ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Н. В. Ощепкова,
Л. С. Старостина

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. В. Ощепкова, Л. С. Старостина

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов географического
и биологического факультетов,
изучающих курс «Математика»*

Пермь 2021

УДК 51(075.8)
ББК 22.1
О971

Ощепкова Н. В.

О971 Математика. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н. В. Ощепкова, Л. С. Старостина ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – 2,5 Мб; 261 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/oshchepkova-starostina-praktikum-po-matematike.pdf – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3737-9

Учебное пособие раскрывает содержание разделов высшей математики, соответствующих стандарту обучения студентов по дисциплине «Математика». Рассматриваются основные теоретические материалы, включающие решения многочисленных примеров и упражнения для аудиторной и самостоятельной работы.

Предназначено для студентов географического и биологического факультетов. Может использоваться студентами других направлений и специальностей при изучении дисциплины «Математика».

УДК 51(075.8)
ББК 22.1

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра высшей математики НИУ ВШЭ – Пермь (зав. кафедрой – канд. физ.-мат. наук, профессор ***А. П. Иванов***);

доцент кафедры «Прикладная математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета, канд. физ.-мат. наук ***Д. Б. Владимирова***

© ПГНИУ, 2021
© Ощепкова Н. В., Старостина Л. С., 2021

ISBN 978-5-7944-3737-9

Содержание

Математику уже затем учить следует,
что она ум в порядок приводит
М.В. Ломоносов

Если Вы хотите научиться плавать,
то смело входите в воду, а если хотите
научиться решать задачи, то решайте их
Д. Пойа

Предисловие

Математика является необходимой частью образования студентов естественнонаучных специальностей.

Изучение математики:

- помогает понимать основы современной математики;
- способствует укреплению основ логического мышления;
- дает знания, необходимые для самостоятельного изучения и разработки количественных аспектов прикладных задач естественных наук.

Данное учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных общеобразовательных стандартов в области математики для студентов естественнонаучных специальностей вузов. Оно соответствует программе дисциплины «Математика» и включает следующие разделы: «Основы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа», «Основы дифференциального исчисления», «Основы теории функции нескольких переменных», «Основы интегрального исчисления», «Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений». Издание рассчитано на уровень подготовки студентов первого курса и практически не требует дополнительной информации. Теоретический материал сопровождается наглядными иллюстрациями и многочисленными практическими примерами. В каждом разделе даются упражнения для подготовки к контрольным работам. В приложениях приведены основные формулы из школьной программы, кроме того, графики и свойства элементарных функций. Ответы приведены в конце книги (нумерация задач единая).

Данное учебное пособие может использоваться студентами биологического, географического, химического и других естественнонаучных факультетов вузов.

1. Основы линейной алгебры

1.1. Матрицы и определители

Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, состоящая из m строк и n столбцов, заключенная в круглые скобки. Матрицы обычно обозначаются заглавными латинскими буквами, а их элементы — строчными латинскими буквами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ — элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце. Элементами матрицы могут быть числа, переменные, функции и другие математические объекты. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матриц:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = \|a_{ij}\|_{m\times n}.$$

Пример 1. Матрица A размерности 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B одной размерности $m\times n$ называются равными, если $a_{ij} = b_{ij}$ при всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$. Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*, а состоящая из одного столбца – *матрицей-столбцом*. Матрица-строка и матрица-столбец также называются *вектором*.

Пример 2.

$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ — матрица-строка.

Пример 3. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ — матрица-столбец.

Матрица называется *квадратной* n–го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

Пример 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица 2-го порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер строки равен номеру столбца $(i = j)$, называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*.

Пример 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ — диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей n-го порядка и обычно обозначается буквой E.

Пример 6. $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица 2-го порядка, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица 3-го порядка.

Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд действий.

Транспонирование матриц

Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с сохранением их порядка. Транспонированная матрица обозначается A^T.

П р и м е р 7. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ транспонированной будет матрица $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$ *на число* k называется матрица $B = (b_{ij})$ размерности $m \times n$, элементы которой вычисляются по формуле

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij},\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

и обозначается $B = kA$.

П р и м е р 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -12 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$.

Замечание. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

П р и м е р 9. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрицу $(-1) \cdot A$ называют *противоположной* матрице A и обозначают $-A$.

Сложение матриц

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$, размера $m \times n$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

и обозначается $C = A + B$.

П р и м е р 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$,

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-9) & 0 + 4 & -4 + 5 \\ 5 + 3 & -2 + 7 & 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычитание матриц

Разность двух матриц A и B одинаковой размерности определяется формулой

$$C = A - B = A + (-B).$$

Пример 11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$,

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-(-9) & 0-4 & -4-5 \\ 5-3 & -2-7 & 3-2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Перемножать можно только матрицы *согласованных* размерностей, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Пусть матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ имеют соответственно размерности $m \times p$ и $p \times n$. Их произведением $A \cdot B$, в указанном порядке, называют матрицу $C = (c_{ij})$ размерности $m \times n$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pi} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ki}.$$

Пример 12. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 2 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1{\cdot}1+(-2){\cdot}5+0{\cdot}2+1{\cdot}(-2) & 1{\cdot}0+(-2){\cdot}(-1)+0{\cdot}(-5)+1{\cdot}4 \\ 4{\cdot}1+3{\cdot}5+(-1){\cdot}2+2{\cdot}(-2) & 4{\cdot}0+3{\cdot}(-1)+(-1){\cdot}(-5)+2{\cdot}4 \\ 2{\cdot}1+5{\cdot}5+(-3){\cdot}2+4{\cdot}(-2) & 2{\cdot}0+5{\cdot}(-1)+(-3){\cdot}(-5)+4{\cdot}4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 13 & 10 \\ 29 & 26 \end{pmatrix}.$$

Если в этом примере поменять местами матрицы-сомножители и попытаться найти произведение $B \cdot A$, то увидим, что оно не существует, так как количество столбцов матрицы B не равно количеству строк матрицы A. Следовательно, в общем случае для произведения матриц не выполняется переместительный закон, т. е.

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Интересный факт: произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц это может не выполняться, т. е. произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.

Пример 13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При умножении любой квадратной матрицы на единичную матрицу E такого же порядка снова получается исходная матрица.

Пример 14. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 & a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определители

Определителем n-го порядка будем называть *число*, записываемое в виде квадратной таблицы элементов, содержащей n строк и n столбцов, заключенной в прямые скобки. Он имеет вид

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{jn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ — *элемент определителя*, расположенный в i-й строке и j-м столбце.

Каждой квадратной матрице A можно однозначно поставить в соответствие ее определитель $|A|$.

Элементы определителя $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* определителя, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \dots, a_{n1}$ — *побочную диагональ*.

Значения определителей находятся следующим образом:

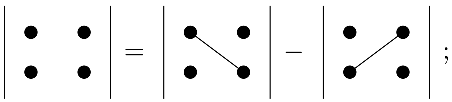
1) если $n = 1$, то определитель равен самому элементу:

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11};$$

2) если $n = 2$, то определитель равен разности произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

что схематично выглядит так:



Пример 15. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-8) - 2 \cdot 7;$

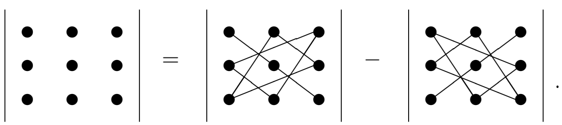
3) если $n = 3$, то определитель можно вычислить по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Для вычисления определителя удобно пользоваться одним из двух «геометрических» правил.

Первое — схема, которая называется *правилом треугольников.* Она показывает, что со своими знаками берутся произведения элементов, расположенных на главной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; с противоположным знаком берутся произведения элементов, расположенных на побочной диагонали, а также в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали:



Второе — *правило Саррюса.* Справа от определителя дописывают первые два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со своим знаком; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, с противоположным знаком:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. =$$

$$-\qquad\qquad\qquad\qquad +$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i–й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Пример 16. Найти минор элемента a_{32} для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -8 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -8 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 24 + 8 = 32.$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Пример 17. Найти алгебраические дополнения к элементам a_{32} и a_{11} для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -8 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 32 = -32.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{32} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 63 = 63.$$

Основные свойства определителя

1. Определитель не изменится, если его *транспонировать*, т. е. строки записать в столбцы, не меняя их порядка.

Пример 18. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1.$

Следствие. Из этого свойства следует, что строки и столбцы определителя равноправны, т. е. свойства, сформулированные для строк, выполняются и для столбцов.

2. Если поменять местами две какие-либо строки определителя, то он сменит свой знак на противоположный.

Пример 19. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}.$

3. Если какая-либо строка определителя состоит из одних нулей, то определитель равен нулю.

Пример 20. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0.$

4. Если две какие-либо строки определителя состоят из одинаковых элементов, то определитель равен нулю.

Пример 21. $\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 7 & -2 \\ 9 & 7 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

5. Если элементы какой-либо строки определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Пример 22. $\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \cdot 2 & 6 \cdot 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$

6. Если элементы каких-либо двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

П р и м е р 23. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

7. Определитель не изменится, если к элементам любой строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки, предварительно умноженные на некоторое число.

П р и м е р 24. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 101.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \hookleftarrow \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6+1\cdot 2 & -5+2\cdot 2 & 3+(-3)\cdot 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 101.$$

8. *Частный случай теоремы Лапласа.* Разложение определителя по строке. Определитель равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

П р и м е р 25. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \cdot (-3) - 5 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) - 1 \cdot 5 \cdot 1 = 4.$
Вычислим этот же определитель разложением по третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{13} + 6 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} =$$

$$= 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (5 \cdot (-3) - 0 \cdot 2) + 6 \cdot (-1) \cdot (4 \cdot (-3) - 1 \cdot 2) + 1 \cdot (4 \cdot 0 - 1 \cdot 5) = 4.$$

Разложение можно производить по любой строке или столбцу, поэтому предпочтительно выбирать строку (столбец), содержащие нули, причем разложение тем проще, чем больше нулей в выбранной строке (столбце). Разложим тот же самый определитель по второму столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + (-3) \cdot A_{32} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-3) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (-1) \cdot (5 \cdot 1 - 6 \cdot 2) + (-3) \cdot (-1) \cdot (4 \cdot 6 - 5 \cdot 5) = 4.$$

Теорема о разложении определителя позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. При этом, пользуясь вышеизложенными свойствами определителя, можно так его преобразовать, чтобы элементы выбранной для разложения строки (столбца), за исключением одного, обратились в нули. В этом случае задача сводится к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка.

П р и м е р 26. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выберем элемент $a_{12} = 1$ (удобно, когда в определителе есть элемент, равный единице) и получим на месте остальных элементов второго столбца нули. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на число 2, к третьей строке прибавим первую, к четвертой строке прибавим первую, умноженную на 6, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (2)(1)(6) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 11 & 11 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 17 & 0 & 16 & 20 \end{vmatrix}.$$

При разложении полученного определителя по элементам второго столбца останется лишь одно слагаемое, равное произведению элемента a_{12} на его алгебраическое дополнение A_{12}, так как все остальные элементы столбца равны нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 11 & 11 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 17 & 0 & 16 & 20 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 11 & 11 \\ 4 & -3 & 0 \\ 17 & 16 & 20 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 11 & 11 \\ 4 & -3 & 0 \\ 17 & 16 & 20 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или подобным же путем свести к вычислению одного определителя второго порядка. Прибавив к первому столбцу второй столбец, получим

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 1 & -3 & 0 \\ 33 & 16 & 20 \end{vmatrix},$$

затем прибавим ко второму столбцу первый, умноженный на 3. Во второй строке останется единственный отличный от нуля элемент. Разложим определитель по второй строке, получим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 18 & 65 & 11 \\ 1 & 0 & 0 \\ 33 & 115 & 20 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 65 & 11 \\ 115 & 20 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся свойством 5, а затем вычислим полученный определитель второго порядка:

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 23 & 20 \end{vmatrix} = 5 \cdot (13 \cdot 20 - 11 \cdot 23) = 35.$$

Обратная матрица

Матрица называется *невырожденной*, если определитель этой матрицы не равен нулю.

Квадратная матрица, обозначаемая A^{-1}, называется *обратной* для невырожденной матрицы A того же порядка, если выполняется равенство

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Для каждой невырожденной матрицы существует ***единственная*** обратная матрица.

Порядок вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица вырожденная, и обратной для нее матрицы A^{-1} не существует.

2. Каждый элемент матрицы a_{ij} заменяем своим алгебраическим дополнением A_{ij}.

3. Полученную матрицу из алгебраических дополнений транспонируем. Матрица $(A_{ij})^T$ называется *присоединенной*.

4. Присоединенную матрицу делим на определитель исходной матрицы. В результате получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 27. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы $|A| = 11 \neq 0$. Так как определитель матрицы отличен от нуля, матрица A невырожденная, обратная матрица существует. Вычисляем алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot |1| = 1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot |-2| = 2, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot |3| = -3, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot |5| = 5. \end{aligned}$$

Присоединенная матрица $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 & -3/11 \\ 2/11 & 5/11 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

П р и м е р 28. Найти матрицу, обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$. Обратная матрица существует. Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ 15 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 2/7 & 1/21 & 8/21 \\ 5/7 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

Читателю предоставляется провести проверку самостоятельно.

Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица размера $m \times n$, если она имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & a_{1k_1} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & a_{2k_2} \ldots & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ & & & \ddots & & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & a_{mk_m} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где элементы $a_{1k_1} \neq 0$, $a_{2k_2} \neq 0$, $a_{3k_3} \neq 0$, $\ldots$, $a_{mk_m} \neq 0$, при этом $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_m$.

Замечание. Ступенчатая матрица не содержит нулевых строк.

Все ступеньки ступенчатой матрицы имеют в высоту одну строку, число ступенек равно числу строк матрицы.

П р и м е р 29. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ — ступенчатые матрицы.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

1) умножение всех элементов какой-либо строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к каждому элементу какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) нулевой строки.

Замечание. Те же операции, применяемые для столбцов, называются *элементарными преобразованиями столбцов* матрицы.

Матрица, которая получается из данной матрицы элементарными преобразованиями ее строк (столбцов), называется *эквивалентной* данной. Обозначается символом $\sim$.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду

1. Найти первый из столбцов, содержащих ненулевые элементы. Выбрать строку, содержащую один из этих ненулевых элементов.

2. Выбранную строку (если она не первая) поменять местами с первой строкой.

3. Сделать нулевыми все элементы матрицы под крайним элементом первой строки, используя при этом элементарное преобразование № 2 (прибавление к каждому элементу какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число) и, если нужно, элементарное преобразование № 4 (вычеркивание нулевых строк). В первом

ненулевом столбце останется только один верхний ненулевой элемент. Так будет получена первая ступенька.

4. Сохраняя неизменной первую строку полученной матрицы, рассмотреть матрицу из остальных строк и применить к ней шаги 1—3 описанного алгоритма.

В результате получим ступенчатую матрицу, эквивалентную исходной матрице.

Пример 30. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Первый из столбцов, содержащий ненулевые элементы, — второй столбец. Для удобства вычислений выбираем строку с элементом во втором столбце, равным единице. Это третья строка. Выберем ее и поменяем местами с первой строкой.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Используя элементарное преобразование № 2, получим во втором столбце нули во всех строках, кроме первой, т. е. будем прибавлять к элементам второй строки соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-3), к элементам четвертой строки – соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-2):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \end{pmatrix} (-3)(-2) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим нули в третьем столбце в третьей и четвертой строках. Для этого к элементам этих строк будем прибавлять соответствующие элементы второй строки, умноженные на соответствующие числа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \end{pmatrix} (1)(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркиваем нулевую строку (элементарное преобразование № 4), получим *ступенчатую матрицу*:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -16 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Собственные числа матрицы

При решении некоторых практических задач требуется найти собственные значения (или числа) матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n. Составим матрицу $A - \lambda \cdot E$, где E – единичная матрица порядка n, а λ – некоторая неизвестная. Приравняем определитель полученной матрицы к нулю, т. е. получим уравнение

$$
|A - \lambda \cdot E| = 0,
$$

называемое *характеристическим уравнением* матрицы A. Корни данного характеристического уравнения являются *собственными числами матрицы* A.

Пример 31. Найти собственные числа матрицы

$$
A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Поскольку матрица A второго порядка, то и единичную матрицу берем второго порядка, тогда

$$
A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}.
$$

Составляем характеристическое уравнение

$$
\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.
$$

Таким образом, при составлении характеристического уравнения берем определитель матрицы A и из элементов главной диагонали вычитаем λ.

Находим корни полученного уравнения:

$$
(5-\lambda) \cdot (3-\lambda) - 2 \cdot 4 = 0,
$$
$$
\lambda^2 - 8\lambda - 7 = 0, \text{ т. е. } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7.
$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$.

П р и м е р 32. Найти собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем его корни:

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 1 + 1 - (5-\lambda) - (3-\lambda) - (3-\lambda) = 0,$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda) - 3(3-\lambda) = 0,$$

$$(3-\lambda) \cdot ((3-\lambda)(5-\lambda) - 3) = 0,$$

$$\lambda = 3 \text{ или } \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0,$$

$$\lambda = 3 \text{ или } \lambda = 2 \text{ или } \lambda = 6.$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Упражнения

1. Написать матрицу, противоположную матрице A, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Транспонировать матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ на число $k = 3$.

4. Вычислить сумму $A + B$ и разность $A - B$ матриц, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Найти матрицу $3A - 2B^T + 5E$, если E — единичная матрица второго порядка, а

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Вычислить те произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, которые имеют смысл:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$,

б) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$,

г) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Найти A^2, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Найти значение матричного выражения $A^2 - 2BC^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Найти A^3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

10. Найти произведения матриц $A \cdot B \cdot C$ и $C \cdot A \cdot B^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Вычислить матрицу $D = A \cdot B \cdot C - 3 \cdot E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

E – единичная матрица.

12. Вычислить A^2 и $\left(A - A^T\right)^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}$.

14. Вычислить значения определителей третьего порядка по правилу треугольников (или методом Саррюса):

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$.

15. Вычислить определители третьего порядка, используя свойства определителей:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} -3 & 10 & 2 \\ 15 & 20 & 4 \\ 12 & 30 & -6 \end{vmatrix}$.

16. Вычислить алгебраические дополнения A_{21}, A_{22}, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

17. Вычислить алгебраические дополнения A_{12}, A_{44}, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

18. Вычислить определители четвертого порядка:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \text{в)} \begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & -8 & -1 \end{vmatrix}.$$

19. Определить, имеет ли матрица A обратную, и если имеет, то вычислить ее и сделать проверку $(A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E)$:

$$\text{а)}\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

20. Найти собственные числа матриц:

$$\text{а)}\ A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{в)}\ A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{б)}\ A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{г)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b,$$

где a_i $(i = \overline{1,n})$ — коэффициентами уравнения, b — свободный член — являются заданными числами. Линейное уравнение называется *однородным*, если его свободный член равен нулю.

Решением линейного уравнения называется упорядоченный набор $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0\right)$ из n действительных чисел, подстановка которых вместо соответствующих неизвестных обращает данное уравнение в тождество.

Уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b, \quad b \neq 0,$$

называется *противоречивым.* Оно не имеет решений.

Уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$$

называется *тривиальным.* Его решением является любой набор из n действительных чисел.

Системой линейных уравнений называется конечная совокупность линейных уравнений. Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

Действительные числа a_{ij} $(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n})$ называются *коэффициентами системы.* Первый индекс у коэффициента a_{ij} соответствует номеру уравнения, второй — номеру переменной, при которой стоит данный коэффициент. Числа b_i $(i = \overline{1, m})$ называются *свободными членами.*

Коэффициенты при неизвестных образуют прямоугольную таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей системы.*

Введем следующие обозначения:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ — матрица-столбец свободных членов.}$$

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

является матрицей-столбцом. Элементы этой матрицы совпадают с левыми частями системы линейных уравнений, а так как правые части совпадают с элементами матрицы B, то можно записать равенство

$$AX = B.$$

Это *матричная форма* записи системы линейных уравнений.

Расширенной матрицей системы называется матрица системы A, к которой добавлен столбец свободных членов:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений называется *однородной*, если она состоит из однородных линейных уравнений (матрица B является нулевой). В противном случае система называется *неоднородной*.

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченный набор $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0\right)$ из n действительных чисел, которые при подстановке вместо соответствующих неизвестных обращают *каждое* уравнение системы в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Очевидно, что однородная система всегда совместна, поскольку у нее всегда есть нулевое решение.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы уравнений называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они имеют либо одно и то же множество решений, либо обе системы несовместны, а матрицы систем эквивалентны.

Метод обратной матрицы

Рассмотрим систему линейных уравнений $AX = B$. Пусть число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + +a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A квадратная, следовательно, можно найти определитель этой матрицы $|A|$, называемый *определителем системы*. Если $|A| \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, то для нее существует обратная A^{-1}. Умножая обе части матричного уравнения на матрицу A^{-1} слева, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение системы дает формула

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

П р и м е р 33. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}.$

Вычислим определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Матрица A невырожденная, и метод применим. Найдем обратную матрицу A^{-1}. Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Записываем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решением системы будет $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$.
Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Формулы Крамера

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными и невырожденной матрицей системы.

Теорема 1 (*Крамера*). Пусть Δ — определитель матрицы системы, а Δ_j — определитель, получаемый из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Формулы получили название *формул Крамера.*

Замечание. Если система несовместная или неопределенная, то определитель матрицы системы $\Delta = 0$. По формулам Крамера или методом обратной матрицы можно найти решение только для определенных систем.

Пример 34. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 23 \neq 0,$$

т. е. матрица A невырожденная, метод применим. По теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, последовательно заменяя в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов. Получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 13 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 23, \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{23}{23} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix} = -46, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-46}{23} = -2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 13 \end{vmatrix} = 69, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{69}{23} = 3.$$

Таким образом, решение системы $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3.$

Метод Гаусса

Самым общим, применимым для решения любых систем m линейных уравнений с n неизвестными, является *метод Гаусса*, который заключается в том, что при помощи элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида. Алгоритм метода состоит из двух частей, называемых *прямым* и *обратным* ходом.

Прямой ход – это последовательность действий по приведению системы уравнений к ступенчатому виду.

Обратный ход – это процедура нахождения решения системы, когда неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего уравнения и до первого.

Методом Гаусса удобно пользоваться в матричной форме. Запишем расширенную матрицу системы. Для наглядности проведем черту, разделяющую коэффициенты системы и свободные члены:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

С помощью элементарных преобразований строк приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду. Исходная система будет эквивалентна системе, определяемой полученной ступенчатой матрицей.

Система *несовместна*, если последняя ступенька полученной матрицы находится за чертой расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0\ \dots\ 0 & a_{2k_2}\ \dots & \dots & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \ddots & \dots\dots & & \dots \\ 0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 & \dots & a_{(r-1)k_m} & \dots\ a_{(r-1)n} & b_{r-1} \\ 0\ \dots\ 0 & 0\ \dots\ 0 & \dots & 0\ \dots\ 0 & & b_r \end{array} \right).$$

Если же последняя ступенька начинается до черты расширенной матрицы, то система *совместна*. Возможны два случая, когда $r < n$ и $r = n$:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & a_{1n} & b_1 \\
0 \ldots 0 & a_{2k_2} \ldots & \ldots & \ldots & & a_{2n} & b_2 \\
 & & \ddots & & & & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & & & \ldots \\
0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & a_{rk_r} & \ldots & a_{rn} & b_r
\end{array}\right)
$$

$$
\text{или} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\
 & & & \ddots & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right).
$$

После того как матрицу привели к ступенчатому виду, в случае совместной системы начинается обратный ход.

1. Случай $r = n$. Система, соответствующая ступенчатой матрице, у которой ступеньки идут по главной диагонали, имеет вид

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

Поскольку $a_{nn} \neq 0$, из последнего уравнения системы находим

$$
x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.
$$

Подставив полученное значение в предпоследнее уравнение системы, найдем значение неизвестного x_{n-1}. Затем, подставляя найденные значения x_n, x_{n-1} в вышестоящее уравнение, находим x_{n-2} и т.д. Наконец из первого уравнения получим x_1. Таким образом, система имеет *единственное решение*, если число строк ступенчатой матрицы равно числу неизвестных $r = n$.

2. Случай $r < n$. В ступенчатой матрице хотя бы одна из ступенек до черты имеет более одного столбца в ширину.

Неизвестные, соответствующие первым ненулевым элементам в каждой строке ступенчатой матрицы, называются *базисными неизвестными*. Остальные называются *свободными неизвестными*.

Для определенности будем считать, что переменные x_1, x_2, ..., x_r — базисные, а x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n — свободные. Перенесем свободные неизвестные в правые части уравнений системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3r}x_r = b_3 - a_{3(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{3n}x_n, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r = b_n - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Из последнего уравнения выразим неизвестное x_r через неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n:

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}}\left(b_r - \sum_{k=r+1}^{n} a_{rk}x_k\right).$$

Подставив выражение x_r в предпоследнее уравнение, найдем x_{r-1} и остальные неизвестные (аналогично первому случаю). В результате базисные неизвестные x_1, x_2, …, x_r будут выражены через свободные неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n, которые могут принимать любые значения, т. е. получим систему

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ x_2 = f_2(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ x_{r+1} = x_{r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n, \end{cases}$$

которая называется *общим решением* исходной системы уравнений. Задавая значения свободных неизвестных, из общего решения можно получить соответствующее *частное решение* системы.

