ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В. А. Шимановский

МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Часть 1

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. А. Шимановский

МАТЕМАТИКА

Сборник задач

Часть 1

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по естественно-научным направлениям
подготовки бакалавров*

Пермь 2022

УДК 51(075)
ББК 22.1
Ш61

Шимановский В. А.

Ш61 Математика. Сборник задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. А. Шимановский ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. — Электронные данные. — Пермь, 2022. — Часть 1. — 1,91 Мб; 189 с. — Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/shimanovskij-matematika-sbornik-zadach.pdf. — Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3812-3
ISBN 978-5-7944-3813-0 (Ч. 1)

Содержание части 1 охватывает следующие разделы программы дисциплины «Математика»: матрицы и определители, системы линейных алгебраических уравнений, аналитическая геометрия, предел и непрерывность функции одной переменной, дифференциальное исчисление функции одной переменной.

В каждом параграфе приводятся необходимые теоретические сведения. Типовые задачи даются с подробными решениями. Имеется большое количество задач для самостоятельной работы.

УДК 51(075)
ББК 22.1

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра информационных технологий в бизнесе НИУ ВШЭ – Пермь (рец. — канд. физ.-мат. наук, профессор **А. П. Иванов**);

канд. тех. наук, доцент кафедры информационных технологий и программной инженерии Пермского ГАТУ **А. Н. Козлов**

ISBN 978-5-7944-3812-3
ISBN 978-57944-3813-0 (Ч. 1)

Оглавление

Предисловие

Предлагаемый вашему вниманию сборник задач охватывает традиционный курс высшей математики в объёме первого триместра естественнонаучных факультетов ПГНИУ. Каждый параграф сборника начинается с необходимого теоретического минимума, включающего важнейшие определения, теоремы и формулы. Теоретический материал сопровождается иллюстрациями и многочисленными практическими примерами. В конце каждой главы сосредоточен обширный массив задач для самостоятельной работы студентов. Предполагается, что именно из этой части преподаватель будет предлагать задачи для домашних заданий. К подавляющему большинству задач сборника приведены ответы.

Данное учебное пособие предназначено для студентов химического, биологического, географического и других естественнонаучных факультетов вузов.

1. Линейная алгебра

1.1. Определители и их свойства. Вычисление определителей

Определители

Определителем n-го порядка называется число Δ_n, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

и вычисляемое согласно указанному ниже правилу по заданным числам a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, которые называются *элементами определителя* (всего их n^2). Индекс i указывает номер строки, а j — номер столбца квадратной таблицы (1.1), на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Любую строку или столбец этой таблицы будем называть *рядом.*

Главной диагональю определителя называется совокупность элементов a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}.

Всякое расположение чисел 1, 2, ..., n в определённом порядке называют *перестановкой* из n чисел. Говорят, что два числа α_i и α_j в перестановке α_1, α_2, ..., α_n образуют *инверсию*, если большее из них предшествует меньшему.

Значение определителя Δ_n находится как алгебраическая сумма членов вида

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}. \tag{1.2}$$

Эти члены представляют собой всевозможные произведения элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца таблицы (1.1). Если сомножители в произведении (1.2) упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берётся со знаком $(-1)^\sigma$, где σ — число инверсий в перестановке вторых индексов элементов определителя, входящих в рассматриваемое произведение.

Поскольку число перестановок из n чисел равно $n!$, то определитель n-го порядка состоит из $n!$ слагаемых, причём половина из них, т. е. $n!/2$, входит в определитель со знаком «плюс», а половина — со знаком «минус».

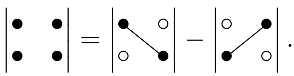
Для определителя первого порядка непосредственно из определения следует, что он равен самому элементу:

$$\Delta_1 = \left|a_{11}\right| = a_{11}.$$

Для определителя второго порядка непосредственно по определению получаем формулу

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

которую легко запомнить по следующей схеме:



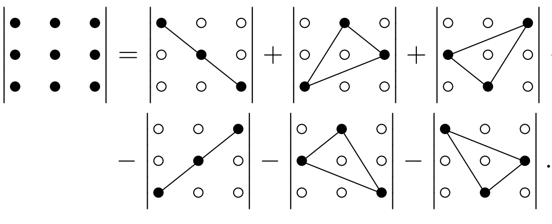
Так, например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27.$$

Для определителя третьего порядка также непосредственно из определения получаем

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Для запоминания этой формулы удобно пользоваться правилом треугольников, которое схематично записывается так:



Например,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 -$$

$$- 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 =$$

$$- 15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

При выписывании формулы для вычисления определителя третьего порядка поступают и таким образом. К определителю приписывают справа его первый и второй столбцы. Затем записывают нужную формулу, последовательно составляя произведения из трёх элементов, стоящих на одной диагонали, и приписывая знаки этим произведениям по следующей схеме:

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Свойства определителей

Вычисление определителей выше третьего порядка непосредственно по определению весьма затруднительно. Поэтому необходимо сначала изучить свойства определителей, а затем выработать методы их вычисления.

Перечислим основные свойства определителей:

1) значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот.

Следствие. Из этого свойства вытекает, что в определителе строки и столбцы равноправны, т. е. всякое утверждение относительно строк определителя верно и для его столбцов, и наоборот;

2) если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;

3) если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный;

4) определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю;

5) если все элементы какого-либо ряда умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это же число.

Следствие. Общий множитель элементов ряда определителя можно вынести за знак определителя;

6) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;

7) если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых;

8) определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число;

9) если какой-либо ряд определителя является линейной комбинацией других его параллельных рядов, то этот определитель равен нулю.

Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа

Пусть дан определитель n-го порядка. Выделим в нём произвольно k строк и k столбцов. Определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечениях выделенных строк и столбцов, называют *минором* k-го порядка определителя. В частности, минорами первого порядка являются элементы определителя.

Если в определителе n-го порядка выделить k строк и k столбцов и из элементов, стоящих на их пересечении, составить минор M k-го порядка, затем вычеркнуть выделенные k строк и k столбцов, то из оставшихся элементов можно составить определитель M' $(n-k)$-го порядка. Этот определитель называют *дополнительным минором* к минору M.

Очевидно, что если минор M' является дополнительным к минору M, то и, наоборот, минор M является дополнительным к минору M'. Дополнительный минор элемента a_{ij} обозначают M'_{ij}. *Алгебраическим дополнением минора* M называют его дополнительный минор M', взятый со знаком $(-1)^{s_M}$, т. е. $(-1)^{s_M} M'$, где s_M — сумма номеров всех строк и столбцов, в которых располагается минор M. В частности, для алгебраического дополнения A_{ij} элемента a_{ij}

получается формула

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M'_{ij}. \tag{1.3}$$

Например, в определителе

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

дополнительным минором M'_{21} является определитель, составленный из элементов определителя, оставшихся после вычёркивания второй строки и первого столбца:

$$\begin{vmatrix} \cancel{1} & 2 & 3 \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ \cancel{7} & 8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$M'_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 8 \cdot 3 = -24;$$

соответственно, алгебраическим дополнением A_{21} будет число

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M'_{21} = (-1)^3 \cdot (-24) = 24.$$

Теорема 1.1 (Лапласа). *Пусть в определителе Δ_n n-го порядка произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, расположенных в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю Δ_n.*

В частности, если в теореме Лапласа выбрать $k = 1$, то получим, что определитель равен сумме произведений всех элементов любой его строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta_n = a_{i1}\, A_{i1} + a_{i2}\, A_{i2} + \cdots + a_{in}\, A_{in}, \tag{1.4}$$

$$\Delta_n = a_{1j}\, A_{1j} + a_{2j}\, A_{2j} + \cdots + a_{nj}\, A_{nj}. \tag{1.5}$$

Представления определителя в виде (1.4) и (1.5) называются *разложением определителя по строке* и *столбцу* соответственно.

Заметим, что если в какой-либо строке (столбце) все элементы, кроме одного, нули, то определитель равен произведению этого не равного нулю элемента на его алгебраическое дополнение.

В заключение отметим ещё одно свойство определителя.

Теорема 1.2 (о фальшивом разложении определителя). *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю, т. е.*

$$a_{i1}\,A_{k1} + a_{i2}\,A_{k2} + \dots + a_{in}\,A_{kn} = 0, \qquad i \neq k;$$

$$a_{1j}\,A_{1k} + a_{2j}\,A_{2k} + \dots + a_{nj}\,A_{nk} = 0, \qquad j \neq k.$$

Вычисление определителей

1. Разложение определителя по строке (столбцу)

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

► Данный определитель третьего порядка можно вычислить с использованием правила треугольников, но мы решим его разложением по первой строке:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot(-1\cdot 7 - 0\cdot 5) - 7\cdot(3\cdot 7 - 5\cdot 5) + (-2)\cdot(3\cdot 0 - 5\cdot(-1)) =$$

$$= 4\cdot(-7) - 7\cdot(-4) - 2\cdot 5 = -10. \blacktriangleleft$$

Разложение определителя можно производить по любой строке (столбцу), но предпочтительнее выбирать строки (столбцы), содержащие нули. Причём разложение тем проще, чем больше нулей в выбранной строке (столбце).

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

► Данный определитель четвёртого порядка разложим по четвёртой строке, содержащей два нулевых элемента. Очевидно, что произведения этих элементов на их алгебраические дополнения будут равны нулю. Поэтому в разложении определителя слагаемые, соответствующие этим нулевым элементам, можно не выписывать:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot \left(-1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= -10 \cdot (-1 - (-6)) + 4 \cdot (-(-4 - (-3)) + (1 - 8)) = -74.$$

Здесь первый определитель третьего порядка разложен по третьему столбцу, а второй определитель третьего порядка — по первому столбцу. ◄

2. Метод эффективного понижения порядка. Разложение определителя по строке или столбцу позволяет сводить вычисление определителей больших порядков к вычислению определителей меньших порядков, но с каждым понижением порядка количество определителей возрастает, причём очень быстро. В связи с этим целесообразно, предваряя разложение определителя, преобразовывать его так, чтобы в какой-то строке или столбце все элементы, кроме одного, равнялись нулю. Покажем это на примере.

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 10 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

► Сначала первую строку, умноженную на минус единицу, прибавим ко второй строке. Затем первую строку, умноженную на минус два, прибавим к третьей строке. И наконец, первую строку, умноженную на минус единицу, прибавим к четвёртой строке. Полученный определитель, у которого первый столбец будет иметь лишь один ненулевой элемент, разложим по этому столбцу. В результате придём к следующей цепочке равенств:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 10 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель в этой цепочке можно уже вычислить непосредственно по формуле треугольников для определителей третьего порядка. Однако будет проще, если его сначала преобразовать, вычтя из второй строки первую, а затем разложить по второй строке. Тогда получим следующее продолжение цепочки равенств:

$$2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (14 - 15) = -4.$$

Таким образом, рассматриваемый определитель равен -4. ◄

3. Приведение определителя к треугольному виду. Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. Очевидно, что в этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали. Приведение любого определителя Δ_n к треугольному виду всегда возможно.

Пример 4. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

► Приведём определитель к треугольному виду:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot (-10)) = -70. \blacktriangleleft$$

Упражнения

Вычислить определители второго порядка:

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **1.2.** $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -14 & -8 \end{vmatrix}$. **1.3.** $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$. **1.5.** $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$. **1.6.** $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$.

Вычислить определители третьего порядка по правилу треугольников:

1.7. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **1.8.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$. **1.9.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

Вычислить алгебраические дополнения к элементу a_{ij}:

1.10. $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. $i=1,\ j=2$ **1.11.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. $i=3, \quad j=1$

Вычислить определители разложением по строке (столбцу):

1.12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **1.13.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. **1.14.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом понижения порядка:

1.15. $\begin{vmatrix} 15\,325 & 15\,323 & 37\,527 \\ 23\,735 & 23\,735 & 17\,417 \\ 23\,737 & 23\,737 & 17\,418 \end{vmatrix}$. **1.16.** $\begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

1.17. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 13 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$. **1.18.** $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители:

1.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **1.20.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$. **1.21.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

1.22. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **1.23.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

1.2. Матрицы и операции над ними. Обратная матрица. Ранг матрицы

Матрицы

Прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ элементов a_{ij} ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) некоторого множества, называется *матрицей* и записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице. Матрицы обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, … Если у матрицы m строк и n столбцов, то по определению она имеет размерность $m \times n$. В случае необходимости это обозначается следующим образом: $A_{m\times n}$. Матрица называется *числовой*, если её элементы a_{ij} — числа; *функциональной*, если a_{ij} — функции.

Матрицу, состоящую из одной строки или одного столбца, называют соответственно *матрицей-строкой* и *матрицей-столбцом*. Их также называют *вектор-строкой* и *вектор-столбцом*. Матрица, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом. Вследствие этого любое число можно рассматривать как матрицу размера 1×1.

Если число строк матрицы равно числу n её столбцов, то матрицу называют *квадратной* порядка n (n-го порядка). Элементы квадратной матрицы, у которых номер строки совпадает с номером столбца, называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы.

Квадратные матрицы, у которых отличны от нуля лишь элементы главной диагонали, называют *диагональными*. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали одинаковые, называется *скалярной*. Частным случаем скалярных матриц является *единичная матрица*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Нулевой называют матрицу (любого размера), все элементы которой равны нулю, и обозначают символом 0.

Квадратную матрицу называют *треугольной*, если все её элементы, стоящие выше (ниже) главной диагонали, равны нулю. При этом матрицу вида

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называют *правой* (или *верхней*) треугольной, а матрицу

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

— *левой* (или *нижней*) треугольной.

Транспонированием матрицы A называют операцию, при которой в матрице строки заменяют на соответствующие столбцы. Полученную в результате этой операции матрицу называют *транспонированной* к матрице A и обозначают через A^T. Если A — матрица размера $m \times n$, то A^T — матрица размера $n \times m$.

Например, для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

транспонированной будет матрица

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$ называют *симметричной*, если в ней элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т. е. если $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = \overline{1, n})$. Для симметричных матриц, и только для них, верно тождество $A^T = A$.

Квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ $(i, j = \overline{1, n})$ называют *кососимметричной*, если в ней элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т. е. если $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i, j = \overline{1, n})$. Для кососимметричных матриц, и только для них, верно тождество $A^T = -A$. Непосредственно из определения следует, что на главной диагонали кососимметричной матрицы все элементы равны нулю.

Любой квадратной матрице A можно поставить в соответствие определитель (определитель матрицы A), который обозначается $|A|$ или $\det A$. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если её определитель не равен нулю, т. е. $|A| \neq 0$. В случае когда $|A| = 0$, матрица A называется *вырожденной*.

Операции над матрицами

1. Равенство матриц. Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются *равными*, если все их соответствующие элементы равны, т. е. если $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

2. Умножение матрицы на число. *Произведением матрицы* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* λ называют матрицу $B_{m\times n} = (b_{ij})$ той же размерности, элементы которой равны произведениям $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ соответствующих элементов матрицы A и числа λ.

Например, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -2.$$

Тогда

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} -2\cdot 3 & -2\cdot 0 \\ -2\cdot 7 & -2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Сложение и вычитание матриц. *Суммой* (*разностью*) *матриц* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ одинакового размера называют матрицу $C_{m\times n} = (c_{ij})$ того же размера, элементы которой равны суммам $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (разностям $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$) ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) соответствующих элементов матриц A и B.

Например, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 3+1 & 0+4 \\ 1+2 & 5+5 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{bmatrix},$$
$$A - B = \begin{bmatrix} 2-0 & 3-1 & 0-4 \\ 1-2 & 5-5 & 6-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Умножение матриц. *Произведением матриц* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{n\times p} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ij})$, элементы которой равны $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,p}$). Отсюда следует, что произведение AB существует только в том случае, когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B. Далее, число строк матрицы AB равно числу строк матрицы A, а число столбцов — числу столбцов матрицы B. Из существования произведения AB не следует существование произведения BA. В случае его существования, как правило, $BA \neq AB$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*). Отметим ещё одно отличительное свойство умножения матриц: произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.

Пример 1. Найти AB и BA, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

► Имеем

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 3 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 3 & 2\cdot 0 + 0\cdot 1 & 2\cdot 2 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 3 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 1 + 0\cdot 3 & 3\cdot 0 + 0\cdot 1 & 3\cdot 2 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Как видим, произведения AB и BA являются матрицами разных размеров: $AB \neq BA$. ◀

Пример 2. Найти AB и BA, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

▶ Имеем

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 3\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot(-5) + 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + (-5)\cdot 1 & 1\cdot 5 + (-5)\cdot 2 \\ (-1)\cdot 3 + 2\cdot 1 & (-1)\cdot 5 + 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Итак, $AB = BA$. ◀

Пример 3. Найти AB и BA, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

▶ Имеем

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 6 + 3\cdot(-2) \\ 2\cdot 3 + 6\cdot(-1) & 2\cdot 6 + 6\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 45 \\ -5 & -15 \end{bmatrix}.$$

Итак, $AB \neq BA$. ◄

Элементарные преобразования над матрицами

Любую строку или столбец матрицы будем называть *рядом*.

Под *элементарными преобразованиями* над матрицей понимают следующие действия:

1) перестановку двух параллельных рядов матрицы местами;

2) умножение любого ряда матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одному ряду матрицы другого её параллельного ряда, умноженного на любое число.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначается $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый её ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. В частности, невырожденную квадратную матрицу таким способом можно привести к единичной.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду:

1. В первом столбце выбрать элемент, отличный от нуля (*ведущий элемент*). Строку с ведущим элементом (*ведущая строка*) поставить на место первой строки. Если в первом столбце нет ведущего, то исключаем этот столбец и продолжаем поиск ведущего элемента в оставшейся части матрицы. Преобразования заканчиваются, если исключены все столбцы или в оставшейся части матрицы все элементы нулевые.

2. Разделить все элементы ведущей строки на ведущий элемент. Если ведущая строка последняя, то на этом преобразования следует закончить.

3. К каждой строке, расположенной ниже ведущей, прибавить ведущую строку, умноженную соответственно на такое число, чтобы элементы, стоящие под ведущим, оказались равными нулю.

4. Исключив из рассмотрения строку и столбец, на пересечении которых стоит ведущий элемент, перейти к пункту 1, в котором все описанные действия применяются к оставшейся части матрицы.

Обратная матрица

Пусть дана квадратная матрица A n-го порядка. Квадратную матрицу A^{-1} того же порядка называют *обратной* к матрице A, если

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E — единичная матрица n-го порядка.

В соответствии с этим определением матрица A является обратной к матрице A^{-1}, поэтому можно говорить, что матрицы A и A^{-1} взаимно обратны. Если существует матрица, обратная к матрице A, то такая матрица единственна.

Теорема 1.3. *Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной. При этом матрица A^{-1} определяется формулой*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы A.

Матрица

$$A^{*} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij} элементов матрицы A, называется *присоединённой* (или *союзной*) матрицей к матрице A. Обратим внимание на то, что для построения присоединённой матрицы A^{*} элементы матрицы A нужно заменить их алгебраическими дополнениями, а затем полученную матрицу транспонировать.

Рассмотрим основные методы вычисления обратной матрицы.

1. Метод присоединённой матрицы. Формула (1.7) позволяет находить обратную матрицу. Она удобна в случае матриц небольших размеров. В частности, для матриц второго порядка обратная матрица находится по этой формуле практически без вычислений:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

► Определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + (-1) \cdot 2 \cdot (3 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 0 = 3 - 12 + 0 = -9$$

отличен от нуля. Поэтому матрица A имеет обратную. Чтобы её найти, сначала вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Теперь по формуле (1.7) запишем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-9} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

2. Метод Жордана—Гаусса. Для матриц больших размеров отыскание обратной матрицы удобно проводить с помощью элементарных преобразований над матрицами. Этот метод состоит в следующем. Выписывают составную матрицу $[A|E]$ и выполняют над строками этой матрицы (т. е. одновременно и в матрице A, и в матрице E) те элементарные преобразования, которые приводят матрицу A к единичной матрице. В результате на месте единичной матрицы E окажется обратная матрица A^{-1}.

Пример 5. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

► Запишем составную матрицу $[A|E]$ и преобразуем её с помощью элементарных преобразований строк в соответствии с методом Гаусса—Жордана. В результате получим

$$[A|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ |\;:2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Из полученного заключаем, что

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \blacktriangleleft$$

Ранг матрицы

Понятие минора, введённое для определителей, без изменений переносится на матрицы.

Рангом ненулевой *матрицы* называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю. Обычно ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rang} A$.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Приведём некоторые свойства ранга матрицы:

1) при транспонировании матрицы её ранг не меняется;

2) если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, ранг матрицы не изменится;

3) ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Рассмотрим основные методы нахождения ранга матрицы.

1. Метод окаймляющих миноров. Минор M_{k+1} порядка $k+1$ называется *окаймляющим* минор M_k порядка k, если M_k получается из M_{k+1} вычёркиванием одной строки и одного столбца. В методе окаймления находят какой-либо минор первого или второго порядка, отличный от нуля, и вычисляют окаймляющие его миноры следующего порядка. Если среди них найдётся отличный от нуля, то далее окаймляют его. Пусть уже найден таким образом минор r-го порядка, отличный от нуля, тогда вычисляют его окаймляющие миноры $(r+1)$-го порядка. Если все они окажутся равными нулю или таких миноров вообще нет, то ранг матрицы равен r.

Пример 6. Методом окаймляющих миноров вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

► Имеем $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Для M_2 окаймляющими будут только два минора:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

каждый из которых равен нулю. Поэтому $\operatorname{rang} A = 2$, а указанный минор M_2 может быть принят за базисный. ◀

2. Метод элементарных преобразований. Чтобы вычислить ранг матрицы, целесообразно упростить матрицу с помощью элементарных преобразований настолько, что заключение о ранге матрицы становится очевидным. Поясним это на примере.

Пример 7. С помощью элементарных преобразований вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

▶ Выполняя элементарные преобразования, получим цепочку эквивалентных матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранг последней матрицы этой цепочки равен двум (отличен от нуля минор, расположенный на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов; все миноры третьего порядка равны нулю). Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$. ◀

Упражнения

Найти линейные комбинации заданных матриц:

1.24. $2A + 3B$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1.25. $B - 2A^T$, $A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{bmatrix}$.

1.26. $5A-3B^T$, $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\3&5&1\\-1&2&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&1&-2\\-3&2&7\\4&0&-1\end{bmatrix}$.

1.27. $3A^T-B$, $A=\begin{bmatrix}4&1&3\\0&-1&2\\2&1&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&1&0\\1&1&-1\end{bmatrix}$.

1.28. $3A+4B$, $A=\begin{bmatrix}7&-2&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&3&2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&-1&-3&1\\7&-1&0&4\\8&-2&1&5\end{bmatrix}$.

1.29. $4A-7B$, $A=\begin{bmatrix}1&-2&5&3\\2&0&-3&1\\5&-1&0&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&2&7&-5\\-8&1&3&0\\4&2&-2&5\end{bmatrix}$.

Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют):

1.30. $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$.

1.31. $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3\\-2&2\\-1&0\end{bmatrix}$.

1.32. $A=\begin{bmatrix}1&-2&3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5\\-3\\-4\\1\end{bmatrix}$.

1.33. $A=\begin{bmatrix}2&0&3\\-1&2&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4\\-3\\5\end{bmatrix}$.

1.34. $A=\begin{bmatrix}3&5&-1\\2&-2&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&4\\-3&0\\5&1\end{bmatrix}$.

1.35. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

1.36. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

1.37. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Найти произведения матриц $(AB)C$ и $A(BC)$:

1.38. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1.39. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ -2 & -30 \end{bmatrix}$.

1.40. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & 11 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

1.41. $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Найти обратную матрицу методом присоединённой матрицы:

1.42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **1.43.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

1.44. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. **1.45.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

1.46. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. **1.47.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$.

1.48. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **1.49.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

1.50. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \end{bmatrix}$. **1.51.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$.

1.52. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & -3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix}$. **1.53.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

1.54. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. **1.55.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

1.56. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$. **1.57.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$.

1.3. Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения

Системы линейных алгебраических уравнений

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.8}$$

где a_{ij}, b_i $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ — заданные числа, а $x_1, \ldots, x_n$ — неизвестные величины. Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а b_i — *свободными членами*.

Система (1.8) называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю. Если хотя бы одно из чисел отлично от нуля, то система называется *неоднородной*.

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, \ldots, c_n$ называется *решением системы*, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения. Система уравнений называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если имеет более одного решения.

Выражения (формулы), содержащие неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ и некоторый набор произвольных постоянных, из которых при соответствующем выборе значений произвольных постоянных можно получить любое конкретное раешение системы, называют *общим решением системы*, а любое конкретное решение системы — её *частным решением*. Две системы с одними и теми же неизвестными *эквивалентны* (*равносильны*), если каждое решение одной из них является решением другой или обе системы несовместны.

Над уравнениями системы обычно приходится проводить следующие *элементарные преобразования*:

1) перестановку уравнений;

2) умножение обеих частей какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число;

4) вычёркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, т. е. тождеств $0 = 0$.

В результате элементарных преобразований система преобразуется в эквивалентную.

Коэффициенты системы образуют матрицу $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n})$, называемую *основной матрицей системы*, свободные члены образуют столбец $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, называемый *столбцом свободных членов*, а неизвестные — столбец $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, называемый *столбцом неизвестных*. В этих обозначениях система (1.8) может быть записана в виде

$$Ax = b. \tag{1.9}$$

Это *матричная форма* записи системы линейных уравнений.

Теорема Кронекера—Капелли

Исследование системы линейных алгебраических уравнений (1.9) следует начать с вопроса о её совместности. Для этой цели составим матрицу B, приписав к матрице системы столбец свободных членов: $B = [A|b]$. Матрица B называется *расширенной матрицей системы*.

Теорема 1.4 (теорема Кронекера—Капелли). *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.*

Теорема Кронекера—Капелли устанавливает совместность системы (1.8). При этом возможны три варианта:

1) если $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} B$, то система не имеет решений (несовместна);

2) если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = r = n$, то система имеет единственное решение (совместна и определенна);

3) если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = r < n$, то система имеет бесконечное множество решений (совместна и неопределенна), зависящее от $n-r$ произвольных параметров.

Из теоремы Кронекера—Капелли следует, что однородная система всегда совместна, так как ранг расширенной матрицы $[A|0]$, очевидно, равен рангу матрицы A. Впрочем, это видно и непосредственно: однородная система заведомо имеет решение $(0, \ldots, 0)^T$, называемое *тривиальным.* Для однородных систем имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5. *Однородная система $Ax = 0$ с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} A < n$.*

В заключение рассмотрим частный случай систем линейных алгебраических уравнений, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных, т. е. с квадратной матрицей системы.

Теорема 1.6. *Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.*

Теорема 1.7. *Однородная система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда матрица системы вырождена.*

Методы решения систем линейных уравнений

1. Матричный метод. Рассмотрим систему уравнений (1.9), у которой матрица системы A квадратная и невырожденная. В силу невырожденности матрицы A для неё существует обратная матрица A^{-1}. Непосредственной проверкой легко установить, что вектор

$$x = A^{-1}b \tag{1.10}$$

является решением системы.

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

► Имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-5 - (-3)) + 4 \cdot (1 - 3) + 1 \cdot (-1 - (-5)) = -8 \neq 0.$$

Так как $|A| \neq 0$, то решение системы существует и единственно. Найдём алгебраические дополнения к элементам матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$

Запишем обратную матрицу.

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.10) находим

$$x = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$ — решение данной системы. ◀

2. Формулы Крамера. Если матрица системы уравнений (1.9) квадратная и невырожденная, то верны *формулы Крамера* для вычисления неизвестных:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = \overline{1, n}), \tag{1.11}$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i являются определителями n-го порядка, которые получаются из Δ путём замены в нём i-го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Пример 2. Используя формулы Крамера, решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

► Найдём определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 7 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 0 - 8 \cdot 6 \cdot 1 =$$

$$= 0 + 96 + 84 - 105 - 0 - 48 = 27 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то решение системы существует и единственно. Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 5 \cdot 0 + 9 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot (-6) - (-6) \cdot 5 \cdot 3 - 9 \cdot 2 \cdot 0 - 8 \cdot 6 \cdot 6 = -54,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 \cdot 0 + 4 \cdot (-6) \cdot 3 + 6 \cdot 6 \cdot 7 - 7 \cdot 9 \cdot 3 - 4 \cdot 6 \cdot 0 - (-6) \cdot 6 \cdot 1 = 27,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-6) + 4 \cdot 8 \cdot 6 + 2 \cdot 9 \cdot 7 - 7 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) - 8 \cdot 9 \cdot 1 = 54.$$

По формулам (1.11) получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2. \blacktriangleleft$$

3. Метод последовательных исключений Жордана—Гаусса. Если основная матрица A системы (1.8) имеет ранг $r \leqslant n$, то расширенная матрица B этой системы с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов всегда может быть приведена к виду

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{2r+1} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m \end{array}\right]. \tag{1.12}$$

Матрица (1.12) является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ x_2 + \tilde{a}_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + \tilde{a}_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_m, \end{cases} \tag{1.13}$$

которая эквивалентна исходной системе. Если хотя бы одно из чисел $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_m$ отлично от нуля, то система (1.13) и, следовательно, исходная система (1.8) несовместны. Если же $\tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$, то система (1.8) совместна, а из системы (1.13) легко выразить в явном виде базисные неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, т. е. решить систему (1.8).

Пример 3. С помощью метода последовательных исключений Жордана—Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

► Составим расширенную матрицу системы и приведём её к каноническому виду:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid :(-7) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & -11 \\ 0 & 2 & 10 & -6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 39 & -39 \\ 0 & 0 & 2 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid : 2 \\ \mid : 2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Итак, система совместна, её решение единственно ($r = 4 = n$): $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. ◀

Пример 4. С помощью метода последовательных исключений Жордана—Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9, \\ 7x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -8, \\ 3x_1 - 9x_2 - 9x_3 - 10x_4 = -12. \end{cases}$$

▶ Составим расширенную матрицу системы и приведём её к каноническому виду:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ 7 & -1 & -1 & 2 & -8 \\ 3 & -9 & -9 & -10 & -12 \end{array}\right] \sim$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ {}^{-1}\ \ {}^{-1}\ \mid\ :(-15) \\ {}^{+} \\ {}^{+} \end{array} \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & {}^{19}\!/\!_{15} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} {}^{+} \\ {}^{-2} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & {}^{7}\!/\!_{15} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & {}^{19}\!/\!_{15} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].
$$

Так как $r = 2 < 4 = n$, то система совместна и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух $(n - r = 4 - 2 = 2)$ параметров.

Последней матрице, эквивалентной данной матрице B, соответствует система уравнений

$$
\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} + \frac{7}{15}x_4 = -1, \\ x_2 + x_3 + \frac{19}{15}x_4 = 1, \end{cases}
$$

эквивалентная исходной. В качестве базисных неизвестных берём x_1 и x_2, а x_3 и x_4 принимаем за свободные неизвестные (параметры). Тогда из последней системы имеем $x_1 = -1 - \frac{7}{15}x_4$, $x_2 = 1 - x_3 - \frac{19}{15}x_4$. ◀

З а м е ч а н и е. За базисные неизвестные можно было бы принять также x_1, x_3, или x_1, x_4, или x_2, x_4, но не x_2, x_3, так как определитель, составленный из коэффициентов при x_2, x_3, равен нулю, и поэтому x_2 и x_3 невозможно выразить через x_1, x_4.

Пример 5. С помощью метода последовательных исключений Жордана—Гаусса решить систему уравнений

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 = -3. \end{cases}
$$

► Составим расширенную матрицу системы и приведём её к каноническому виду:

$$
B = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} {}^{-1}\ \ {}^{-2} \\ {}^{+} \\ {}^{+} \end{array} \sim
$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right].$$

Так как $\operatorname{rang} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rang} B$, то система несовместна (не имеет решений). ◀

З а м е ч а н и е. В самом деле, последней строке полученной расширенной матрицы соответствует уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 13$, не имеющее решений.

