned liquid damper // *Computers and Structures*. 2009. Vol. 87. P. 1154–1165.
103. Maravani M., Hamed M. S. Numerical modeling of sloshing motion in a tuned liquid damper outfitted with a submerged slat screen // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2011. Vol. 65. P. 834–855.
104. Hamelin J. The effect of screen geometry on the performance of a tuned liquid damper // *MASc, McMaster University*, 2007. 185 p.
105. Tait M.J. Modelling and preliminary design of a structure-TLD system // *Engineering Structures*. 2008. Vol. 30. P. 2644–2655.
106. Tait M.J., El Damatty A.A., Isyumov N., Siddique M.R. Numerical flow models to simulate tuned liquid dampers (TLD) with slat screens // *Journal of Fluids and Structures*. 2005. Vol. 20. P. 1007–1023.
107. Love J.S., Tait M.J. Parametric depth ratio study on tuned liquid dampers: fluid modelling and experimental work // *Computers & Fluids*. 2013. Vol. 79. P. 13–26.
108. Tait, M.J., El Damatty, A.A., and Isyumov, N. Effectiveness of a 2D TLD and Its Numerical Modeling // *J. Struct. Eng.* 2007. Vol. 133. P. 251–263.

109. Love J.S., Tait M.J. Non-linear multimodal model for tuned liquid dampers of arbitrary tank geometry // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2011. Vol. 46. P. 1065–1075.
110. Frandsen J.B. Numerical predictions of tuned liquid tank structural systems // Journal of Fluids and Structures. 2005. Vol. 20. P. 309–329.
111. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит. 1991. 200 с.
112. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
113. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Физматлит, 1953. 288 с.
114. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
115. Зубков П.Т., Свиридов Е.М., Тарасова Е.Н. Вычислительная гидродинамика: курс лекций // Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2005. 71 с.
116. Кудинов П.И. Численное моделирование гидродинамики и теплообмена в задачах с конвективной неустойчивостью и неединственным решением: дис. ...канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Днепропетровск, 1999. 229 с.
117. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ.-М.: Мир, 1990. 512 с.
118. Боталов А.Ю., Родионов С.П. Вынужденные колебания твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью // Вестник Тюменского государственного университета. 2014. №7. Физико-математические науки. Информатика. С. 120–126.
119. Tamura Y., Fujii K., Ohtsuki T., Wakahara T., Kohsaka R. Effectiveness of tuned liquid dampers under wind excitation // Engineering Structures. 1995. Vol. 17(9). P. 609–621.

120. Hodges B.R. Numerical simulation of nonlinear free-surface waves on a turbulent open-channel flow. PhD thesis. Stanford University, Stanford. 1997. 235 p.
121. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. М.: Издательство МЭИ, 2003. 312 с.
122. Боталов А.Ю., Зубков П.Т. Колебания маятника с полостью, полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4(10). С. 449–454.
123. Боталов А.Ю. Движение полости, заполненной вязкой жидкостью, вокруг неподвижной точки // В мире научных открытий. Математика, механика, информатика. 2013. № 2.1(38). С. 9–23.