Таким образом, совместная система в случае $r < n$ имеет *бесконечное множество решений.*

Замечание. Система линейных алгебраических уравнений может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Пример 35. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

Обратим внимание на левый верхний элемент. Для удобства вычислений там должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно получить с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Один из них такой: к 1-й строке прибавляем 2-ю строку, умноженную на (-1), при этом 2-я строка у нас не изменилась:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

Теперь слева вверху «минус один»; умножим 1-ю строку на -1 (сменим у нее знак). Первая строка останется неизменной до конца решения. Далее, в соответствии с алгоритмом, следует получить нули в первом столбце расширенной матрицы системы. Умножаем 1-ю строку на -5 и прибавляем ко 2-й строке, затем умножаем 1-ю строку на -3 и прибавляем к 3-й строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)(-5)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Для того чтобы получить единицу на второй «ступеньке», умножаем 3-ю строку на (-1) и меняем местами 2-ю и 3-ю строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

Затем к 3-й строке прибавляем 2-ю строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right)(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

Можно еще разделить 3-ю строку на 5, но необязательно. Мы привели расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, ступеньки идут по главной диагонали, следовательно, система имеет единственное решение.

Обратным ходом «снизу вверх» вычисляем неизвестные. Запишем систему, соответствующую получившейся ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ \qquad\;\; x_2 + x_3 = 4, \\ \qquad\qquad\;\; 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Из третьей строки получаем $x_3 = 1$, подставляя во вторую строку найденное x_3, находим $x_2 = 3$ и, наконец, подставляя в первую строку найденные значения x_2 и x_3, вычисляем $x_1 = -1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

П р и м е р 36. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

В этой системе количество уравнений меньше, чем количество переменных. В этом случае сразу можно сказать, что система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Начало решения такое же, как в предыдущем примере — запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right) (-3)(-5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & -4 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right).$$

Последняя ступенька начинается за чертой расширенной матрицы, следовательно, система *несовместна* (не имеет решения).

П р и м е р 37. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 1 & 1\\
8 & 12 & -9 & 8 & 3\\
4 & 6 & 3 & -2 & 3\\
2 & 3 & 9 & -7 & 3
\end{array}\right)(-4)(-2)(-1)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 1 & 1\\
0 & 0 & -5 & 4 & -1\\
0 & 0 & 5 & -4 & 1\\
0 & 0 & 10 & -8 & 2
\end{array}\right)(1)(2)
\sim
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 1 & 1\\
0 & 0 & -5 & 4 & -1\\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\
\cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cccc|c}
\downarrow & & \downarrow & & \\
2 & 3 & -1 & 1 & 1\\
0 & 0 & -5 & 4 & -1
\end{array}\right).
$$

Мы получили случай, когда ступеньки имеют более одного столбца в ширину, т. е. система имеет бесконечно много решений. Базисными будут являться неизвестные, соответствующие первым ненулевым элементам строк, это x_1 и x_3 (отмечены стрелочками). Следовательно, неизвестные x_2 и x_4 свободные.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1,\\
\qquad\qquad -5x_3 + 4x_4 = -1.
\end{cases}
$$

Свободные неизвестные перенесем в правую часть:

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_3 = 1 - 3x_2 - x_4,\\
\qquad -5x_3 = -1 - 4x_4.
\end{cases}
$$

Обратный ход алгоритма Гаусса традиционно работает снизу вверх. Из второго уравнения системы выражаем базисную переменную x_3:

$$x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}.$$

В первое уравнение подставляем найденное выражение x_3 и выражаем базисную переменную x_1 через свободные переменные x_2 и x_4:

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5}.$$

Пусть $x_2 = u$, $x_4 = v$, где u и v — произвольные числа.
Общее решение системы: $x_1 = -\frac{3}{2}u - \frac{1}{10}v + \frac{3}{5}$, $x_2 = u$, $x_3 = \frac{4}{5}v + \frac{1}{5}$, $x_4 = v$.

Придавая u и v произвольные значения, можно найти бесконечно много частных решений. Например, подставив $u = v = 0$ в общее решение, получим частное решение: $x = \frac{3}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = 0$.

Подставив $u = 4$, $v = 6$ в общее решение, получим другое частное решение: $x_1 = -6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$.

Система уравнений имеет бесконечно много решений, так как свободные неизвестные могут принимать *любые* значения.

Ответ: $x_1 = -\frac{3}{2}u - \frac{1}{10}v + \frac{3}{5}$, $x_2 = u$, $x_3 = \frac{4}{5}v + \frac{1}{5}$, $x_4 = v$.

Упражнения

21. Решить систему уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x-2y=9, \\ x-y=2. \end{cases}$$

22. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ -x_1+x_2+2x_3=7, \\ 2x_1-x_2+2x_3=6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1-x_2+5x_3=3. \end{cases}$

23. Решить системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 5x_1-x_2+5x_3=3, \\ 4x_1+x_2-4x_3=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+7x_3-3x_4=11, \\ 3x_1+7x_2+5x_3-4x_4=5, \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=4, \\ 4x_1+10x_2+9x_3-5x_4=12. \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4=1, \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=1. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1-x_2+5x_3=2, \\ x_1-2x_2+4x_3=3, \\ 2x_1+x_2+x_3=-1, \\ 2x_1-4x_2+3x_3=1. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1, \\ -x_1+2x_2-3x_3=3, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=-4, \\ 3x_1-2x_2+5x_3=1, \\ 2x_1-x_2+3x_3=2. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 12x_3-18x_4+5x_5=-9, \\ -2x_1+4x_2+3x_3+5x_4=-7, \\ -x_1+2x_2+3x_3+x_5=-4, \\ -4x_1+8x_2+12x_3-6x_4+13x_5=-1. \end{cases}$

2. Основные понятия аналитической геометрии

2.1. Система координат. Простейшие задачи аналитической геометрии

В основе аналитической геометрии лежит метод координат, позволяющий устанавливать положение точек плоскости с помощью чисел. Впервые этот метод был применен французским математиком и философом Декартом.

Простейшая и наиболее употребительная система координат на плоскости представляет собой две взаимно перпендикулярные числовые оси с заданными единичными отрезками. Точка пересечения осей называется *началом координат* (обозначается буквой O), сами оси – *координатными осями*, горизонтальная ось называется *осью абсцисс* (обозначается Ox), вертикальная – *осью ординат* (обозначается Oy).

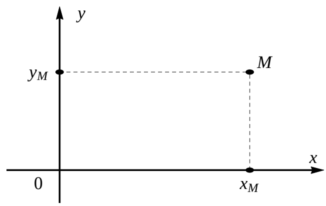


Рис. 1

Пусть M – произвольная точка плоскости. Проведем через эту точку перпендикуляры к прямым Ox и Oy; основания перпендикуляров обозначим x_M и y_M (рис. 1). Координатами точки M в заданной системе называются числа $x = x_M$, $y = y_M$.

Каждой точке M ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $(x;\ y)$; каждой паре чисел соответствует точка плоскости. Любая геометрическая задача благодаря этому может быть сведена к задаче алгебраической, при этом сохраняется наглядность благодаря геометрическим построениям.

В пространстве декартова система координат представляет собой три взаимно перпендикулярные оси с заданными единичными отрезками для измерения длин. Точка пересечения осей O – *начало координат*, а оси Ox – ось *абсцисс*, Oy – ось *ординат*, ось Oz – ось *аппликат*.

Возьмем произвольную точку M в пространстве и проведем через эту точку перпендикуляры к координатным осям (рис. 2). Основания перпендикуляров – координаты точки M в пространстве x_M, y_M и z_M. Таким образом, в пространстве каждой точке M ставится в соответствие тройка чисел $(x;\ y;\ z)$.

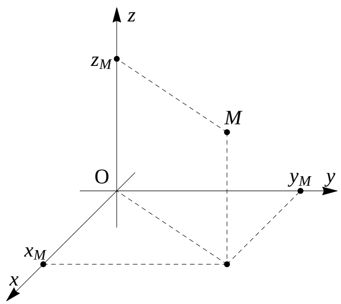


Рис. 2

Рассмотрим две простейшие задачи аналитической геометрии.

Задача 1. Нахождение расстояния между точками.

Пусть на плоскости xOy даны две точки $M(x_1;\, y_1)$ и $N(x_2;\, y_2)$. Расстояние между ними вычисляется по формуле

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Пример 38. Даны точки $A(2;\, -4)$, $B(-3;\, 8)$. Найти расстояние $|AB|$.

$$|AB| = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Замечание. Если точки $M(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $N(x_2;\, y_2;\, z_2)$ заданы в пространстве, то расстояние между ними вычисляется по следующей формуле:

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача 2. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть известны две точки плоскости $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B;\, y_B)$. Точка $M(x_M;\, y_M)$ лежит на отрезке AB и делит его в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$ (рис. 3), т. е.

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Тогда координаты точки M выражаются формулами

$$x_M = \frac{\lambda_2 x_A + \lambda_1 x_B}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad y_M = \frac{\lambda_2 y_A + \lambda_1 y_B}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (2)$$

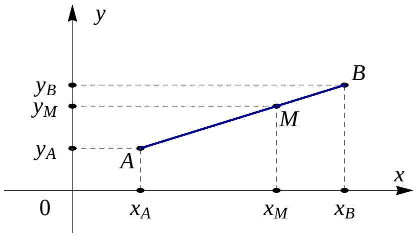


Рис. 3

П р и м е р 39. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $1 : 3$, если известны точки $A(5;\,3)$, $B(-3;\,-1)$. В данной задаче $\lambda_1 = 1$, а $\lambda_2 = 3$, тогда

$$x_M = \frac{3 \cdot 5 + 1 \cdot (-3)}{1+3} = 3, \qquad y_M = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{1+3} = 2.$$

Таким образом, $M(3;\,2)$.

Очевидно, что для нахождения середины отрезка $\lambda_1 = \lambda_2$ (для определенности можно считать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$):

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{3}$$

П р и м е р 40. Дан треугольник с вершинами $A(-2;\,2)$, $B(6;\,4)$ и $C(4;\,-6)$. Найти координаты точки P – центра тяжести треугольника.

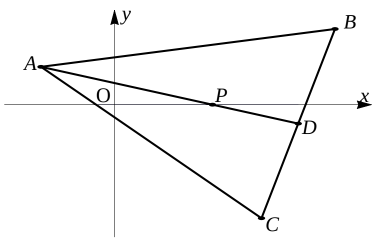


Рис. 4

Известно, что в точке P пересекаются медианы (рис. 4). Поэтому проведем медиану AD, где точка D – середина отрезка BC. Найдем ее координаты:

$$x_D = \frac{1 \cdot 6 + 1 \cdot 4}{2} = 5, \qquad y_D = \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot (-6)}{2} = -1,$$

т. е. $D(5;\,-1)$.

Рассмотрим отрезок AD. Точка P, по свойству медианы, делит его так, что
$$\frac{AP}{PD}=\frac{2}{1}.$$
Найдем координаты точки P:
$$x_P=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot 5}{2+1}=\frac{8}{3},\qquad y_P=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-1)}{2+1}=0.$$

Точка P имеет координаты $(8/3;\,0)$.

2.2. Основы векторной алгебры

Основные понятия

Вектором $\vec{a}$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B. *Длиной* (или *модулем*) вектора $\vec{a}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор. Обозначается длина вектора $|\vec{a}|$.

Если начало и конец вектора совпадают, он называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю. С нулевым вектором не связывают никакого направления в пространстве. Нулевой вектор принято считать сонаправленным любому вектору.

Вектор, имеющий длину равную единице, называется *единичным вектором* или *ортом* любого вектора с ним сонаправленного.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Векторы, расположенные на перпендикулярных прямых, называются *ортогональными*.

Векторы, которые при откладывании их от одной и той же точки лежат в одной плоскости, называются *компланарными*.

Свободным называется вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства. В дальнейшем будем рассматривать все векторы, как свободные.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda<0$.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l\vec{a}$ и равное произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла, образованного вектором $\vec{a}$ с положительным направлением оси l, т. е.
$$\text{пр}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi),$$

где φ – угол между положительным направлением оси l и вектором $\vec{a}$ (рис. 5).

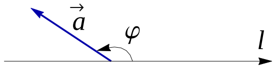


Рис. 5

Геометрически проекция вектора $\vec{a}$ равна длине отрезка CD, взятой со знаком «+», если $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, и со знаком «−», если $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (рис. 6). При $\varphi = \pi/2$ отрезок CD превращается в точку и $\text{пр}_l\vec{a} = 0$.

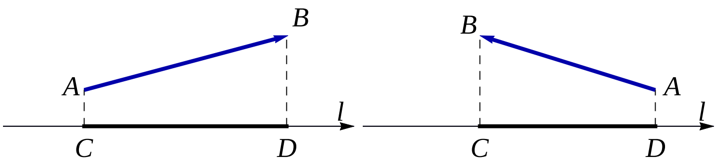


Рис. 6

Координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Если началом свободного вектора считать начало системы координат – точку $O(0;\,0)$ на плоскости (или $O(0;\,0;\,0)$ в пространстве), то координаты точки, являющейся концом вектора, можно считать координатами вектора.

Следовательно, вектор $\vec{a}$ можно записать в виде $\vec{a} = \{x_a;\, y_a\}$ (или $\vec{a} = \{x;\, y\}$) на плоскости и $\vec{a} = \{x_a;\, y_a;\, z_a\}$ (или, соответственно, $\vec{a} = \{x;\, y;\, z\}$) в пространственном случае.