Упражнения

Решить системы уравнений матричным способом:

1.58. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases}$

1.59. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

1.60. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.61. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2. \end{cases}$

Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

1.62. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

1.63. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$

1.64. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

1.65. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_4 = -24. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом Жордана—Гаусса:

1.66. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.67. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 39, \\ 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 27. \end{cases}$

1.68. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 0, \\ 5x_1 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

1.69. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 + x_4 = 42, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 15, \\ x_2 + x_3 - 7x_4 = -2, \\ x_3 - 20x_4 = -18. \end{cases}$

1.70. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -10, \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 13x_4 = -14, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6. \end{cases}$

1.71. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

1.72. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

1.73. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

2. Аналитическая геометрия

2.1. Основы векторной алгебры

Векторы. Линейные операции над векторами

Геометрическим вектором, или просто *вектором*, называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец — в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, … На рисунке вектор изображается стрелкой (рис. 2.1).

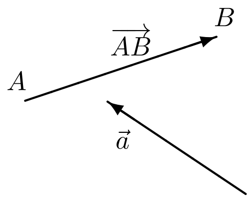


Рис. 2.1

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Его направление является неопределённым. Другими словами, такому вектору можно приписать любое направление. *Длиной* или *модулем вектора* называется расстояние между его началом и концом. Записи $|\overrightarrow{AB}|$ (или AB) и $|\vec{a}|$ (или a) обозначают модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ соответственно.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором*. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}_0$. Нахождение орта вектора $\vec{a}$ называется *нормированием* вектора $\vec{a}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. Из определения равенства следует, что векторы можно переносить параллельно себе, не нарушая равенства. Такие векторы называются *свободными*.

Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если они имеют одинаковую длину и противоположные направления. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$; вектор $\overrightarrow{BA}$ противоположен вектору $\overrightarrow{AB}$.

Упорядоченную пару неколлинеарных векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ плоскости называют *правой* (*положительно ориентированной*), если кратчайший поворот от $\vec{a}_1$ к $\vec{a}_2$ выполняется против часовой стрелки (рис. 2.2), и *левой* (*отрицательно ориентированной*) — в противном случае (рис. 2.3) (начала векторов считаются совмещёнными).

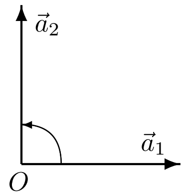


Рис. 2.2

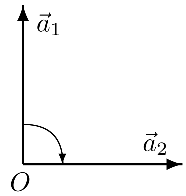


Рис. 2.3

Упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ пространства называют *правой* (*положительно ориентированной*), если из конца вектора $\vec{a}_3$ кратчайший поворот от $\vec{a}_1$ к $\vec{a}_2$ виден совершающимся против часовой стрелки (рис. 2.4), и *левой* (*отрицательно ориентированной*) — в противном случае (рис. 2.5) (начала векторов считаются совмещёнными).

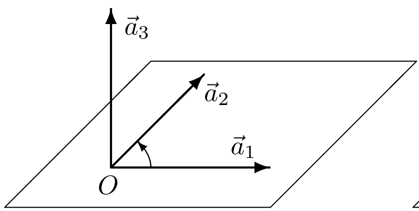


Рис. 2.4

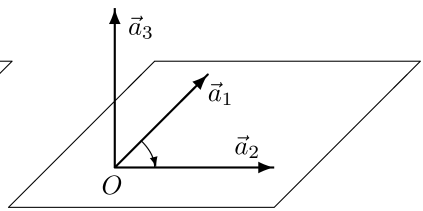


Рис. 2.5

К линейным операциям над векторами относятся: сложение векторов и умножение вектора на число.

Суммой векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*, рис. 2.6). Очевидно, что этот же вектор $\vec{a}+\vec{b}$ для неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть получен как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (*правило параллелограмма*, рис. 2.7). Суммой векторов $\vec{a}_i$ $(i = \overline{1, n})$ будет вектор, начало которого находится в начале первого вектора $\vec{a}_1$, а конец — в конце последнего вектора

$\vec{a}_n$ ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов (*правило замыкания ломаной*, рис. 2.8).

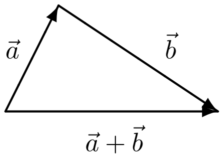


Рис. 2.6

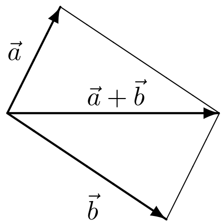


Рис. 2.7

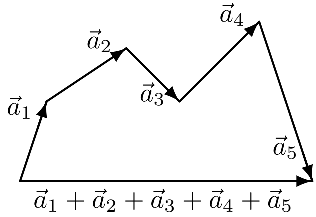


Рис. 2.8

Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, обозначаемый $\vec{a}-\vec{b}$, такой, что $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$. Правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ позволяет построить и разность $\vec{a}-\vec{b}$ как другую диагональ параллелограмма.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\vec{a}$, модуль которого равен $|\lambda|\,|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно ему, если $\lambda<0$. Отметим, что $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство);

3) существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$ (особая роль нулевого вектора);

4) для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $-\vec{a}$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;

5) $\alpha\,(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\,\vec{a}+\alpha\,\vec{b}$ (распределительное свойство числового сомножителя относительно суммы векторов);

6) $(\alpha+\beta)\,\vec{a}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{a}$ (распределительное свойство векторного сомножителя относительно суммы чисел);

7) $\alpha\,(\beta\,\vec{a})=(\alpha\,\beta)\,\vec{a}$ (сочетательное свойство числовых сомножителей).

Эти свойства имеют фундаментальное значение, ибо они позволяют производить выкладки в векторной алгебре по тем правилам, по которым производятся аналогичные выкладки в обычной алгебре.

Пример 1. В треугольнике ABC дано: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, точка M — середина стороны BC. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

▶ Через точку M проведём прямые, параллельные сторонам AB и AC. Получим параллелограмм AB_1MC_1 (рис. 2.9), в котором AM является диагональю. Следовательно, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}$. Но $\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{2}\,\vec{a}$, $\overrightarrow{AC_1}=\frac{1}{2}\,\vec{b}$ (B_1M и C_1M — средние линии, поэтому $AB_1=BB_1$, $AC_1=CC_1$). Получаем $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\,\vec{a}+\frac{1}{2}\,\vec{b}=\frac{1}{2}\,(\vec{a}+\vec{b})$. ◀

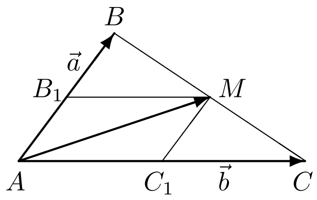


Рис. 2.9

Линейной комбинацией векторов называется сумма векторов, умноженных на некоторые числа, т. е. выражение вида

$$\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n, \tag{2.1}$$

где λ_1, λ_2, …, λ_n — произвольные числа. Представление вектора $\vec{b}$ в виде (2.1) называют *разложением вектора $\vec{b}$ по векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$*.

Если для системы n векторов $\vec{a}_i$ равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0} \tag{2.2}$$

верно только в случае, когда все $\lambda_i=0$, то эта система называется *линейно независимой*. Если же равенство (2.2) выполняется для λ_i, хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов называется *линейно зависимой*. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трёхмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них есть произведение другого на некоторое число, т. е. $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}$, где λ — число (*признак коллинеарности векторов*).

Три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией других, например, $\vec{c}=\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{b}$, где λ_1, λ_2 — числа не равные нулю одновременно (*признак компланарности векторов*).

Пример 2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}=\vec{a}-2\sqrt{3}\cdot\vec{b}$ и $\vec{d}=-\sqrt{3}\cdot\vec{a}+6\cdot\vec{b}$?

► Нетрудно видеть, что

$$\vec{d} = -\sqrt{3}\cdot\vec{a} + 6\cdot\vec{b} = -\sqrt{3}\cdot(\vec{a} - 2\sqrt{3}\cdot\vec{b}) = -\sqrt{3}\cdot\vec{c}.$$

Следовательно, по признаку коллинеарности векторов векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны. ◄

Проекция вектора на ось. Координаты вектора

Прямая l с заданным на ней направлением, принимаемым за положительное, называется *осью* l.

Проекцией вектора $\vec{a}$ *на ось* l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l\vec{a}$ и равное $|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ — угол между положительным направлением оси l и направлением вектора $\vec{a}$, т. е. по определению

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi. \tag{2.3}$$

Геометрически проекцию вектора $\vec{a}$ можно охарактеризовать длиной отрезка MN, взятой со знаком «+», если $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, и со знаком «−», если $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (рис. 2.10). При $\varphi = \pi/2$ отрезок MN превращается в точку и $\text{пр}_l\vec{a} = 0$.

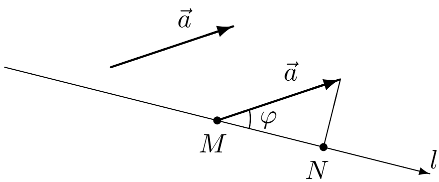


Рис. 2.10

Пример 3. Вычислите числовую проекцию вектора $\vec{a}$ на прямую, направленную как вектор $\vec{b}$, если длина вектора $\vec{a}$ равна 8, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°.

► Итак, имеем $|\vec{a}| = 8$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 60^\circ$. Подставляя числовые значения в формулу (2.3), получим

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 8\cdot\cos 60^\circ = 8\cdot\frac{1}{2} = 4. ◄$$

Упорядоченная линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается любой вектор, называется *базисом.* Любой ненулевой вектор является базисом множества всех векторов на прямой, любая пара неколлинеарных векторов — базисом векторов на плоскости, любая тройка некомпланарных векторов — базисом векторов в пространстве.

Базис играет большую роль в изучении векторных пространств. С его помощью векторы можно задавать в виде совокупности чисел, а операции над векторами сводить к операциям над числами.

Пусть три вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют базис трёхмерного пространства. Тогда любой вектор $\vec{a}$ этого пространства единственным образом можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов: $\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$, где числовые коэффициенты a_1, a_2, a_3 называются *координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$*. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$, то вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + {}$ $+ a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$, где координаты a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ — это его проекции на соответствующие координатные оси. Вектор $\vec{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Пример 4. Векторы заданы в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатами: $\vec{a} = (2; -1; 8)$, $\vec{e}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{e}_2 = (1; -1; -2)$, $\vec{e}_3 = {}$ $= (1; -6; 0)$. Убедиться, что тройка $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образует базис, и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

▶ Если определитель, составленный из координат векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, не равен нулю, то векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -18 - 4 + 3 - 12 = -31 \neq 0.$$

Таким образом тройка $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — базис.

Обозначим координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ через x_1, x_2, x_3. тогда $\vec{a} = (x_1; x_2; x_3) = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_2\,\vec{e}_3$. Так как по условию $\vec{a} = 2\,\vec{i} - \vec{j} + 8\,\vec{k}$, $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j} - 2\,\vec{k}$, $\vec{e}_3 = \vec{i} - 6\,\vec{j}$, то из равенства $\vec{a} = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3$ следует, что

$$\begin{aligned}
&2\,\vec{i} - \vec{j} + 8\,\vec{k} = \\
&\quad = x_1\,\vec{i} + 2x_1\,\vec{j} + 3x_1\,\vec{k} + x_2\,\vec{i} - x_2\,\vec{j} - 2x_2\,\vec{k} + x_3\,\vec{i} - 6x_3\,\vec{j} = \\
&\qquad\qquad = (x_1 + x_2 + x_3)\,\vec{i} + (2x_1 - x_2 - 6x_3)\,\vec{j} + (3x_1 - 2x_2)\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

Как видно, вектор в левой части полученного равенства равен вектору в правой его части, а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Её решение: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. Итак, $\vec{a} = 2\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (2; -1; 1)$. ◀

Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.4}$$

Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz углы α, β и γ соответственно. Направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью *направляющих косинусов*: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, для которых справедливы равенства

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{2.5}$$

Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пусть даны два вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Тогда

1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z; \end{cases}$$

2) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};$$

3) при сложении векторов их одноимённые координаты складываются, при вычитании — вычитаются, при умножении вектора на число — умножаются на это число, т. е.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z),$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x; \lambda \cdot a_y; \lambda \cdot a_z).$$

Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой $M(x; y; z)$ пространства называется *радиус-вектором* точки M. Координаты точки — это координаты её радиус-вектора $r = (x; y; z)$ или $r = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$. Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты a_x, a_y, a_z вычисляются по формулам $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$, т. е.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \tag{2.6}$$

Пример 5. Найти длину вектора $\vec{a} = 20\vec{i} + 30\vec{j} - 60\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

► Воспользуемся формулами (2.4) и (2.5):

$$|\vec{a}| = \sqrt{20^2 + 30^2 + (-60)^2} = 10\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 10\sqrt{49} = 70,$$

$$\cos\alpha = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}, \quad \cos\beta = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}, \quad \cos\gamma = \frac{-60}{70} = -\frac{6}{7}. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если $A(1; 3; 2)$ и $B(5; 8; -1)$.

► Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находятся по формуле (2.6). В данном случае имеем

$$\overrightarrow{AB} = (5-1)\vec{i} + (8-3)\vec{j} + (-1-2)\vec{k} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Нормировать вектор $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$.

► Найдём длину вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Искомый единичный вектор имеет вид

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}}{13} = \frac{3}{13}\vec{i} + \frac{4}{13}\vec{j} - \frac{12}{13}\vec{k}. \blacktriangleleft$$

Скалярное, векторное и смешанное произведения

1. Скалярное произведение. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi. \tag{2.7}$$

Формулу (2.7) можно записать в виде

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительное свойство);

2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (распределительное свойство);

3) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю);

4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} = \vec{0}$, либо $\vec{b} = \vec{0}$, либо $\vec{a} \perp \vec{b}$ (ортогональность ненулевых векторов);

5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, или $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими декартовыми координатами: $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$. Тогда скалярное произведение этих векторов находится по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.8}$$

Пример 8. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 10$ и $|\vec{b}| = 2$, вычислить $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$.

► Согласно свойствам скалярного произведения

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3\,\vec{a}^2 + 5\,\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\,\vec{b}^2 =$$

$$= 3\,|\vec{a}|^2 + 5\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi - 2\,|\vec{b}|^2 =$$

$$= 3\cdot 100 + 5\cdot 10\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} - 2\cdot 4 = 300 - 50 - 8 = 242. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 7\,\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\,\vec{i} - 5\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$.

$\blacktriangleright$ Находим

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + 4\cdot(-5) + 7\cdot 2 = 6 - 20 + 14 = 0.$$

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ и $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$. $\blacktriangleleft$

Пример 10. Определить угол между векторами $\vec{a} = \vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k}$.

$\blacktriangleright$ Так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, то $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2) = 6 + 8 - 6 = 8,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}.$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7} \quad \text{и} \quad \varphi = \arccos\frac{2}{7} \approx 73^\circ 24'. \blacktriangleleft$$

2. Векторное произведение. *Векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом:

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что упорядоченная тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правая.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\times\vec{b}$.

Для вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, применяется формула

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi, \tag{2.9}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (антиперестановочное свойство);

2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (распределительное свойство);

3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ (сочетательное свойство по отношению к скалярному множителю);

4) $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, если $\vec{a}=\vec{0}$, либо $\vec{b}=\vec{0}$, либо $\vec{a}\parallel\vec{b}$ (коллинеарность ненулевых векторов).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими декартовыми координатами $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{2.10}$$

или

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\vec{k}.$$

Пример 11. Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = \frac{5}{6}\pi$. Найти $|(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})|$.

► Согласно свойствам векторного произведения получаем

$$(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b}) =$$

$$= 2(\vec{a}\times\vec{a}) - 8(\vec{a}\times\vec{b}) + 3(\vec{b}\times\vec{a}) - 12(\vec{b}\times\vec{b}) =$$

$$= -8(\vec{a}\times\vec{b}) - 3(\vec{a}\times\vec{b}) = -11(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Следовательно,

$$|(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})| = |-11(\vec{a}\times\vec{b})| = 11\cdot|\vec{a}\times\vec{b}| =$$

$$= 11\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = 11\cdot 2\cdot 6\cdot\sin\frac{5\pi}{6} = 11\cdot 2\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 66. \blacktriangleleft$$

Пример 12. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

▶ Имеем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3 \cdot 1 - 2 \cdot 5)\,\vec{i} - (2 \cdot 1 - 1 \cdot 5)\,\vec{j} + (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3)\,\vec{k} =$$

$$= -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}. \blacktriangleleft$$

Пример 13. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

▶ Находим векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}.$$

Так как модуль векторного произведения двух векторов равен площади построенного на них параллелограмма, то

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleleft$$

3. Смешанное произведение. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$, т. е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Смешанное произведение трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение не изменяется, если в нём поменять местами знаки векторного ($\times$) и скалярного ($\cdot$) умножения, т. е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. В силу этого свойства смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ условимся записывать в виде $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$;

2) смешанное произведение не изменяется, если переставлять перемножаемые векторы в круговом порядке: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}$;

3) при перестановке любых двух векторов смешанное произведение меняет только знак: $\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, $\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b} = -\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$;

4) смешанное произведение трёх векторов равно нулю, если хотя бы один из перемножаемых векторов нулевой, либо два из перемножаемых векторов коллинеарны, либо три ненулевых вектора компланарны.

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы их разложениями по ортам декартовой системы координат: $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}$. Тогда

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятых в указанном порядке, образуют *правую* (*левую*) *тройку*, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке). Смешанное произведение правой тройки векторов положительно, а левой — отрицательно.

Объём V_1 параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и объём V_2 образованной ими треугольной пирамиды находятся по формулам

$$V_1 = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|, \tag{2.12}$$

$$V_2 = \frac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}|. \tag{2.13}$$

Пример 14. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = 2\,\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\,\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\,\vec{k}$.

► Имеем

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(12+1) + (4+1) - (1-3) = 26 + 5 + 2 = 33.$$

Из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны и образуют правую тройку. ◄

Пример 15. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\,\vec{k}$, $\vec{b} = 4\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$.

► Найдём смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -30 - 33 = -63.$$

Объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах, равен модулю смешанного произведения этих векторов, т. е.

$$V = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}| = |-63| = 63 \text{ (куб. ед.)}. \blacktriangleleft$$

Упражнения

2.1. При каких значениях x векторы $2x \cdot \vec{a}$ и $(x^3 - 1) \cdot \vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ имеют одинаковое направление?

2.2. При каких значениях x векторы $x^3 \cdot \vec{a}$ и $(x^2 - x - 2) \cdot \vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ противоположно направлены?

2.3. В треугольнике ABC сторона AB точками M и N разделена на три равные части: $AM = MN = NB$. Найти вектор $\overrightarrow{CM}$, если $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

2.4. В треугольнике ABC прямая AM является биссектрисой угла BAC, причём точка M лежит на стороне BC. Найти вектор $\overrightarrow{AM}$, если $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

2.5. В треугольнике ABC M — точка пересечения медиан треугольника, $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Разложить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.6. В параллелограмме $ABCD$ K и L середины сторон BC и CD, $\overrightarrow{AK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AL} = \vec{b}$. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2.7. В треугольной пирамиде $SABC$ известны векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Выразить через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор $\overrightarrow{SO}$, если точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABC.

2.8. Дано: $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$. Доказать, что $ABCD$ — трапеция.

2.9. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которой соответственно равны 4 и 2, а угол при вершине D равен $45°$. Найти проекции векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ на ось l, определяемую вектором $\overrightarrow{CD}$.

2.10. Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, а с осью Oz — тупой угол. Вычислить его координаты, если $|\vec{a}| = 2$.

2.11. Даны векторы $\vec{a} = (3; -2; 6)$ и $\vec{b} = (-2; 1; 0)$. Найти координаты векторов: $2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$; $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$; $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

2.12. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$ как на сторонах.

2.13. Векторы $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ определяют стороны треугольника ABC. Найти длину медианы, проведённой из вершины C.

2.14. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{c}_2 = 9\vec{b} - 12\vec{a}$, построенные по векторам $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}$?

2.15. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

2.16. На плоскости заданы векторы $\vec{e}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Найти разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

2.17. Написать разложение вектора $\vec{x} = 15\vec{i} - 20\vec{j} - \vec{k}$ по векторам $\vec{p} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{r} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

2.18. Найти координаты единичного вектора $\vec{e}$, направленного по биссектрисе угла, образуемого векторами $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

2.19. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 2\pi/3$, и $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить: $\vec{a}^2$; $\vec{b}^2$; $(\vec{a} + \vec{b})^2$; $(\vec{a} - \vec{b})^2$; $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

2.20. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pi/3$. Найти модуль вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

2.21. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, для которых $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Вычислить угол φ между медианой $\overrightarrow{OM}$ и стороной $\overrightarrow{OA}$ треугольника AOB.

2.22. Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; -4)$, $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a}^2$; $\vec{b}^2$; $(\vec{a} + \vec{b})^2$; $(\vec{a} - \vec{b})^2$; $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

2.23. При каком значении α векторы $\vec{a} = (-4; \alpha; 5)$ и $\vec{b} = (4; 3; \alpha)$ взаимно перпендикулярны?

2.24. Даны четыре последовательные вершины четырехугольника: $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Вычислить угол между его диагоналями.

2.25. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$. Вычислить острый угол между медианой BD и стороной AC.

2.26. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный оси Oz и вектору $\vec{a} = 8\vec{i} - 15\vec{j} + 3\vec{k}$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти координаты вектора $\vec{x}$.

2.27. Найти координаты вектора $\vec{x}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, при условии $\vec{a} \cdot \vec{x} = 3$.

2.28. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить: $|\vec{a} \times \vec{b}|$; $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$; $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

2.29. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.

2.30. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = 3\pi/4$.

2.31. Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторов: $\vec{a} \times \vec{b}$; $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

2.32. Вычислить площадь треугольника ABC, если известно, что $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(5; 2; 6)$.

2.33. При каком значении α векторы $\vec{a} = (1; 1; \alpha)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$ и $\vec{c} = (3; 0; 1)$ компланарны?

2.34. Лежат ли точки $A(1; 2; -1)$, $B(4; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ в одной плоскости?

2.35. Выяснить, компланарны ли следующие векторы. В случае некомпланарности установить, правой или левой будет тройка векторов: а) $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; 3)$, $\vec{c} = (-1; 9; -11)$; б) $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; 2)$, $\vec{c} = (-3; 1; 2)$; в) $\vec{a} = (3; 4; 0)$, $\vec{b} = (0; -4; 1)$, $\vec{c} = (0; 2; 5)$.

2.36. Даны три вектора: $\vec{a} = (8; 4; 1)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$, $\vec{c} = (4; 0; 3)$. Найти единичный вектор $\vec{e}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$ имели одинаковую ориентацию.

2.37. Найти объём треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 4; 1)$, $\vec{c} = (2; -1; 0)$.

2.38. Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины S на грань ABC, если $A(1; -1; 2)$, $B(2; 1; 2)$, $C(1; 1; 4)$, $S(6; -3; 8)$.

2.2. Прямая на плоскости

Метод координат на плоскости

Положение любой точки на плоскости можно однозначно определить с помощью прямоугольной декартовой системы координат. Эта система координат задаётся двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Эти прямые называют *осями координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox, другую — *осью ординат* (Oy). Единичные векторы осей Ox и Oy обозначают соответственно $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

Если M — произвольная точка плоскости, то вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки M* в системе координат Oxy называются координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Если $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y)$; при этом число x называется *абсциссой* точки M, а число y — *ординатой* точки M. Координаты точки полностью определяют её положение на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M на плоскости и наоборот.

Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2.14}$$

В частности, расстояние d точки $M(x; y)$ от начала координат определяется по формуле

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Координаты $(x; y)$ точки M, делящей отрезок AB в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, находятся по формулам

$$x = \frac{\lambda_2\, x_1 + \lambda_1\, x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_2\, y_1 + \lambda_1\, y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{2.15}$$

В частности, при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\,|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|, \tag{2.16}$$

или, что то же самое,

$$S = |\frac{1}{2}\,\Delta|,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Определить расстояние между точками $A(3;8)$ и $B(-2;14)$.

▶ Воспользовавшись формулой (2.14), получим

$$d = \sqrt{(-5-3)^2 + (14-8)^2} = \sqrt{64+36} = 10. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Известны точки $A(-2;5)$, $B(4;17)$ — концы отрезка AB. На этом отрезке находится точка C, расстояние которой от точки A в два раза больше расстояния от точки B. Определить координаты точки C.

▶ Так как $AC = 2\,CB$, то $\lambda_1 = 2$, а $\lambda_2 = 1$. Следовательно, по формуле (2.15) получаем

$$x = \frac{1\cdot(-2) + 2\cdot 4}{2+1} = 2,\ \ y = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 17}{2+1} = 13,\ \text{ т. е. } C(2;13). \blacktriangleleft$$

Пример 3. Определить площадь треугольника с вершинами $A(-2;-4)$, $B(2;8)$ и $C(10;2)$.

▶ Используя формулу (2.16), получаем

$$S = \frac{1}{2}\,|(2+2)(2+4) - (10+2)(8+4)| = \frac{1}{2}\,|24-144| = 60 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangleleft$$

Различные виды уравнения прямой

1. Общее уравнение прямой. Всякое уравнение первой степени относительно x и y, т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.17}$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты, причём $A^2 + B^2 \neq 0$, определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется *общим уравнением прямой.*

Вектор $\vec{n} = (A;B)$ перпендикулярен к прямой (2.17) и называется *нормальным вектором прямой.*

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) $C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + By = 0$, проходит через начало координат.

2) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax + C = 0$ (или $x = a$, где $a = -C/A$), параллельна оси Oy.

3) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By + C = 0$ (или $y = b$, где $b = -C/B$), параллельна оси Ox.

4) $B = C = 0$, $A \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $Ax = 0$ (или $x = 0$), совпадает с осью Oy.

5) $A = C = 0$, $B \neq 0$. Прямая, определяемая уравнением $By = 0$ (или $y = 0$), совпадает с осью Ox.

2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y = kx + b, \tag{2.18}$$

где $k = -A/B$, $b = -C/B$. Его называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом*, поскольку $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy.

3. Уравнение прямой в отрезках. Если в общем уравнении прямой коэффициент $C \neq 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{2.19}$$

где $a = -C/A$, $b = -C/B$. Его называют *уравнением прямой в отрезках*; в нём a является абсциссой точки пересечения прямой с осью Ox, а b — ординатой точки пересечения прямой с осью Oy.

4. Нормальное уравнение прямой. Если обе части общего уравнения прямой умножить на число $\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (которое называется *нормирующим множителем*), причём знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu C < 0$, то получится уравнение

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0. \tag{2.20}$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением прямой*. Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ — угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

5. Каноническое уравнение прямой. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется её *направляющим* *вектором.* Если известна некоторая точка $M(x_0; y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор $\vec{s} = (m; n)$ этой прямой, то уравнение данной прямой можно записать в виде

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{2.21}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой.* Следует отметить, что при записи уравнения прямой в каноническом виде допускается, чтобы одно из чисел m или n было равно нулю (одновременно m и n не могут быть равными нулю). Равенство нулю одного из знаменателей означает равенство нулю соответствующего числителя.

Пример 4. Уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения, в каноническом виде).

► Для получения уравнения (2.18) прямой с угловым коэффициентом разрешим заданное уравнение относительно y. Получим

$$3y = 4x - 12 = 0 \,|\, : 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x + 4.$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом; здесь $k = \frac{4}{3}$, $b = 4$.

Для получения уравнения (2.19) прямой в отрезках перенесём свободный член вправо и разделим обе части уравнения на него:

$$4x - 3y = -12 \,|\, : (-12) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1.$$

Это уравнение прямой в отрезках; здесь $a = -3$, $b = 4$.

Приведём уравнение прямой к нормальному виду (2.20). Для этого умножим обе части заданного уравнения на нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{-\sqrt{4^2+(-3)^2}} = -\frac{1}{5}$. Перед корнем взят знак «минус», так как свободный член имеет знак «плюс». Получим

$$4x - 3y + 12 = 0 \,\Big|\cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad -\frac{4}{5}\,x + \frac{3}{5}\,y - \frac{12}{5} = 0.$$

Это нормальное уравнение прямой; здесь $\cos\varphi = -\frac{4}{5}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $p = \frac{12}{5}$, т. е. расстояние от $O(0;0)$ до прямой равно 2,4 ед.

Для получения уравнения (2.21) прямой в каноническом виде перенесём в правую часть слагаемое, содержащее переменную y, и разделим обе части уравнения на произведение коэффициентов перед x и y. Получим

$$4x + 12 = 3y \,|\, : 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{3} = \frac{y}{4}.$$

Это каноническое уравнение прямой; здесь $x_0 = -3$, $y_0 = 0$, $m = 3$, $n = 4$, т. е. направляющий вектор прямой имеет координаты $(3; 4)$, а прямая проходит через точку с координатами $(-3; 0)$. ◄

Пример 5. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b = -3$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = \pi/6$.

► Находим угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Воспользовавшись уравнением (2.18) прямой с угловым коэффициентом, получаем $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 3$. Освобождаясь от знаменателя и перенося все члены в левую часть, получаем общее уравнение прямой $x - \sqrt{3}\,y - 3\sqrt{3} = 0$. ◄

Пример 6. Составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a = 2/5$, $b = -1/10$.

► Воспользовавшись уравнением (2.19) прямой в отрезках, имеем $\frac{x}{2/5} + \frac{y}{(-1/10)} = 1$. Это уравнение можно переписать в виде $\frac{5}{2}x - 10y = 1$, или $5x - 20y - 2 = 0$ (общее уравнение прямой). ◄

Пример 7. Составить уравнение прямой, зная, что расстояние от неё до начала координат равно $\sqrt{2}$, а угол между перпендикуляром, опущенным из начала координат на прямую, и осью Ox, равен $\frac{3}{4}\pi$.

► Воспользуемся нормальным уравнением прямой (2.20). Подставляя в него $p = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, получим $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2} = 0$. Освобождаясь от знаменателей, получаем общее уравнение прямой $x - y + 2 = 0$. ◄

Пример 8. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(0; 2)$ и $B(-3; 7)$.

► I способ. Подставим в уравнение (2.17) последовательно координаты заданных точек и решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2B + C = 0, \\ -3A + 7B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2B, \\ 3A = 7B + C = 5B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2B, \\ A = \frac{5}{3}B. \end{cases}$$

Положим $B = 3$, тогда $A = 5$, $C = -6$. Уравнение искомой прямой примет вид $5x + 3y - 6 = 0$.

II способ. Найдём координаты направляющего вектора прямой: $\overrightarrow{AB} = (-3 - 0; 7 - 2) = (-3; 5)$. Подставляя координаты точки A и вектора $\overrightarrow{AB}$ в уравнение (2.21), получим $\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{5}$. Освобождаясь от знаменателя и перенося все члены в левую часть, получаем общее уравнение прямой $5x + 3y - 6 = 0$. ◄

Взаимное расположение прямых. Метрические задачи

Под *углом между прямыми в плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол φ между ними находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{2.22}$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|. \tag{2.23}$$

Условие перпендикулярности этих *прямых* имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \tag{2.24}$$

а *условие* их *параллельности* —

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{2.25}$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними находится из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|. \tag{2.26}$$

Условие параллельности этих *прямых* имеет вид

$$k_1 = k_2, \tag{2.27}$$

а *условие* их *перпендикулярности* —

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}. \tag{2.28}$$

Если прямые заданы каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$, то угол φ между ними находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}. \tag{2.29}$$

Условие перпендикулярности этих *прямых* имеет вид

$$m_1m_2 + n_1n_2 = 0, \tag{2.30}$$

а *условие* их *параллельности* —

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \neq \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}. \tag{2.31}$$

Для нахождения общих точек пересекающихся прямых необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases} \tag{2.32}$$

Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.33}$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ вычисляется по формуле

$$d = |x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p|. \tag{2.34}$$

Пример 9. Найти острый угол между прямыми: 1) $y = 2x - 3$ и $y = \frac{1}{2}x + 5$; 2) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$.

► 1) Воспользуемся формулой (2.26). Подставляя в неё значения $k_1 = 2$ и $k_2 = \frac{1}{2}$, находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 2\cdot\frac{1}{2}}\right| = \frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{2} = \frac{3}{4}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 37^\circ;$$

2) Подставим значения $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $A_2 = 5$, $B_2 = -1$ в формулу (2.23):

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2\cdot(-1) - 5\cdot(-3)}{2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)}\right| = \left|\frac{-2+15}{10+3}\right| = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Через точку пересечения прямых $3x-2y+5=0$ и $x+2y-9=0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x+y+6=0$. Составить её уравнение.