Если обозначить векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (*орты*) на осях Ox, Oy и Oz, то вектор $\vec{a}$ можно представить в следующем виде:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Такое представление вектора $\vec{a}$ называется его *разложением по ортам осей координат.*

П р и м е р 41. Вектор $\vec{a} = \{4;\, -3;\, 2\}$ можно записать в виде

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Если у вектор $\vec{a}$ заданы координаты начала – точки $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и координаты конца – точки $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то координаты вектора вычисляются следующим образом:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\}.$$

Пример 42. Точка $A(5;\ 3;\ -7)$, точка $B(-1;\ 6;\ 12)$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{-1 - 5;\ 6 - 3;\ 12 - (-7)\} = \{-6;\ 3;\ 19\}$.

Поскольку координаты вектора взаимно однозначно соотносятся с самими векторами, *действия с векторами можно заменить действиями с их координатами.*

Если $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, а $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, то действия с векторами можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\},\\ \vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\},\\ \lambda\vec{a} = \{\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1\}.\end{gathered}$$

Пример 43. Даны векторы $\vec{a} = \{2;\ -1;\ -2\}$ и $\vec{b} = \{8;\ -4;\ 0\}$. Найдем векторы $2\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{a}$.

$$2\vec{a} = \{2 \cdot 2;\ 2 \cdot (-1);\ 2 \cdot (-2)\} = \{4;\ -2;\ -4\};$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \{8 - 2;\ -4 - (-1);\ 0 - (-2)\} = \{6;\ -3;\ 2\}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то $\vec{a} = k\vec{b}$, следовательно, выполняются условия $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, $z_1 = kz_2$. Отсюда следует *условие коллинеарности* векторов

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (4)$$

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \cdots,\ \vec{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные действительные числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ вида

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n.$$

Числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ называются *коэффициентами линейной комбинации.*

П р и м е р 44. Для векторов из примера 43 линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с коэффициентами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ равна

$$\vec{a} + 3\vec{b} = \{26;\ -13;\ -2\}.$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

П р и м е р 45. Для вектора $\vec{a} = \{6;\ -3;\ 2\}$ длина равна

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

Вектор $\vec{e_a}$ называется *нормированным*, если его длина равна единице. Для того чтобы нормировать вектор, нужно каждую координату вектора поделить на его длину. Если координаты вектора $\vec{a} = \{x_a;\ y_a;\ z_a\}$, то нормированный вектор запишется так:

$$\vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{\frac{x_a}{|\vec{a}|};\ \frac{y_a}{|\vec{a}|};\ \frac{z_a}{|\vec{a}|}\right\}.$$

.

П р и м е р 46. Дан вектор $\vec{a} = \{1;\ -1;\ 1\}$.

Длина $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, следовательно, нормированный вектор имеет вид

$$\vec{e_a} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **число**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (рис. 7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на $\vec{a}$ равно квадрату его длины:
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

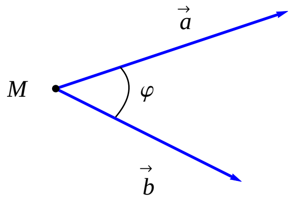


Рис. 7

2. Скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой или векторы ортогональны, и наоборот, если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$
Данное свойство дает *условие ортогональности векторов.*

3. Для скалярного произведения выполняется коммутативный (переместительный) закон:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак скалярного произведения:
$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

5. Для скалярного произведения выполняется дистрибутивный (распределительный) закон:
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, $\vec{a} = (x_a;\ y_a;\ z_a)$ и $\vec{b} = (x_b;\ y_b;\ z_b)$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b.$$

Очевидно,
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

Используя определение скалярного произведения, можно найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \qquad (5)$$

или в координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b + z_a\cdot z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}.$$

Пример 47. Найдем угол между двумя векторами $\vec{a} = \{3;\ 4;\ 5\}$ и $\vec{b} = \{4;\ 5;\ -3\}$.

$$\cos\varphi \frac{3\cdot 4 + 4\cdot 5 + 5\cdot(-3)}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}\cdot\sqrt{4^21+5^2+(-3)^2}} = \frac{17}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}} = \frac{17}{50}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{17}{50}$.

Пример 48. Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = -2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a}-\vec{b}$, если известно, что длины векторов $|\vec{a}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 8$, а угол между векторами $\varphi = \pi/4$.

Подставляем выражения векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и раскрываем скобки:

$$\vec{c}\cdot\vec{d} = \left(-2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = -2\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{a} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{b},$$

используя свойства скалярного произведения, приводим подобные:

$$-2(\vec{a})^2 + \vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} - (\vec{b})^2 = -2(\vec{a})^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - (\vec{b})^2,$$

заметим, что $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$ и $(\vec{b})^2 = |\vec{b}|^2$, а $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$:

$$-2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi - |\vec{b}|^2 = -2(4\sqrt{2})^2 + 3\cdot 4\sqrt{2}\cdot 8\cos\frac{\pi}{4} - 8^2 =$$

$$= -64 + 96\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 64 = -32.$$

Таким образом, скалярное произведение $\vec{c}\cdot\vec{d} = -32$.

Если два ненулевых вектора ортогональны, то угол $\varphi = \pi/2$ и $\cos\varphi = 0$.

Пример 49. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ ортогональны?

Скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю, т. е. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, следовательно, $4m+3m-28=0$, откуда находим $m=4$.

Обозначим углы, которые образует вектор $\vec{a}=\{x_a;\, y_a;\, z_a\}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно через α, β и γ. Эти же углы вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ (рис. 8). Найдем косинусы этих углов:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}} = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}},\\
\cos\beta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}} = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}},\\
\cos\gamma &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}} = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

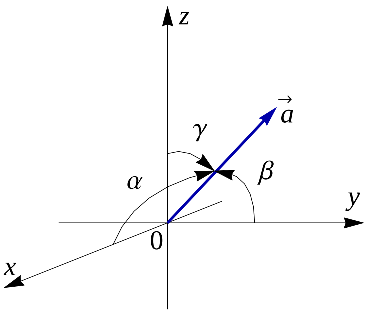


Рис. 8

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора*** $\vec{a}$, которые для любого ненулевого вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Направляющие косинусы вектора пропорциональны его соответствующим проекциям. Это значит, что проекции любого единичного вектора $\vec{e_a}$ на оси координат совпадают с его направляющими косинусами, и, следовательно,

$$\vec{e_a}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma.$$

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который определяется следующим образом:

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.

$$|\vec{c}| = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (т. е. если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (рис. 9).

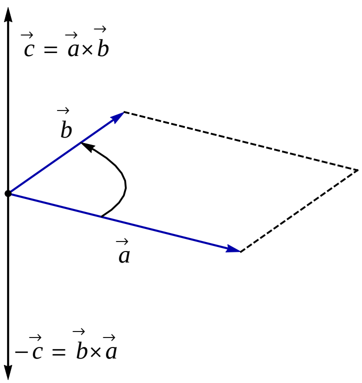


Рис. 9

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак:
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак векторного произведения:
$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3. Для векторного произведения выполняется дистрибутивный (распределительный) закон:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

4. Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Это свойство дает еще одно *условие коллинеарности векторов*, наряду с условием пропорциональности координат (4).

Пример 50. Найти модуль векторного произведения векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если известно, что $\vec{c} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{d} = \vec{m} + 3\vec{n}$, длины векторов $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, и векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ортогональны.

Сначала найдем вектор

$$\vec{c} \times \vec{d} = (\vec{m} + \vec{n}) \times (\vec{m} + 3\vec{n}) = \vec{m} \times \vec{m} + 3\vec{m} \times \vec{n} + \vec{n} \times \vec{m} + \vec{n} \times \vec{n} =$$

$$= 0 + 3\vec{m} \times \vec{n} - \vec{m} \times \vec{n} + 0 = 2\vec{m} \times \vec{n}.$$

Модуль векторного произведения векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ равен

$$|\vec{c} \times \vec{d}| = |2\vec{m} \times \vec{n}| = 2 \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \sin\varphi = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4.$$

Рассмотрим векторы $\vec{a} = \{x_a;\, y_a;\, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b;\, y_b;\, z_b\}$, заданные своими координатами. Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равно

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) \times (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$

$$= x_a x_b \cdot \vec{i} \times \vec{i} + x_a y_b \cdot \vec{i} \times \vec{j} + x_a z_b \cdot \vec{i} \times \vec{k} + y_a x_b \cdot \vec{j} \times \vec{i} + y_a y_b \cdot \vec{j} \times \vec{j} +$$

$$+ y_a z_b \cdot \vec{j} \times \vec{k} + z_a x_b \cdot \vec{k} \times \vec{i} + z_a y_b \cdot \vec{k} \times \vec{j} + z_a z_b \cdot \vec{k} \times \vec{k}.$$

Учитывая, что

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \qquad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{i}; \qquad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j};$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

векторное произведение двух векторов можно вычислить по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_a z_b - y_b z_a) \cdot \vec{i} - (x_a z_b - x_b z_a) \cdot \vec{j} + (x_a y_b - x_b y_a) \cdot \vec{k}.$$

Эту формулу удобно записать в виде определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

Пример 51. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найдем $\vec{a} \times \vec{b}$. В соответствии с формулой нахождения векторного произведения векторов в координатной форме получаем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Пример 52. Найти площадь треугольника, если его вершины заданы координатами $A(0;\ 2;\ 0)$, $B(-2;\ 5;\ 0)$, $C(-2;\ 2;\ 6)$.

Сначала найдём векторы: $\overrightarrow{AB} = \{-2-0;\ 5-2;\ 0-0\} = \{-2;\ 3;\ 0\}$; $\overrightarrow{AC} = \{-2-0;\ 2-2;\ 6-0\} = \{-2; 0; 6\}$.

Затем векторное произведение

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Вычислим длину вектора $\vec{N}$:

$$|\vec{N}| = \sqrt{18^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}.$$

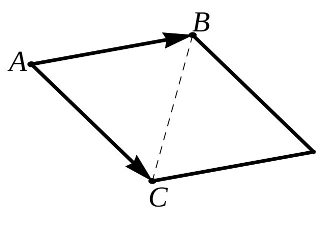


Рис. 10

Площадь параллелограмма (рис. 10), построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, совпадает с длиной вектора $\vec{N}$, а площадь треугольника равна половине площади параллелограмма:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{N}| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14} \text{ (кв. ед.)}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется *число*, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Т е о р е м а 2. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая; и со знаком «минус», если векторы образуют левую тройку.

Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю, если:

1) два любых вектора коллинеарны;

2) три вектора компланарны, т. е. лежат в одной плоскости.

Поэтому *условие компланарности* трех векторов можно записать так:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

При круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется, а при перестановке любых двух векторов знак меняется на противоположный, т. е. выполняются равенства

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами, $\vec{a} = \{x_a;\, y_a;\, z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b;\, y_b;\, z_b\}$ и $\vec{c} = \{x_c;\, y_c;\, z_c\}$ можно вычислить по формуле:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

П р и м е р 53. Для векторов $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ найти смешанное произведение. Определить правую или левую тройку образуют векторы.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=33.$$

Так как векторное произведение положительное, то векторы образуют правую тройку векторов.

П р и м е р 54. Даны три вектора $\vec{a}=\{1;\,-1;\,2\}$, $\vec{b}=\{0;\,4;\,3\}$ и $\vec{c}=\{3;\,2;\,-6\}$ (рис. 11). Вычислить:

а) смешанное произведение векторов;

б) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

в) объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

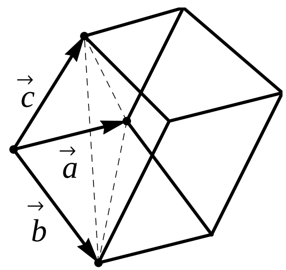


Рис. 11

Решение:

а) по формуле смешанного произведения:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix}=-63;$$

Поскольку смешанное произведение отрицательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку векторов.

б) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен модулю смешанного произведения данных векторов:

$$V_{\text{пар}}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|=|-63|=63 \text{ (куб. ед.)};$$

в) вычислим объём тетраэдра, построенного на данных векторах:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}} = \frac{1}{6} \cdot 63 = 10{,}5 \text{ (куб. ед.)}.$$

Упражнения

24. Дан вектор $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Записать его в координатной форме.

25. Даны точки $A(8;\ 2;\ 5)$ и $B(0;\ 7;\ -1)$. Найти:
а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и противоположного вектора $\overrightarrow{BA}$;
б) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

26. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -2; 6\}$, $\vec{b} = \{-2; 1; 0\}$. Найти векторы:
а) $\vec{a} + \vec{b}$;
б) $\vec{a} - \vec{b}$;
в) $-2\vec{a} + 3\vec{b}$.

27. Даны векторы $\vec{a} = \{2; -6; -8\}$ и $\vec{b} = \{-1; 3; 4\}$. Проверить коллинеарность этих векторов. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены — в одну или в противоположные стороны.

28. Найти скалярное произведение векторов $\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 3\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 7$, а угол между ними равен 60°.

29. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных координатами $\vec{a} = \{2; 4; -6\}$ и $\vec{b} = \{3; -7; 6\}$.

30. Найти угол между векторами $\vec{a} = \{8; -7; -2\}$ и $\vec{b} = \{7; -11; 8\}$.

31. Проверить ортогональность векторов
а) $\vec{a} = \{4; -2; -4\}$ и $\vec{b} = \{6; -3; 2\}$;
б) $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{d} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

32. Найти модуль векторного произведения векторов $\vec{c} = -\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{d} = 3\vec{m} - \vec{n}$, если известно, что длины векторов $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 4$, а угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $\varphi = \pi/6$.

33. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$, если $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

34. Даны точки $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Найти:
а) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
б) площадь треугольника ABC.

35. Найти смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = \{5; 4; 1\}$, $\vec{b} = \{-3; 5; 2\}$ и $\vec{c} = \{2; -1; 3\}$.

36. Даны векторы $\vec{a} = \{-1; 0; -3\}$, $\vec{b} = \{4; -3; 2\}$, $\vec{c} = \{0; -1; 0\}$. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. В случае отрицательного ответа указать, какую тройку они образуют — левую или правую.

37. Даны точки $A(0; -2; 5)$, $B(6; 6; 0)$, $C(3; -3; 6)$, $D(2; -1; 3)$.
а) Показать, что они не лежат в одной плоскости.
б) Найти площадь треугольника ABD.
в) Найти объем пирамиды $ABCD$.

2.3. Прямая на плоскости

В аналитической геометрии линия рассматривается как множество точек, обладающих некоторым свойством. Например, *окружность* – это множество точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от некоторой точки, называемой центром окружности.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Возьмем какую-нибудь линию и рассмотрим ее произвольную («текущую») точку. Координаты x и y этой точки связывает условие, характеризующее любую точку данной линии.

Зависимость

$$\Phi(x, y) = 0,$$

связывающая координаты x и y текущей точки линии, называется *уравнением данной линии*. Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Всякое уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет на плоскости *прямую*. Верно и обратное: всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени относительно переменных x и y.

Таким образом, уравнение

$$Ax + By + C = 0 \tag{7}$$

определяет прямую на плоскости, где A, B и C — некоторые числа, причем коэффициенты A и B одновременно не равны нулю. Уравнение (7) называется *общим уравнением* прямой.

Вектор $\vec{n} = \{A;\, B\}$, перпендикулярный прямой, называется *вектором нормали прямой.*

Если в уравнении (7) число $B \neq 0$, то общее уравнение прямой можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y = kx + b. \tag{8}$$

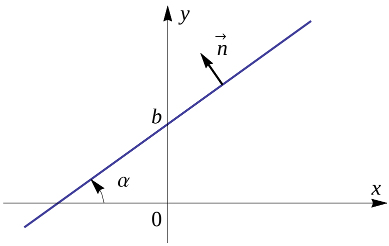


Рис. 12

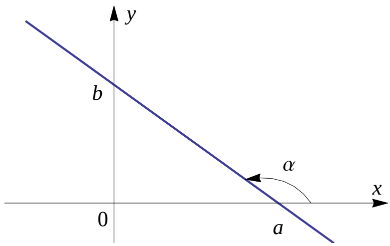


Рис. 13

Уравнение (8) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* $k = \operatorname{tg} \alpha$. Угол α – это угол между прямой и **положительным** направлением оси Ox, измеряемый против часовой стрелки и называемый *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 12, 13).

Если в уравнении (7) коэффициент $C \neq 0$, то общее уравнение прямой можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{9}$$

Это уравнение прямой называется *уравнением прямой в отрезках.* Числа a и b определяют величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно (рис. 13).

Рассмотрим другие уравнения прямой на плоскости.

Если известна точка $M(x_0;\, y_0)$ прямой и угловой коэффициент k, то уравнение прямой имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{10}$$

Если в уравнении (10) k будет параметром, то получим *уравнения пучка прямых*, проходящих через точку $M(x_0;\, y_0)$.

Пусть вектор $\vec{q} = \{l;\, m\}$ параллелен прямой. Такой вектор называется *направляющим вектором* прямой. Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причем все они будут коллинеарны (сонаправлены или нет – неважно).

Вектор нормали всегда ортогонален направляющему вектору прямой.

Если известна точка $M(x_0;\, y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор прямой $\vec{q} = \{l;\, m\}$, то можно получить *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{11}$$

Если прямая задана общим уравнением (7), то направляющий вектор данной прямой имеет координаты $\vec{q} = \{-B;\, A\}$.

Пример 55. Для прямой, заданной уравнением $5x + 7y - 1 = 0$, направляющий вектор будет $\vec{q} = (-7;\, 5)$; а для прямой $2y + 3 = 0$ (или $0 \cdot x + 2y + 3 = 0$) направляющий вектор $\vec{q} = \{-2;\, 0\}$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки, заданные своими координатами $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$, можно составить по формуле

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{12}$$

Угловой коэффициент этой прямой можно вычислить по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{13}$$

Если задана точка, принадлежащая прямой $M(x_0;\, y_0)$, и вектор нормали прямой $\vec{n} = \{A;\, B\}$, то уравнение прямой составляется по формуле

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{14}$$

Пример 56. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \dfrac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3;\, -2)$ принадлежит данной прямой. Воспользуемся формулой (10):

$$y - (-2) = \frac{3}{2}(x - 3),$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}.$$

Можно привести полученное уравнение к общему уравнению прямой: $3x - 2y - 13 = 0$.

Пример 57. Составить уравнение прямой по точке $M(1;\, 2)$ и направляющему вектору $\vec{q} = \{2;\, 1\}$.

Уравнение прямой составим по формуле (11). В данном случае:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1}.$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей и приводим уравнение к общему виду: $x - 2y + 3 = 0$.

Пример 58. Составить уравнение прямой по точке $A(-4;\, 2)$ и направляющему вектору $\vec{q} = \{4;\, 0\}$.

Формулу (11) применить невозможно, так как знаменатель правой части равен нулю. Используя свойства пропорции, перепишем формулу (11) в виде $m(x - x_0) = l(y - y_0)$, тогда уравнение прямой, проходящей через точку A и имеющей направляющий вектор $\vec{q}$, примет вид $y - 2 = 0$.

Пример 59. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $K(8;\, 2)$ и $L(3;\, 0{,}75)$.

Подставим координаты точек в формулу (12):

$$\frac{x-8}{3-8} = \frac{y-2}{0{,}75-2}.$$

После преобразований уравнение прямой примет вид $x - 4y = 0$.

Пример 60. Составить уравнение прямой по точке $M(-1;\, -3)$ и вектору нормали $\vec{n} = \{3;\, -1\}$. Найти направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой составим по формуле (14):

$$3(x - (-1)) + (-1)(y - (-3)) = 0.$$

Общее уравнение прямой, проходящей через точку M с нормалью $\vec{n}$, имеет вид $3x - y = 0$, направляющий вектор прямой $\vec{q} = \{1;\, 3\}$.

Пример 61. Дана прямая $5x - 7y + 11 = 0$. Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки пересечения графика с координатными осями.

Приведем уравнение прямой к виду (9), для этого перенесем 11 в правую часть и, разделив обе части уравнения на (-11), получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{-\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{7}} = 1.$$

Таким образом, точки пересечения с координатными осями имеют координаты $M_1\left(-\dfrac{11}{5};\,0\right)$ и $M_2\left(0;\,\dfrac{11}{7}\right)$.

П р и м е р 62. Рассмотрим прямую, которая проходит через точки $A(-5;\,0)$ и $B(5;\,8)$.

Уравнение прямой, проходящей через эти две точки, запишется так:

$$\frac{x+5}{5+5} = \frac{y-0}{8-0},$$

упрощая его, получим каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x+5}{5} = \frac{y-0}{4}.$$

Из этого уравнения можно найти координаты направляющего вектора $\vec{q} = \{5;\,4\}$.

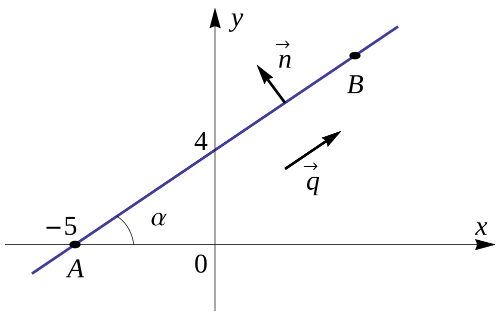


Рис. 14

Используя свойство пропорции, избавимся от дробей и запишем общее уравнение прямой:

$$4x - 5y + 20 = 0,$$

из которого можно найти координаты вектора-нормали $\vec{n} = \{4;\,-5\}$.

Выразив из последнего уравнения y, запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = \frac{4}{5}x + 4.$$

Следовательно, угловой коэффициент прямой равен $k = \operatorname{tg}\alpha = 4/5$, а ордината точки пересечения с осью Oy равна 4.

В общем уравнении прямой перенесем 20 в правую часть и, разделив уравнение на (-20), получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{4} = 1,$$

значит, прямая пересекает оси в точках $(-5;\,0)$ и $(0;\,4)$ (рис. 14).

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Две прямые называются *пересекающимися*, если они имеют одну единственную общую точку. Эта общая точка двух прямых называется *точкой пересечения прямых* (рис. 15). За угол φ $(0 \leqslant \varphi < \pi)$ между прямыми принимают один из двух смежных углов, которые образуют эти прямые.

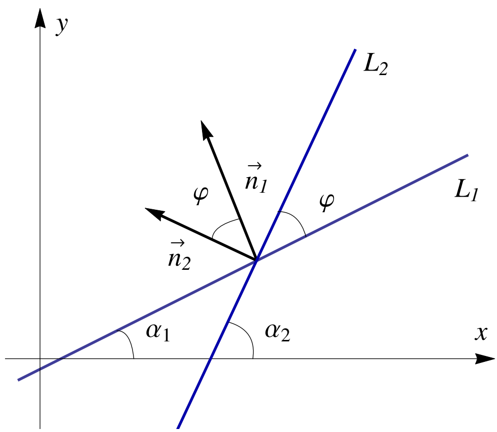


Рис. 15

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости.

1. Если прямые заданы общими уравнениями

$$L_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$L_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то один из углов φ между прямыми L_1 и L_2 будет совпадать с углом между нормалями этих прямых. Таким образом, угол между прямыми равен углу между векторами $\vec{n}_1 = \{A_1;\, B_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2;\, B_2\}$, который можно найти по формуле (5):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (15)$$

Условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$

а *условие параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

В случае, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

оба уравнения описывают одну и ту же прямую.

Пример 63. Проверить параллельность прямых, заданных уравнениями $2x - y + 5 = 0$ и $2x - y - 11 = 0$.

Проверим пропорциональность соответствующих коэффициентов при переменных x и y:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{5}{-11} \quad \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны.

Пример 64. Рассмотрим, как располагаются на плоскости прямые $4x + 3y - 1 = 0$ и $5x - 2y + 3 = 0$. Проверим пропорциональность коэффициентов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{5}, \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{3}{-2}, \quad \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Поскольку коэффициенты непропорциональны, прямые не являются параллельными, следовательно, они пересекаются в некоторой точке $M(x;\, y)$, координаты которой должны удовлетворять уравнениям обеих прямых. Таким образом, чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых, нужно решить систему из этих двух уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0, \\ 5x - 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x = -\dfrac{7}{23}$, $y = \dfrac{17}{23}$.

Вывод: данные прямые пересекаются в точке $M\left(-\frac{7}{23};\ \frac{17}{23}\right)$.

Пример 65. Найти угол между двумя прямыми $2x - 3y = 0$ и $x + 3y - 7 = 0$.

По формуле (15)

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = -\frac{7}{\sqrt{130}}.$$

Угол $\varphi = \arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{130}}\right) \approx 128°$.

Пример 66. Дана прямая $x - y + 3 = 0$. Составить уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку $M(1;\ -1)$.

Направляющий вектор данной прямой $\vec{q} = \{1;\ 1\}$ может являться направляющим вектором для любой прямой, параллельной данной, следовательно, можно воспользоваться формулой (11):

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - (-1)}{1}.$$

Прямая $x - y - 2 = 0$ проходит через точку M параллельно данной прямой.

Пример 67. Дана прямая $2x + y - 3 = 0$. Составить уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку $M(2;\ 3)$.

Поскольку искомая прямая перпендикулярна данной, то вектор нормали данной прямой $\vec{n} = \{2;\ 1\}$ является направляющим вектором искомой прямой, следовательно, по формуле (11)

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{1}.$$

Искомая прямая имеет уравнение $x - 2y + 4 = 0$.

2. Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом L_1: $y = k_1 x + b_1$ и L_2: $y = k_2 x + b_2$, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, а α_1 и α_2 – углы наклона прямых (рис. 15), то угол $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Тангенс угла между прямыми находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{16}$$

Если прямые параллельны, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и, следовательно,

$$k_1 = k_2,$$

т. е. *параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты.*

В случае, когда прямые перпендикулярны, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\varphi$ не существует, поэтому условие перпендикулярности имеет следующий вид:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Пример 68. Прямые $y = 3x + 5$ и $y = -\dfrac{x}{3} + 4$ взаимно перпендикулярны, так как $k_1 \cdot k_2 = 3\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1$.

Пример 69. Прямые $y = -5x + 2$ и $y = -5x - 11$ параллельны, так как $k_1 = k_2 = -5$.

Пример 70. Найдем угол между прямыми из примера 65.

Приведем уравнения прямых к виду уравнений с угловым коэффициентом:

$$x + 3y - 7 = 0, \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$
$$2x - 3y = 0, \Rightarrow y = \frac{2}{3}x,$$

Таким образом, угловые коэффициенты прямых: $k_1 = -\dfrac{1}{3}$, $k_2 = \dfrac{2}{3}$. Используем формулу (16):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7}.$$

Угол $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{9}{7}\right) \approx 52°$.

Расстояние d от точки $M(x_M; y_M)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|A \cdot x_M + B \cdot y_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (17)$$

Пример 71. Найти расстояние от точки $M(-1; 1)$ до прямой, заданной уравнением $3x + 4y - 12 = 0$.

По формуле (17)

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5}.$$

П р и м е р 72. Задача с треугольником на плоскости. Даны вершины треугольника $A(-1;\,3)$, $B(-2;\,-1)$, $C(2;\,3)$. Требуется:

1) составить уравнения сторон AB, AC, BC и найти их угловые коэффициенты;
2) найти длину стороны BC;
3) найти угол BAC;
4) составить уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB;
5) составить уравнение высоты AH и найти ее длину;
6) составить уравнение медианы BM;
7) найти точку пересечения высоты AH и медианы BM.

Начать целесообразно с выполнения чертежа (рис. 16).

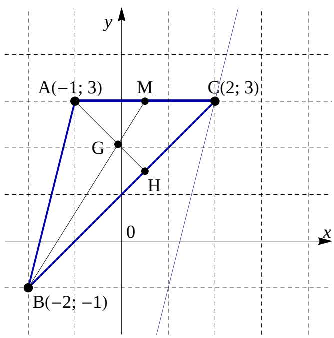


Рис. 16

1) Составим уравнения сторон AB, AC, BC и найдём их угловые коэффициенты. Поскольку известны вершины треугольника, то уравнения каждой стороны составим по двум точкам, используя формулу (12). Составим уравнение стороны AB по точкам $A(-1;\,3)$ и $B(-2;\,-1)$:

$$\frac{x-(-1)}{-2-(-1)} = \frac{y-3}{-1-3},$$

т. е. $4x - y + 7 = 0$ – общее уравнение стороны AB; $y = 4x + 7$ – уравнение стороны AB с угловым коэффициентом; $k_{AB} = 4$ – угловой коэффициент.

Аналогично находим уравнения остальных сторон треугольника:

AC: $y - 3 = 0$, $k_{AC} = 0$;

BC: $x - y + 1 = 0$, $k_{BC} = 1$.

2) Найдем длину стороны BC. Для точек $B(-2;\,-1)$ и $C(2;\,3)$ используем формулу (1):

$$|BC| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\ (\text{ед.}).$$

3) Найдем угол $\angle BAC$. Это угол при вершине A. Есть несколько способов решения:

а) как угол между нормалями прямых AB и AC, т. е. как угол между векторами $\vec{n}_{AB} = \{4;\,-1\}$ и $\vec{n}_{AC} = \{0;\,1\}$, по формуле (5):

$$\cos\angle BAC = \frac{4\cdot 0 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}.$$

б) как угол между направляющими векторами $\vec{q}_{AB}$ и $\vec{q}_{AC}$ прямых AB и AC аналогично предыдущему случаю;

в) как угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ также по формуле (5);

г) как угол между прямыми AB и AC с использованием угловых коэффициентов k_{AB} и k_{AC} по формуле (16):

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{0-4}{1+4\cdot 0} = -4.$$

Угол $\varphi = \arccos\dfrac{-1}{\sqrt{17}} = \operatorname{arctg}(-4)$. На чертеже видно, что этот угол тупой.

4) Составим уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB. Общее уравнение прямой AB имеет вид $4x-y+7=0$, следовательно, направляющий вектор $\vec{q}_{AB} = \{1;\,4\}$. Составляем уравнение прямой по точке $C(2;\,3)$ и направляющему вектору $\vec{q}_{AB} = \{1;\,4\}$, используя формулу (11):

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB, имеет вид $4x - y - 5 = 0$.

5) Составим уравнение высоты AH и найдем ее длину. Уравнение высоты находят из соотношения угловых коэффициентов перпендикулярных прямых:

$$k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}}.$$

В данном случае $k_{BC} = 1$, тогда: $k_{AH} = -1$. Уравнение высоты составим по точке $A(-1;\ 3)$ и угловому коэффициенту $k_{AH} = -1$ по формуле (10):

$$y - 3 = -1 \cdot (x - (-1)).$$

Уравнение высоты AH: $x + y - 2 = 0$.

Данную задачу можно решить и другим способом, учитывая, что нормаль стороны BC совпадает с направляющим вектором высоты AH, т. е. $\vec{n}_{BC} = \vec{q}_{AH} = \{1;\ -1\}$, можно использовать формулу канонического уравнения прямой (11).

Длина высоты AH равна расстоянию между точкой $A(-1;\ 3)$ и прямой BC, имеющей уравнение $x - y + 1 = 0$. По формуле (17) имеем:

$$|AH| = \frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (ед.)}.$$

6) Составим уравнение медианы BM.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Найдём точку M – середину стороны AC. Используем формулы координат точки деления отрезка в заданном соотношении (3). Известны координаты концов отрезка: $A(-1;\ 3)$, $C(2;\ 3)$, тогда координаты середины $M(0{,}5;\ 3)$.

Уравнение медианы BM составим как уравнение прямой по двум точкам $B(-2;\ -1)$ и $M(0{,}5;\ 3)$ (12):

$$\frac{x - (-2)}{0{,}5 - (-2)} = \frac{y - (-1)}{3 - (-1)}.$$

Уравнение медианы BM: $8x - 5y + 11 = 0$.

7) Найдем точку пересечения высоты AH и медианы BM:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ 8x - 5y + 11 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы — координаты точки пересечения высоты и медианы — $G\left(-\dfrac{1}{13};\ \dfrac{27}{13}\right)$.

Упражнения

38. Найти расстояние между точкой $A(1;\ 5)$ и точкой $B(-2;\ -1)$.

39. Найти площадь квадрата, если две смежные вершины имеют координаты $A(3;\ -5)$ и $B(-4;\ 2)$.

40. Даны точки $A(-2;\,5)$ и $B(4,17)$. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB пополам.

41. Определить, какие из точек $A(2;\,3)$, $B(3;\,3)$, $C(4;\,4)$ лежат на прямой $x-2y+4=0$.

42. Дано уравнение прямой $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y+5}{2}=0$. Требуется:

а) написать общее уравнение прямой, найти координаты вектора нормали прямой $\vec{n}$ и координаты направляющего вектора $\vec{q}$;

б) написать уравнение с угловым коэффициентом, найти угловой коэффициент прямой k и ординату точки пересечения данной прямой с осью Oy;

в) написать уравнение прямой в отрезках и определить координаты точек пересечения с осями координат.

43. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\,1)$ и $B(5;\,4)$. Вычислить угловой коэффициент этой прямой.

44. Найти угол между прямыми $5x-y+7=0$ и $2x-3y+1=0$.

45. Проверить, что прямые $3x-2y+1=0$ и $2x+5y-12=0$ пересекаются и найти координаты точки пересечения.

46. Дана точка $A(-2;\,5)$ и прямая $2x-y=0$. Написать уравнение прямых, проходящих через т. A:

а) параллельную данной прямой;

б) перпендикулярную данной прямой.

47. Найти расстояние от точек $K(4;\,3)$, $L(2;\,1)$ и $N(1;\,0)$ до прямой $3x+4y-10=0$.

48. Вершины треугольника ABC заданы координатами $A(-7;\,7)$, $B(-1;\,-1)$, $C(-22;\,-29)$. Требуется:

а) составить уравнения сторон AB, AC, BC и найти их угловые коэффициенты;

б) найти длину стороны BC;

в) найти угол BAC;

г) составить уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB;

д) составить уравнение высоты AH и найти её длину;

е) составить уравнение медианы BM;

ж) найти точку пересечения прямых AH и BM.

2.4. Кривые второго порядка

Кривая второго порядка — множество точек плоскости, которые в декартовой системе координат удовлетворяют уравнению второй степени относительно координат x и y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{18}$$

где A, B , C, D, E, F – действительные числа, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Если линиями первого порядка являются прямые и только они, то множество кривых второго порядка заметно разнообразней. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Окружность

Окружность – это множество точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от некоторой точки, называемой центром окружности. *Каноническое уравнение окружности* с центром в начале координат и радиусом, равным R (рис. 17), имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{19}$$

Если центр окружности находится в точке $O_1(x_0; y_0)$, то уравнение окружности (рис. 18) примет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

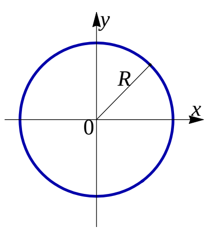


Рис. 17

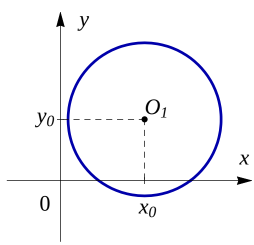


Рис. 18

Это уравнение называется общим уравнением окружности.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, причем эта величина больше, чем расстояние между фокусами (рис. 19). В прямоугольной декартовой системе координат xOy *каноническое уравнение эллипса* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{20}$$

где $a \geqslant b > 0$.

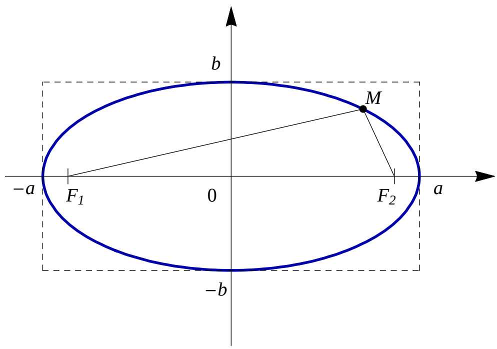


Рис. 19

Система координат xOy, в которой уравнение эллипса имеет вид (20), называется *канонической системой* (для данного эллипса).

Эллипс имеет форму выпуклого овала с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Оси симметрии эллипса называются *главными осями эллипса*, а точка пересечения осей – *центром эллипса*. Точки, в которых эллипс пересекает главные оси, называются его *вершинами*. В канонической системе главными осями эллипса являются оси Ox и Oy, а центром – начало координат O. Вершинами эллипса в канонической системе являются точки с координатами $(-a; 0)$, $(a; 0)$, $(-b; 0)$, $(b; 0)$.

Замечание. Осями эллипса также принято называть длины отрезков, образованных пересечением эллипса с главными осями, равные $2a$ и $2b$. Так как $2a > 2b$, отрезок $2a$ называется *большой осью эллипса*, а отрезок $2b$ — *малой осью*. Соответственно, отрезки a и b называются *большой* и *малой полуосями*.

График эллипса (20) вписан в прямоугольник

$$-a \leqslant x \leqslant a, \qquad -b \leqslant y \leqslant b.$$

Фокусы эллипса находятся на большой оси и имеют координаты $F_1(-c;\, 0)$ и $F_2(c;\, 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$ и называется *фокусным расстоянием.*

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность, при этом $a = b = R$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1.$$

Эксцентриситет характеризует форму эллипса: чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытянут. В случае окружности $a = b$ и $\varepsilon = 0$.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b > a$ тоже определяет эллипс, расположенный так, что его фокусы будут на оси Oy. Таким образом, отрезок b – большая полуось, отрезок a – малая полуось, координаты фокусов $F_1(0;\, c)$ и $F_2(0;\, -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Эксцентриситет в этом случае будет $\varepsilon = c/b$.

Если центр эллипса находится в точке $O_1(x_0;\, y_0)$, то общее уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, причем эта величина меньше расстояния между фокусами (рис. 20). В прямоугольной системе координат xOy *каноническое уравнение гиперболы* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{21}$$

где $a > 0$, $b > 0$.

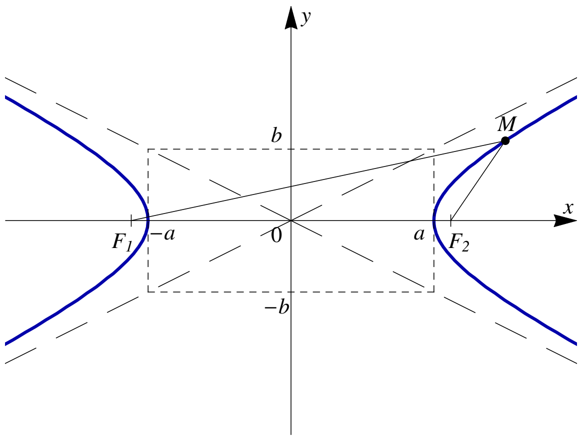


Рис. 20

Система координат xOy, в которой уравнение гиперболы имеет вид (21), называется *канонической системой* (для данной гиперболы).

Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии. Они называются *главными осями гиперболы*, а точка их пересечения называется *центром гиперболы*. Одна из двух осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых *вершинами гиперболы*. Она называется *действительной осью гиперболы*. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее *мнимой осью*.

В канонической системе главные оси совпадают с осями координат, причем ось Ox – действительная, а ось Oy – мнимая; центр гиперболы совпадает с началом координат.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно главных осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется *основным прямоугольником гиперболы*.

Замечание. Осями гиперболы также принято называть отрезки длиной $2a$ (действительная ось) и $2b$ (мнимая ось), соединяющие середины противоположных сторон основного прямоугольника. Соответственно, a – действительная полуось, b – мнимая полуось.

График гиперболы (21) лежит в вертикальных углах, образованных прямыми $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ и содержащих точки оси Ox.

Таким образом, график гиперболы состоит из двух частей – *ветвей гиперболы*, левой и правой.

Прямые

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

называются *асимптотами* гиперболы. Асимптоты гиперболы проходят через диагонали главного прямоугольника гиперболы.

Фокусы гиперболы расположены на действительной оси и имеют координаты $F_1(-c;\, 0)$ и $F_2(c;\, 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$ и называется *фокусным расстоянием.*

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1.$$

Эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, тем более вытянут ее основной прямоугольник в направлении действительной оси.

Уравнение вида

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \left(\text{или } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1\right) \tag{22}$$

определяет гиперболу, ветви которой расположены сверху и снизу от основного прямоугольника и для которой меняются местами действительная и мнимая оси с сохранением тех же асимптот (рис. 21). Таким образом, фокусы будут на оси Oy, отрезок b – действительной полуосью, отрезок a – мнимой полуосью, координаты фокусов $F_1(0;\, c)$ и $F_2(0;\, -c)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Эксцентриситет в этом случае будет $\varepsilon = c/b$.

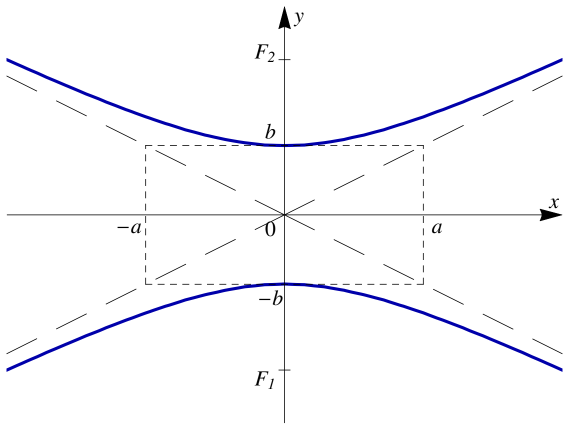


Рис. 21

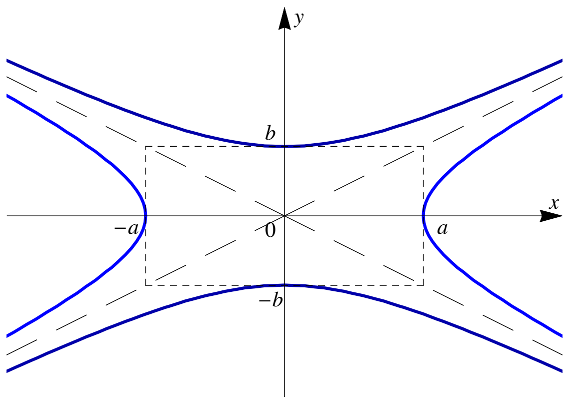


Рис. 22

Уравнение (22) также называется каноническим уравнением гиперболы.

Две гиперболы, которые определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в одной и той же системе координат и при одних и тех же a и b, называются *сопряженными* друг с другом (рис. 22).

Если центр гиперболы находится в точке $O_1(x_0;\, y_0)$, то общее уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется *равносторонней*, и в этом случае основной прямоугольник гиперболы представляет собой квадрат.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой (рис. 23). *Каноническое уравнение параболы* в прямоугольной декартовой системе координат xOy имеет вид

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{23}$$

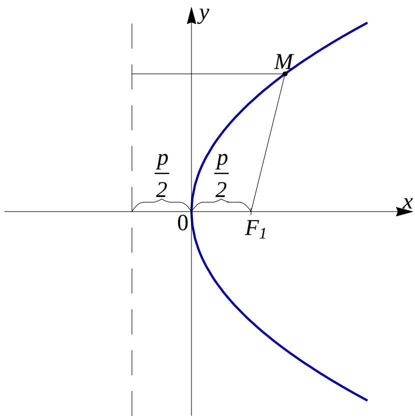


Рис. 23

Система координат xOy, в которой уравнение параболы имеет вид (23), называется *канонической системой* (для данной параболы).

Парабола имеет единственную ось симметрии, которая называется *осью параболы*. Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется *вершиной параболы*. В канонической системе ось параболы совпадает с осью Ox, а вершина – с началом координат.

Число p – *фокальный параметр параболы*, равен расстоянию от фокуса до директрисы. Фокус параболы расположен на оси параболы и имеет координаты $F\left(\dfrac{p}{2};\, 0\right)$. Прямая, называемая директрисой, расположена перпендикулярно оси параболы и имеет уравнение $x = -\dfrac{p}{2}$.

Все точки параболы лежат в правой полуплоскости, т. е. $x \geqslant 0$.

Если вершина параболы находится в точке $O_1(x_0;\, y_0)$, то общее уравнение параболы имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Уравнение

$$y^2 = -2px, \quad p > 0, \tag{24}$$

определяет параболу, расположенную в левой полуплоскости, ось которой совмещена с осью Ox, а вершина – с началом координат (рис. 24). Таким образом, фокус имеет координаты $F\left(-\dfrac{p}{2};\, 0\right)$, а уравнение директрисы $x = \dfrac{p}{2}$.

Аналогично, уравнение

$$x^2 = 2py, \quad p > 0, \tag{25}$$

определяет параболу с вершиной в начале координат, расположенную симметрично относительно оси Oy, расположенную в верхней полуплоскости (рис. 25). Ее фокус $F(0;\, \dfrac{p}{2})$ и директриса $y = -\dfrac{p}{2}$.

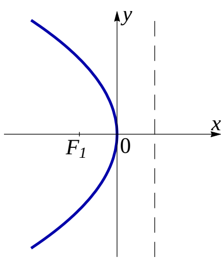


Рис. 24

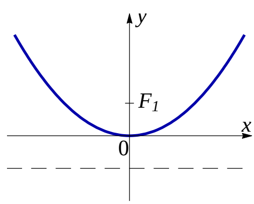


Рис. 25

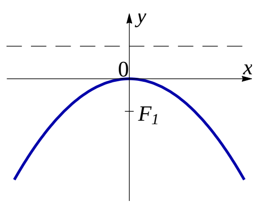


Рис. 26

А уравнение

$$x^2 = -2py, \quad p > 0, \tag{26}$$

определяет параболу с вершиной в начале координат и осью Oy, расположенную в нижней полуплоскости (рис. 26). Ее фокус находится в точке с координатами $F(0;\, -\frac{p}{2})$, а уравнение директрисы имеет вид $y = \frac{p}{2}$.

Уравнения (24), (25) и (26), как и уравнение (23), называются каноническими уравнениями параболы.

Исследование общего уравнения кривой второго порядка (без произведения координат)

Рассмотрим уравнение второй степени (18), в котором коэффициент $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{27}$$

От коэффициентов A и C зависит какую кривую задает это уравнение:

- $A \cdot C > 0$ и $A = C$ – окружность, мнимую окружность, точку;
- $A \cdot C > 0$; $A \neq C$ – эллипс, мнимый эллипс, точку;
- $A \cdot C < 0$ – гиперболу, пару пересекающихся прямых;
- $A \cdot C = 0$ – параболу, пару параллельных прямых, пару мнимых параллельных прямых, пару совпадающих прямых.

Рассмотрим случай, когда $A \neq 0$ и $C \neq 0$. Сгруппируем слагаемые, содержащие x и y:

$$(Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) + F = 0.$$

Вынесем за скобки коэффициенты при x^2 и y^2 (если они не равны 1, т. е. $A \neq 1$, $C \neq 1$):

$$A(x^2 + \frac{D}{A}x) + C(y^2 + \frac{E}{C}y) + F = 0.$$

Выделим в каждой скобке полный квадрат, добавляя и вычитая необходимую константу:

$$A\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{D}{2A} + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 - \left(\frac{D}{2A}\right)^2\right) +$$

$$+C\left(y^2+2\cdot y\cdot\frac{E}{2C}+\left(\frac{E}{2C}\right)^2-\left(\frac{E}{2C}\right)^2\right)+F=0.$$

Используя формулу $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$, свернем первые три слагаемых в каждой скобке:

$$A\left(\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2-\left(\frac{D}{2A}\right)^2\right)+C\left(\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2-\left(\frac{E}{2C}\right)^2\right)+F=0.$$

Преобразуем выражение

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}.$$

Введем обозначения

$$x_0=-\frac{D}{2A},\qquad y_0=-\frac{E}{2C},\qquad G=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C},$$

получим

$$A\left(x-x_0\right)^2+C\left(y-y_0\right)^2=G.$$

Введем новые координаты $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$:

$$AX^2+CY^2=G. \tag{28}$$

Возможны следующие ситуации.

1. $A=C$. Разделив уравнение (28) на A, получим уравнение

$$X^2+Y^2=\frac{G}{A}.$$

Если выражение в правой части положительное ($G/A>0$), обозначим его $G/A=R^2$ и получим уравнение *окружности*

$$X^2+Y^2=R^2.$$

Если выражение в правой части отрицательное, то такое уравнение называется *мнимой окружностью*, и на действительной плоскости нет ни одной точки, координаты которой обращали бы это уравнение в тождество. Если $G=0$, то уравнение описывает *единственную точку* плоскости $(0;\,0)$ в системе координат XOY.

2. $A\neq C$. Если $A\cdot G>0$, то делим уравнение (28) на G, если $A\cdot G<0$, то делим уравнение (28) на $-G$. Введем обозначения $G/A=a^2$, $G/C=b^2$.

Если $A \cdot C > 0$, то уравнение (28) примет вид

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

которое описывает *эллипс* или

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1,$$

которое описывает *мнимый эллипс* (на плоскости нет ни одной точки, координаты которой обращали бы это уравнение в тождество).

Если $A \cdot C < 0$, то уравнение (28) примет вид

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$$

которое описывает *гиперболу* или

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1,$$

которое описывает *сопряженную гиперболу.*

Если $G = 0$, то $AX^2 + CY^2 = 0$, следовательно,

$$Y^2 = -\frac{A}{C}X^2.$$

Обозначим $k^2 = -A/C$, тогда уравнение

$$Y^2 = k^2X^2$$

распадается на два уравнения:

$$Y = kX \qquad \text{и} \qquad Y = -kX,$$

которые описывают *пару пересекающихся прямых.*

Рассмотрим случай, когда один из коэффициентов A или C равен нулю. Для определенности положим, что $A = 0$ ($C \neq 0$), тогда уравнение (27) запишется в виде

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Сгруппируем слагаемые содержащие y и выделим полный квадрат:

$$C\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{E}{2C} + \left(\frac{E}{2C}\right)^2 - \left(\frac{E}{2C}\right)^2\right) + Dx + F = 0.$$

Преобразуем выражение

$$C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-Dx-F+\frac{E^2}{4C}.$$

Разделим уравнение на C:

$$\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-\frac{D}{C}x-\frac{F}{C}+\frac{E^2}{4C^2}. \tag{29}$$

Пусть $D\neq 0$, вынесем за скобку коэффициент при x:

$$\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-\frac{D}{C}\left(x+\frac{F}{CD}-\frac{E^2}{4C^2D}\right).$$

Введем обозначения

$$y_0=-\frac{E}{2C},\qquad x_0=-\frac{F}{CD}+\frac{E^2}{4C^2D},$$

получим

$$(y-y_0)^2=-\frac{D}{C}(x-x_0).$$

Обозначим $2p=-D/C>0$ $(-2p=-D/C<0)$ и введем новые координаты $X=x-x_0$, $Y=y-y_0$. В результате получаем уравнение, описывающее *параболу*

$$Y^2=\pm 2pX.$$

Аналогично получим уравнение параболы при $C=0$, $A\neq 0$:

$$X^2=\pm 2pY.$$

Если в уравнении (29) коэффициент $D=0$, то уравнение примет вид

$$\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-\frac{F}{C}+\frac{E^2}{4C^2}.$$

Введем обозначения $Y=y+\dfrac{E}{2C}$, $a=-\dfrac{F}{C}+\dfrac{E^2}{4C^2}$, получим

$$Y^2=a.$$

Если $a > 0$, то уравнение распадается на два уравнения:

$$Y = \sqrt{a} \qquad \text{и} \qquad Y = -\sqrt{a},$$

которые описывают *пару параллельных прямых*, расположенных симметрично относительно оси OX.