$\blacktriangleright$ Найдём сначала точку M пересечения заданных прямых. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0, \\ \ \ x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

по формулам Крамера:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8}{8} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{32}{8} = 4,$$

т. е. $M(1;4)$. Так как искомая прямая $Ax + By + C = 0$ параллельна прямой $2x + y + 6 = 0$, то коэффициенты этих прямых перед x и y пропорциональны, в частности, равны: $A = 2$, $B = 1$. Для нахождения коэффициента C подставим в уравнение искомой прямой координаты точки M. Получим

$$2\cdot 1 + 1\cdot 4 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -6.$$

Итак, уравнение искомой прямой имеет вид $2x + y - 6 = 0$. $\blacktriangleleft$

Пример 11. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x + 4y - 20 = 0$ и $6x + 8y + 5 = 0$.

$\blacktriangleright$ Возьмём на первой прямой произвольную точку M. Пусть, например, $x = 0$, тогда $y = 5$, т. е. $M(0;5)$. По формуле (2.33) находим расстояние d от точки M до второй прямой:

$$d = \frac{|6\cdot 0 + 8\cdot 5 + 5|}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{45}{10} = 4{,}5 \text{ (ед.)}. \blacktriangleleft$$

Упражнения

2.39. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A(2;-1)$, $B(4;2)$ и $C(5;1)$ равнобедренный.

2.40. Даны вершины треугольника: $A(-1;-1)$, $B(0;-6)$ и $C(-10;-2)$. Найти длину медианы, проведённой из вершины A.

2.41. Даны концы отрезка AB: $A(-3;7)$ и $B(5;11)$. Этот отрезок тремя точками разделён на четыре равные части. Определить координаты точек деления.

2.42. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $P(2;2)$ и $Q(1;5)$ разделен на три равные части.

2.43. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(11;4)$, $B(-1;-1)$, $C(5;7)$. Определить координаты четвёртой вершины.

2.44. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами $A(2;4)$, $B(0;1)$, $C(4;2)$.

2.45. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(3;1)$, $B(4;6)$, $C(6;3)$ и $D(5;-2)$.

2.46. Площадь треугольника равна 10 кв. ед., две его вершины — точки $A(5;1)$ и $B(-2;2)$. Найти координаты третьей вершины, если известно, что она лежит на оси абсцисс.

2.47. Уравнение прямой задано в виде $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$. Написать: 1) общее уравнение этой прямой; 2) уравнение с угловым коэффициентом; 3) уравнение в отрезках; 4) нормальное уравнение; 5) каноническое уравнение.

2.48. Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60°. Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции — на оси ординат.

2.49. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $P(8;6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12 кв. ед.

2.50. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;5)$ на расстоянии 5 единиц от начала координат.

2.51. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1)$ и параллельной прямой $3x-5y+6=0$.

2.52. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1)$ и перпендикулярной к прямой $3x-5y+6=0$.

2.53. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$A(2;-1)$ и через точку пересечения прямых $x + 2y + 3 = 0$ и $2x + y + 5 = 0$.

2.54. Дан треугольник с вершинами $A(3;2)$, $B(3;8)$, $C(6;2)$. Написать уравнения сторон треугольника.

2.55. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$.

2.56. Даны вершины треугольника: $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12;-1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведённой из вершины C.

2.57. Вычислить величину меньшего угла φ между прямыми $3x + 4y - 2 = 0$ и $8x + 6y + 5 = 0$. Доказать, что точка $A(13/14;-1)$ лежит на биссектрисе этого угла.

2.58. Найти угол между прямой $2x - 3y = 0$ и прямой, проходящей через точки $A(5;0)$ и $B(0;3)$.

2.59. Найти расстояние от точки $P(5;4)$ до прямой $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5}$.

2.60. Найти расстояние от точки $M(5;4)$ до прямой, проходящей через точки $A(1;-2)$ и $B(0;3)$.

2.61. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;1)$ и образующей с прямой $2x + y - 4 = 0$ угол $45°$.

2.62. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $12x + 5y - 52 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии 2 ед.

2.63. Составить уравнения биссектрис углов между прямыми $3x + 4y - 20 = 0$ и $8x + 6y - 5 = 0$.

2.64. Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата.

2.65. Найти координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки $A(-1;2)$ на прямую $3x - 5y - 21 = 0$.

2.66. Найти точку, симметричную точке $M(2;-1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$.

2.3. Плоскость и прямая в пространстве

Метод координат в пространстве

Положение любой точки в пространстве можно однозначно определить с помощью прямоугольной системы координат. Эта система координат включает три взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в одной точке O — *начале координат*. Одну из осей называют *осью абсцисс* (ось Ox), другую — *осью ординат* (Oy), третью —

осью аппликат (Oz). На каждой из осей выбраны единичные векторы, которые обозначают соответственно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Если M — произвольная точка пространства, то вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе координат $Oxyz$ называются координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Если $\overrightarrow{OM} = (x; y; z)$, то координаты точки M записывают так: $M(x; y; z)$; здесь число x — *абсцисса*, y — *ордината*, z — *аппликата* точки M. Координаты точки полностью определяют её положение в пространстве: каждой тройке чисел x, y, z соответствует одна и только одна точка M в пространстве и наоборот.

Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (2.35)$$

Координаты $(x; y; z)$ точки M, делящей в заданном отношении λ отрезок AB, где $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ ($\lambda = \frac{AM}{MB}$), определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (2.36)$$

В частности, при $\lambda = 1$ получаются формулы для координат середины отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2.37)$$

Пример 1. На оси Oy найти точку, равноудалённую от двух точек $A(2; 3; 1)$ и $B(-1; 5; -2)$.

► Точка M, лежащая на оси Oy, имеет координаты $M(0; y; 0)$. По условию задачи $AM = BM$. Найдём расстояния AM и BM, используя формулу (2.35):

$$AM = \sqrt{(0-2)^2 + (y-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{y^2 - 6y + 14};$$

$$BM = \sqrt{(0+1)^2 + (y-5)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}.$$

Получим уравнение

$$\sqrt{y^2 - 6y + 14} = \sqrt{y^2 - 10y + 30}.$$

Возведём в квадрат обе части уравнения и приведём подобные:

$$y^2 - 6y + 14 = y^2 - 10y + 30 \quad \Rightarrow \quad 4y = 16.$$

Отсюда находим, что $y = 4$. Искомая точка есть $M(0; 4; 0)$. ◄

Пример 2. Отрезок AB разделён на три равные части. Найти координаты точек деления, если известны точки $A(-2;4;1)$ и $B(2;-4;-3)$.

► Обозначим точки деления отрезка AB в следующем порядке: C и D. По условию задачи $AC = CD = DB$. Поэтому точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулами (2.36), находим координаты точки C:

$$x_C = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}, \qquad y_C = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot(-4)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3},$$

$$z_C = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

По формулам (2.37) находим координаты точки D — середины отрезка CB:

$$x_D = \frac{-\frac{2}{3} + 2}{2} = \frac{2}{3}, \quad y_D = \frac{\frac{4}{3} - 4}{2} = -\frac{4}{3}, \quad z_D = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{2} = -\frac{5}{3},$$

т. е. точка D имеет координаты $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. ◄

Различные виды уравнения плоскости

1. Общее уравнение плоскости. В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2.38)$$

где A, B, C, D — заданные числа, причём $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, и обратно, уравнение (2.38) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Уравнение (2.38) называется *общим уравнением плоскости.* Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (2.38). Он называется *нормальным вектором* этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1) $Ax + By + Cz = 0$ — плоскость проходит через начало координат;

2) $By + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна оси Ox;

3) $Ax + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна оси Oy;

4) $Ax + By + D = 0$ — плоскость параллельна оси Oz;
5) $By + Cz = 0$ — плоскость проходит через ось Ox;
6) $Ax + Cz = 0$ — плоскость проходит через ось Oy;
7) $Ax + By = 0$ — плоскость проходит через ось Oz;
8) $Cz + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости Oxy;
9) $By + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости Oxz;
10) $Ax + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости Oyz;
11) $Cz = 0$ — координатная плоскость Oxy;
12) $By = 0$ — координатная плоскость Oxz;
13) $Ax = 0$ — координатная плоскость Oyz.

Если известны нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A; B; C)$ и некоторая точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, лежащая в ней, то уравнение плоскости можно записать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.39}$$

При произвольных значениях A, B и C уравнение (2.39) определяет некоторую плоскость, принадлежащую связке плоскостей, проходящих через точку M_0. Его поэтому часто называют *уравнением связки плоскостей.*

Уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \tag{2.40}$$

при произвольном значении λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, т. е. некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую. В силу этого уравнение (2.40) часто называют *уравнением пучка плоскостей.*

2. Уравнение плоскости в отрезках. Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$, $M_3(0; 0; c)$ соответственно, то её уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2.41}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Уравнение (2.41) называется *уравнением плоскости в отрезках.* Числа a, b, c в этом уравнении имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает плоскость на осях координат.

3. Нормальное уравнение плоскости. Если обе части общего уравнения плоскости умножить на число $\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (которое называется *нормирующим множителем*), причём знак перед радикалом выбрать так, чтобы выполнялось условие $\mu D < 0$, то получится уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{2.42}$$

Уравнение (2.42) называется *нормальным уравнением плоскости.* Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость; α, β, γ — углы, образованные этим перпендикуляром с осями Ox, Oy, Oz соответственно.

4. Каноническое уравнение плоскости. Два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, называются её *направляющими векторами.* Если известна некоторая точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая плоскости, и направляющие векторы этой плоскости: $\vec{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$, то уравнение данной плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.43}$$

Уравнение (2.43) называется *каноническим уравнением плоскости.* Заметим, что, раскрыв данный определитель по элементам первой строки, придём к уравнению вида (2.39).

Следствием этого уравнения является уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, не лежащие на одной прямой, которое имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.44}$$

Пример 3. Уравнение плоскости $2x+3y-6z+21=0$ привести к нормальному виду.

► Находим нормирующий множитель (который берём со знаком «минус», поскольку $D = 21 > 0$): $\mu = -\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}} = -\frac{1}{7}$. Итак, нормальное уравнение заданной плоскости имеет вид

$$-\frac{1}{7}(2x+3y-6z+21) = 0, \text{ т. е. } -\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{6}{7}z - 3 = 0. ◄$$

Пример 4. Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(-1;2;5)$.

▶ Уравнение плоскости, параллельной оси Oz, имеет вид $Ax + By + D = 0$. Так как плоскость проходит через точки M_1 и M_2, то координаты этих точек удовлетворяют уравнению плоскости. Подставим их в уравнение $Ax + By + D = 0$. Получаем два уравнения

$$\begin{cases} 3A - B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0 \end{cases}$$

с тремя неизвестными A, B, D. Выразим неизвестные коэффициенты A и B через D: умножив первое уравнение на 2 и сложив почленно уравнения, находим $5A + 3D = 0$, т. е. $A = -\frac{3}{5}D$; умножив второе уравнение на 3 и сложив почленно уравнения, находим $5B+4D = 0$, т. е. $B = -\frac{4}{5}D$. Подставляя найденные значения A и B в уравнение $Ax+By+D = 0$, получаем $-\frac{3}{5}D\,x-\frac{4}{5}D\,y+D = 0$. После сокращения на $\left(-\frac{1}{5}D\right)$ уравнение искомой плоскости приобретает вид $3x + 4y - 5 = 0$. ◀

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;5)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (4;3;2)$.

▶ Воспользуемся уравнением (2.39) плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору:

$$4(x-2) + 3(y-3) + 2(z-5) = 0, \text{ т. е. } 4x + 3y + 2z - 27 = 0. ◀$$

Пример 6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-1)$ параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

▶ Запишем уравнение (2.39) связки плоскостей, проходящих через данную точку:

$$A(x-2) + B(y-3) + C(z+1) = 0.$$

Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\vec{n} = (5;-3;2)$ данной плоскости; следовательно, $A = 5$, $B = -3$, $C = 2$, и уравнение искомой плоскости примет вид

$$5(x-2) - 3(y-3) + 2(z+1) = 0, \text{ или } 5x - 3y + 2z + 1 = 0. ◀$$

Пример 7. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x+y+5z-1=0$, $2x+3y-z+2=0$ и через точку $M(3;2;1)$.

► Воспользуемся уравнением (2.40) пучка плоскостей:

$$x+y+5z-1+\lambda(2x+3y-z+2)=0.$$

Значение λ определяем из условия, что координаты точки M удовлетворяют этому уравнению:

$$3+2+5\cdot 1-1+\lambda(2\cdot 3+3\cdot 2-1+2)=0, \text{ или } 9+13\lambda=0,$$

откуда $\lambda=-\frac{9}{13}$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$x+y+5z-1-\frac{9}{13}(2x+3y-z+2)=0, \text{ или } 5x+14y-74z+31=0. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5;4;3)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат.

► Используя уравнение (2.41) плоскости в отрезках, в котором $a=b=c$, имеем $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. Координаты точки M удовлетворяют уравнению искомой плоскости, поэтому выполняется равенство

$$\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1, \text{ или } \frac{12}{a}=1, \text{ откуда } a=12.$$

Итак, получаем уравнение

$$\frac{x}{12}+\frac{y}{12}+\frac{z}{12}=1, \text{ или } x+y+z-12=0. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;3;-4)$ и параллельной векторам $\vec{a}=(-3;2;-1)$ и $\vec{b}=$ $=(0;3;1)$.

► Воспользуемся уравнением (2.43) плоскости. Имеем

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+4 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0, \text{ или } 5(x-2)+3(y-3)-9(z+4)=0,$$

$$\text{т. е. } 5x+3y-9z-55=0. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Из точки $P(2;3;-5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Составить уравнение плоскости, проходящей через их основания.

► Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, служат точки $M_1(2;3;0)$, $M_2(2;0;-5)$, $M_3(0;3;-5)$. Используя соотношение (2.44), запишем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-0 \\ 2-2 & 0-3 & -5-0 \\ 0-2 & 3-3 & -5-0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 15(x-2)+10(y-3)-6z=0,$$

$$\text{т. е. } 15x+10y-6z-60=0. \blacktriangleleft$$

Различные виды уравнения прямой

1. Общие уравнения прямой. Прямая может быть задана уравнениями двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{2.45}$$

пересекающимися по этой прямой (коэффициенты при переменных не пропорциональны). Уравнения (2.45) называются *общими уравнениями прямой в пространстве.*

Всякий ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором* этой *прямой.* Направляющий вектор $\vec{s}$ прямой, заданной уравнениями (2.45), определяется по формуле

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{2.46}$$

т. е.

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

2. Каноническое уравнение прямой. Если из системы уравнений (2.45) найти координаты какой-либо точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, лежащей на прямой, и по формулам (2.46) вычислить её направляющий вектор $\vec{s}=(m,n,p)$, то уравнение этой прямой можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{2.47}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением прямой в пространстве.* Обращение в нуль одного из знаменателей уравнения (2.47) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Следствием уравнения (2.47) является уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, которое имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.48}$$

3. Параметрические уравнения прямой. Примем за параметр t каждую из трёх дробей, стоящих в канонических уравнениях (2.47), и выразим через этот параметр t переменные x, y и z. Получим

$$\begin{cases} x=x_0+m\,t,\\ y=y_0+n\,t,\\ z=z_0+p\,t. \end{cases} \tag{2.49}$$

Уравнения (2.49) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве.* Число t является координатой точки $M(x;y;z)$ на прямой в системе координат $\{M_0,\vec{s}\}$.

Пример 11. Общее уравнение прямой

$$\begin{cases} x+2y-3z+2=0,\\ 2x-2y+z-5=0 \end{cases}$$

преобразовать к каноническому виду.

► I способ. Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и её направляющий вектор. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z=0$, тогда для определения абсциссы x и ординаты y у этой точки получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+2=0,\\ 2x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=0,\\ -6y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,\\ y=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Итак, на прямой известна точка $\left(1;-\frac{3}{2};0\right)$. Направляющий вектор прямой находим по формуле (2.46):

$$\vec{s}=\left(\begin{vmatrix} 2 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}\right)=(-4;-7;-6).$$

Тогда согласно формуле (2.47)

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-7}=\frac{z-0}{-6}, \text{ или } \frac{x-1}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{7}=\frac{z}{6}.$$

<u>II способ.</u> Каноническое уравнение прямой можно получить, зная две точки этой прямой. В качестве координат этих точек можно взять два различных частных решения данной системы уравнений. Для нахождения второй точки положим $x=0$. Тогда получим

$$\begin{cases}2y-3z+2=0,\\ -2y+z-5=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4y-13=0,\\ -2z-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-\frac{13}{4},\\ z=-\frac{3}{2}.\end{cases}$$

Получили две точки: $M_1\left(1;-\frac{3}{2};0\right)$ и $M_2\left(0;-\frac{13}{4};-\frac{3}{2}\right)$. Тогда искомое уравнение найдём, используя формулу (2.48):

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-\frac{13}{4}+\frac{3}{2}}=\frac{z-0}{-\frac{3}{2}-0}, \text{ или } \frac{x-1}{-1}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-\frac{7}{4}}=\frac{z}{-\frac{3}{2}},$$

$$\text{т. е. } \frac{x-1}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{7}=\frac{z}{6}. \blacktriangleleft$$

Пример 12. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ параллельно оси Oy.

$\blacktriangleright$ В качестве направляющего вектора оси Oy можно взять вектор $\vec{s}=(0;1;0)$, совпадающий с ортом $\vec{j}$. Искомое уравнение (2.49) прямой есть

$$\begin{cases}x=2+0\cdot t,\\ y=-1+1\cdot t,\\ z=-3+0\cdot t,\end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases}x=2,\\ y=-1+t,\\ z=-3.\end{cases} \blacktriangleleft$$

Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Метрические задачи

Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей.

Если плоскости заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то величина наименьшего из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (2.50)$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \qquad (2.51)$$

условие параллельности —

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \qquad (2.52)$$

плоскости совпадают, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \qquad (2.53)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+$ $+ D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.54)$$

Если плоскость задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \qquad (2.55)$$

Пример 13. Найти величину острого угла между плоскостями: 1) $11x-8y-7z-15 = 0$ и $4x-10y+z-2 = 0$; 2) $2x+3y-4z+4 = 0$ и $5x - 2y + z - 3 = 0$.

► 1) Воспользовавшись формулой (2.50), получаем

$$\cos\varphi = \frac{|11\cdot 4 - 8\cdot(-10) - 7\cdot 1|}{\sqrt{121 + 64 + 49}\cdot\sqrt{16 + 100 + 1}} =$$
$$= \frac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}} = \frac{\sqrt{117}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{117}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2) Можно заметить, что выполняется условие (2.51) перпендикулярности плоскостей, так как $2\cdot5+3\cdot(-2)-4\cdot1 = 0$. Следовательно, плоскости взаимно перпендикулярны; $\varphi = \frac{\pi}{2}$. ◄

Пример 14. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x - 2y + 2z + 5 = 0$ и удалённой от точки $M(3;4;-2)$ на расстояние $d = 5$.

► Уравнение искомой плоскости ищем в виде $x-2y+2z+D=0$. Найдём значение D. Так как точка M улалена от искомой плоскости на расстояние $d = 5$, то по формуле (2.54) записываем

$$5 = \frac{|3 - 2\cdot 4 + 2\cdot(-2) + D|}{\sqrt{1+4+4}}, \text{ или } 5 = \frac{|D-9|}{3}, \text{ т. е. } 15 = \pm(D-9),$$

откуда $D = 24$ и $D = -6$. Условию задачи удовлетворяют две плоскости: $x - 2y + 2z + 24 = 0$ и $x - 2y + 2z - 6 = 0$. ◄

Под *углом между прямыми* в пространстве понимают угол между направляющими векторами этих прямых.

Величина острого угла между прямыми

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{2.56}$$

Теперь можно записать *условие перпендикулярности прямых*:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \tag{2.57}$$

Условие параллельности прямых имеет вид

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}, \tag{2.58}$$

а *условие* их *совпадения* —

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}, \tag{2.59}$$

где $\vec{s}_1 = (m_1;n_1;p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2;n_2;p_2)$ — направляющие векторы прямых, точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ принадлежат прямым.

Условием, при котором две прямые лежат в одной плоскости (*условие компланарности двух прямых*), является равенство

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.60}$$

при этом если $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$, то прямые пересекаются. Если условие (2.60) не выполняется, то прямые скрещивающиеся.

Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямой (2.47), проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{s} = (m; n; p)$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0 M_1}}{\vec{s}}. \tag{2.61}$$

Пример 15. Найти величину острого угла между прямыми

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y + 2z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

► Направляющий вектор первой прямой есть $\vec{s}_1 = (-3; 1; -2)$. Находим направляющий вектор $\vec{s}_2$ второй прямой:

$$\vec{s}_2 = \left(\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right), \quad \text{т. е.} \quad \vec{s}_2 = (-1; 5; 3).$$

По формуле (2.56) находим

$$\cos\varphi = \frac{|-3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3|}{\sqrt{9+1+4} \cdot \sqrt{1+25+9}} = \frac{\sqrt{10}}{35},$$

поэтому $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{10}}{35} \approx 84°49'$. ◄

Пример 16. В уравнениях прямой $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{p}$ определить параметр p так, чтобы эта прямая пересекалась с прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

► Для нахождения параметра p используем условие (2.60) пересечения двух прямых; полагая $x_1 = -1$, $y_1 = -5$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$, $m_1 = 3$, $n_1 = 2$, $p_1 = 1$, $m_2 = 2$, $n_2 = -3$, $p_2 = p$, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & p \end{vmatrix} = 0, \text{ или } 2p + 10 + 3 - 15p = 0, \text{ т. е. } p = 1.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямых $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$, выразим из первых уравнений x и y через z: $x = 2z$, $y = -3z$. Подставляя эти значения в равенство $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2}$, имеем $\frac{2z+1}{3} = \frac{-3z+5}{2}$, откуда $z = 1$. Зная z, находим $x = 2 \cdot 1 = 2$, $y = -3 \cdot 1 = -3$. Следовательно, $M(2; -3; 1)$. ◄

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её ортогональной проекцией на плоскость.

Величина угла между прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

и плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0$$

определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \tag{2.62}$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}; \tag{2.63}$$

условия параллельности прямой и плоскости:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0; \end{cases} \tag{2.64}$$

условия принадлежности прямой плоскости:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases} \tag{2.65}$$

Если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то прямая пересекает плоскость. Для определения точки пересечения прямой с плоскостью нужно решить совместно их уравнения. Если воспользоваться параметрическими уравнениями прямой, то координаты точки пересечения находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} x=x_0+m\,t, \\ y=y_0+n\,t, \\ z=z_0+p\,t, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{2.66}$$

Пример 17. Найти величину угла между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}=$ $=\frac{z+5}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.

► Применяя формулу (2.62), находим

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot 1-2\cdot 1-2\cdot(-2)|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}}=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\varphi=\frac{\pi}{6}$. ◄

Пример 18. Найти проекцию точки $M(1;1;1)$ на плоскость $x+y-2z-6=0$.

► Запишем уравнения любой прямой, проходящей через точку M: $\frac{x-1}{m}=\frac{y-1}{n}=\frac{z-1}{p}$. Координаты (m,n,p) направляющего вектора прямой, перпендикулярной плоскости, можно заменить координатами нормального вектора $\vec{n}=(1;1;-2)$ данной плоскости. Тогда параметрические уравнения этой прямой запишутся в виде $x=t+1$, $y=t+1$, $z=-2t+1$.

Найдём проекцию точки M на данную плоскость, решив совместно уравнения

$$\begin{cases} x+y-2z-6=0, \\ x=t+1, \\ y=t+1, \\ z=-2t+1. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y и z в уравнение плоскости, найдём

$$(t+1)+(t+1)-2(-2t+1)-6=0, \text{ или } 6t-6=0, \text{ т. е. } t=1.$$

Откуда $x=1+1=2$, $y=1+1=2$, $z=-2\cdot 1+1=-1$, т. е. координаты проекции $(2,2,-1)$. ◄

Упражнения

2.67. Доказать, что треугольник с вершинами в точках $A(8;0;6)$, $B(2;-4;2)$ и $C(6;-6;-2)$ прямоугольный.

2.68. Даны вершины треугольника: $A(1;-1;3)$, $B(-5;2;-6)$, $C(2;1;-2)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

2.69. Написать уравнение плоскости, параллельной координатной плоскости Oxy и проходящей через точку $A(7;-3;5)$.

2.70. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и через точку $B(-3;1;-2)$.

2.71. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через две точки $M_1(4,0,-2)$ и $M_2(5,1,7)$.

2.72. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $C(2;1;-1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(1;-2;3)$.

2.73. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $D(3,4,-5)$ параллельно двум векторам: $\vec{a}=(3;1;-1)$ и $\vec{b}=$ $=(1;-2;1)$.

2.74. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точки $M_1(2;0;-1)$, $M_2(-3;1;3)$ параллельно вектору $\vec{s}=(1;2;-1)$.

2.75. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $N(2;-1;4)$ и отсекает на оси OZ отрезок, вдвое больший, чем на осях Ox и Oy.

2.76. Написать уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{s} = (2;1;-1)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 3$ и $b = -2$.

2.77. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(1,1,1)$ и $M_2(2,3,4)$, перпендикулярно к плоскости $2x - 7y + 5z + 9 = 0$.

2.78. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1;0;3)$ перпендикулярно к двум плоскостям: $x + y + z - 8 = 0$ и $2x - y + 4z + 5 = 0$.

2.79. Найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей $x - 2y + 3z - 4 = 0$ и $x + y - 5z + 9 = 0$, и параллельной оси Ox.

2.80. Составить уравнение плоскости, зная, что точка $P(4;-3;12)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

2.81. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(5;3;4)$ и параллельна вектору $\vec{s} = (2;5;-8)$.

2.82. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M(1;1;1)$ и перпендикулярна векторам $\vec{s}_1 = (2;3;1)$ и $\vec{s}_2 = (3;1;2)$.

2.83. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $M_0(2,0,-3)$ и параллельна прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{cases}$

2.84. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $M(-2;3;4)$ и перпендикулярна прямым $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$.

2.85. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;3;-2)$ и образующей с осями Ox, Oy , Oz углы 120°, 60°, 45° соответственно.

2.86. Даны вершины треугольника $A(-3;2;8)$, $B(-7;0;3)$, $C(3;4;5)$. Составить параметрические уравнения его медианы, проведённой из вершины A.

2.87. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(1;-1;2)$ и параллельна прямым $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$ и $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$.

2.88. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ и перпендикулярной к плоскости $x+4y-{}$ $-\,3z+7=0$.

2.89. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ и перпендикулярной к плоскости $3x+{}$ $+\,y-z-8=0$.

2.90. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости Oxy, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$.

2.91. Записать общие уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x-y+7z-4=0$ и $5x+3y-{}$ $-\,5z+2=0$.

2.92. Найти точку, симметричную точке $P(2;-5;7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

2.93. Найти точку, симметричную точке $M(-2;0;3)$ относительно плоскости $2x-2y+10z+1=0$.

2.94. Вычислить острый угол между плоскостями, проходящими через точку $M(1;-1;-1)$, одна из которых содержит ось Ox, а другая — ось Oz.

2.95. Найти величину острого угла между прямыми

$$\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x-y+3z+1=0. \end{cases}$$

2.96. Найти величину острого угла между прямой $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 3y+z-1=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x+3y-z+1=0$.

2.97. Найти расстояние от точки $M_0(1;-1;2)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1;5;-7)$, $M_2(-3;6;3)$, $M_3(-2;7;3)$.

2.98. Вычислить расстояние между прямыми $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

2.99. Доказать, что параллелепипед, грани которого лежат в плоскостях $8x-4y+5z-7=0$, $3x+y-4z+13=0$, $11x+47y+{}$ $+\,20z+2=0$, является прямоугольным.

2.100. Пересекаются ли прямые $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ и $\dfrac{x}{3}=$ $=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-3}{5}$?

2.101. При каких значениях C и D прямая $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{7}$ лежит в плоскости $2x-y+Cz+D=0$?

2.4. Линии второго порядка

Линии второго порядка

Линией (*кривой*) *второго порядка* называется множество точек плоскости, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{2.67}$$

где A, B, C, D, E, F — постоянные действительные числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Уравнение (2.67) называется *общим уравнением линии второго порядка.*

Рассмотрим частные случаи уравнения (2.67).

1. Окружность. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой *центром.* Если r — радиус окружности, а точка $C(x_0; y_0)$ — её центр, то уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \tag{2.68}$$

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Если в левой части уравнения (2.68) раскрыть скобки, то получится уравнение вида

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{2.69}$$

где $D = -x_0$, $E = -y_0$, $F = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.

В общем случае уравнение (2.69) определяет окружность, если $D^2 + E^2 - F > 0$. Если $D^2 + E^2 - F = 0$, то указанное уравнение определяет точку $(-D, -E)$, а если $D^2 + E^2 - F < 0$, то оно не имеет геометрического смысла. В этом случае говорят, что уравнение определяет мнимую окружность.

Полезно помнить, что уравнение окружности содержит старшие члены x^2 и y^2 с равными коэффициентами и в нём отсутствует член с произведением x на y.

Пример 1. Найти координаты центра и радиус окружности $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$.

► Разделив уравнение на 2 и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2 - 4x + y^2 + \frac{5}{2}y = 2$. Дополним выражения $x^2 - 4x$ и $y^2 + \frac{5}{2}y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 2^2 и ко второму $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$$(x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) = 2 + 4 + \frac{25}{16},$$

или

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Таким образом, координаты центра окружности $x_0 = 2$, $y_0 = -\frac{5}{4}$, а радиус окружности $r = \frac{11}{4}$. ◄

Пример 2. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5;0)$ и $B(1;4)$, если её центр лежит на прямой $x + y - 3 = 0$.

► Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде AB. Найдём координаты точки M — середины отрезка AB; имеем $x_M = \frac{5+1}{2} = 3$, $y_M = \frac{4+0}{2} = 2$, т. е. $M(3;2)$. Так как нормальным вектором серединного перпендикуляра является вектор $\overrightarrow{AB} = (1-5; 4-0) = (-4;4)$, то уравнение этого перпендикуляра имеет вид

$$-4(x-3) + 4(y-2) = 0, \text{ т. е. } x - y - 1 = 0.$$

Очевидно, что центр окружности C есть точка пересечения прямой $x + y - 3 = 0$ с указанным перпендикуляром, т. е. координаты центра определяются путём решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y - 2 = 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Следовательно, $C(2;1)$. Радиус окружности равен длине отрезка CA, т. е. $r = \sqrt{(5-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$. Итак, искомое уравнение имеет вид $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$. ◄

2. Эллипс. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Эллипс с полуосями a и b, центром в начале координат и вершинами A_1, A_2, B_1, B_2, расположенными на осях координат, определяется простейшим (каноническим) уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.70}$$

На рис. 2.11 изображён эллипс, у которого $a > b$ (a — *большая полуось*, b — *малая*), а на рисунке 2.12 — эллипс, у которого $a < b$ (a — *малая полуось*, b — *большая*). Оси координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат — центром симметрии.

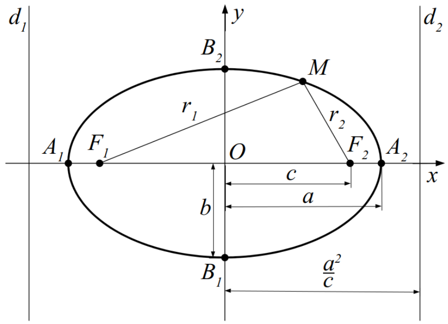


Рис. 2.11

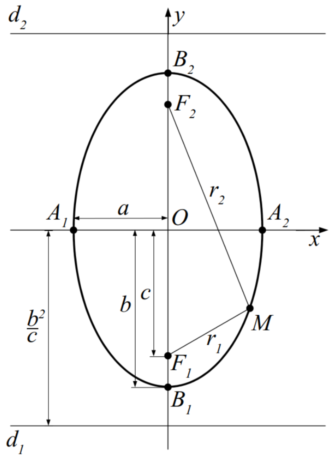


Рис. 2.12

Расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M эллипса до фокусов F_1 и F_2 называются *фокальными радиусами* этой точки. В силу определения эллипса для любой его точки $r_1 + r_2 = 2a$ в случае $a > b$ или $r_1 + r_2 = 2b$ в случае $a < b$. Если половину расстояния между фокусами (*полуфокусное расстояние*) обозначить через c, то

$$b^2 = a^2 - c^2 \ (a > b) \quad \text{и} \quad a^2 = b^2 - c^2 \ (a < b). \tag{2.71}$$

Форма эллипса (мера его сжатия) характеризуется его *эксцентриситетом* ε — отношением фокусного расстояния (расстояния между фокусами) к большой оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}\ (a > b) \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{c}{b}\ (a < b). \qquad (2.72)$$

В любом случае $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

В частном случае, когда $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$, фокусы сливаются в одной точке — центре), эллипс превращается в окружность (с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$).

Для фокальных радиусов имеют место формулы

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x,$$

если $a > b$, или

$$r_1 = b + \varepsilon y, \quad r_2 = b - \varepsilon y,$$

если $a < b$.

Для эллипса, не являющегося окружностью, прямые d_1 и d_2, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}\ (a > b) \quad \text{и} \quad y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{b^2}{c}\ (a < b), \qquad (2.73)$$

называются *директрисами эллипса.* Когда эллипс является окружностью, директрис нет (можно считать, что директрисы бесконечно удалены).

Фокальным параметром эллипса называется половина длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной большой оси эллипса:

$$p = \frac{b^2}{a}\ (a > b) \quad \text{и} \quad p = \frac{a^2}{b}\ (a < b). \qquad (2.74)$$

Фокальный параметр окружности, очевидно, равен её радиусу. С помощью фокального параметра расстояние между фокусом и директрисой эллипса выражается следующей формулой:

$$\Delta = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Уравнение эллипса с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad (2.75)$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты центра эллипса.

Пример 3. Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2 = 1176$. Найти: 1) длины его полуосей; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет эллипса; 4) уравнения директрис и расстояние между ними; 5) фокальный параметр эллипса и расстояние между фокусом и соответствующей директрисой; 6) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса равно 12.

► Запишем уравнение эллипса в виде (2.70), разделив обе части на 1176:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1.$$

1) Отсюда $a^2 = 49$, $b^2 = 24$, т. е. $a = 7$, $b = 2\sqrt{6}$ $(a > b)$.

2) Используя соотношение (2.71), находим $c^2 = 7^2-(2\sqrt{6})^2 = 25$, $c = 5$. Следовательно, $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.

3) По формуле (2.72) находим $\varepsilon = \frac{5}{7}$.

4) Уравнения директрис (2.73) имеют вид $x = \pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, т. е. $x = \frac{49}{5}$ и $x = -\frac{49}{5}$; расстояние между ними $d = \frac{49}{5} - \left(-\frac{49}{5}\right) = \frac{98}{5} = 19{,}6$.

5) По формуле (2.74), находим $p = \frac{24}{7}$ и $\Delta = \frac{24}{7} : \frac{5}{7} = \frac{24}{5} = 4{,}8$.

6) По формуле $r_1 = a + \varepsilon\, x$ находим абсциссу точек, расстояние от которых до точки F_1 равно 12: $12 = 7+\frac{5}{7}\,x$, т. е. $x = 7$. Подставляя найденное значение x в уравнение эллипса, найдём ординаты этих точек: $24\cdot 49+49y^2 = 1179$, или $49y^2 = 0$, т. е. $y = 0$. Условию задачи удовлетворяет точка $A(7;0)$. ◄

Пример 4. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1(2;-4\sqrt{3})$ и $M_2(-1;2\sqrt{15})$.

► Уравнение эллипса ищем в виде (2.70)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Так как эллипс проходит через точки M_1 и M_2, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{48}{b^2} = 1$ и $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{60}{b^2} = 1$. Умножая второе равенство на (-4) и складывая с первым, находим $-\dfrac{192}{b^2} = -3$, т. е. $b^2 = 64$. Подставляя найденное значение b^2 в первое уравнение, получаем $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{48}{64} = 1$, откуда $a^2 = 16$. Таким образом, искомое уравнение эллипса есть $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64} = 1$. ◄

3. Гипербола. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Гипербола с действительной полуосью a, мнимой полуосью b, центром в начале координат и вершинами A_1 и A_2 на оси Ox (рис. 2.13) имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.76}$$

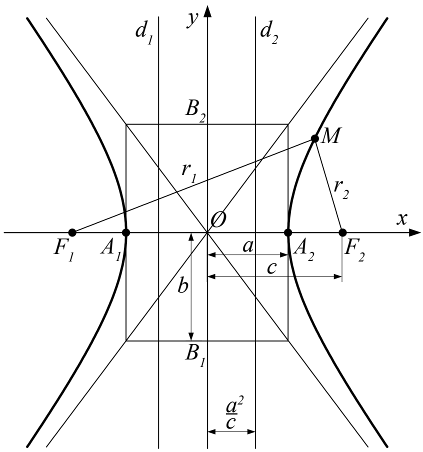


Рис. 2.13

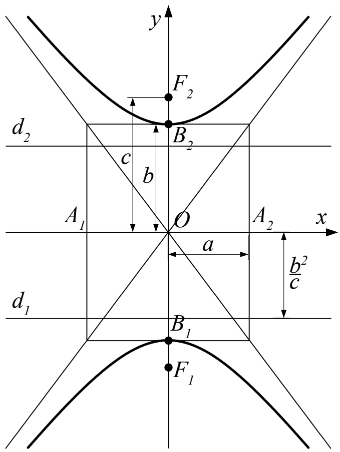


Рис. 2.14

Гипербола состоит из двух ветвей и расположена симметрично относительно осей координат. Отрезки A_1A_2 ($|A_1A_2| = 2a$) и B_1B_2 ($|B_1B_2| = 2b$) называются соответственно *действительной* и *мнимой осями* гиперболы. Расстояние $|F_1F_2| = 2c$ называется *фокусным* (*фокальным*) *расстоянием гиперболы*, а ось, на которой лежат фокусы, — *фокальной осью гиперболы.* Числа a, b и c связаны соотношением

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{2.77}$$

Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние от точки гиперболы до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль ветви гиперболы в бесконечность. Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых

$$y = \pm \frac{b}{a}\, x. \tag{2.78}$$

Для построения асимптот гиперболы строят *основной прямоугольник гиперболы* со сторонами $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$. Прямые, проходящие через противоположные вершины этого прямоугольника, являются асимптотами гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1. \tag{2.79}$$

Фокальные радиусы правой ветви гиперболы определяются формулами

$$r_1 = \varepsilon\, x + a, \quad r_2 = \varepsilon\, x - a;$$

левой ветви —

$$r_1 = -\varepsilon\, x - a, \quad r_2 = -\varepsilon\, x + a.$$

Две прямые d_1 и d_2, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы.* Их уравнения

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}. \tag{2.80}$$

Фокальным параметром гиперболы называется половина длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной действительной оси гиперболы:

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{2.81}$$

Так же, как и в случае эллипса, расстояние между фокусом и директрисой гиперболы выражается формулой

$$\Delta = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Если $a = b$, то уравнение гиперболы принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$. Такая гипербола называется *равнобочной.* Её асимптоты образуют прямой угол. Если за оси координат принять асимптоты равнобочной гиперболы, то её уравнение примет вид $xy = k$ ($k = \pm a^2/2$; при

$k > 0$ гипербола расположена в I и III четвертях; при $k < 0$ — во II и IV четвертях). Так как уравнение $xy = k$ можно переписать в виде $y = \dfrac{k}{x}$, то равнобочная гипербола является графиком обратной пропорциональной зависимости между величинами x и y.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \left(\text{или } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1\right) \tag{2.82}$$

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси Oy длиной $2b$. Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, фокальный параметр $p = \dfrac{a^2}{b}$, асимптоты определяются уравнениями $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, уравнения директрис $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$; она имеет вид, изображённый на рис. 2.14.

Две гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называют *сопряжёнными*.

Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \tag{2.83}$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты центра гиперболы.

Пример 5. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти: 1) длины его полуосей; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет гиперболы; 4) фокальный параметр гиперболы; 5) уравнения асимптот и директрис; 6) фокальные радиусы точки $M(3; 2{,}5)$

► Разделив обе части уравнения на 20, приведём уравнение гиперболы к каноническому виду (2.76):

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Отсюда:

1) $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, т. е. $a = 2$, $b = \sqrt{5}$;

2) используя соотношение (2.77), находим $c^2 = 4 + 5$, т. е. $c = 3$. Отсюда находим фокусы гиперболы $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$;

3) по формуле (2.79) находим $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$;

4) по формуле (2.81) находим $p = \dfrac{5}{2}$;

5) уравнения асимптот и директрис найдём по формулам (2.78) и (2.80): $y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}\,x$ и $x = \pm\dfrac{4}{3}$;

6) точка M лежит на правой ветви гиперболы ($x = 3 > 0$), поэтому $r_1 = \varepsilon\, x + a = \frac{3}{2}\cdot 3 + 2 = 6{,}5$, $r_2 = \varepsilon\, x - a = \frac{3}{2}\cdot 3 - 2 = 2{,}5$. ◄

Пример 6. Составить уравнение гиперболы, если её фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

► Искомое уравнение гиперболы имеет вид (2.82). Согласно условию $2c = 10$ и $2b = 8$, т. е. $c = 5$, $b = 4$. Из соотношения (2.77) найдём мнимую полуось a: $a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, т. е. $a = 3$. Получаем $\dfrac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ — уравнение гиперболы. ◄

4. Парабола. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние от некоторой фиксированной точки плоскости, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус, называемой *директрисой*.

Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox (рис. 2.15), имеет следующее каноническое уравнение:

$$y^2 = 2px, \tag{2.84}$$

где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы d, называется *параметром параболы*.

Фокусом параболы (2.84) является точка

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right); \tag{2.85}$$

уравнение директрисы параболы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}; \tag{2.86}$$

фокальный радиус вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{2.87}$$

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 2.15), имеет уравнение

$$x^2 = 2py. \tag{2.88}$$

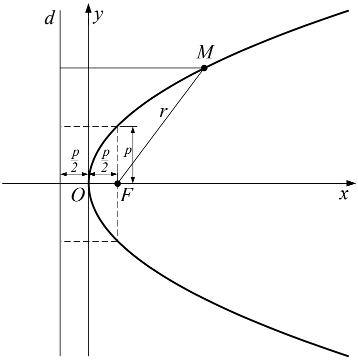


Рис. 2.15

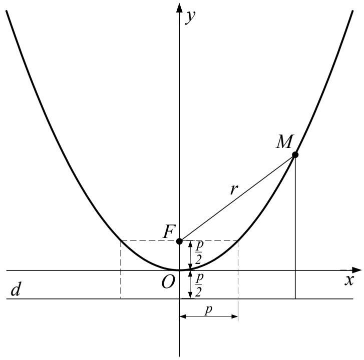


Рис. 2.16

Фокусом параболы (2.88) является точка

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right); \tag{2.89}$$

уравнение директрисы параболы имеет вид

$$y = -\frac{p}{2}; \tag{2.90}$$

фокальный радиус вычисляется по формуле

$$r = y + \frac{p}{2}. \tag{2.91}$$

На рис. 2.17 и 2.18 изображены графики парабол $y^2 = -2px$ и $x^2 = -2py$ соответственно.

Уравнение параболы с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0), \tag{2.92}$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины параболы.

Пример 7. Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты её фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4; 4)$.

► Парабола задана каноническим уравнением (2.84). Следовательно, $2p = 4$, $p = 2$. Используя формулы (2.85), (2.86), (2.87), находим, что фокус имеет координаты $F(0; 1)$; уравнение директрисы есть $x = -1$; фокальный радиус точки M равен $r = 4 + 1 = 5$. ◄

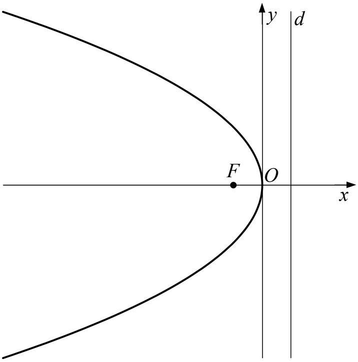


Рис. 2.17

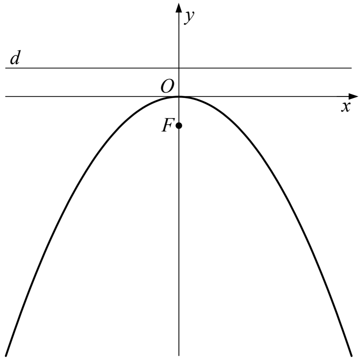


Рис. 2.18

Пример 8. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Oy и отсекающей на биссектрисе I и III координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

► Искомое уравнение параболы $x^2 = 2py$, уравнение биссектрисы $y = x$. Таким образом, получаем точки пересечения параболы с биссектрисой: $O(0;0)$ и $M(2p;2p)$. Длина хорды определяется как расстояние между двумя точками: $8\sqrt{2} = \sqrt{4p^2 + 4p^2}$, откуда $2p = 8$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2 = 8y$. ◄

Директрисы, фокусы и точки эллипса, гиперболы и параболы обладают одним замечательным свойством: отношение расстояния от любой точки M кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей выбранному фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой. У параболы эксцентриситет следует считать равным 1. Это свойство можно принять за определение кривых второго порядка.

Пример 9. Даны точка $A(1;0)$ и прямая $x = 2$. В декартовых координатах составить уравнение линии, каждая точка которой а) в два раза ближе к точке A, чем к данной прямой; б) в два раза дальше от точки A, чем от данной прямой; в) равноудалена от точки A и данной прямой.

► Пусть $M(x;y)$ — произвольная точка искомой линии, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $x = 2$. Очевидно, что $N(2;y)$. Тогда а) по условию $2MA = MN$. Следовательно,

$$2\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2},$$

$$4(x^2-2x+1+y^2) = x^2-4x+4, \quad 3x^2+4y^2-4x=0,$$

$$3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)+4y^2=\frac{4}{3}, \quad 3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+4y^2=\frac{4}{3},$$

$$\frac{(x-2/3)^2}{4/9}+\frac{y^2}{1/3}=1.$$

Следовательно, искомая линия — эллипс. Точка A совпадает с правым фокусом, а прямая $x = 2$ — правая директриса;

б) по условию $MA = 2MN$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2},$$

$$x^2-2x+1+y^2 = 4(x^2-4x+4), \quad 3x^2-y^2-14x+15=0,$$

$$3\left(x^2-\frac{14}{3}x+\frac{49}{9}\right)-y^2=\frac{49}{3}-15, \quad 3\left(x-\frac{7}{3}\right)^2-y^2=\frac{4}{3},$$

$$\frac{(x-7/3)^2}{4/9}-\frac{y^2}{4/3}=1,$$

т. е. данная линия — гипербола. Точка A совпадает с её левым фокусом, $x = 2$ — левая директриса;

в) по условию $MA = MN$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2},$$

$$x^2-2x+1+y^2 = x^2-4x+4, \quad y^2=-2x+3,$$

$$y^2=-2\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

Получили уравнение параболы. Точка A совпадает с фокусом, прямая $x = 2$ — директриса. ◄

Приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Если в общем уравнении линии второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{2.93}$$

коэффициент $B \neq 0$, то поворотом осей координат на угол α по формулам

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha, \\ y = x' \cdot \sin\alpha + y' \cdot \cos\alpha, \end{cases}$$

где $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ определяются из следующих соотношений:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(C-A) \pm \sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B},$$

получаем *пятичленное уравнение линии второго порядка*

$$A'{x'}^2 + C'{y'}^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0. \tag{2.94}$$

Оно определяет на плоскости $x'Oy'$ эллипс, гиперболу или параболу (с возможными случаями распада и вырождения этих линий) с осями симметрии, параллельными осям координат, в зависимости от знака произведения коэффициентов A' и C'.

1. Пусть $A'C' > 0$; тогда определяемая этим уравнением линия есть эллипс (действительный, мнимый или выродившийся в точку); при $A' = C'$ эллипс превращается в окружность.

2. Пусть $A'C' < 0$; тогда соответствующая линия является гиперболой, которая может вырождаться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения распадается на произведение двух линейных множителей.

3. Пусть $A'C' = 0$; тогда уравнение определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые (действительные различные, действительные слившиеся или мнимые), если левая часть уравнения не содержит либо x, либо y.

Уравнение (2.94) параллельным переносом осей координат по формулам

$$\begin{cases} x' = x'' + x'_0, \\ y' = y'' + y'_0, \end{cases} \tag{2.95}$$

преобразуется к виду

$$A'x''^2 + C'y''^2 = f$$

в случае $A'C' \neq 0$ и

$$A'x''^2 + 2E'y'' = 0 \quad (\text{или } C'y''^2 + 2D'x'' = 0)$$

в случае $A'C' = 0$, которые легко приводятся к каноническому виду. По виду полученного уравнения обнаруживаются и случаи распада или вырождения эллипса, гиперболы или параболы.

Пример 10. Показать, что уравнение $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ определяет эллипс, найти его оси, координаты центра, эксцентриситет и фокальный параметр.

► Преобразуем данное уравнение кривой. Так как

$$\begin{aligned}4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 &= 4(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 4y) - 32 = \\ &= 4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3(y^2 + 4y + 4 - 4) - 32 = \\ &= 4(x-1)^2 - 4 \cdot 1 + 3(y+2)^2 - 3 \cdot 4 - 32,\end{aligned}$$

то уравнение можно переписать в виде $4(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 48$, т. е. $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$. Получили уравнение эллипса вида (2.75); его центр симметрии имеет координаты $(1; -2)$. Из уравнения находим $a^2 = 12$, $a = 2\sqrt{3}$ и $b^2 = 16$, $b = 4$ $(b > a)$. Поэтому $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$. Так как большая ось эллипса параллельна оси ординат, то эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$, а фокальный параметр эллипса $p = \frac{a^2}{b} = \frac{12}{4} = 3$. ◄

Пример 11. Определить координаты центра, полуоси, эксцентриситет и фокальный параметр гиперболы, заданной уравнением $2x^2 - 3y^2 + 12x + 24y = 0$.

► Приведем заданное уравнение гиперболы к каноническому виду. Так как

$$\begin{aligned}2x^2 - 3y^2 + 12x + 24y &= 2(x^2 + 6x) - 3(y^2 - 8y) = \\ &= 2(x^2 + 6x + 9 - 9) - 3(y^2 - 8y + 16 - 16) = \\ &= 2(x+3)^2 - 18 - 3(y-4)^2 + 48,\end{aligned}$$

то уравнение можно переписать в виде $2(x+3)^2-3(y-4)^2=-30$, или $\frac{(x+3)^2}{15}-\frac{(y-4)^2}{10}=-1$. Центр гиперболы находится в точке $(-3;4)$, действительная полуось $b=\sqrt{10}$, мнимая полуось $a=\sqrt{15}$. Для определения эксцентриситета гиперболы найдём полуфокусное расстояние $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{15+10}=\sqrt{25}=5$. Тогда $\varepsilon=\frac{c}{b}=$ $=\frac{5}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{25}{10}}=\sqrt{2{,}5}$. Фокальный параметр гиперболы $p=\frac{a^2}{b}=$ $=\frac{15}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{15}{10}}=\sqrt{1{,}5}$. ◄

Пример 12. Найти координаты вершины, фокуса и уравнение директрисы параболы $y=-2x^2+8x-5$.

► Преобразуем уравнение $y=-2x^2+8x-5$, выделив в правой части полный квадрат:

$$y=-2\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=-2\left(x^2-4x+4-4+\frac{5}{2}\right)=$$
$$=-2\left((x-2)^2-\frac{3}{2}\right)=-2(x-2)^2+3,$$

т. е. $y-3=-2(x-2)^2$, или $(x-2)^2=-\frac{1}{2}(y-3)$. Ветви параболы направлены вниз. Вершина параболы имеет координаты $(2;3)$; $2p=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{4}$. Прямая $x=2$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x_F=2$, $y_F=3-\frac{p}{2}=3-\frac{1}{8}=\frac{23}{8}$, т. е. $F(2;\frac{23}{8})$. Уравнение директрисы $y=3+\frac{p}{2}=3+\frac{1}{8}$, т. е. $y=\frac{25}{8}$. ◄

Пример 13. Привести к каноническому виду уравнение $52x^2+$ $+72xy+73y^2-280x-290y+325=0$.

► Чтобы освободиться в уравнении линии от члена с произведением координат применим преобразование поворота осей координат. Для этого определим тангенс угла поворота:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{73-52\pm\sqrt{(73-52)^2+4\cdot 36^2}}{2\cdot 36}=\frac{21\pm 75}{72},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{4}{3},\qquad \operatorname{tg}\alpha_2=-\frac{3}{4}.$$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$, тогда

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{4}{5}$$

Преобразуем исходное уравнение, воспользовавшись формулами поворота осей координат

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}x' - \dfrac{4}{5}y', \\ y = \dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y'. \end{cases}$$

Имеем

$$52x^2 + 72xy + 73y^2 - 280x - 290y + 325 = 52\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right)^2 +$$
$$+ 72\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right)\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 73\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right)^2 -$$
$$- 280\left(\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right) - 290\left(\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 325 =$$
$$= 100{x'}^2 + 25{y'}^2 - 400x' + 50y' + 325 = 0.$$

«Уничтожаем» линейные члены, выделяя полные квадраты:

$$100{x'}^2 + 25{y'}^2 - 400x' + 50y' + 325 =$$
$$= 100({x'}^2 - 4x' + 4) + 25({y'}^2 + 2y' + 1) - 400 - 25 + 325 =$$
$$= 100(x' - 2)^2 + 25(y' + 1)^2 - 100 = 0.$$

Применяя формулы параллельного переноса осей координат

$$\begin{cases} x'' = x' - 2, \\ y'' = y' + 1, \end{cases}$$

получаем

$$100{x''}^2 + 25{y''}^2 - 100 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{{x''}^2}{1} + \frac{{y''}^2}{4} = 1 \text{ (эллипс).} \blacktriangleleft$$

Пример 14. Привести уравнение линии второго порядка $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ к каноническому виду.

$\blacktriangleright$ Чтобы избавиться в уравнении линии от члена с произведением координат, применим преобразование поворота осей координат. Для этого определим угол поворота.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{16 - 9 \pm \sqrt{(16-9)^2 + 4\cdot(-12)^2}}{2\cdot(-12)} = -\frac{7 \pm 25}{24},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{4}{3}, \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{3}{4}.$$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$, тогда

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \pm\frac{4}{5}, \quad \sin\alpha = \pm\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \pm\frac{3}{5};$$

возьмём отрицательные значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

Преобразуем исходное уравнение, воспользовавшись формулами поворота осей координат

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', \\ y = -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'. \end{cases}$$

Имеем

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 9\left(-\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right)^2 - \\ - 24\left(-\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right)\left(-\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right) + 16\left(-\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right)^2 - \\ - 20\left(-\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'\right) + 110\left(-\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'\right) - 50 = 0.$$

Раскрывая скобки, получим

$$25{y'}^2 - 50x' - 100y' - 50 = 0, \quad \text{или} \quad 25\left({y'}^2 - 4y'\right) - 50x' - 50 = 0.$$

Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$25\left(y' - 2\right)^2 = 50x' + 50 + 100, \quad \text{или} \quad \left(y' - 2\right)^2 = 2\left(x' + 3\right).$$

Приняв за новое начало точку $O'(-3;2)$, применим формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x' = x'' - 3, \\ y' = y'' + 2; \end{cases}$$

получим

$${y''}^2 = 2x'' \text{ (парабола)}. ◀$$

Упражнения

2.102. Определить координаты центров и радиусы окружностей: 1) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0$.

2.103. Составить уравнение окружности, если её центр лежит в точке $C(-4; 5)$ и окружность проходит через точку $M(-1; 1)$.

2.104. Составить уравнение окружности, если концы одного из её диаметров находятся в точках $A(3; 9)$ и $B(7; 3)$.

2.105. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(1; 2)$, $B(0; -1)$ и $C(-3; 0)$.

2.106. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2 = 16$ и $(x-5)^2 + y^2 = 9$.

2.107. Составить уравнения касательных к окружности $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$, проведённых из начала координат.

2.108. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, фокальный параметр и уравнения директрис эллипса $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

2.109. Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, фокальный параметр, уравнения асимптот и директрис гиперболы $64x^2 - 36y^2 + 2304 = 0$.

2.110. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 - 6x = 0$.

2.111. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10.

2.112. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен 3/5.

2.113. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5.

2.114. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если расстояние между директрисами равно 32, эксцентриситет равен 0,5.

2.115. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси ординат, если его малая полуось равна $2\sqrt{3}$, каждый из фокусов равно удалён от центра эллипса и от ближайшего конца фокальной оси.

2.116. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами равно 24, эксцентриситет равен $12/13$.

2.117. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если расстояние между её вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10.

2.118. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если её действительная полуось равна 5, вершины делят расстояние между центром и фокусом пополам.

2.119. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если её действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку $A(9;-4)$.

2.120. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, проходящей через точки $M_1(-1;6)$ и $M_2(2\sqrt{2};8)$.

2.121. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси абсцисс, если уравнения его асимптот имеют вид $y = \pm\frac{4}{3}x$ и расстояние от центра гиперболы до каждого фокуса равно 10.

2.122. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, если её эксцентриситет равен $\frac{3}{2}$, расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$.

2.123. Составить каноническое уравнение параболы, если она имеет фокус в точке $F(0;2)$ и вершину в точке $O(0;0)$.

2.124. Составить каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс, с вершиной в начале координат, если она проходит через точку $M(1;-4)$.

2.125. Составить каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси ординат, с вершиной в начале координат, если она проходит через точку $N(6;-2)$.

2.126. Составить каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс, с вершиной в начале координат, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси абсцисс, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.

2.127. Составить уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ и имеющей центр в его верхней вершине.

2.128. Дана гипербола $\frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{3} = 1$. Найти софокусный эллипс, проходящий через точку $M(4; -1{,}8)$.

2.129. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусы в его вершинах.

2.130. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(3; 2)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(-1; 0)$.

2.131. Составить уравнение множества точек, расстояния которых от точки $A(0; 1)$ в два раза меньше расстояния до прямой $y - 4 = 0$.

2.132. Составить уравнение линии, каждая точка которой в 1,25 раза дальше от точки $A(5; 0)$, чем от прямой $5x - 16 = 0$.

2.133. Составить уравнение множества точек, равноудалённых от точки $A(8; 4)$ и оси ординат.

2.134. Составить уравнение множества точек, равноотстоящих от точки $A(2; 0)$ и окружности $x^2 + y^2 = 16$.

2.135. Составить уравнение множества точек, равноотстоящих от точки $A(2; 0)$ и окружности $x^2 + 4x + y^2 = 0$.

Установить, какие линии определяются нижеследующими уравнениями. Построить чертежи.

2.136. $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$.

2.137. $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$.

2.138. $9x^2 - 4y^2 - 36x + 24y - 36 = 0$.

2.139. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$.

2.140. $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$.

2.141. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$.

2.142. $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

2.143. $x^2 - 6x + 8 = 0$.

2.144. $x^2 + 2x + 5 = 0$.

2.145. $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$.

2.146. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

2.147. $8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0$.

2.148. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.

2.149. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

2.150. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

3. Введение в анализ

3.1. Предел и непрерывность функций одной переменной

Предел функции в точке

Рассмотрим функцию $f(x)$ и точку x_0, являющуюся предельной точкой для области определения f, но не обязанную ей принадлежать.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно малое число δ, что для всех аргументов x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \Big\{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\Big\}.$$

Число A называется *левосторонним пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 (или при x, стремящемся к x_0 слева), если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно малое число δ, что для всех аргументов x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) A \Leftrightarrow \Big\{\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0\colon x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\Big\}.$$

Аналогично определяется правосторонний предел функции в точке x_0 $(x \to x_0 + 0)$.

Пределы функции при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$ будем называть *односторонними* пределами, а предел при $x \to x_0$ — *двусторонним.* Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 (о связи двустороннего предела функции с односторонними). *Двусторонний предел функции при $x \to x_0$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба соответствующих односторонних предела и они равны. При этом двусторонний предел равен односторонним.*

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$.

► Функция определена на всей числовой прямой, кроме точки $x = -3$. Используя определение, докажем существование предела в данной точке.

Рассмотрим произвольное положительное число ε. Задача состоит в том, чтобы по этому значению ε проверить, существует ли число $\delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенства $0 < |x - (-3)| < \delta(\varepsilon)$ следует неравенство $\left|\frac{2x^2+5x-3}{x+3} - (-7)\right| < \varepsilon$.

Предполагая, что $x \neq -3$, преобразуем последнее неравенство:

$$\left|\frac{(2x-1)(x+3)}{x+3} + 7\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 1 + 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 6| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x + 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x + 3| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (x \neq -3).$$

Вывод:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}\colon 0 < |x - (-3)| < \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} - (-7)\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$ по определению предела функции. ◄

З а м е ч а н и е. В качестве примера δ можно привести и любое меньшее число, например, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, поскольку из неравенства $0 < |x - (-3)| < \frac{\varepsilon}{4}$ тем более следует, что $|x + 3| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(x \neq -3)$. Однако в качестве стандартного примера δ практически всегда берут «пограничное» значение, в данном примере $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Предел функции на бесконечности

Выше x_0 было конечным числом. Будем называть такую предельную точку *конечно-удалённой*. Дадим теперь определения пределов для случая *бесконечно-удалённой* предельной точки.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно большое положительное число δ, что при $x > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \Big\{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\Big\}.$$

Аналогично определяется предел функции при x, стремящемся к $-\infty$.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к ∞, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое достаточно большое положительное число δ, что при $|x| > \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \Big\{\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\Big\}.$$

Другими словами, число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к ∞, если оно является пределом этой функции как при x, стремящемся к $+\infty$, так и при x, стремящемся к $-\infty$.

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

► Областью определения функции является вся числовая прямая. Покажем, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\colon \forall x > \delta \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 0\right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим равносильные равенства

$$\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \varepsilon \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon.$$

Если взять $0 < \varepsilon < 1$, то $\log_{\frac{1}{2}} \varepsilon > 0$ и при $\delta(\varepsilon) = \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon$ будет выполнено

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) = \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon\colon \forall x > \delta \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 0\right| < \varepsilon,$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. ◄

Бесконечно большие функции

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.) в точке x_0, если для любого сколь угодно большого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon.$$

Если функция является бесконечно большой в точке x_0, говорят, что её предел при x, стремящемся к x_0, равен бесконечности:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Можно выделить два случая бесконечного предела (бесконечно большой функции): предел, равный $+\infty$, и предел, равный $-\infty$.

Говорят, что предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен $+\infty$, если для любого сколь угодно большого положительного ε существует такое положительное δ, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \Big\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon\Big\}.$$

Говорят, что предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен $-\infty$, если для любого сколь угодно большого положительного ε существует такое положительное δ, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) < -\varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \Big\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon\Big\}.$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при x, стремящемся к x_0 слева или справа, а также при x, стремящемся к $+\infty$, $-\infty$ и ∞.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_2 x = -\infty$.

► Областью определения функции является множество $(0; +\infty)$, для которого 0 есть предельная точка. Покажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon 0 < x < \delta \Rightarrow \log_2 x < -\varepsilon.$$

Рассмотрим равносильные равенства

$$\log_2 x < -\varepsilon \Leftrightarrow 0 < x < 2^{-\varepsilon}.$$

Если принять $\delta(\varepsilon) = 2^{-\varepsilon}$, то будет выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) = 2^{-\varepsilon}\colon 0 < x < \delta \Rightarrow \log_2 x < -\varepsilon.$$

а это и доказывает, что $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_2 x = -\infty$. ◄

Теоремы о пределе функции

Далее при обозначении предельной точки будем использовать символ «$*$». То есть под «$*$» будем подразумевать один из шести вариантов: x_0, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, ∞, $-\infty$, $+\infty$.

При вычислении пределов функций необходимо знать следующие теоремы.

Теорема 3.2 (об единственности предела). *Если существует предел функции при $x \to *$, то он единствен.*

Теорема 3.3 (о пределе постоянной). *Предел постоянной равен самой постоянной:*

$$\lim_{x \to *} C = C,$$

где $C = const$.

Теорема 3.4 (о пределе суммы). *Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to *} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to *} g(x) = B$. Тогда существует конечный предел суммы функций $\varphi = f(x) + g(x)$ при $x \to *$, и он равен $A + B$:*

$$\lim_{x \to *} \bigl(f(x) + g(x)\bigr) = \lim_{x \to *} f(x) + \lim_{x \to *} g(x) = A + B.$$

Теорема 3.5 (о пределе произведения). *Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to *} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to *} g(x) = B$. Тогда существует конечный предел произведения функций $\varphi = f(x) \cdot g(x)$ при $x \to *$, и он равен $A \cdot B$:*

$$\lim_{x \to *} \bigl(f(x) \cdot g(x)\bigr) = \lim_{x \to *} f(x) \cdot \lim_{x \to *} g(x) = A \cdot B.$$

Следствие 1. *Постоянную можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x \to *} \bigl(C \cdot f(x)\bigr) = C \cdot \lim_{x \to *} f(x).$$

Следствие 2. *Предел от натуральной степени функции равен этой степени от предела функции:*

$$\lim_{x \to *} \bigl(f(x)\bigr)^n = \bigl(\lim_{x \to *} f(x)\bigr)^n.$$

Теорема 3.6 (о пределе частного). *Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to *} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to *} g(x) = B$. И пусть $B \neq 0$. Тогда существует предел частного $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to *$, и он равен $\frac{A}{B}$:*

$$\lim_{x \to *} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to *} f(x)}{\lim\limits_{x \to *} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Теорема 3.7 (о пределе элементарной функции). *Пусть элементарная функция $f(x)$ определена в точке x_0 и её окрестности. Тогда существует предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, и он равен значению функции в этой точке:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Неопределённости

Рассмотрим все возможные случаи, которые могут встретиться при вычислении пределов. Пусть $\lim\limits_{x\to *} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to *} g(x) = B$.

Вычисление предела суммы $f(x) + g(x)$**.**

1. A, B — конечные числа $\Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.
2. $A = +\infty,\ B = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x) + g(x)\big) = [+\infty + \infty] = +\infty$.
3. $A = -\infty,\ B = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x) + g(x)\big) = [-\infty - \infty] = -\infty$.
4. $A = \infty$, B — конечное число $\Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x)+g(x)\big) = [\infty+B] = \infty$.
5. $A = +\infty,\ B = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x) + g(x)\big) = [+\infty - \infty]$.

Последнее выражение не определено, его принято называть *неопределённостью вида* $[\infty - \infty]$.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 + 5x - 1)$.

▶ Из теорем о пределе функции следует, что

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 + 5x - 1) = 3\big(\lim_{x\to 1} x\big)^2 + 5\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 1 =$$

$$= 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 1 = 7. \blacktriangleleft$$

Вычисление предела произведения $f(x) \cdot g(x)$**.**

1. A, B — конечные числа $\Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$.
2. $A = \infty,\ B = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = [\infty \cdot \infty] = \infty$.
3. $A \neq 0,\ B = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = [A \cdot \infty] = \infty$.
4. $A = 0,\ B = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = [0\cdot\infty]$ — *неопределённость.*

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(e^{1-x}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

► Из теорем о пределе функции следует, что

$$\lim_{x\to 1-0}\left(e^{1-x}\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1-0}e^{(1-x)}\cdot \lim_{x\to 1-0}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=$$

$$=e^{1-1}\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot(1-0)\right)=[1\cdot(+\infty)]=+\infty. \blacktriangleleft$$

Вычисление предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$.

1. A, B — конечные числа, $B\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$.
2. $A\neq 0$, $B=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{A}{0}\right]=\infty$.
3. A — конечное число, $B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{A}{\infty}\right]=0$.
4. $A=\infty$, B — конечное число $\Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{B}\right]=\infty$.
5. $A=0$, $B=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$ — *неопределённость.*
6. $A=\infty$, $B=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ — *неопределённость.*

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-x}$.

► Из теорем о пределе функции следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x+1}{2x^2-x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2+3\lim\limits_{x\to 0}x+1}{2\lim\limits_{x\to 0}x^2-\lim\limits_{x\to 0}x}=$$

$$=\left[\frac{0+3\cdot 0+1}{2\cdot 0-0}=\frac{1}{0}\right]=\infty. \blacktriangleleft$$

Вычисление предела функции $\big(f(x)\big)^{g(x)}$.

1. A, B — конечные числа, $A>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to *}\big(f(x)\big)^{g(x)}=A^B$.
2. $0<A<1$, $B=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}=[A^{+\infty}]=0$.
3. $A>1$, $B=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}=[A^{+\infty}]=+\infty$.
4. $0<A<1$, $B=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)^{g(x)}=[A^{-\infty}]=+\infty$.

5. $A > 1,\ B = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = [A^{-\infty}] = 0.$

6. $A = 1,\ B = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = [1^{\infty}]$ — *неопределённость*.

7. $A = 0,\ B = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \big[0^0\big]$ — *неопределённость*.

8. $A = \infty,\ B = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \big[\infty^0\big]$ — *неопределённость*.

9. A — конечное число, $B = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = [A^{\pm\infty}]$ — не существует.

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1+0} \left(\frac{x+1}{2x^2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

► Из теорем о пределе функции следует, что

$$\lim_{x\to 1+0} \left(\frac{x+1}{2x^2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \left[\left(\frac{1+1}{2\cdot 1^2+1}\right)^{\frac{1}{(1+0)-1}} = \right.$$

$$\left. = \left(\frac{2}{3}\right)^{\left[\frac{1}{+0}\right]} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}\right] = 0. \blacktriangleleft$$

Из приведённых решений примеров видно, что на практике в простейших случаях вычисление предела сводится к подстановке в данное выражение значения $x = x_0$.

Вычисление пределов с помощью алгебраических преобразований

Часто, прежде чем перейти к пределу, приходится проводить алгебраические преобразования данного выражения. В последующих примерах покажем, какими приёмами следует пользоваться для раскрытия неопределённостей.

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1}\right)$.

► Подстановка в данное выражение предельного значения аргумента $x = 1$ приводит к неопределённости вида $[\infty - \infty]$:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}\right) = \left[\frac{2}{0} - \frac{1}{0}\right] = [\infty - \infty].$$

Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать. Приведём дроби к общему знаменателю и найдём разность дробей:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2(x+1)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-1}.$$

Подставив в полученное выражение $x=1$, получаем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x^2-1}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2x}$.

$\blacktriangleright$ После подстановки в данное выражение $x=0$ имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Чтобы раскрыть неопределённость, умножаем числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}$, сопряжённое числителю, и сокращаем дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}{2x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4-x)-(4+x)}{2x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{2x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4+x}}=-\frac{1}{4}. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$.

$\blacktriangleright$ Под знаком предела опять имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Умножаем числитель на выражение, с помощью которого можно получить разность кубов. Таким множителем является неполный квадрат суммы, т. е. $(\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1$. На этот множитель надо умножить и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+2x}-1)\left((\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}{x\left((\sqrt[3]{1+2x})^2+\sqrt[3]{1+2x}+1\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-1}{x\left((\sqrt[3]{1+2x})^2 + \sqrt[3]{1+2x}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\left((\sqrt[3]{1+2x})^2 + \sqrt[3]{1+2x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{(\sqrt[3]{1+2x})^2 + \sqrt[3]{1+2x}+1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 11. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x^3}{x^3-x^2+3x}$.

► Имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Чтобы раскрыть её, разделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x^3}{x^3-x^2+3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-4}{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{0-4}{1-0+0} = -4. \blacktriangleleft$$

Пример 12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+3x}$.

► В данном случае имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Числитель и знаменатель дроби разложим на множители и сократим дробь:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x(x-3)} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 13. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x}{x^2-1}\right)$.

► Имеем неопределённость вида $[\infty-\infty]$. Приведя дроби к общему знаменателю, получим неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 1} \frac{x+1-2x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$.

► Умножая числитель и знаменатель на сопряжённое выражение и учитывая, что $\sqrt{x^2} = -x$ для $x<0$, получим

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+x)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-2x} = -1. \blacktriangleleft$$

Замечательные пределы

Широко используются следующие два замечательных предела.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3.1}$$

Пример 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

▶ Сделаем замену $y = \alpha x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha \sin y}{y} = \alpha \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом (3.1). ◀

Пример 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

▶ Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на $x \neq 0$, после чего воспользуемся предыдущим примером:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin 7x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 7x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{7}{3}. \blacktriangleleft$$

Пример 17. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

▶ Так как $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$.

► Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену $y = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда $y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, а $x = y + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем — первый замечательный предел. ◄

Пример 19. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

► Сделаем замену $t = \arcsin x$, т. е. $x = \sin t$. Очевидно, что $t \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\arcsin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\arcsin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\arcsin t}{t}\right)} = 1. \blacktriangleleft$$

Часто используются следующие следствия из первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{3.2}$$

где $e = 2{,}71828\ldots$ — основание натурального логарифма.

Пример 20. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$, $k \in \mathbb{R}$.

► В данном случае имеем неопределённость вида $[1^\infty]$. Для её раскрытия сделаем замену $y = \frac{x}{k}$. Тогда $y \to \infty$ при $x \to \infty$, и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = [1^\infty] = \lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{k}{ky}\right)^{ky} =$$

$$= \left[\lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k. \blacktriangleleft$$

Пример 21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-5x}$.

▶ Поскольку $\sqrt[x]{1-5x} = (1-5x)^{\frac{1}{x}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределённостью вида $[1^\infty]$, для раскрытия которой нам снова понадобиться одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену $y = -5x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$, и

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1-5x} = [1^\infty] = \lim_{y\to 0} \left(1 - 5\cdot\left(-\frac{y}{5}\right)\right)^{-\frac{5}{y}} =$$

$$= \left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{-5} = e^{-5}. \blacktriangleleft$$

Пример 22. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

▶ Предел основания $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{2x-1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = 1$, а показатель степени $3x+1 \to \infty$. Значит, имеем неопределённость вида $[1^\infty]$. Преобразуем основание следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x-1} - 1\right)^{3x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}.$$

Положим $\dfrac{2}{2x-1} = \dfrac{1}{y}$. Тогда $x = y + \frac{1}{2}$ и $y \to \infty$ для $x \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{3y+\frac{5}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{3} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{5}{2}} = e^3 \cdot 1 = e^3. \blacktriangleleft$$

Пример 23. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$.

▶ Сделаем замену $t = a^x - 1$, т. е. $x = \log_a(1+t)$. Очевидно, что $t \to 0$ при $x \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \blacktriangleleft$$

Часто используются следующие следствия из второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

Сравнение бесконечно малых функций

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ (т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $0<|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$), то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x\to x_0$.

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ находят предел их отношения:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C.$$

Если $C\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми величинами одного и того же порядка*: $\alpha(x)=O(\beta(x))$; если $C=0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $\beta(x)$, а $\beta(x)$ — *бесконечно малой более низкого порядка по сравнению с* $\alpha(x)$: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$$

то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* (*равносильными*) *величинами*: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x,\quad \operatorname{tg}x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \operatorname{arctg}x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},$$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)=\lim_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta_1(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

Пример 24. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

► Поскольку $\sin 5x \sim 5x$, $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x}=5. \blacktriangleleft$$

Пример 25. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2x}}{\cos 4x-\cos 2x}$.

► В числителе дроби вынесем за скобки множитель e^{2x}, а в знаменателе разность косинусов представим в виде произведения синусов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-e^{2x}}{\cos 4x-\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\left(e^{x^2-2x}-1\right)}{-2\sin 3x\cdot\sin x}.$$

Поскольку $e^{x^2-2x}-1\sim x^2-2x\sim -2x$, а $\sin 3x\sin x\sim 3x\cdot x=3x^2$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\left(e^{x^2-2x}-1\right)}{-2\sin 3x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}(-2x)}{-2\cdot 3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}}{3x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty. \blacktriangleleft$$

Пример 26. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)$.

► При $x\to\infty$ дробь $\frac{1}{x}\to 0$, значит, $1-\cos\frac{1}{x}\sim\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}=\frac{1}{2x^2}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)=[\infty\cdot 0]=-\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 27. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}}$.

► Воспользуемся формулой $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 x}\ln(\cos x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\operatorname{arctg}^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}. \blacktriangleleft$$

Непрерывность и точки разрыва функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если: 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0; 2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.3}$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности (3.3) будет равносильно условию

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\Big) = 0,$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева* в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке x_0, если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; b)$ и

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т. е. когда

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева.

Пример 28. Доказать непрерывность функции $y = \sin 5x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

► Для любого приращения Δx независимой переменной приращение функции

$$\Delta y = \sin 5(x + \Delta x) - \sin 5x = 2\cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \sin\left(\frac{5}{2}\Delta x\right).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(5x + \frac{5}{2}\Delta x\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(\frac{5}{2}\Delta x\right) = 0.$$

Следовательно, функция $y = \sin 5x$ непрерывна на всей числовой прямой. ◄

Точка x_0, в которой нарушено хотя бы одно из трёх условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции.*

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если в этой точке существуют и конечны пределы функции слева и справа:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0).$$

При этом если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то x_0 — *точка устранимого разрыва* (рис. 3.1); если $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 — *точка конечного разрыва* (рис. 3.2).

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Точки разрыва второго рода подразделяются на *точки бесконечного разрыва*, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности (рис. 3.3), и на *точки существенного разрыва*, если хотя бы один из односторонних пределов вообще отсутствует (рис. 3.4).

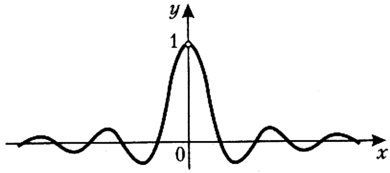


Рис. 3.1

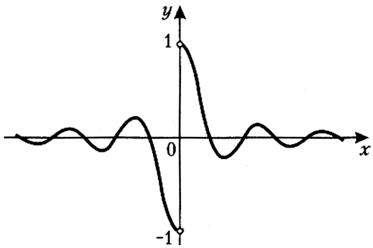


Рис. 3.2

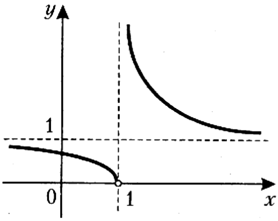


Рис. 3.3

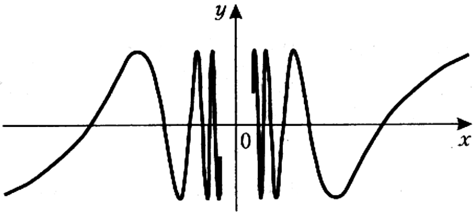


Рис. 3.4

Пример 29. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant -1, \\ 1 - 2^{-1/x^2}, & -1 < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

► Функции $y = x + 1$ и $y = \frac{x^2}{2}$ непрерывны на всей числовой прямой, функция $y = 1 - 2^{-1/x^2}$ не определена в точке $x_0 = 0$, поэтому функция может иметь точки разрыва в ней и в точках, где меняется её аналитическое выражение, т. е. в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдём соответствующие односторонние пределы и значения функций.

Функция $f(x)$ не определена в точке $x_0 = 0$. Эта точка является точкой устранимого разрыва, так как

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2^{-1/x^2}\right) = \left[1 - 2^{-\infty}\right] = 1 - 0 = 1.$$

В точке $x_1 = -1$ имеем

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} (x+1) = -1+1 = 0,$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \left(1 - 2^{-1/x^2}\right) = 1 - 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$f(-1) = -1+1 = 0.$$

Таким образом, в этой точке $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x) = f(-1) \neq \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$, т. е. функция имеет разрыв первого рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1 = -1$ равен

$$\Delta f(-1) = \lim_{x\to -1+0} f(x) - \lim_{x\to -1-0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично для точки $x_2 = 1$ получим

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \left(1 - 2^{-1/x^2}\right) = 1 - 2^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$f(1) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в этой точке $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = f(1)$, т. е. функция непрерывна.

График функции изображён на рис. 3.5. ◄

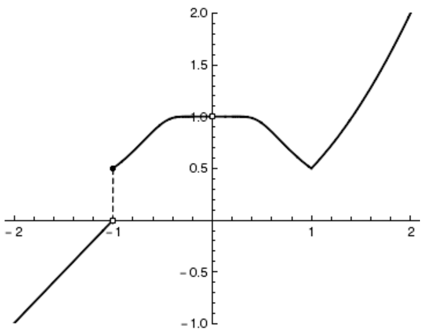


Рис. 3.5

Упражнения

Используя определение предела, доказать, что

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}(3x-2)=-2.$ **3.2.** $\lim\limits_{x\to 1}(-x+4)=3.$ **3.3.** $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9.$

3.4. $\lim\limits_{x\to 1}x^3=1.$ **3.5.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5}.$ **3.6.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{x-1}=2.$

Найти пределы:

3.7. $\lim\limits_{x\to -2}(5x^2+2x-1).$ **3.8.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x^3-2x+3}.$

3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-x}.$ **3.10.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^x-8}{2^x+8}.$

3.11. $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{-x}{x-3}.$ **3.12.** $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{-x}{x-3}.$

3.13. $\lim\limits_{x\to 3+0}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{x-3}.$ **3.14.** $\lim\limits_{x\to 3-0}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{x-3}.$

3.15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^x.$ **3.16.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^x.$

3.17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{4x-3}\right)^{1-x}.$ **3.18.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+2}{4x-3}\right)^{1-x}.$

3.19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{8-x^3}.$ **3.20.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-11x+6}.$

3.21. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{3x^2+4x-4}.$ **3.22.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{8-x^3}{x^2-4}.$

3.23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-7x+6}.$ **3.24.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}.$

3.25. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right).$ **3.26.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{3x-6}.$

3.27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2+6}-4}.$ **3.28.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}.$

3.29. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}.$ **3.30.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}.$

3.31. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-1}.$ **3.32.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}.$

3.33. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}.$ **3.34.** $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}.$

3.35. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}.$ **3.36.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}.$

3.37. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}.$ **3.38.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}.$

3.39. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^{x+1}+7^x}{2^x-7^{x-1}}$.

3.40. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^{x+1}+7^x}{2^x-7^{x-1}}$.

3.41. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$.

3.42. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$.

3.43. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$.

3.44. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$.

3.45. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$.

3.46. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{4x^2-1}}{x+7}$.

3.47. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$.

3.48. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^3+2}}{7x+\sqrt[4]{x^4+1}}$.

3.49. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-3}\right)$.

3.50. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2-2x-3}\right)$.

3.51. $\lim\limits_{x\to0} \sqrt[2x]{1+3x}$.

3.52. $\lim\limits_{x\to0} \left(1-\dfrac{2x}{3}\right)^{-\frac{3}{x}+9}$.

3.53. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{3+5x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3.54. $\lim\limits_{x\to2} (x-1)^{\frac{x+3}{x-2}}$.

3.55. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{8x}$.

3.56. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{4x-1}$.

3.57. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$.

3.58. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 2x}$.

3.59. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$.

3.60. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arcsin 7x}{\ln(1-2x)}$.

3.61. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

3.62. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$.

3.63. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-2x}$.

3.64. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x}$.

3.65. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2}-\cos 2x}{x^2}$.

3.66. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Найти и классифицировать точки разрыва функций:

3.67. $y=\dfrac{x}{x+1}$.

3.68. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

3.69. $y=\dfrac{x+1}{x^3+6x^2+11x+6}$.

3.70. $y=3^{\frac{1}{x+1}}+1$.

3.71. $y=\operatorname{arctg}\frac{2}{x-1}$.

3.72. $y=\dfrac{1}{3^{x-2}-1}$.

3.73. $y=8^{-\frac{1}{(x-3)^2}}+2$.

3.74. $y=x\sin\dfrac{\pi}{x^2+x}$.

Исследовать на непрерывность и построить график функции:

3.75. $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x < -2, \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x-2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

3.76. $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & \text{если } x < 1, \\ 2, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \\ 3x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

3.77. $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ x, & \text{если } x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

3.78. $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}, & \text{если } x < 0, \\ x-2, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x-2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

3.2. Производная и дифференциал

Определение производной, её геометрический и физический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ задана на промежутке $(a; b)$, и пусть точка $x \in (a; b)$, а число Δx такое, что $x + \Delta x \in (a; b)$. Число Δx называется *приращением аргумента в точке* x.

Приращением Δy *функции* $f(x)$ в точке x, соответствующим приращению аргумента Δx, называется разность значений функции в точках $x + \Delta x$ и x, иначе говоря,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Если существует конечный предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю, то этот предел называется *производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x и обозначается одним из следующих символов: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (3.4)$$

Конкретное значение производной при $x = x_0$ обозначается $y'|_{x=x_0}$ или $f'(x_0)$.

Пример 1. Дана функция $y = x^2$; найти её производную y': 1) в произвольной точке x, 2) при $x = 3$.

► 1) При значении аргумента, равном x, имеем $y = x^2$. При значении аргумента, равном $x + \Delta x$, имеем $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Составляем разностное отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Переходя к пределу, найдём производную от данной функции:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, производная от функции $y = x^2$ в произвольной точке равна

$$y' = 2x.$$

2) При $x = 3$ получим

$$y'|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6. \blacktriangleleft$$

Из равенства $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$ (см. рис. 3.6) и определения производной (см. формулу (3.4)) следует, что производная в точке x равна тангенсу угла α наклона касательной, проведённой в точке $M(x; y)$ к графику функции $y = f(x)$. Это геометрический смысл производной.

Пример 2. Найти тангенсы углов наклона касательной к кривой $y = x^2$ в точках $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и $M_2\,(-1; 1)$.

► На основании примера 1 имеем $y' = 2x$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = y'|_{x=\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = y'|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2. \blacktriangleleft$$

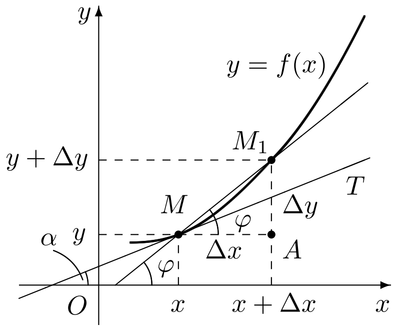


Рис. 3.6

Легко показать, что с физической точки зрения производная $y' = f'(x)$ определяет скорость изменения функции в точке x относительно аргумента x.

Пример 3. Найти скорость равномерно ускоренного движения в произвольный момент t и в момент $t = 2$ сек., если зависимость пути от времени выражается формулой $s = \frac{gt^2}{2}$.

► В момент времени t имеем $s = \dfrac{gt^2}{2}$. В момент $t + \Delta t$ получим

$$s + \Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2} = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2}.$$

Найдём Δs:

$$\Delta s = \frac{g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2)}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt\Delta t + \frac{g\Delta t^2}{2}}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Из физического смысла производной, имеем

$$v = s' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t \right) = gt.$$

Таким образом, скорость в любой момент времени t равна $v = gt$. При $t = 2$ имеем $v|_{t=2} = g \cdot 2 = 9{,}8 \cdot 2 = 19{,}6$ м/сек. ◄

Дифференцируемость функций

Функция $y = f(x)$, заданная на промежутке $(a; b)$, называется *дифференцируемой* в точке $x \in (a; b)$, если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где A — конечное число.

В определении дифференцируемой функции приращение Δy представлено в виде двух слагаемых, которые являются бесконечно малыми при $\Delta x \to 0$. При этом первое слагаемое — бесконечно малая функция одного порядка с Δx, а второе слагаемое — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx.

Теорема 3.8. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ являлась дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.*

Так как дифференцируемость функции в некоторой точке равносильна существованию у неё конечной производной в этой точке, то операцию вычисления производной называют *дифференцированием.*

Если функция не имеет конечной производной в некоторой точке, то она называется недифференцируемой в этой точке.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой на интервале* $(a; b)$, если она является дифференцируемой в каждой точке этого интервала.

Теорема 3.9. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Непрерывная в точке x функция может не быть в этой точке дифференцируемой. Это можно показать на следующих примерах.

Пример 4. Дифференцируема ли функция $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$?

► Функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Выясним, имеет ли эта функция производную при $x = 0$. Для этого найдём значения функции при $x = 0$ и при $x = 0 + \Delta x$: $y = 0$ и $y + \Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$ соответственно. Следовательно,

$$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

Найдём предел отношения приращения функции к приращению аргумента:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty.$$

Таким образом, в точке $x = 0$ рассматриваемая функция не имеет производной и, следовательно, не дифференцируема в этой точке. Касательная к кривой в этой точке образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. совпадает с осью ординат. ◀

Пример 5. Дифференцируема ли функция $y = |x|$ в точке $x = 0$?

▶ Функция $y = |x|$ определена и непрерывна на всей числовой прямой, а в точке $x = 0$ она не является дифференцируемой, так как её производная в этой точке не существует. Действительно, при $\Delta x > 0$ имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

при $\Delta x < 0$ получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Таким образом, рассматриваемый предел зависит от того, каков знак Δx, а это значит, что в точке $x = 0$ функция не имеет производной. Геометрически этому соответствует тот факт, что в точке $x = 0$ данная кривая не имеет определённой касательной. ◀

Правила и формулы дифференцирования

Если C — постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(C)' = 0$;

2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3) $(uv)' = u'v + uv'$, в частности, $(Cu)' = Cu'$;

4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности, $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

5) $(u^v)' = v\,u^{v-1}u' + u^v \ln u\, v'$;

6) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$\big[f(\varphi(x))\big]' = f'(u)\,\varphi'(x) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx};$$

7) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\frac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)};$$

8) если функция $y = f(x)$ задана параметрически в виде двух уравнений $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, где t — вспомогательная переменная, называемая параметром, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые, то

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt};$$

9) если функция $y = f(x)$ — неотрицательная и дифференцируемая, то

$$f'(x) = f(x)\cdot\big(\ln f(x)\big)'.$$

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить таблицу производных основных элементарных функций:

1) $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$;

2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

3) $(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot \ln a}\cdot u'$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$;

4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

6) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$; 7) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$;

8) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$; 9) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$;

10) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$; 11) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$;

12) $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$; 13) $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;

14) $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$; 15) $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

Для вычисления производных надо знать лишь правила дифференцирования и формулы производных основных элементарных функций, строго соблюдать эти правила при выполнении упражнений.

Пример 6. Найти производную функции $y = e^{-x^2}$.

► Данная функция является сложной. Её можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y = e^u$, где $u = -x^2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y' = \left(e^{-x^2}\right)'_{-x^2} \cdot \left(-x^2\right)' = e^{-x^2}(-2x). \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \sqrt{\cos(3x-2)}$.

► Заданная функция является суперпозицией трёх функций: $y = u^{\frac{1}{2}}$, где $u = \cos v$, где $v = 3x - 2$. При этом следует понимать, что, дифференцируя внешнюю функцию (степенную или косинус), нельзя менять её сложный аргумент. Поэтому

$$y' = \left(\left(\cos(3x-2)\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(3x-2)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\cos(3x-2)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(3x-2)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\sin(3x-2)\right) \cdot (3x-2)' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(3x-2)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\sin(3x-2)\right) \cdot 3 = -\frac{3\sin(3x-2)}{2\sqrt{\cos(3x-2)}}. \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x} \cdot \ln x$.

► По правилу дифференцирования произведения функций получаем

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}\right)' \cdot \ln x + \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{1 + (\sqrt[3]{x})^2} \cdot (\sqrt[3]{x})' \cdot \ln x + \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{1 + (\sqrt[3]{x})^2} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \ln x + \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\ln x}{3\sqrt[3]{x^2}\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)} + \frac{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}{x}. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти производную функции $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{3^{\sin x}}$.

► По правилу дифференцирования частного двух функций, производную от заданной функции можно записать в виде

$$y' = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' \cdot 3^{\sin x} - \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot \left(3^{\sin x}\right)'}{\left(3^{\sin x}\right)^2}.$$

Функции $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ и $3^{\sin x}$ — сложные, производные от этих функций по переменной x будут равны:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 \cdot \cos^2\frac{1}{x}};$$

$$\left(3^{\sin x}\right)' = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot (\sin x)' = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x.$$

Подставим вычисленные производные в формулу для производной частного:

$$y' = \frac{-\frac{1}{x^2 \cdot \cos^2\frac{1}{x}} \cdot 3^{\sin x} - \operatorname{tg}\frac{1}{x} \cdot 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x}{3^{2\sin x}}. ◄$$

Пример 10. Найти производную функции $y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

► По правилу дифференцирования степенно-показательной функции получаем

$$y' = \operatorname{ctg} x \cdot (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg} x - 1} \cdot (\arcsin 2x)' + {}$$
$$+ (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg} x} \cdot \ln(\arcsin 2x) \cdot (\operatorname{ctg} x)' =$$
$$= \operatorname{ctg} x \cdot (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg} x - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 + {}$$
$$+ (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg} x} \cdot \ln(\arcsin 2x) \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right). ◄$$

Пример 11. Для функции $y = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}$ найти её производную.

► Можно найти y' с помощью правил дифференцирования частного и произведения. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{x^2+2}\cdot 2x + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + 1 - 3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y':

$$y' = \frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right). ◄$$

Пример 12. Найти производную функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x = t^3$ и $y = t^2$.

► Согласно правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, можно записать

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^2)'}{(t^3)'} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}.$$

В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость y от x. Действительно, $t = \sqrt[3]{x}$. Тогда $y = \sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y'_x = \frac{2}{3t}$. ◄

Уравнения касательной и нормали к кривой. Угол между кривыми

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то *уравнение касательной* к графику этой функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0). \tag{3.5}$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0). \tag{3.6}$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

Углом между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке. Этот угол находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\,f_2'(x_0)}\right|, \tag{3.7}$$

где x_0 — абсцисса точки пересечения кривых.

Пример 13. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $y = e^{2x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

► Ордината точки касания $y(0) = e^0 = 1$. В любой точке $y' = 2e^{2x}$. В точке касания $y'(0) = 2$. Поэтому из формулы (3.5) следует, что уравнение касательной имеет вид

$$y = 1 + 2(x - 0), \quad \text{или} \quad y = 2x + 1, \quad \text{или} \quad 2x - y + 1 = 0,$$

а из формулы (3.6) следует, что уравнение нормали имеет вид

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x - 0), \quad \text{или} \quad y = -\frac{x}{2} + 1, \quad \text{или} \quad x + 2y - 2 = 0. \blacktriangleleft$$

Пример 14. Найти угол между кривыми $y = x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}$ в точке их пересечения.

► Поскольку уравнение $x^2 = \sqrt[3]{x}$ имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, то кривые пересекаются в точках $M_1(1;1)$ и $M_2(0;0)$.

Так как $(x^2)' = 2x$, то угловой коэффициент k_1 касательной к графику функции $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_1 = 1$ равен $k_1 = 2$. Так как $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, то угловой коэффициент k_2 касательной к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке с абсциссой $x_1 = 1$ равен $k_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1,$$

отсюда следует, что $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

В точке $x_2 = 0$ функция $y = \sqrt[3]{x}$ не дифференцируема, так как её производная в этой точке бесконечна. В этом случае угол, под которым пересекаются кривые, определим исходя из следующих соображений: касательная к графику функции $y = x^2$ в точке $x_2 = 0$ параллельна оси Ox, а касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x_2 = 0$ перпендикулярна оси Ox, значит, кривые пересекаются в этой точке под прямым углом. ◄

Производные высших порядков

Производной второго порядка, или *второй производной функции* $y = f(x)$, называется производная от её первой производной и обозначается одним из следующих символов: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, т. е.

$$y'' = (y')'.$$

Предполагается, что y' — функция дифференцируемая.

Производная от второй производной называется *производной третьего порядка*, или *третьей производной*, и обозначается через y''' или $f'''(x)$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Вообще, *производной n-го порядка от функции* $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка и обозначается символом $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right).$$

Предполагается, что $y^{(n-1)}$ — функция дифференцируемая.

Порядок производной берётся в скобки для того, чтобы его нельзя было принять за показатель степени. Производные четвёртого, пятого и высших порядков обозначаются также с помощью римских цифр: y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, … В таком случае порядок производной можно писать без скобок.

Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то $s' = \frac{ds}{dt}$ — скорость, а $s'' = \frac{d^2s}{dx^2}$ — ускорение этой точки.

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\cdot\frac{1}{x'(t)}, \ldots$$

Пример 15. Найти третью производную функции $y = \frac{x}{e^x}$.

► Сначала вычислим первую производную, используя правило дифференцирования частного двух функций.

$$y' = \left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}.$$

Вычислим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1-x}{e^x}\right)' = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-e^x(1+1-x)}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x}.$$

Вычислим третью производную:

$$y''' = \left(\frac{x-2}{e^x}\right)' = \frac{1 \cdot e^x - (x-2) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x+2)}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}. \blacktriangleleft$$

Пример 16. Получить выражение производной n-го порядка для функции $y = \ln(x+1)$.

► Получим выражения для производных первого, второго, третьего и четвёртого порядков, выполнив последовательное дифференцирование заданной функции:

$$y' = \frac{1}{x+1}, \quad y'' = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad y'' = \frac{1 \cdot 2}{(x+1)^3}, \quad y'' = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)^4}.$$

Из выражений для этих производных ясно, что каждое последующее дифференцирование увеличивает на единицу показатель степени выражения $(x+1)$ в знаменателе и добавляет в числитель натуральный сомножитель, на единицу больший предыдущего.

Знаки производных чередуются, причём в производных чётного порядка используется знак «минус». Учитывая это, запишем выражение для производной произвольного (n-го) порядка:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(x+1)^n}. \blacktriangleleft$$

Пример 17. Получить выражение производной n-го порядка для функции $y = \sin x$.

► Вычислим последовательно производные:

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ y'' &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \\ y'' &= \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= \cos\left(x + (n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 18. Найти вторую производную функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями: $x = \ln t$, $y = t^3 + 2t + 1$.

► Вычислим первую производную по правилу дифференцирования функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(t^3 + 2t + 1)'}{(\ln t)'} = \frac{3t^2 + 2}{1/t} = 3t^3 + 2t.$$

Чтобы вычислить вторую производную, учтём, что производная $y'(x)$ также является параметрически заданной функцией:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3t^3 + 2t)'}{(\ln t)'} = \frac{9t^2 + 2}{1/t} = 9t^3 + 2t. \blacktriangleleft$$

Дифференциалы первого и высших порядков и их приложения

Дифференциалом первого порядка функции $y = f(x)$ называется главная часть её приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x. Дифференциал dy функции равен произведению её производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy = f'(x)\,dx,$$

поэтому справедливо равенство

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

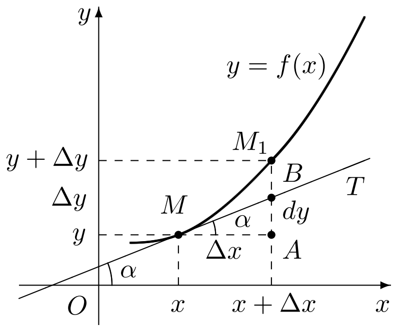


Рис. 3.7

Из рис. 3.7 видно, что если MM_1 — дуга графика функции $y = f(x)$, MT — касательная, проведённая к нему в точке $M(x; y)$, и $MA = \Delta x = dx$, то отрезок $AB = dy$, а отрезок $AM_1 = \Delta y$.

Таким образом, *дифференциал функции $y = f(x)$, соответствующий данным значениям x и Δx, равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в данной точке x* и отличается от её приращения в этой точке на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с Δx.

Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем:

1) $dC = 0$, если $C = \mathrm{const}$;
2) $d(Cu) = C\,du$, если $C = \mathrm{const}$;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(u\,v) = v\,du + u\,dv$;
5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, если $v \neq 0$;
6) $df(u) = [f(u(x))]'\,dx = f'(u)\,u'(x)\,dx = f'(u)\,du$, если $u = u(x)$.

Из последнего правила следует, что *форма первого дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.* Это свойство дифференциала называется *инвариантностью формы дифференциала.*

Пример 19. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$.

► Находим производную данной функции:

$$y' = 5\sin^4 3x \cdot (\sin 3x)' = 5\sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot (3x)' =$$

$$= 5\sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot 3,$$

тогда

$$dy = 15\sin^4 3x \cdot \cos 3x \, dx. \blacktriangleleft$$

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т. е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Если дана функция $y = f(x)$, где x — независимая переменная, то

$$d^2 y = f''(x)\, dx^2, \quad d^3 y = f'''(x)\, dx^3, \; \ldots, \; d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n, \; \ldots$$

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$d^2 y = f''(u)\, du^2 + f'(u)\, d^2 u,$$

т. е. формула меняется, если x не является независимой переменной. Это имеет место и для дифференциалов более высоких порядков.

Пример 20. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 + x^2)$.

$\blacktriangleright$ Имеем

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Тогда

$$d^2 y = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\, dx. \blacktriangleleft$$

Так как дифференциал функции отличается от её приращения на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с величиной Δx, то $\Delta y \approx dx$, или $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\, \Delta x$, откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\, \Delta x.$$

Полученная формула часто применяется для приближённого вычисления значений функций при малом приращении Δx независимой переменной x.

Пример 21. Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объём увеличился с 27 до 27,1 м^3.

▶ Если x — объём куба, то его сторона $y = \sqrt[3]{x}$. По условию задачи $x = 27$, $\Delta x = 0{,}1$. Тогда приращение стороны куба

$$\Delta y \approx dy = y'(x)\,\Delta x = \frac{1}{3\sqrt[3]{27}} \cdot 0{,}1 = \frac{0{,}1}{27} \approx 0{,}0037 \text{ м.} \blacktriangleleft$$

Пример 22. Найти приближённо $\sin 31^\circ$.

▶ Полагаем $x = \pi/6$, тогда

$$\Delta x = 1^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0{,}017,$$

$$\sin 31^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot 0{,}017 = 0{,}5 + 0{,}017 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}515. \blacktriangleleft$$

Упражнения

Пользуясь определением, найти производные функций:

3.79. $y = 5x - 2$. **3.80.** $y = x^3$. **3.81.** $y = \sqrt{x}$. **3.82.** $y = \dfrac{1}{x}$.

3.83. Закон движения материальной точки имеет вид $x = 4 + 10t^2$, где x — координата точки в момент времени t. Найти скорость точки в момент времени $t = 1$.

3.84. Закон движения материальной точки имеет вид $x = 4t + 5t^2$, где x — координата точки в момент времени t. Найти скорость точки в момент времени $t = 2$.

3.85. Закон движения материальной точки имеет вид $x = 6 + 8t - t^2$, где x — координата точки в момент времени t. Найти скорость точки в момент времени $t = 3$.

Найти производную данной функции в точке x_0:

3.86. $y = 3x^2 - 2x + \dfrac{4}{x} - 3, \quad x_0 = 2.$

3.87. $y = \dfrac{8}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + 2x + 9, \quad x_0 = 4.$

3.88. $y = 2e^x + 3x + 4, \quad x_0 = \ln 3.$

3.89. $y = 6\ln x - x^2 + x + 1, \quad x_0 = 2.$

3.90. $y = 3\sin x + 2\operatorname{tg} x - x + 1, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{3}.$

3.91. $y = 5\operatorname{arctg} x + \sqrt{3}\arcsin x - x + 1, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}.$

Найти производные функций:

3.92. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$

3.93. $y = x^3 \cdot \sin x.$

3.94. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^4 - 1}.$

3.95. $y = \sqrt[5]{x}\arccos x - \dfrac{\log_6 x}{x^2}.$

3.96. $y = (x^5 + 3x - 1)^4.$

3.97. $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^2}.$

3.98. $y = e^x \cdot \operatorname{tg} 4x.$

3.99. $y = \sqrt[3]{x^4 + \sin^4 x}.$

3.100. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}.$

3.101. $y = x \cdot \operatorname{ctg}^2 7x.$

3.102. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{ctg} x + 1} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{tg} x + 1}.$

3.103. $y = 2^{-\cos^4 5x}.$

3.104. $y = (2^{x^4} - \operatorname{tg}^4 x)^2.$

3.105. $y = \ln^5(x - 2^{-x}).$

3.106. $y = \sin(\operatorname{tg}\sqrt{x}).$

3.107. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1 + x^2}.$

3.108. $y = \operatorname{sh}(x^2)$

3.109. $y = (2^{\operatorname{tg} 3x} + \operatorname{tg} 3x)^2.$

3.110. $y = x \cdot \sin^2 x \cdot 2^{x^2}.$

3.111. $y = x^3 \cdot \operatorname{th}^3 x.$

3.112. $y = 2^{x/\ln x}.$

3.113. $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x).$

3.114. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1 + e^{-x^2}}.$

3.115. $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}.$

3.116. $y = (x^3 + 1)^{\operatorname{tg} 2x}.$

3.117. $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}.$

3.118. $y = \dfrac{(x-1)^3 \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}.$

3.119. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x\,(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}.$

Найти $y'(x)$ для заданных параметрически функций $y = y(x)$:

3.120. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t.$

3.121. $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t.$

3.122. $x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t.$

3.123. $x = 5\operatorname{ch} t,\ y = 4\operatorname{sh} t.$

Найти уравнения касательной и нормали к данной кривой в точке x_0 (соответствующей параметру t_0):

3.124. $y = x^2 - 2x,\ x_0 = 4.$

3.125. $y = 3x^3 - x + 2,\ x_0 = -1.$

3.126. $y = \dfrac{x^2}{4} - x + 1,\ x_0 = 1.$

3.127. $y = x^3 + 2x - 2,\ x_0 = 1.$

3.128. $x = \sqrt{2}\cos^3 t,\ y = \sqrt{2}\sin^3 t,\ t_0 = \frac{\pi}{4}.$

3.129. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t_0 = \frac{\pi}{2}.$

3.130. $x = \dfrac{1+t}{t^3},\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t},\ t_0 = 1.$

Найти угол между линиями:

3.131. $y = x - x^3$ и $y = 5x$. **3.132.** $y = x^3$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$.

3.133. $y = 1 + \sin x$ и $y = 1$. **3.134.** $y = \sqrt{2}\sin x$ и $y = \sqrt{2}\cos x$.

Найти производные указанных порядков для следующих функций:

3.135. $y = (1 + 4x^2)\operatorname{arctg} 2x$, $y'' =?$

3.136. $y = e^{-3x}(\cos 2x + \sin 2x)$, $y'' =?$

3.137. $y = (1 + x^2) \cdot \ln(1 + x^2)$, $y'' =?$

3.138. $y = \sqrt{1 - 4x^2} \cdot \arcsin 2x$, $y'' =?$

3.139. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $y''' =?$ **3.140.** $y = \operatorname{sh}^2 x$, $y''' =?$

3.141. $y = xe^x$, $y^{(n)} =?$ **3.142.** $y = 2^x + 2^{-x}$, $y^{(n)} =?$

3.143. $y = \dfrac{1}{2x+1}$, $y^{(n)} =?$ **3.144.** $y = x^2 \sin x$, $y^{(n)} =?$

Найти дифференциал функции:

3.145. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **3.146.** $y = x^2 \ln x$. **3.147.** $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$.

3.148. $y = 2^{\cos x}$. **3.149.** $y = \ln^3 \sin x$. **3.150.** $y = \sqrt[3]{x^5 - 1}$.

Найти приращение и дифференциал функции $y = y(x)$ в общем виде, а также в точке x_0, если известно Δx:

3.151. $y = x^3 + 2x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

3.152. $y = x^2 + x - 5$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}5$.

Вычислить приближённо:

3.153. $\sqrt[3]{26}$. **3.154.** $\operatorname{tg} 44^\circ$. **3.155.** $(1{,}02)^5$.

Найти dy и d^2y:

3.156. $y = \sin^2 x$. **3.157.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. **3.158.** $y = x(\ln x - 1)$.

3.3. Теоремы о дифференцируемых функциях

Теоремы о среднем

Рассмотрим ряд теорем, имеющих большое теоретическое и прикладное значение.

Теорема 3.10 (Ролля). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и $f(a) = f(b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $x = c$ $(a < c < b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Теорема 3.11 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, то существует, по крайней мере, одна точка $x = c$ $(a < c < b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Эта формула называется *формулой Лагранжа конечных приращений.*

Следствие 3. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и если всюду на этом интервале $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ является постоянной на интервале $(a;b)$.*

Теорема 3.12 (Коши). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, причём $g'(x) \neq 0$ нигде при $a < x < b$, то найдётся хотя бы одна точка $x = c$ $(a < c < b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Пример 1. Проверить, справедлива ли терема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 2x$ на отрезке $[-1;3]$, найти соответствующее значение c (если оно существует).

► Функция непрерывна на отрезке $[-1;3]$ и дифференцируема на интервале $(-1;3)$. Кроме того, $f(-1) = f(3) = 3$, поэтому теорема Ролля на данном отрезке для данной функции справедлива. Найдём значение $c \in (-1;3)$, для которого $f'(c) = 0$, из равенства $(x^2 - 2x)' = 0$, т. е. $2x - 2 = 0$, откуда $x = 1$. Поскольку $1 \in (-1;3)$, то $c = 1$ — искомое значение. ◄

Пример 2. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, где $x \in [-1;1]$.

► Пусть $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Тогда $\forall x \in (-1;1)$ имеем $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Отсюда следует, что $f(x) = C$, т. е. $\arcsin x + \arccos x = C$. Положив $x = 0$, находим $0 + \frac{\pi}{2} = C$, т. е.

$C = \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Это равенство выполняется и при $x = \pm 1$. ◄

Правило Лопиталя

Рассмотрим способ раскрытия неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, который основан на применении производных.

Теорема 3.13 (Лопиталя). *Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, может быть, самой точки x_0. Пусть, далее, функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x \to x_0$ и производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду в указанной окрестности точки x_0. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эта формула называется правилом Лопиталя.

Правило Лопиталя справедливо и при $x_0 = \pm\infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ вновь даёт в предельной точке неопределённость одного из двух названных видов и функции $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лопиталя, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д. Однако следует помнить, что предел отношения самих функций может существовать, в то время как отношение производных не стремится ни к какому пределу.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$.

► Имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

Но предел вида

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$$

не существует, так как при $x \to \infty$ числитель и знаменатель дроби могут принимать любые значения из отрезка $[0; 2]$, а само отношение производных принимает любые неотрицательные значения. Следовательно, правило Лопиталя в этом случае неприменимо. ◀

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + e^{-x} - 1}{x^2}$.

▶ Числитель и знаменатель данной дроби непрерывны, дифференцируемы и стремятся к нулю. Это означает, что можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + e^{-x} - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x + e^{-x} - 1)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x}}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$.

▶ В данном случае имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln \sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{1}{1-0} = 1. \blacktriangleleft$$

Неопределённость вида $[0 \cdot \infty]$ получается из произведения функций $f(x) \cdot g(x)$, в котором $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Это произведение легко преобразуется в частное вида $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ или $\frac{g(x)}{1/f(x)}$, что даёт неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 2} (2-x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}$.

▶ Легко находим, что

$$\lim_{x\to 2} (2-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}. \blacktriangleleft$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} (x) = \infty$, то разность $f(x) - (x)$ даёт неопределённость вида $[\infty - \infty]$. Но

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}},$$

приходим к неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

► Приводим выражение к общему знаменателю и применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1}\frac{x - 1 - \ln x}{\ln x \cdot (x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}. ◄$$

Рассмотрим функцию вида $[f(x)]^{g(x)}$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, то имеем неопределённость вида $\left[0^0\right]$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, приходим к неопределённости вида $[1^\infty]$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, получаем неопределённость вида $\left[\infty^0\right]$.

Для раскрытия этих неопределённостей применяется метод логарифмирования. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = A$. Так как логарифмическая функция непрерывна, то $\lim\limits_{x\to x_0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to x_0} y$. Тогда

$$\ln A = \lim_{x\to x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]$$

и неопределённости трёх рассматриваемых видов сводятся к неопределённости вида $[0 \cdot \infty]$.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

► Обозначим искомый предел через A. Тогда

$$\ln A = \lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x \ln\frac{1}{x} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\operatorname{ctg} x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 0\cdot 1^2 = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = A = e^{\ln A} = e^0 = 1. \blacktriangleleft$$

Формула Тейлора

Формула Тейлора является одной из основных формул математического анализа и имеет многочисленные приложения как в анализе, так и в смежных дисциплинах.

Теорема 3.14 (Тейлора—Пеано). *Пусть в некоторой точке* x_0 *функция* $f(x)$ *имеет производные до* n*-го порядка включительно. Тогда справедливо равенство*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right). \quad (3.8)$$

Формула (3.8) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*

Теорема 3.15 (Тейлора—Лагранжа). *Пусть функция* $f(x)$ *имеет* $(n+1)$*-ю производную на интервале* $(a;b)$ *и* $x_0\in(a;b)$. *Тогда для любого* $x\in(a;b)$ *найдётся такая точка* c*, лежащая между* x *и* x_0*, что справедливо равенство*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

В случае $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o\left(x^n\right)$$

и называется *формулой Маклорена.*

Полезно помнить разложения по формуле Маклорена некоторых важнейших элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}\,x^n + o(x^n).$$

Пример 9. Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

► Сначала найдём формулу для n-го члена разложения. Так как

$$f'(1) = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=1} = -1!, \quad f''(1) = \frac{1\cdot 2}{x^3}\Big|_{x=1} = 2!,$$

$$f'''(1) = -\frac{2!\cdot 3}{x^4}\Big|_{x=1} = -3!, \quad f^{IV}(1) = \frac{3!\cdot 4}{x^5}\Big|_{x=1} = 4!,\ \dots,$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n\cdot n!,$$

то

$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\,(x-1)^n = (-1)^n\cdot(x-1)^n.$$

Отсюда

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \cdot (x-1)^n + o((x-1)^n), \quad x \to 0. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $o(x^3)$.

▶ Необходимо представить данную функцию в виде

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(0) + \frac{\operatorname{arctg}'(0)}{1!}\,x + \frac{\operatorname{arctg}''(0)}{2!}\,x^2 + \\ + \frac{\operatorname{arctg}'''(0)}{3!}\,x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{arctg}(0) = 0, \qquad \operatorname{arctg}'(0) = \frac{1}{1+x^2}\bigg|_{x=0} = 1,$$

$$\operatorname{arctg}''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0, \quad \operatorname{arctg}'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2,$$

получим требуемое разложение:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3). \blacktriangleleft$$

Пример 11. Найти число e с точностью до 0,001.

▶ Запишем формулу Маклорена для функции $f(x) = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Положим $x = 1$:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

Для нахождения e с точностью 0,001 определим n из условия, что остаточный член $\frac{e^c}{(n+1)!}$ меньше 0,001. Так как $0 < c < 1$, то $e^c < 3$. Поэтому при $n = 6$ имеем

$$\frac{e^c}{7!} < \frac{3}{5040} = 0{,}0006 < 0{,}001.$$

Итак, получаем приближённое равенство

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx$$
$$\approx 2 + 0{,}5 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014 = 2{,}7181,$$

т. е. $e \approx 2{,}718$. ◄

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$.

► Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, и в принципе её можно было бы раскрыть с помощью правила Лопиталя, но мы сделаем иначе. Разложим функцию $\ln x$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки $x_0 = 1$ до членов порядка 2:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).$$

Подставим это разложение в предел. Имеем

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) - x + 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2} + \frac{o((x-1)^2)}{(x-1)^2}\right) = -\frac{1}{2}.$$ ◄

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

► В знаменателе стоит x^5, поэтому достаточно найти многочлен Тейлора числителя с погрешностью порядка $o(x^5)$ при $x \to 0$. Поскольку $\sin x \sim x$, получаем $o(x^5) = o(\sin^5 x)$, $x \to 0$. По формуле Тейлора имеем

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^5 x}{120} + o(\sin^5 x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Тогда

$$\sin^3 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^3 = (x + \alpha(x))^3 = \\ = x^3 + 3x^2\alpha(x) + 3x\alpha^2(x) + \alpha^3(x),$$

где $\alpha(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. При $x \to 0$ получаем

$$\alpha(x) \sim -\frac{x^3}{6}, \quad x\,\alpha^2(x) \sim x \cdot \frac{x^6}{36} = o(x^5), \quad \alpha^3(x) \sim -\frac{x^9}{216} = o(x^5),$$

и, следовательно,

$$\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

Наконец, $\sin^5 x \sim x^5$ при $x \to 0$, т. е.

$$\sin^5 x = x^5 + o(x^5).$$

Значит, при $x \to 0$ справедливо равенство

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + \\ + \frac{1}{120}\left(x^5 + o(x^5)\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Аналогично

$$x\sqrt[3]{1 - x^2} = x(1 - x^2)^{1/3} = x\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9} + o(x^4)\right) = \\ = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{9} + o(x^5).$$

Итак,

$$\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1 - x^2} = \\ = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{9} + o(x^5) = \\ = \frac{19}{90}x^5 + o(x^5),$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{19}{90} + \frac{o(x^5)}{x^5}\right) = \frac{19}{90}. \blacktriangleleft$$

Упражнения

Проверить справедливость теоремы Ролля для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

3.159. $f(x) = |x| - 2$, $[-2; 2]$. **3.160.** $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $[0; 4]$.

3.161. $f(x) = \cos x$, $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. **3.162.** $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $[-1; 1]$.

Проверить справедливость теоремы Лагранжа для функции $f(x)$ на данном отрезке, найти соответствующее значение c (если оно существует):

3.163. $f(x) = e^x$, $[0; 1]$. **3.164.** $f(x) = \frac{1}{x}$, $[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$.

3.165. $f(x) = |x - 1|$, $[0; 3]$.

Найти пределы, используя правили Лопиталя:

3.166. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{-x^3 - 9x^2 + 8}$. **3.167.** $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$.

3.168. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + x - 4}{-x^3 + x + 13}$. **3.169.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{9x - 4\sin 3x}{8x}$.

3.170. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{9 - x^2}{x - \sqrt{6 + x}}$. **3.171.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\pi - 2x)}{\operatorname{tg} x}$.

3.172. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^4}$. **3.173.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$.

3.174. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. **3.175.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - e^{-x} - \sin 2x}{x^3 \cos x}$.

3.176. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln(1 + \frac{1}{x})}$. **3.177.** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos x \ln(x - \pi)}{\ln(e^x - e^\pi)}$.

3.178. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$. **3.179.** $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1 - x^3} - \dfrac{1}{1 - x^2}\right)$.

3.180. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$. **3.181.** $\lim\limits_{x\to0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$.

3.182. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\sec x - \operatorname{tg} x)$. **3.183.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x}$.

3.184. $\lim\limits_{x\to0} x \ln x$. **3.185.** $\lim\limits_{x\to1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

3.186. $\lim\limits_{x\to0} x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$. **3.187.** $\lim\limits_{x\to+\infty} [(\pi - 2\operatorname{arctg} x) \ln x]$.

3.188. $\lim\limits_{x\to0} (\sin x)^x$. **3.189.** $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$.

3.190. $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2\cos x}$. **3.191.** $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.

Разложить многочлен $P(x)$ по степеням $x - x_0$:

3.192. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8$, $x_0 = -1$.

3.193. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2$, $x_0 = 2$.

Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x)$ в точке x_0:

3.194. $f(x) = 2^x$, $x_0 = \log_2 3$. **3.195.** $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{2}$, $x_0 = 1$.

Разложить по формуле Маклолрена функцию $f(x)$ до $o(x^k)$:

3.196. $f(x) = e^{2-x}$, $k = 4$. **3.197.** $f(x) = \arcsin x$, $k = 3$.

Вычислить с точностью до ε, используя формулу Маклорена:

3.198. $\sin 1^\circ$, $\varepsilon = 0{,}0001$. **3.199.** $\ln 1{,}3$, $\varepsilon = 0{,}001$.

Используя формулу Маклорена, вычислить пределы:

3.200. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. **3.201.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4}$.

3.202. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$. **3.203.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2 \sin x}$.

3.4. Исследование поведения функций и построение их графиков

Одной из важнейших задач дифференциального исчисления является разработка общих приёмов исследования поведения функций.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*неубывающей*) на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leqslant f(x_2)$).

Функция $f(x)$ называется *убывающей* (*невозрастающей*) на некотором интервале, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Если функция убывает или возрастает на всём промежутке, то она называется *монотонной* на этом промежутке. Перечислим признаки монотонности функции.

Теорема 3.16 (необходимое условие монотонности). *Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то её производная на этом интервале неотрицательна (неположительна), т. е. $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$).*

Теорема 3.17 (достаточное условие монотонности). *Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ имеет положительную (отрицательную) производную, т. е. $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то она возрастает (убывает) на этом интервале.*

Промежутки, на которых функция не убывает или не возрастает, называются *промежутками монотонности функции.* Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках её области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых функция непрерывна, а её производная обращается в ноль или терпит разрыв, называются *критическими.*

Пример 1. Найти интервалы монотонности и критические точки функции $y = 2x^2 - \ln x$.

► Данная функция определена при $x > 0$. Находим её производную

$$y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}.$$

В области определения функции $y' = 0$ при $4x^2 - 1 = 0$, т. е. при $x_0 = \frac{1}{2}$. Найденная точка разбивает область определения функции на интервалы $(0; \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}; +\infty)$. В первом из них $y' < 0$, а во втором — $y' > 0$. Это означает, что в интервале $(0; \frac{1}{2})$ данная функция убывает, а в интервале $(\frac{1}{2}; +\infty)$ — возрастает. ◄

Точка x_0 называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ определена и для любого $x \neq x_0$ из этой окрестности выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции — её *экстремальными значениями.* Заметим, что точка локального экстремума обязательно является внутренней точкой области определения функции.

Теорема 3.18 (необходимое условие экстремума). *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.*

Из необходимых условий экстремума следует, что всякая точка локального экстремума непрерывной функции является критической, но, как будет показано далее на примерах, не всякая критическая точка непрерывной функции есть её точка экстремума.

Для исследования функции на экстремум более важным является следствие из необходимого условия, а именно: если производная дифференцируемой в точке x_0 функции отлична от нуля, то в точке x_0 у этой функции нет экстремума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y = (x+1)^3$.

► Производная данной функции $y' = 3(x+1)^2$ в точке $x = -1$ равна нулю. Но в этой точке функция экстремума не имеет, так как $(x+1)^3 > 0$ при $x > -1$, $(x+1)^3 < 0$ при $x < -1$, $(x+1)^3 = 0$ при $x = -1$. Итак, обращение в ноль производной функции не обеспечивает существования экстремума функции. ◄

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y = |x|$.

► Для данной непрерывной функции имеем $y(0) = 0$. Так как при $x \neq 0$ $y = |x| > 0$, то $x = 0$ — точка минимума. Но функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. ◄

Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум или же экстремума в ней нет.

Исследование функции в критических точках опирается на следующие теоремы.

Теорема 3.19 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет минимум.*

Следует иметь в виду, что указанные неравенства должны выполняться в достаточно малой окрестности критической точки x_0.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x+3\sqrt[3]{x^2}$.

► Данная функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Найдём её производную:

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1).$$

Критическими точками данной функции будут $x_1 = -1$, в которой $y' = 0$, и $x_2 = 0$, в которой y' терпит разрыв. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, в каждом из которых производная функции сохраняет знак. Поэтому достаточно определить знак производной в произвольной точке каждого из интервалов. Имеем: $y'(-8) = 1 > 0$, т. е. в интервале $(-\infty; -1)$ функция возрастает; $f'(-1/8) = -2 < 0$, следовательно, в интервале $(-1; 0)$ функция убывает; $f'(1) = 3 > 0$, т. е. в интервале $(0; +\infty)$ функция возрастает. Значит, при переходе через точку $x_1 = -1$ в направлении возрастания x знак первой производной меняется с «+» на «−», т. е. точка $x_1 = -1$ является точкой локального максимума и $y_{\text{макс}} = y(-1) = 1$. Для точки $x_2 = 0$ знак первой производной изменяется с «−» на «+», а это значит, что точка $x_2 = 0$ является точкой локального минимума и $y_{\text{мин}} = y(0) = 0$. ◄

Теорема 3.20 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке x_0 функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$, и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.*

В случае когда $f''(x_0) = 0$, точка x_0 может и не быть экстремальной.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию $y = 2\sin x + \cos 2x$.

► Так как функция является периодической периода 2π, то достаточно исследовать функцию на отрезке $[0; 2\pi]$. Найдем первую и вторую производные функции:

$$y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x).$$

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

Критические точки данной функции удовлетворяют уравнению $2\cos x(1-2\sin x)=0$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{5\pi}{6}$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$.

Вычисляем значения второй производной в этих точках: $y''(\frac{\pi}{6}) = -3 < 0$, т. е. точка $x_1 = \frac{\pi}{6}$ — точка максимума и $y_{\text{макс}} = y(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}$; $y''(\frac{\pi}{2}) = 2 > 0$, т. е. точка $x_2 = \frac{\pi}{2}$ — точка минимума и $y_{\text{мин}} = y(\frac{\pi}{2}) = 1$; $y''(\frac{5\pi}{6}) = -3 < 0$, т. е. точка $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ — точка максимума и $y_{\text{макс}} = y(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}$; $y''(\frac{3\pi}{2}) = 6 > 0$, т. е. точка $x_4 = \frac{3\pi}{2}$ — точка минимума и $y_{\text{мин}} = y(\frac{3\pi}{2}) = -3$. ◄

Как уже отмечалось, если в некоторой точке x_0 имеем $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то в этой точке может быть либо максимум, либо минимум, либо нет ни того ни другого. В этом случае можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 3.21 (третье достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n, причём $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда если n чётно, то x_0 является точкой локального максимума при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и точкой локального минимума при $f^{(n)}(x_0) > 0$; если число n нечётно, то критическая точка x_0 не будет точкой локального экстремума.*

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

► Найдём критические точки функции.

$$y' = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 4(x-1)^3.$$

Из уравнения $4(x-1)^3 = 0$ получаем единственную критическую точку $x = 1$. Исследуем характер этой точки:

$$\begin{aligned} y'' &= 12x^2 - 24x + 12, \qquad & y''(1) &= 0,\\ y''' &= 24x - 24, & y'''(1) &= 0,\\ y^{IV} &= 24, & y^{IV}(1) &> 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x = 1$ исследуемая функция имеет минимум и $y_{\text{мин}} = y(1) = 0$. ◄

На отрезке $[a;b]$ непрерывная функция $y = f(x)$ может достигать *наименьшего* ($y_{\text{наим}}$) или *наибольшего* ($y_{\text{наиб}}$) *значения* либо в критических точках функции, лежащих в интервале $(a;b)$, либо на концах отрезка $[a;b]$.

Пример 7. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-2;3]$.

► Производная данной функции $y' = 3x^2 - 3$. Тогда $y' = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Обе эти критические точки принадлежат интервалу $(-2;3)$. Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка: $y(-1) = 5$, $y(1) = 1$, $y(-2) = 1$, $y(3) = 21$. Сравнивая полученные числа, заключаем, что наименьшее значение на отрезке $[-2;3]$ функция принимает в точках $x_2 = 1$ и $a = -2$, а наибольшее значение — в точке $b = 3$. Итак, на отрезке $[-2;3]$ $y_{\text{наим}} = 1$, а $y_{\text{наиб}} = 21$. ◄

Выпуклость функции. Точки перегиба

Функция $f(x)$ называется *выпуклой вниз* (*вверх*) на некотором промежутке, если она определена на этом промежутке и для любых двух точек x_1 и x_2 из этого промежутка и для любого числа $t \in [0;1]$ выполняется неравенство $f(t\,x_1 + (1-t)x_2) \leqslant t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2)$ $(f(t\,x_1 + (1-t)x_2) \geqslant t\,f(x_1) + (1-t)f(x_2))$.

Геометрически условие выпуклости вниз (вверх) означает, что для любых точек x_1, x_2, $x_1 < x_2$ график функции на отрезке $[x_1;x_2]$ лежит не выше (не ниже) хорды, соединяющей точки $(x_1;f(x_1))$ и $(x_2;f(x_2))$. При этом если на интервале $(x_1;x_2)$ график функции $f(x)$ имеет хотя бы одну общую точку с хордой, то он совпадает с ней всюду на отрезке $[x_1;x_2]$.

Дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция выпукла вниз (вверх) на $(a;b)$ тогда и только тогда, когда её график лежит не ниже (не выше) касательной, проведённой к нему в любой точке этого интервала.

Теорема 3.22 (необходимое условие выпуклости). *Если дважды дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ выпукла вниз (вверх), то её вторая производная на этом интервале неотрицательна (неположительна), т. е. $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$.*

Теорема 3.23 (достаточное условие выпуклости). *Если дважды дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ имеет положительную (отрицательную) вторую производную, т. е. $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то она выпукла вниз (вверх) на этом интервале.*

Будем говорить, что непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *перегиб* в точке x_0, если существует такое число $\delta > 0$, что функция $f(x)$ выпукла вниз (вверх) на интервале $(x_0-\delta;x_0)$ и выпукла вверх (вниз) на интервале $(x_0;x_0+\delta)$. В этом случае точка $(x_0;f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $f(x)$. Таким образом, точки перегиба функции — это те точки, в которых характер выпуклости функции меняется на противоположный.

Геометрически это означает, что взаимное расположение графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательной к этому графику в точке перегиба меняется на противоположное при переходе через эту точку.

Теорема 3.24 (необходимое условие перегиба). *Если функция $f(x)$ имеет перегиб в точке x_0, то в этой точке либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует.*

Точки, в которых вторая производная функции либо равна нулю, либо не существует, называют *критическими точками 2-го рода.* Всякая точка перегиба является критической точкой 2-го рода, но не всякая критическая точка 2-го рода является точкой перегиба.

Теорема 3.25 (первое достаточное условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку 2-го рода x_0, и имеет вторую производную во всех точках этого интервала (кроме, может быть самой точки x_0). Если в указанном интервале вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от x_0, то функция $f(x)$ имеет перегиб в точке x_0.*

Теорема 3.26 (второе достаточное условие перегиба). *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную третью производную и удовлетворяет в этой точке условиям $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ имеет перегиб в точке x_0.*

Теорема 3.27 (третье достаточное условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз в точке x_0, $n \geqslant 2$, причём $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, если n нечётно, и не является таковой при чётном n.*

Пример 8. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции $y = e^{-x^2/2}$ (кривая Гаусса).

► Находим первую и вторую производные:

$$y' = -x\, e^{-x^2/2}, \qquad y'' = (x^2 - 1)\, e^{-x^2/2}.$$

Первая и вторая производные существуют на всей числовой прямой. Приравнивая y'' нулю, находим $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Легко заметить, в окрестности точки $x_1 = -1$ знак второй производной меняется по следующему закону: $y'' > 0$ при $x < -1$, $y'' < 0$ при $x > -1$. Значит, $x_1 = -1$ является точкой перегиба. Слева от этой точки кривая выпукла вниз, так как в интервале $(-\infty; -1)$ $y'' > 0$, а справа в интервале $(-1; 1)$ — выпукла вверх, так как в этом интервале $y'' < 0$. Далее $y'' > 0$ при $x > 1$. Следовательно, $x_2 = 1$ также точка перегиба. Слева от точки $x_2 = 1$ в интервале $(-1; 1)$ функция выпукла вверх, а справа в интервале $(1; +\infty)$ — выпукла вниз. ◄

Асимптоты

Прямая l называется *асимптотой* данной кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой l при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далёкие точки.

Будем в дальнейшем различать асимптоты *вертикальные* (т. е. параллельные оси ординат) и *наклонные* (т. е. непараллельные оси ординат).

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a+0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

Говорят, что прямая $y = kx+b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = k\,x + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0$).

Теорема 3.28. *Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to \pm\infty$ наклонную асимптоту $y = k\,x + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела:*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = b. \tag{3.10}$$

Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть различными. Поэтому при нахождении пределов (3.10) следует отдельно рассматривать случаи, когда $x \to +\infty$ и когда $x \to -\infty$.

Пример 9. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

► Так как, $\lim\limits_{x\to\pm1} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty$, то данная кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = \pm 1$. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0.$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота, уравнение которой $y = x$. ◄

Пример 10. Найти асимптоты графика функции $y = x\,e^x$.

► Вертикальных асимптот нет, так как функция непрерывна на всей числовой прямой. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Следовательно, график функции не имеет наклонной асимптоты при $x \to +\infty$. При $x \to -\infty$ справедливы соотношения

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\,e^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0,$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (x\,e^x - 0 \cdot x) = \lim_{x \to -\infty} x\,e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Следовательно, при $x \to -\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. ◀

Общая схема исследования функций и построения графиков

Будем считать, что исследовать функцию — это означает:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на периодичность и чётность, выявить симметрии графика;

3) найти точки разрыва и промежутки непрерывности функции;

4) найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции;

5) найти точки пересечения графика функции с осями координат, определить промежутки знакопостоянства;

6) найти промежутки возрастания и убывания функции, определить локальные экстремумы функции;

7) найти промежутки выпуклости функции и точки перегиба.

На основании проведённого исследования построить график функции и указать область изменения функции. Заметим, что приведённая схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько пунктов. Если же график функции не совсем понятен и после выполнения всех пунктов, то можно построить дополнительно несколько точек графика, выявить другие особенности функции. Иногда целесообразно выполнение пунктов исследования сопровождать постепенным построением графика функции.

Пример 11. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$ и построить её график.

▶ Будем следовать изложенной выше схеме.

1. Поскольку функция представляет собой рациональную дробь, то она определена и непрерывна всюду на бесконечной прямой, кроме точки $x = 0$, в которой обращается в нуль её знаменатель, т. е. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Исследуем функцию на чётность.

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3 - 5(-x)^2 + 14(-x) - 6}{4(-x)^2} = \frac{-2x^3 - 5x^2 - 14x - 6}{4x^2}.$$

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, функция не является ни чётной, ни нечётной. Очевидно, что функция не является периодической.

3. Функция непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; точка $x = 0$ — точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 0\pm 0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = \left[\frac{-6}{+0}\right] = -\infty.$$

4. Согласно п. 3 прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота.

Из существования пределов

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^3} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x\to\pm\infty} \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{14}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = \frac{1}{4} \lim_{x\to\pm\infty} \left(-5 + \frac{14}{x} - \frac{6}{x^2}\right) = -\frac{5}{4}$$

вытекает, что при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$.

5. Найдём точки пересечения графика функции с осью абсцисс. Эти точки соответствуют вещественным корням уравнения $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0$. Легко видеть, что $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 6)$. Поскольку дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 - 2x + 6$ отрицательный, то рассматриваемое уравнение имеет только один вещественный корень $x = \frac{1}{2}$, так что график функции пересекает ось абсцисс в точке $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. Точек пересечения с осью ординат нет, так как функция не определена при $x = 0$.

6. Для нахождения областей возрастания и убывания функции вычислим первую производную:

$$f'(x) = \frac{(2x^3 - 5x^2 + 14x - 6)'x^2 - (x^2)'(2x^3 - 5x^2 + 14x - 6)}{4x^4} =$$

$$= \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Имея в виду, кроме того, что сама функция и первая производная не существуют при $x = 0$, мы получаем следующие области сохранения знака $f'(x)$:

Область значений x	$(-\infty; -3)$	$(-3; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$	$(2; +\infty)$
Знак $f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
Поведение функции	возр.	убыв.	возр.	убыв.	возр.

Из приведённой таблицы очевидно, что функция имеет следующие точки экстремума: максимум при $x = -3$, причём $f(-3) = -\frac{49}{12}$; максимум при $x = 1$, причём $f(1) = \frac{5}{4}$; минимум при $x = 2$, причём $f(2) = \frac{9}{8}$.

7. Для нахождения областей сохранения направления выпуклости вычислим вторую производную:

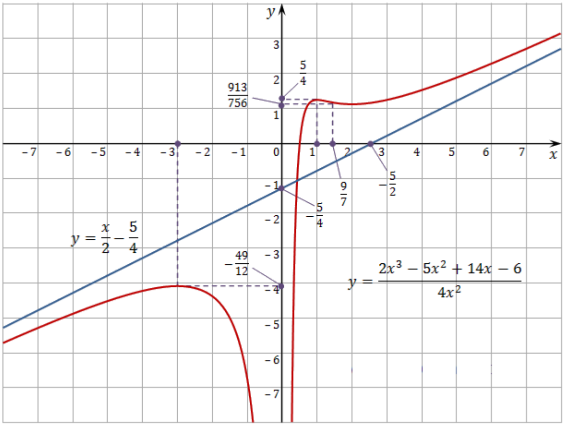
$$f''(x) = \frac{x^3(3x^2 - 7) - 3x^2(x^3 - 7x + 6)}{2x^6} = \frac{7x - 9}{x^4}.$$

Имея в виду, что сама функция и её производные не существуют в точке $x = 0$, мы получим следующие области сохранения знака $f''(x)$:

Область значений x	$(-\infty; 0)$	$(0; \frac{9}{7})$	$(\frac{9}{7}; +\infty)$
Знак $f''(x)$	$-$	$-$	$+$
Направление выпуклости графика	вверх	вверх	вниз

Из приведённой таблицы видно, что график функции имеет перегиб в точке $(\frac{9}{7}, f(\frac{9}{7}))$. Легко подсчитать, что $f(\frac{9}{7}) = \frac{913}{756}$.

По полученным данным строим эскиз графика рассматриваемой функции.



По построенному эскизу графика функции видно, что областью изменения функции является всё множество вещественных чисел. Оси и точки симметрии у графика функции нет. ◄

Упражнения

Найти интервалы возрастания и убывания функций:

3.204. $y = 2 - 3x + x^3$. **3.205.** $y = (x-2)^2(x+2)$.

3.206. $y = x\,e^{-x}$. **3.207.** $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$.

Найти экстремумы функций:

3.208. $y = \dfrac{1}{5}\,x^5 - \dfrac{1}{2}\,x^4 - x^3 + 2$. **3.209.** $y = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 3}$.

3.210. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$. **3.211.** $y = x - 2\sin^2 x$.

Найти наименьшее и наибольшее значения функций на указанных отрезках:

3.212. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-1; 2]$. **3.213.** $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $[0; 4]$.

3.214. $y = x^2 + 3\sqrt[3]{x^2}$, $[-1; 1]$. **3.215.** $y = \sin 2x - x$, $[-\pi; \pi]$.

3.216. Решёткой длиной 12 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

3.217. Из квадратного листа картона со стороной 30 см вырезают по углам одинаковые квадраты и из оставшейся крестообразной фигуры складывается прямоугольная коробка. Какова должна быть сторона вырезаемого квадрата, чтобы объём коробки был наибольшим?

3.218. Определить наибольшую площадь прямоугольника, у которого одна сторона лежит на основании a данного треугольника, а две вершины — на боковых сторонах треугольника, если треугольник имеет высоту h.

3.219. В шар радиуса R вписан цилиндр наибольшего объёма. Найти этот объем.

3.220. Вырезать из круга сектор так, чтобы из него можно было сделать конусообразный фильтр с максимальным объёмом.

3.221. Реакционный аппарат имеет форму открытого цилиндра. При изготовлении аппарата материал идёт на образование стенок и дна цилиндра. Каково должно быть отношение высоты h цилиндра к радиусу r его основания, чтобы при заданном объёме V на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

3.222. $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$. **3.223.** $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x$.

3.224. $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$. **3.225.** $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$.

Найти асимптоты графика функции:

3.226. $y = \dfrac{1 + 3x}{2 + x}$. **3.227.** $y = \dfrac{1 + 2x^2}{1 + x^2}$. **3.228.** $y = \dfrac{3x^5}{2 + x^4}$.

3.229. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$. **3.230.** $y = x\,e^x$. **3.231.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Исследовать поведение функции в указанной точке:

3.232. $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x$, $x_0 = 0$.

3.233. $y = x\,e^x - \sin(x^2) - \dfrac{x^3}{2} - x$, $x_0 = 0$.

3.234. $y = x^3 + 6x^2 + 15x - 6e^{x+1}$, $x_0 = -1$.

Провести полное исследование функций:

3.235. $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$. **3.236.** $y = \dfrac{(x+1)^2}{x - 2}$. **3.237.** $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Ответы

1. Линейная алгебра

1.1. -2. **1.2.** 0. **1.3.** 23. **1.4.** 0. **1.5.** 1. **1.6.** $\sec^2\varphi$. **1.7.** -36. **1.8.** 58. **1.9.** 0. **1.10.** -1. **1.11.** 30. **1.12.** 19. **1.13.** 0. **1.14.** 16. **1.15.** $-22\,198$. **1.16.** 910. **1.17.** -540. **1.18.** -5544. **1.19.** 1. **1.20.** 5. **1.21.** 54.
1.22. 160. **1.23.** -6. **1.24.** $\begin{bmatrix} 8 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. **1.25.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
1.26. $\begin{bmatrix} -10 & -1 & -12 \\ 12 & 19 & 5 \\ 1 & -11 & 23 \end{bmatrix}$. **1.27.** $\begin{bmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 8 & 5 & -2 \end{bmatrix}$.
1.28. $\begin{bmatrix} 29 & -10 & -3 & -8 \\ 28 & 2 & 3 & 13 \\ 17 & 1 & 10 & 20 \end{bmatrix}$. **1.29.** $\begin{bmatrix} 4 & -22 & -29 & 47 \\ 64 & -7 & -33 & 4 \\ -8 & -18 & 14 & -19 \end{bmatrix}$.
1.30. $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$. **1.31.** AB — не существует, $BA = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 4 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. **1.32.** $AB = -1$, $BA = \begin{bmatrix} 5 & -10 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ -4 & 8 & -12 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.
1.33. $AB = \begin{bmatrix} 23 \\ -5 \end{bmatrix}$, BA — не существует. **1.34.** $AB = \begin{bmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{bmatrix}$. **1.35.** $AB = \begin{bmatrix} 11 & -15 \end{bmatrix}$, BA — не существует. **1.36.** $AB = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{bmatrix}$. **1.37.** $AB = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 7 & 4 \\ 11 & -3 & 9 & 6 \\ 40 & 8 & 15 & 16 \\ 16 & 4 & 17 & 17 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 14 & 13 & 9 \\ 7 & 2 & 7 \\ 28 & 50 & 17 \end{bmatrix}$. **1.38.** $(AB)C = A(BC) = \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ -13 & 8 \end{bmatrix}$.
1.39. $(AB)C = A(BC) = \begin{bmatrix} 43 & 96 \\ 18 & 758 \\ 28 & 1030 \end{bmatrix}$.

1.40. $(AB)C = A(BC) = \begin{bmatrix} 52 & -468 & -156 & -312 \\ -19 & 171 & 57 & 114 \end{bmatrix}$.

1.41. $(AB)C = A(BC) = \begin{bmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{bmatrix}$. **1.42.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

1.43. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **1.44.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -10/3 & -3 & 14/3 \\ 13/3 & 4 & -17/3 \\ -4/3 & -1 & 5/3 \end{bmatrix}$.

1.45. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -5/12 & -1/12 \\ -1/3 & 7/12 & -1/12 \\ -1/3 & 1/12 & 5/12 \end{bmatrix}$. **1.46.** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.47. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/3 & 7/3 & -5/3 \\ -2/3 & -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

1.48. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7/15 & 1/5 & -13/15 & 41/15 \\ -13/15 & -1/5 & 8/15 & -16/15 \\ 6/5 & 1/5 & -1/5 & 2/5 \\ -1/5 & -1/5 & 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$.

1.49. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & -1/5 & -61/60 & 23/60 \\ 1/3 & 3/10 & 11/15 & -11/30 \\ -1/6 & 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & -1/10 & -1/20 & 3/20 \end{bmatrix}$. **1.50.** 2. **1.51.** 2. **1.52.** 3.
1.53. 3. **1.54.** 2. **1.55.** 3. **1.56.** 3. **1.57.** 3. **1.58.** $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.
1.59. $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$. **1.60.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$.
1.61. $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$. **1.62.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.
1.63. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **1.64.** $x_1 = 3$, $x_2 = 7$, $x_3 = -9$.
1.65. $x_1 = -19$, $x_2 = 26$, $x_3 = 11$, $x_4 = -5$. **1.66.** $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$. **1.67.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. **1.68.** $x_1 = -3x_2$, $x_3 = 5x_2 + 1$. **1.69.** $x_1 = 19 - 15x_4$, $x_2 = 16 - 13x_4$, $x_3 = -18 + 20x_4$.
1.70. система несовместна. **1.71.** $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.
1.72. $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$. **1.73.** $x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_4 = 0$.

2. Аналитическая геометрия

2.1. $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$. **2.2.** $(-\infty; -1) \cup (0; 2)$. **2.3.** $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b})$.
2.4. $\overrightarrow{AM} = (b\,\vec{c} + c\,\vec{b})/(b + c)$. **2.5.** $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{b} - 3\vec{a}$.
2.6. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{BD} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$. **2.7.** $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
2.9. $\text{пр}_l\overrightarrow{AD} = 2\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = -\sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{BC} = \sqrt{2}$, $\text{пр}_l\overrightarrow{AC} = 0$.

2.10. $(1; -1; -\sqrt{2})$. **2.11.** $(\frac{20}{3}; -\frac{13}{3}; 12)$, $(3; -\frac{5}{3}; 2)$, $(0; -1; 12)$.
2.12. $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{38}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{70}$. **2.13.** $\sqrt{10}$. **2.14.** коллинеарны.
2.15. $\alpha = -1$, $\beta = 4$. **2.16.** $\vec{a} = -\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$. **2.17.** $\vec{x} = -6\vec{p} + \vec{q} + 3\vec{r}$.
2.18. $(-\frac{1}{\sqrt{42}}; \frac{5}{\sqrt{42}}; \frac{4}{\sqrt{42}})$. **2.19.** 9; 16; 13; 37; -61. **2.20.** $\sqrt{13}$.
2.21. $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\varphi \approx 41°$. **2.22.** 22; 36; 49; 129; 41; -200. **2.23.** 2.
2.24. $\frac{\pi}{2}$. **2.25.** $\cos\varphi = \frac{7\sqrt{13}}{39}$, $\varphi \approx 50°$. **2.26.** $(45; 24; 0)$.
2.27. $(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$. **2.28.** 12; 24; 60. **2.29.** 16. **2.30.** $42\sqrt{2}$.
2.31. $(5; 1; 7)$; $(10; 2; 14)$; $(20; 4; 28)$. **2.32.** $2\sqrt{13}$. **2.33.** $\frac{1}{3}$. **2.34.** нет.
2.35. а) компланарные; б) правая; в) левая.
2.36. $(-\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}})$. **2.37.** $\frac{25}{2}$. **2.38.** $H = 3\sqrt{6}$. **2.40.** 5.
2.41. $(-1; 8)$, $(1; 9)$, $(3; 10)$. **2.42.** $A(3; -1)$, $B(0; 8)$. **2.43.** $D(17; 12)$.
2.44. $(2; 7/3)$. **2.45.** 13 кв. ед. **2.46.** $C_1(-8; 0)$, $C_2(32; 0)$.
2.47. 1) $x + 2y - 2\sqrt{5} = 0$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{5}$; 3) $\frac{x}{2\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 1$;
4) $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - 2 = 0$; 5) $\frac{x+2\sqrt{5}}{2} = \frac{y-2\sqrt{5}}{-1}$. **2.48.** $y = 0$; $y = 2\sqrt{3}$;
$y = \sqrt{3}\,x + 5\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3}\,x + 5\sqrt{3}$. **2.49.** $3x - 8y + 24 = 0$ или
$3x - 2y - 12 = 0$. **2.50.** $y - 5 = 0$ или $5x + 12y - 65 = 0$.
2.51. $3x - 5y - 11 = 0$. **2.52.** $5x + 3y - 7 = 0$. **2.53.** $2x + 13y + 9 = 0$.
2.54. $x = 3$; $y = 2$; $2x + y - 14 = 0$. **2.55.** $5x + y - 3 = 0$.
2.56. $3x + 2y - 34 = 0$. **2.57.** $\cos\varphi = \frac{24}{25}$, $\varphi \approx 16°15'$. **2.58.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{19}{9}$,
$\varphi \approx 64°39'$. **2.59.** $\sqrt{26}$. **2.60.** $\sqrt{26}$. **2.61.** $x + 3y - 8 = 0$ или
$3x - y - 14 = 0$. **2.62.** $12x + 5y - 26 = 0$ или $12x + 5y - 78 = 0$.
2.63. $14x + 14y - 45 = 0$; $2x - 2y + 35 = 0$. **2.64.** 5 кв. ед.
2.65. $(2; -3)$. **2.66.** $(-0{,}8; 4{,}6)$. **2.68.** $0{,}75 \cdot \sqrt{10}$. **2.69.** $z - 5 = 0$.
2.70. $x + 3y = 0$. **2.71.** $9y - z - 2 = 0$. **2.72.** $x - 2y + 3z + 3 = 0$.
2.73. $x + 4y + 7z + 16 = 0$. **2.74.** $9x + y + 11z - 7 = 0$.
2.75. $2x + 2y + z - 6 = 0$. **2.76.** $2x - 3y + z - 6 = 0$.
2.77. $31x + y - 11z - 21 = 0$. **2.78.** $5x - 2y - 3z + 4 = 0$.
2.79. $3y - 8z + 13 = 0$. **2.80.** $4x - 3y + 12z - 169 = 0$.
2.81. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{x-4}{-8}$. **2.82.** $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-7}$.
2.83. $\frac{x-2}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z+3}{-13}$. **2.84.** $\frac{x+2}{-5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{3}$.
2.85. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{\sqrt{2}}$. **2.86.** $x = -3 + t$, $y = 2$, $z = 8 - 4t$.
2.87. $x + 2y + 1 = 0$. **2.88.** $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.
2.89. $x = 2 + 3t$, $y = -1 + t$, $z = -3 - t$. **2.90.** $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$.
2.91. $2x + 4y - 12z + 6 = 0$ или $8x + 2y + 2z - 2 = 0$. **2.92.** $(4; 1; -3)$.
2.93. $(-3; 1; -2)$. **2.94.** $\frac{\pi}{3}$. **2.95.** $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{66}}$, $\varphi \approx 75°45'$.
2.96. $\sin\varphi = \frac{5}{7}$, $\varphi \approx 45°36'$. **2.97.** 7. **2.98.** 3. **2.100.** нет.
2.101. $C = -1$, $D = -3$. **2.102.** 1) $x_0 = 4$, $y_0 = -3$, $r = 5$;

2) $x_0 = -5$, $y_0 = 2$, $r = 0$; уравнение определяет точку; 3) $x_0 = 2$, $y_0 = -7$, $r = -1$; уравнение не имеет геометрического смысла (мнимая окружность). **2.103.** $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 25$.
2.104. $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 13$. **2.105.** $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$.
2.106. $x = \frac{16}{5}$. **2.107.** $y = 0$ и $4x - 3y = 0$. **2.108.** 5 и 4; $(3;0)$ и $(-3;0)$; 0,6; 3,2; $x = \pm\frac{25}{3}$. **2.109.** 6 и 8; $(0;-10)$ и $(0;10)$; $\frac{5}{3}$; 4,5; $y = \pm\frac{4}{3}x$ и $y = \pm 6{,}4$. **2.110.** $(0;1{,}5)$; $y = -1{,}5$. **2.111.** $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.
2.112. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. **2.113.** $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$. **2.114.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$.
2.115. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$. **2.116.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$. **2.117.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
2.118. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$. **2.119.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$. **2.120.** $\frac{y^2}{32} - \frac{x^2}{8} = 1$.
2.121. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$. **2.122.** $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$. **2.123.** $x^2 = 8y$.
2.124. $y^2 = 16x$. **2.125.** $x^2 = -18y$. **2.126.** $y^2 = \frac{32}{3}x$.
2.127. $x^2 + (y-1)^2 = 4$. **2.128.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **2.129.** $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$.
2.130. $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$. **2.131.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.
2.132. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **2.133.** $(y-4)^2 = 16(x-4)$.
2.134. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. **2.135.** $\frac{(x-2/3)^2}{13/9} - \frac{y^2}{13/3} = 1$.
2.136. Окружность $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1$. **2.137.** Эллипс $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$. **2.138.** Гипербола $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$.
2.139. Точка $O'(2;1)$. **2.140.** Мнимый эллипс $\frac{x^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{1/4} = -1$.
2.141. Гипербола $y^2 - (x-3)^2 = 1$. **2.142.** Парабола $(x-1)^2 = -\left(y - \frac{5}{2}\right)$. **2.143.** Прямые $x = 2$ и $x = 4$. **2.144.** Мнимые прямые. **2.145.** Параллельные прямые $5x + y + 1 = 0$ и $5x + y - 1 = 0$. **2.146.** Слившиеся прямые $x + y + 1 = 0$.
2.147. Пересекающиеся прямые $2x - 3y + 1 = 0$ и $4x - 3y - 1 = 0$.
2.148. Эллипс $\frac{x''^2}{30} + \frac{y''^2}{5} = 1$. **2.149.** Гипербола $\frac{y''^2}{9} - \frac{y''^2}{36} = 1$.
2.150. Парабола $y''^2 = -2x''$.

3. Введение в анализ

3.7. 15. **3.8.** 3. **3.9.** -1. **3.10.** 0. **3.11.** $-\infty$. **3.12.** $+\infty$. **3.13.** $\frac{\pi}{2}$.
3.14. $-\frac{\pi}{2}$. **3.15.** 0. **3.16.** $+\infty$. **3.17.** $+\infty$. **3.18.** 0. **3.19.** $\frac{1}{4}$. **3.20.** $\frac{9}{7}$.
3.21. 0. **3.22.** ∞. **3.23.** 0. **3.24.** $\frac{4}{3}$. **3.25.** $-\frac{1}{4}$. **3.26.** $\frac{1}{6}$. **3.27.** $\frac{8}{5}$.
3.28. $\frac{2}{3}$. **3.29.** $\frac{2}{3}$. **3.30.** $-\frac{1}{12}$. **3.31.** $\frac{2}{3}$. **3.32.** $\frac{7}{6}$. **3.33.** ∞. **3.34.** 0.
3.35. 1. **3.36.** -1. **3.37.** 3. **3.38.** 2. **3.39.** -7. **3.40.** 2. **3.41.** 0.
3.42. $+\infty$. **3.43.** 2. **3.44.** -2. **3.45.** -1. **3.46.** 3. **3.47.** 0. **3.48.** $-\frac{1}{3}$.
3.49. 2. **3.50.** -2. **3.51.** $e^{3/2}$. **3.52.** e^2. **3.53.** e. **3.54.** e^5. **3.55.** e^4.
3.56. e^{-4}. **3.57.** 6. **3.58.** $\frac{9}{4}$. **3.59.** $\frac{2}{3}$. **3.60.** $-\frac{7}{2}$. **3.61.** $\frac{3}{2}$. **3.62.** $\ln 2$.

3.63. $\frac{1}{2}$. **3.64.** -6. **3.65.** 3. **3.66.** $\frac{3}{5}$. **3.67.** $x=-1$ — точка бесконечного разрыва. **3.68.** $x=1$ — точка устранимого разрыва. **3.69.** $x=-2$, $x=-3$ — точки бесконечного разрыва; $x=-1$ — точка устранимого разрыва. **3.70.** $x=-1$ — точка бесконечного разрыва. **3.71.** $x=1$ — точка конечного разрыва. **3.72.** $x=2$ — точка бесконечного разрыва. **3.73.** $x=3$ — точка устранимого разрыва. **3.74.** $x=0$ — точка устранимого разрыва; $x=-1$ — точка существенного разрыва. **3.75.** Функция терпит конечный разрыв в точка $x=-2$ (скачок функции равен -2). В остальных точках функция непрерывна. **3.76.** Функция имеет устранимый разрыв в точке $x=1$ и конечный разрыв в точке $x=2$ (скачок функции равен 4). В остальных точках функция непрерывна. **3.77.** Функция имеет устранимый разрыв в точке $x=0$ и бесконечный разрыв в точке $x=\frac{\pi}{2}$. В остальных точках функция непрерывна. **3.78.** Функция имеет конечный разрыв в точке $x=0$ (скачок функции равен -6) и бесконечный разрыв в точке $x=2$. В остальных точках функция непрерывна. **3.83.** 20. **3.84.** 24. **3.85.** 2. **3.86.** 9. **3.87.** $\frac{5}{2}$. **3.88.** 9. **3.89.** 0. **3.90.** $\frac{17}{2}$. **3.91.** 5. **3.92.** $\frac{4}{\sin^2 2x}$. **3.93.** $3x^2\sin x+x^3\cos x$. **3.94.** $\frac{-8x^3}{(x^4-1)^2}$. **3.95.** $\frac{\arccos x}{5\sqrt[5]{x^4}}-\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{2\ln 6\cdot\ln_6 x-1}{x^3\ln 6}$. **3.96.** $4(x^5+3x-1)^3(5x^4+3)$. **3.97.** $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x^3+1}}\cdot\frac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$. **3.98.** $e^x\operatorname{tg}4x+\frac{4e^x}{\cos^2 4x}$. **3.99.** $\frac{4}{3}\left(x^4+\sin^4 x\right)^{-2/3}(x^3+\sin^3 x\cos x)$. **3.100.** $e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.101.** $\operatorname{ctg}^2 7x-2x\operatorname{ctg}7x\,\frac{7}{\sin^2 7x}$. **3.102.** $-\cos 2x$. **3.103.** $20\ln 2\cdot 2^{-\cos^4 5x}\cos^3 5x\sin 5x$. **3.104.** $8\big(2^{x^4}-\operatorname{tg}^4 x\big)\big(2^{x^4}\ln 2\cdot x^3-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\big)$. **3.105.** $5\ln^4(x-2^{-x})\frac{1+2^{-x}\ln 2}{x-2^{-x}}$. **3.106.** $\cos(\operatorname{tg}\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.107.** $\frac{1}{2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **3.108.** $2x\operatorname{ch}(x^2)$. **3.109.** $\frac{6}{\cos^2 3x}(2^{\operatorname{tg}3x}+\operatorname{tg}3x)\left(2^{\operatorname{tg}3x}\ln 2+1\right)$. **3.110.** $\sin^2 x\cdot 2^{x^2}+x\cdot\sin 2x\cdot 2^{x^2}+2x^2\cdot\sin^2 x\cdot 2^{x^2}\ln 2$. **3.111.** $3x^2\operatorname{th}^3 x+3x^3\operatorname{th}^2 x\,\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. **3.112.** $2^{x/\ln x}\ln 2\,\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$. **3.113.** $4\lg^3(x^5-\sin^5 2x)\frac{5(x^4-2\sin^4 2x\cos 2x)}{(x^5-\sin^5 2x)\ln 10}$. **3.114.** $\frac{1}{2+e^{-x^2}}\cdot\frac{-x\,e^{-x^2}}{\sqrt{1+e^{-x^2}}}$. **3.115.** $3\cos 5x(\sin 3x)^{\cos 5x-1}\cos 3x-5(\sin 3x)^{\cos 5x}\ln\sin 3x\sin 5x$. **3.116.** $3x^2\operatorname{tg}2x\,(x^3+1)^{\operatorname{tg}2x-1}+(x^3+1)^{\operatorname{tg}2x}\ln(x^3+1)\frac{2}{\cos^2 2x}$. **3.117.** $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg}x-\frac{e^x}{2(1-e^x)}\right)$. **3.118.** $\frac{(x-1)^3\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{2}{5(x-3)}\right)$.

3.119. $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x\,(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2-1}\right)$. **3.120.** $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.
3.121. $\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$. **3.122.** -1. **3.123.** $\frac{4}{5}\operatorname{cth} t$. **3.124.** $6x-y-16=0$; $x+6y-52=0$. **3.125.** $8x-y+8=0$; $x+8y+1=0$.
3.126. $2x+4y-3=0$; $8x-4y-7=0$. **3.127.** $5x-y-4=0$; $x+5y-6=0$. **3.128.** $x+y-1=0$; $x-y=0$.
3.129. $x-y+2-\frac{\pi}{2}=0$; $x+y-\frac{\pi}{2}=0$. **3.130.** $7x-10y+6=0$; $10x+7y-34=0$. **3.131.** $\operatorname{tg}\varphi=2/3$, $\varphi\approx 33^\circ 41'$. **3.132.** $\frac{\pi}{4}$.
3.133. $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$. **3.134.** $\frac{\pi}{2}$. **3.135.** $8\operatorname{arctg}2x+\frac{16x}{1+4x^2}$.
3.136. $e^{-3x}(17\sin 2x-7\cos 2x)$. **3.137.** $2\ln(x^2+1)+\frac{4x^2}{x^2+1}+2$.
3.138. $-\frac{4\arcsin 2x}{(1-4x^2)^{3/2}}-\frac{8x}{1-4x^2}$. **3.139.** $-(x^2+a^2)^{-3/2}+3x^2(x^2+a^2)^{-5/2}$.
3.140. $4\operatorname{sh}2x$. **3.141.** $e^x(x+n)$. **3.142.** $(2^x+(-1)^n 2^{-x})\ln^n 2$.
3.143. $(-1)^n\frac{2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}$. **3.144.** $x^2\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+2nx\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)+n(n-1)\sin\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$.
3.145. $dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$. **3.146.** $dy=x(2\ln x+1)\,dx$.
3.147. $dy=\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$. **3.148.** $dy=-2\sin x\cdot\ln 2\cdot 2^{\cos x}\,dx$.
3.149. $dy=3\ln^3\sin x\cdot\operatorname{ctg}x\,dx$. **3.150.** $dy=\frac{5x^4\,dx}{3\sqrt[3]{(x^5-1)^4}}$.
3.151. $\Delta y=(3x^2+2)\Delta x+(3x+\Delta x)(\Delta x)^2$, $\Delta y=0{,}050301$ в точке $x_0=1$ и при $\Delta x=0{,}01$; $dy=(3x^2+2)\,dx$, $dy=0{,}05$ в точке $x_0=1$ и при $\Delta x=0{,}001$. **3.152.** $\Delta y=(2x+1)\Delta x+(\Delta x)^2$, $\Delta y=0{,}75$ в точке $x_0=0$ и при $\Delta x=0{,}5$; $dy=(2x+1)\,dx$, $dy=0{,}5$ в точке $x_0=0$ и при $\Delta x=0{,}5$. **3.153.** 0,96. **3.154.** 0,965. **3.155.** 1,1.
3.156. $dy=\sin 2x\,dx$, $d^2y=2\cos 2x\,dx^2$. **3.157.** $dy=\frac{2\,dx}{(x+1)^2}$, $d^2y=-\frac{4\,dx^2}{(x+1)^3}$. **3.158.** $dy=\ln x\,dx$, $d^2y=\frac{dx^2}{x}$. **3.159.** Терема Ролля в данном случае неприменима, так как функция недифференцируема в точке $x=0$, принадлежащей интервалу $(-2;2)$. **3.160.** Теорема в данном случае справедлива, $c=2$.
3.161. Условия теоремы выполнены, $c=\pi$. **3.162.** Условия теоремы не выполнены, так как $f'(x)=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ не определена в точке $x=0$ интервала $(-1;1)$. **3.163.** $c=\ln(e-1)$. **3.164.** $c=\frac{1}{\sqrt{6}}$.
3.165. Теорема Лагранжа здесь неприменима, так как у функции $f(x)$ нет производной в точке $x=1$ из данного отрезка.
3.166. $-\frac{1}{15}$. **3.167.** $\frac{7}{2}$. **3.168.** -3. **3.169.** $-\frac{3}{8}$. **3.170.** $-\frac{36}{5}$. **3.171.** 0.
3.172. ∞. **3.173.** $-\frac{1}{3}$. **3.174.** 2. **3.175.** $\frac{5}{3}$. **3.176.** 2. **3.177.** -1.
3.178. $\frac{1}{2}$. **3.179.** ∞. **3.180.** $\frac{1}{6}$. **3.181.** 0. **3.182.** 0. **3.183.** 0.
3.184. 0. **3.185.** $\frac{2}{\pi}$. **3.186.** 0. **3.187.** 0. **3.188.** 1. **3.189.** e. **3.190.** 1.
3.191. e. **3.192.** $(x+1)^3+(x+1)^2-11(x+1)+1$.

3.193. $(x-2)^5+7(x-2)^4+16(x-2)^3+8(x-2)^2-9(x-2)$.
3.194. $3+3\ln 2(x-\log_2 3)+\frac{3\ln^2 2(x-\log_2 3)^2}{2!}+\ldots$
$\ldots+\frac{3\ln^n 2(x-\log_2 3)^n}{n!}+o((x-\log_2 3)^n)$, $x\to\log_2 3$.
3.195. $\frac{(x-1}{2}+\frac{3(x-1)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{(x-1)^5}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$
$\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{(n-2)(n-1)n}+o((x-1)^n)$, $x\to 1$.
3.196. $e^2-e^2x+\frac{e^2x^2}{2!}-\frac{e^2x^3}{3!}+\frac{e^2x^4}{4!}+o(x^4)$. **3.197.** $x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.
3.198. 0,0175. **3.199.** 0,262. **3.200.** $\frac{1}{2}$. **3.201.** $\frac{1}{12}$. **3.202.** $\frac{1}{2}$.
3.203. $\frac{1}{3}$. **3.204.** Возрастает на $(-\infty;-1)$ и на $(1;+\infty)$, убывает на $(-1;1)$. **3.205.** Возрастает на $(-\infty;-\frac{2}{3})$ и на $(2;+\infty)$, убывает на $(-\frac{2}{3};2)$. **3.206.** Возрастает на $(-\infty;1)$, убывает на $(1;+\infty)$.
3.207. Возрастает на $(1;+\infty)$, убывает на $(-\infty;1)$.
3.208. $y_{\text{макс}}(-1)=2{,}3$; $y_{\text{мин}}(3)=-16{,}9$. **3.209.** $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{11}$.
3.210. $y_{\min}(-1)=-0{,}5$; $y_{\max}(1)=0{,}5$.
3.211. $y_{\max}\left(\frac{\pi}{12}+\pi k\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{\pi}{12}+\pi k$;
$y_{\min}\left(\frac{5\pi}{12}+\pi k\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{5\pi}{12}+\pi k$. **3.212.** $y_{\text{наим}}(1)=-6$; $y_{\text{наиб}}(-1)=14$. **3.213.** $y_{\text{наим}}(0)=-1$; $y_{\text{наиб}}(4)=0{,}6$.
3.214. $y_{\text{наим}}(0)=0$; $y_{\text{наиб}}(-1)=y(1)=4$.
3.215. $y_{\text{наим}}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y_{\text{наиб}}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3.216. 3 м $\times$ 6 м. **3.217.** 5 см. **3.218.** $S_{\max}=\frac{a\,h}{4}$.
3.219. $V_{\max}=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$. **3.220.** $\varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **3.221.** $h=2r$.
3.222. Выпукла вверх на $(-\infty;\frac{1}{2})$, выпукла вниз на $(\frac{1}{2};+\infty)$; $x=\frac{1}{2}$ — точка перегиба. **3.223.** Выпукла вверх на $(1;3)$, выпукла вниз на $(-\infty;1)$ и на $(3;+\infty)$; $x=1$ и $x=3$ — точки перегиба.
3.224. Выпукла вверх на $(-2;0)$ и на $(2;+\infty)$, выпукла вниз на $(-\infty;-2)$ и на $(0;2)$; $x=0$ — точка перегиба. **3.225.** Выпукла вверх на $(1;+\infty)$, выпукла вниз на $(-\infty;0)$ и на $(0;1)$; $x=1$ — точка перегиба. **3.226.** Прямая $x=-2$ — вертикальная асимптота, прямая $y=\frac{3}{2}$ — горизонтальная асимптота. **3.227.** Прямая $y=2$ — горизонтальная асимптота. **3.228.** Прямая $y=3x$ — наклонная асимптота. **3.229.** Прямая $x=-2$ — вертикальная асимптота, прямая $y=x-4$ — наклонная асимптота. **3.230.** Прямая $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. **3.231.** Прямые $x=-1$ и $x=1$ — вертикальные асимптоты, прямая $y=-x$ — наклонная асимптота при $x\to-\infty$, $y=x$ — наклонная асимптота при $x\to+\infty$. **3.232.** точка перегиба. **3.233.** точка минимума.
3.234. точка максимума.

Список рекомендуемой и использованной литературы

1. *Баранова Е. С., Васильева Н. В., Федотов В. П.* Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты. СПб. : Питер, 2020. 400 с.

2. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко [и др.]. М. : Мир и Образование, 2021. 816 с.

3. *Ильин В. А., Куркина А. В.* Высшая математика : учебник. М. : Проспект, 2021. 600 с.

4. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для втузов : в 2 т. М. : Интеграл-Пресс, 2001, Т. I. 416 с.

5. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М. : Айрис-пресс, 2021. 608 с.

6. *Рябушко А. П.* [и др.]. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие : в 4 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Минск : Выш. шк., 2007. 304 с.

7. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. М. : Айрис-пресс, 2021. 576 с.

8. *Шевцов Г. С.* Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты. М. : Магистр, 2016. 544 с

Приложение А

Основные элементарные функции

Степенная функция

Степенная функция: $y = x^\alpha$. Здесь α — произвольное вещественное число, $\alpha \neq 0$. В общем случае степенная функция определена на промежутке $(0; +\infty)$; множество значений — промежуток $(0; +\infty)$; возрастает при $\alpha > 0$, убывает при $\alpha < 0$.

Частные случаи:

1. Если α — целое положительное число, то функция $y = x^\alpha$ определена на всей числовой оси. Графики степенной функции при $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ изображены на рис. А.1.

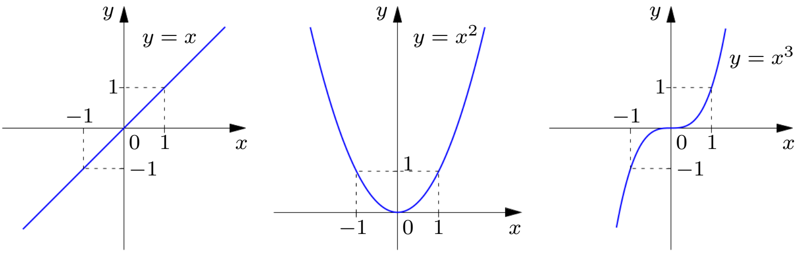


Рис. А.1

2. Если α — целое отрицательное число, то функция $y = x^\alpha$ определена на всей числовой оси, за исключением точки $x = 0$. Графики степенной функции при $\alpha = -1$ и $\alpha = -2$ изображены на рис. А.2.

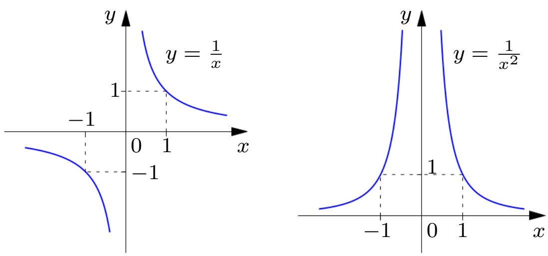


Рис. А.2

3. Для рациональных $\alpha = \frac{p}{q}$ $(q > 0)$ область определения функции $y = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ зависит от чётности q и знака p. Если q нечётно и $p > 0$, то функция определена на всей числовой оси; если q нечётно и $p < 0$, то функция определена на всей числовой оси, кроме нуля; если q чётно и $p > 0$, то функция определена при неотрицательных x; если q чётно и $p < 0$, то функция определена при положительных x. Если $p = 1$, то функция представляет собой арифметический корень степени q: $y = x^{1/q} = \sqrt[q]{x}$. Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ изображены на рис. А.3.

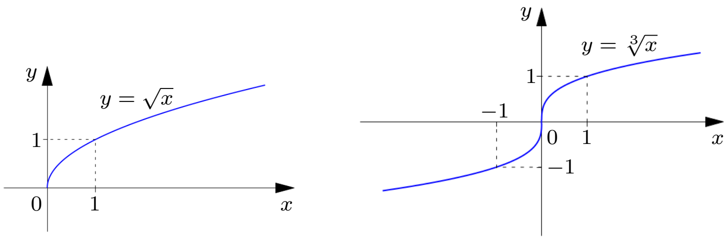


Рис. А.3

Показательная функция

Показательная функция: $y = a^x$ (рис. А.4). Здесь a — произвольное положительное вещественное число, $a \neq 1$. Область определения — вся числовая ось; множество значений — промежуток $(0; +\infty)$; возрастает при $a > 1$, убывает при $a < 1$.

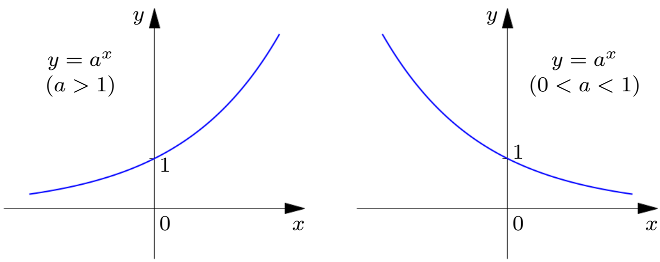


Рис. А.4

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция: $y = \log_a x$ (рис. A.5). Здесь a — произвольное положительное вещественное число, $a \neq 1$. Область определения — промежуток $(0; +\infty)$; множество значений — вся числовая ось; возрастает при $a > 1$, убывает при $a < 1$.

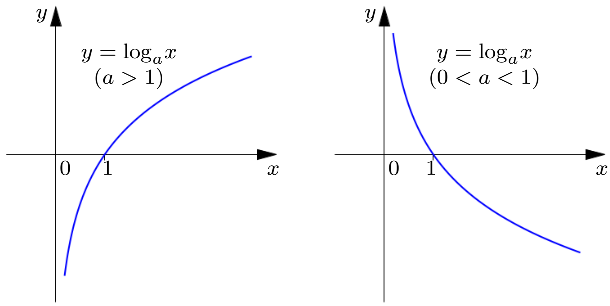


Рис. A.5

Тригонометрические функции

Функция **синус**: $y = \sin x$ (рис. A.6). Область определения — вся числовая ось; множество значений — отрезок $[-1, 1]$; нечётная; периодическая, с основным периодом 2π; возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

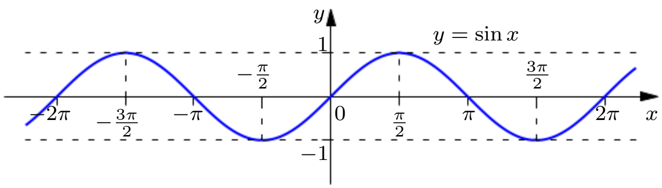


Рис. A.6

Функция **косинус**: $y = \cos x$ (рис. А.7). Область определения — вся числовая ось; множество значений — отрезок $[-1, 1]$; чётная; периодическая, с основным периодом 2π; возрастает на промежутках $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n]$, убывает на промежутках $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

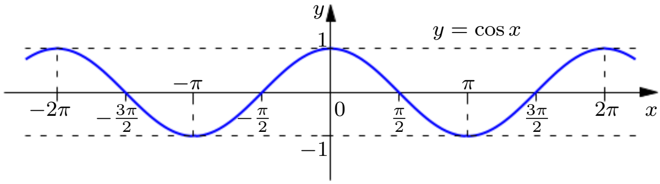


Рис. А.7

Функция **тангенс**: $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (рис. А.8). Область определения — вся числовая ось, за исключением точек $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — вся числовая ось; периодическая, с основным периодом π; возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; нечётная.

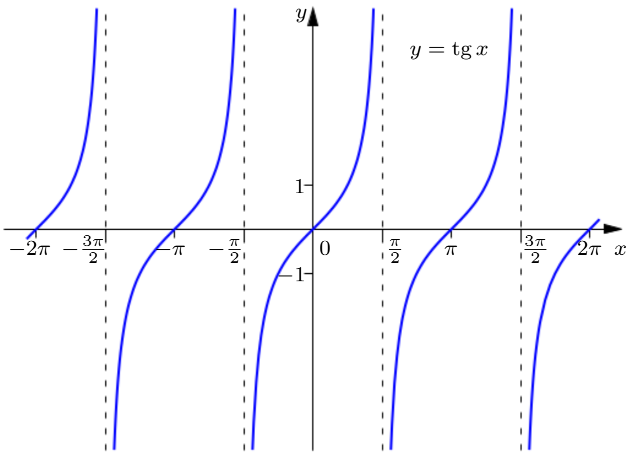


Рис. А.8

Функция **котангенс**: $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ (рис. A.9). Область определения — вся числовая ось, за исключением точек πn, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — вся числовая ось; периодическая, с основным периодом π; убывает на промежутках $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; нечётная.

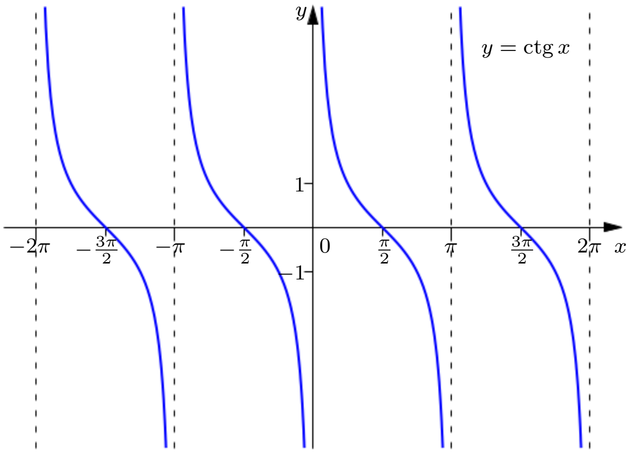


Рис. A.9

Функция **секанс**: $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ (рис. A.10). Область определения — вся числовая ось, за исключением точек $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; периодическая, с основным периодом 2π; возрастает на промежутках $\left[2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n\right]$, убывает на промежутках $\left[\pi + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$; чётная.

Функция **косеканс**: $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ (рис. A.11). Область определения — вся числовая ось, за исключением точек πn, $n \in \mathbb{Z}$; множество значений — $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; периодическая, с основным периодом 2π; возрастает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n\right)$ и $\left(\pi + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, убывает на промежутках $\left(2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ и $\left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; нечётная.

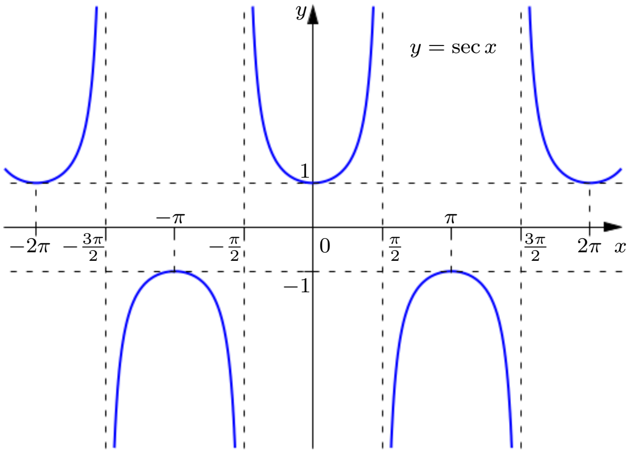


Рис. А.10

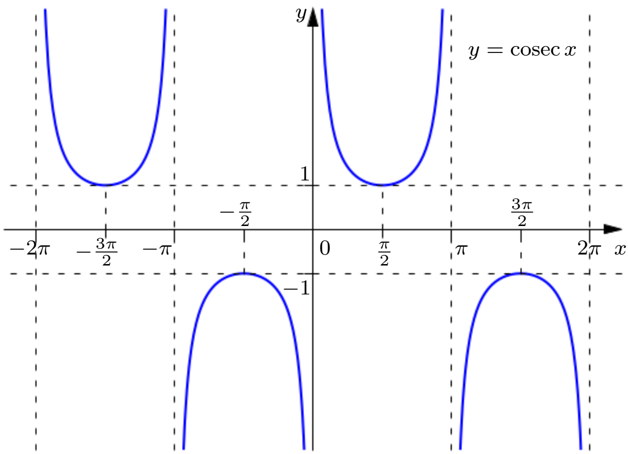


Рис. А.11

Обратные тригонометрические функции

Функция **арксинус**: $y = \arcsin x$ — обратная к функции $x = \sin y$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. А.12). Область определения — отрезок $[-1, 1]$; множество значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; возрастает на области определения; нечётная.

Функция **арккосинус**: $y = \arccos x$ — обратная к функции $x = \cos y$ на отрезке $[0, \pi]$ (рис. А.13). Область определения — отрезок $[-1, 1]$; множество значений — отрезок $[0, \pi]$; убывает на области определения.

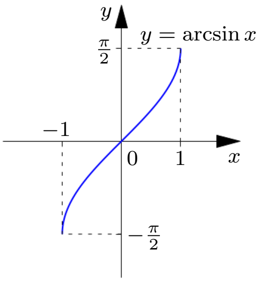


Рис. А.12

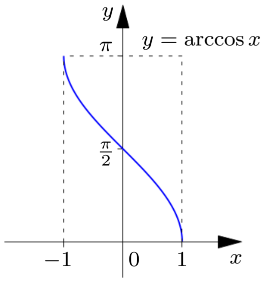


Рис. А.13

Функция **арктангенс**: $y = \operatorname{arctg} x$ — обратная к функции $x = \operatorname{tg} y$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. А.14). Область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; возрастает на области определения; нечётная.

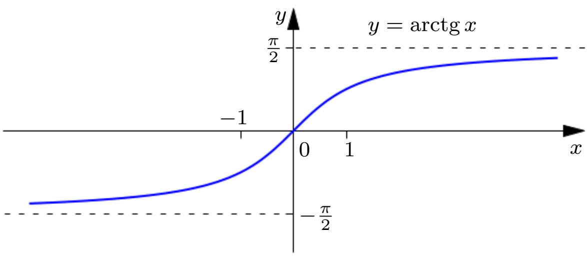


Рис. А.14

Функция **арккотангенс**: $y = \operatorname{arcctg} x$ — обратная к функции $x = \operatorname{ctg} y$ на интервале $(0, \pi)$ (рис. А.15). Область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $(0, \pi)$; убывает на области определения.

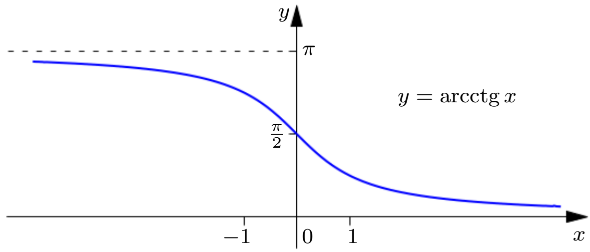


Рис. А.15

Гиперболические функции

Функция **синус гиперболический**: $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (рис. А.16). Область определения — вся числовая ось; множество значений — вся числовая ось; возрастает на области определения; нечётная.

Функция **косинус гиперболический**: $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (рис. А.17). Область определения — вся числовая ось; множество значений — промежуток $[1, +\infty)$; убывает на промежутке $(-\infty, 0]$, возрастает на промежутке $[0, +\infty)$; чётная.

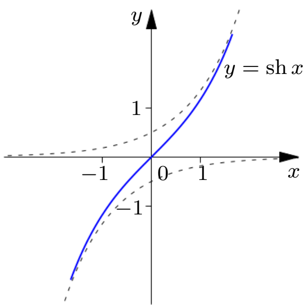


Рис. А.16

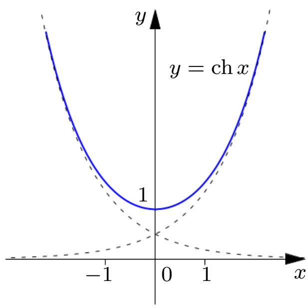


Рис. А.17

Функция **тангенс гиперболический**: $y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (рис. А.18). Область определения — вся числовая ось; множество значений — интервал $(-1, 1)$; возрастает на области определения; нечётная.

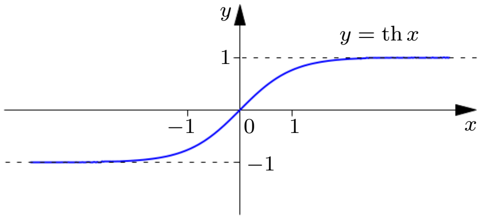


Рис. А.18

Функция **котангенс гиперболический**: $y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ (рис. А.19). Область определения — $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; множество значений — $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; убывает на промежутке $(-\infty, 0)$, возрастает на промежутке $(0, +\infty)$; нечётная.

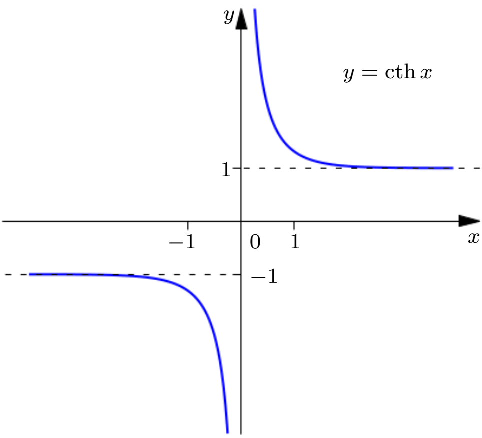


Рис. А.19

Обратные гиперболические функции

Функция **ареа-синус гиперболический**: $y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ — обратная к функции $x = \operatorname{sh} y$ (рис. А.20). Область определения — вся числовая ось; множество значений — вся числовая ось; возрастает на области определения; нечётная.

Функция **ареа-косинус гиперболический**: $y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ — обратная к функции $x = \operatorname{ch} y$ на промежутке $[0, +\infty)$ (рис. А.21). Область определения — промежуток $[1, +\infty)$; множество значений — промежуток $[0, +\infty)$; возрастает на области определения.

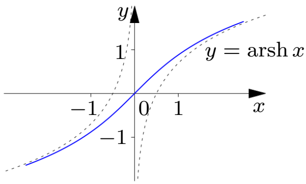


Рис. А.20

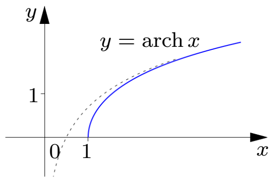


Рис. А.21

Функция **ареа-тангенс гиперболический**: $y = \operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ — обратная к функции $x = \operatorname{th} y$ (рис. А.22). Область определения — интервал $(-1, 1)$; множество значений — вся числовая ось; возрастает на области определения; нечётная.

Функция **ареа-котангенс гиперболический**: $y = \operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ — обратная к функции $x = \operatorname{cth} y$ (рис. А.23). Область определения — $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; множество значений — $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; убывает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$; нечётная.

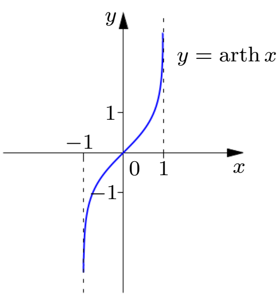


Рис. А.22

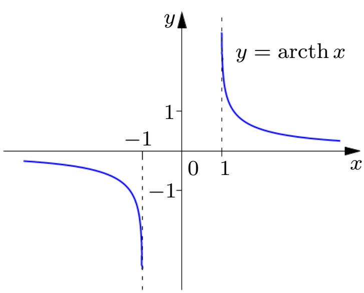


Рис. А.23

Приложение Б

Основные формулы и соотношения

Степени и корни

В случае когда показатель степени n есть натуральное число, *n-я степень* произвольного действительного числа a (*основания степени*) есть произведение n множителей, равных a. При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$.

Если $a > 0$ и n — любое натуральное число, то *арифметический корень n-й степени* из a есть единственное положительное решение уравнения $x^n = a$; он обозначается символом $a^{1/n} \equiv \sqrt[n]{a}$. При $a = 0$, $0^{1/n} \equiv \sqrt[n]{0} = 0$.

Для любых натуральных n и m

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n, \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \neq 0).$$

Для любых действительных p и q ($a > 0$ и $b > 0$)

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \qquad (a^p)^q = a^{pq},$$

$$(ab)^p = a^p a^q, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}, \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Логарифмы

Логарифм $x = \log_c a$ числа $a > 0$ при основании $c > 0$ ($c \neq 1$) можно определить как решение уравнения $c^x = a$.

Отметим:

$$c^{\log_c a} = a, \quad \log_c c = 1, \quad \log_c c^p = p, \quad \log_c 1 = 0,$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b, \qquad \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b,$$

$$\log_c a^p = p\log_c a, \qquad \log_c\left(\sqrt[n]{a}\right) = \frac{1}{n}\log_c a.$$

Бином Ньютона

Если a и b — действительные или комплексные числа, то

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$
$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3 b + 6a^2 b^2 \pm 4ab^3 + b^4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \, a^{n-m} \, b^m \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (m = 0, 1, 2, \dots \leqslant n = 0, 1, 2, \dots).$$

Числа C_n^m называются *биномиальными коэффициентами.* Для них справедливы равенства

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}.$$

Формулы сокращённого умножения

Если n — любое натуральное число, то

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Если n — чётное положительное число, то

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

Если n — нечётное положительное число, то

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

В частности, из приведённых равенств следуют простейшие формулы, называемые *формулами сокращённого умножения*:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Решение квадратных уравнений

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

имеет решение

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где в случае когда a, b и c — любые комплексные числа, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ есть одно из значений квадратного корня.

Если квадратное уравнение действительно, то его корни x_1 и x_2 либо действительные различные, либо действительные равные, либо комплексные сопряжённые в зависимости от того, будет ли *дискриминант* $D = b^2 - 4ac$ соответственно положителен, равен нулю или отрицателен. Отметим, что

$$x_1 + x_2 = -b/a \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = c/a.$$

Схема Горнера

Для деления многочлена n-й степени $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ на многочлен первой степени $x - c$ обычно используется метод сокращённого умножения (называемый *схемой Горнера*), который выражается формулой

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = \\ = (x-c)(\alpha_0x^{n-1} + \alpha_1x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2}x + \alpha_{n-1}) + \beta, \end{aligned}$$

где коэффициенты α_0, α_1, α_2, ..., α_{n-2}, α_{n-1}, β находятся из следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0, \\ \alpha_1 &= a_1 + c \cdot \alpha_0, \\ \alpha_2 &= a_2 + c \cdot \alpha_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n-1} &= a_{n-1} + c \cdot \alpha_{n-2}, \\ \beta &= a_n + c \cdot \alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α (градусы)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
α (радианы)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0

Формулы приведения

	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$	$\mp\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\operatorname{tg}\alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$	$\mp\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\operatorname{ctg}\alpha$

Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента

Основные соотношения

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

имеют следствиями формулы

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},$$
$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Тригонометрические функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp 1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Тригонометрические функции двойных и половинных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)].$$

Связь между гиперболическими функциями одного аргумента

Основные соотношения

$$\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{sh}^2\alpha=1,\qquad \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}=\operatorname{th}\alpha=\frac{1}{\operatorname{cth}\alpha}$$

имеют следствиями формулы

$$\operatorname{sh}\alpha=\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha-1}=\frac{\operatorname{th}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2\alpha-1}},$$
$$\operatorname{ch}\alpha=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\alpha}}=\frac{\operatorname{cth}\alpha}{\sqrt{\operatorname{cth}^2\alpha-1}},$$
$$\operatorname{th}\alpha=\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\alpha}}=\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha-1}}{\operatorname{ch}\alpha}=\frac{1}{\operatorname{cth}\alpha},$$
$$\operatorname{cth}\alpha=\frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\alpha}}{\operatorname{sh}\alpha}=\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\alpha-1}}=\frac{1}{\operatorname{th}\alpha}.$$

Гиперболические функции суммы и разности углов

$$\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta,$$
$$\operatorname{ch}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta\mp\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta,$$
$$\operatorname{th}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{th}\alpha\pm\operatorname{th}\beta}{1\pm\operatorname{th}\alpha\operatorname{th}\beta},\quad \operatorname{cth}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cth}\alpha\operatorname{cth}\beta\pm1}{\operatorname{cth}\beta\pm\operatorname{cth}\alpha}.$$

Гиперболические функции двойных и половинных углов

$$\operatorname{sh} 2\alpha = 2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\alpha, \qquad \operatorname{ch} 2\alpha = \operatorname{ch}^2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha,$$

$$\operatorname{th} 2\alpha = \frac{2\operatorname{th}\alpha}{1+\operatorname{th}^2\alpha}, \qquad \operatorname{cth} 2\alpha = \frac{\operatorname{cth}^2\alpha + 1}{2\operatorname{cth}\alpha},$$

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\alpha - 1}{2}}, \qquad \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\alpha + 1}{2}},$$

$$\operatorname{th}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + 1} = \frac{\operatorname{ch}\alpha - 1}{\operatorname{sh}\alpha}, \qquad \operatorname{cth}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - 1} = \frac{\operatorname{ch}\alpha + 1}{\operatorname{sh}\alpha}.$$

Пеобразование суммы (разности) гиперболических функций в произведение

$$\operatorname{sh}\alpha \pm \operatorname{sh}\beta = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2},$$

$$\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta = 2\operatorname{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\beta = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{th}\alpha \pm \operatorname{th}\beta = \frac{\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)}{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta}, \quad \operatorname{cth}\alpha \pm \operatorname{cth}\beta = \frac{\operatorname{sh}(\beta\pm\alpha)}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta}.$$

Преобразование произведения гиперболических функций в сумму

$$\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(\alpha+\beta) + \operatorname{ch}(\alpha-\beta)\right],$$

$$\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(\alpha+\beta) - \operatorname{ch}(\alpha-\beta)\right],$$

$$\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(\alpha+\beta) + \operatorname{sh}(\alpha-\beta)\right].$$

Учебное издание

Шимановский Владимир Александрович

Математика. Сборник задач

Часть 1

Учебное пособие

Редактор: *Л. А. Богданова*
Корректор: *Л. И. Семицветова*
Компьютерная верстка: *В. А. Шимановский*

Объём данных 1,91 Мб
Подписано к использованию 11.05.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15