Если $a = 0$, то $Y^2 = 0$. Это *пара совпадающих прямых* $Y = 0$, т. е. ось OX.

Если $a < 0$, то уравнение не удовлетворяется ни при каких значениях переменной Y. Такое уравнение определяет пустое множество точек. Можно сказать, что это *пара мнимых прямых.*

Алгоритм приведения общего уравнения кривых второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим уравнение (27): $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

1. Определяем тип кривой, используя значения A и C.

2. Группируем члены, содержащие x и y.

3. Выносим за скобки коэффициенты при x^2 и y^2 (если они есть и не равны 1).

4. Выделяем в каждой скобке полный квадрат, добавляя и вычитая необходимые числа, и используем формулу

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

5. Выражения с квадратами оставляем в левой части, остальное переносим в правую часть уравнения.

6. Приводим полученное равенство в соответствие с каноническим уравнением.

7. Переходим к новой системе координат.

8. Делаем рисунок.

Рассмотрим примеры.

Пример 73. Привести к каноническому виду и построить график кривой, заданной уравнением

$$169x^2 + 25y^2 + 1352x - 300y - 621 = 0.$$

Сравним с уравнением (27): $A = 169$, $C = 25$, $A \cdot C > 0$.

Следовательно, полученное уравнение есть эллипс или точка. Приведем его к каноническому виду.

Сгруппируем члены с x и y:

$$\left(169x^2 + 1352x\right) + \left(25y^2 - 300y\right) - 621 = 0.$$

Вынесем за скобки коэффициенты при x^2 и y^2, выделяя одновременно в каждой скобке полные квадраты, для чего коэффициенты при x и y делим на 2, возводим в квадрат, добавляем и вычитаем:

$$169\left(\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2\right) - 4^2\right) + 25\left(\left(y^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2\right) - 6^2\right) - 621 = 0;$$

$$169\left((x+4)^2 - 16\right) + 25\left((y-6)^2 - 36\right) - 621 = 0;$$

$$169\,(x+4)^2 - 169 \cdot 16 + 25\,(y-6)^2 - 25 \cdot 36 - 621 = 0;$$

$$169\,(x+4)^2 + 25\,(y-6)^2 = 2704 + 900 + 621;$$

$$169\,(x+4)^2 + 25\,(y-6)^2 = 4225.$$

Разделим уравнение на 4225:

$$\frac{(x+4)^2}{\frac{4225}{169}} + \frac{(y-6)^2}{\frac{4225}{25}} = 1.$$

Перейдем к новой системе координат $X = x + 4$, $Y = y - 6$, начало которой будет в точке $O_1(-4;\, 6)$:

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{169} = 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса (рис. 27).

Основные параметры эллипса в канонической системе координат:

$$a = 5, \quad b = 13, \text{ т. к. } b > a, \quad c = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12, \quad \varepsilon = \frac{12}{13};$$

$$F_1(0;\, 12), \qquad F_2(0;\, -12).$$

П р и м е р 74. Привести к каноническому виду и построить график кривой, заданной уравнением $2y^2 + 4y + 3x - 7 = 0$.

Сравним с уравнением (27): $A = 0$, $C = 2$. Предположительно наша кривая является параболой. Сгруппируем члены, содержащие y, и выделим полный квадрат:

$$(2y^2 + 4y) + 3x - 7 = 0;$$

$$2(y^2 + 2y) + 3x - 7 = 0;$$

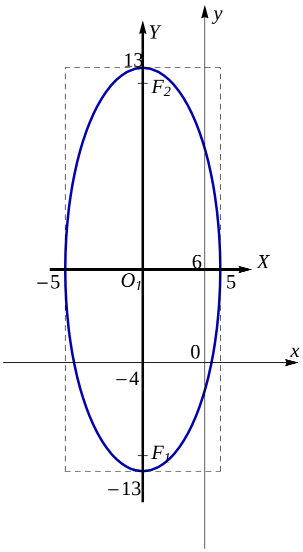


Рис. 27

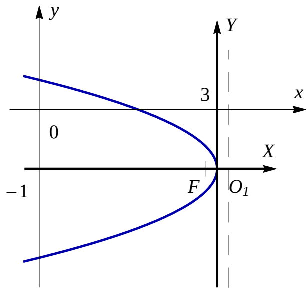


Рис. 28

$$2\left((y^2+2\cdot y\cdot 1+1^2)-1^2\right)+3x-7=0;$$
$$2\left((y+1)^2-1\right)+3x-7=0;$$
$$2(y+1)^2-2+3x-7=0.$$

Выражение с квадратом оставим в левой части, остальное перенесем в правую:

$$2(y+1)^2=-3x+9.$$

Вынесем коэффициент при x за скобку:

$$2(y+1)^2=-3(x-3).$$

Разделим равенство на коэффициент в левой части равенства:

$$(y+1)^2=-\frac{3}{2}(x-3).$$

Перейдем к новой системе координат $X=x-3$, $Y=y+1$, начало которой будет в точке $O_1(3;\,-1)$:

$$Y^2=-\frac{3}{2}X.$$

Получили каноническое уравнение параболы (рис. 28). Осью параболы является ось Oy, ветви влево, $p = 3/4$, в канонической системе фокус $F\left(-\dfrac{3}{8};\, 0\right)$, уравнение директрисы $x = \dfrac{3}{8}$.

Пример 75. Привести к каноническому виду и построить график кривой, заданной уравнением $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$.

Сравним с уравнением (27): $A = 9$, $C = -16$, т. е. $A \cdot C < 0$, предположительно кривая – гипербола.

Приведем уравнение к каноническому виду. Сгруппируем слагаемые с x и y:

$$(9x^2 - 54) + (-16y^2 - 64y) - 127 = 0.$$

Вынесем за скобки коэффициенты при x^2 и y^2, а затем выделим полные квадраты:

$$9\left(x^2 - 6x\right) - 16\left(y^2 + 4y\right) - 127 = 0;$$

$$9\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2\right) - 16\left(y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) - 127 = 0;$$

$$9\left((x-3)^2 - 9\right) - 16\left((y+2)^2 - 4\right) - 127 = 0;$$

$$9(x-3)^2 - 9 \cdot 9 - 16(y+2)^2 + 16 \cdot 4 - 127 = 0;$$

$$9(x+3)^2 - 16(y+2)^2 = 127 + 81 - 64;$$

$$9(x+3)^2 - 16(y+2)^2 = 144.$$

Разделим равенство на 144:

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{144}{9}} - \frac{(y+2)^2}{\frac{144}{16}} = 1.$$

Перейдем к новой системе координат $X = x - 3$, $Y = y + 2$, начало которой будет в точке $O_1(3;\, -2)$:

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы (рис. 29). Основные параметры гиперболы в канонической системе координат:

$$a = 4, \quad b = 3, \quad c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \varepsilon = \frac{5}{4};$$

$$F_1(-5;\, 0), \quad F_2(5;\, 0), \quad \text{асимптоты } y = \pm\frac{3}{4}x.$$

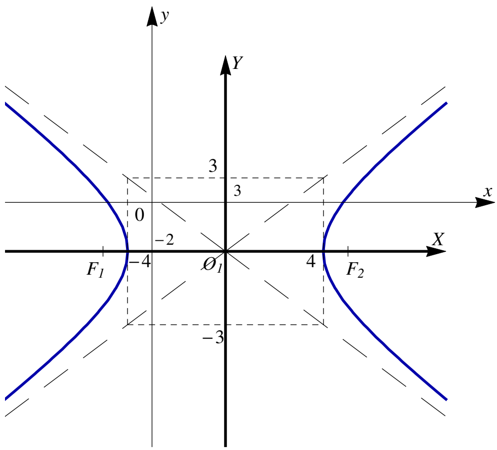


Рис. 29

Упражнения

49. Составить каноническое уравнение эллипса и сделать рисунок, если:

а) его полуоси $a = 5$ и $b = 2$;

б) его малая ось равна 24, а один из фокусов имеет координаты $F(-5;\, 0)$;

в) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{5}$.

50. Составить каноническое уравнение гиперболы и сделать рисунок, если:

а) расстояние между фокусами равно 10 и мнимая ось $2b = 8$;

б) фокусное расстояние равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$;

в) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$, а расстояние между фокусами равно 20.

51. Составить каноническое уравнение параболы и сделать рисунок, если:

а) осью параболы является ось Ox, парабола расположена в правой полуплоскости и ее параметр $p = 3$;

б) уравнение директрисы $x = \dfrac{1}{4}$;

в) фокус параболы имеет координаты $F\left(0;\ \dfrac{1}{8}\right)$;

г) осью параболы является ось Oy, точка $M(2;\ -1)$ принадлежит параболе.

52. Для данных уравнений кривых второго порядка определить тип кривой, привести уравнение кривой к каноническому виду, сделать рисунок и найти основные параметры в канонической системе координат (для окружности найти координаты центра и радиус; для эллипса найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет; для гиперболы найти полуоси, координаты фокусов, уравнения асимптот и эксцентриситет для параболы найти параметр параболы, координаты фокуса и уравнение директрисы):

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$

б) $4x^2 + 25y^2 - 80x + 100y + 400 = 0.$

в) $9x^2 - y^2 - 90x + 6y + 225 = 0.$

г) $y^2 - 4x - 8y = 0.$

д) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0.$

е) $x^2 + 6x - 2y + 5 = 0.$

3. Функции одной переменной

3.1. Понятие функции

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ некоторые подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Если каждому числу x из множества $\mathbb{X}$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное (и единственное) число y из множества $\mathbb{Y}$, то говорят, что на множестве $\mathbb{X}$ определена функция $y = f(x)$. Буквой x обозначается *независимая переменная*, или *аргумент* функции, y — *зависимая переменная*, или *значение функции*, буквой f обозначается правило, по которому для каждого значения аргумента можно определить значение функции.

Множество значений, которые может принимать аргумент x, называется *областью определения функции* $\mathbb{X} = D(y)$.

Множество значений, которые принимает зависимая переменная y, называется *областью изменения функции* $\mathbb{Y} = E(y)$.

Так же, как и с числами, с функциями можно производить арифметические действия: умножение на число $k \cdot f(x)$, сложение $f(x) + g(x)$, вычитание $f(x) - g(x)$, умножение $f(x) \cdot g(x)$, деление $f(x)/g(x)$, можно также находить функцию от функции $f(g(x))$.

Область определения функции

Рассмотрим функцию одной переменной $y = f(x)$. Если функция задана формулой, но при этом область ее определения не указана, то за область ее определения принимается множество таких значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Рассмотрим примеры.

Пример 76. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}.$$

Функция представляет собой дробь. Знаменатель дроби не должен равняться нулю. Следовательно, те значения переменной x, которые обращают знаменатель в ноль, не входят в область определения данной функции: $x^2 - 3 \neq 0$.

Ответ: $D(y) = (-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$.

Пример 77. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{3-2x}.$$

Функции с корнем чётной степени: $\sqrt{\alpha(x)}$, $\sqrt[4]{\alpha(x)}$, $\sqrt[6]{\alpha(x)}$, ... определены только при тех значениях переменной x, когда подкоренное выражение неотрицательно: $\alpha(x) \geqslant 0$. В нашем случае: $3 - 2x \geqslant 0$.

Ответ: $D(y) = (-\infty;\ 3/2]$.

Пример 78. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}.$$

Если некоторая функция содержит логарифм $\log_b(\alpha(x))$, то в ее область определения должны входить только те значения переменной x, которые удовлетворяют неравенству $\alpha(x) > 0$. Если логарифм находится в знаменателе, например $\dfrac{1}{\log_b(\alpha(x))}$, то дополнительно накладывается условие $\alpha(x) \neq 1$ (так как $\log_b 1 = 0$).

В нашем случае:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Ответ: $D(x)=(-3;\,-2)\cup(-2;\,+\infty)$.

Пример 79. Для функции $f(x)=\operatorname{tg}2x$ найти область определения.

Если в некоторую функцию входит $\operatorname{tg}\alpha(x)$, то из её области определения исключаются точки $\alpha(x)=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. А если в некоторую функцию входит $\operatorname{ctg}\alpha(x)$, то из её области определения исключаются точки $\alpha(x)=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

В нашем примере присутствует тангенс и $\alpha(x)=2x$, следовательно,

$$2x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Делим на 2 обе части равенства:

$$x\neq\frac{\dfrac{\pi}{2}+\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

В результате

$$x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $D(y)=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Данная запись означает, что переменная x может принимать любые значения из интервала $(-\infty;\,+\infty)$, за исключением точек, указанных в фигурных скобках.

Пример 80. Найти область определения функции

$$y=\arcsin(3-2x).$$

Для функций, содержащих $\arcsin(\alpha(x))$ и $\arccos(\alpha(x))$, должно выполняться неравенство $-1\leqslant\alpha(x)\leqslant 1$.

В нашем случае получим двойное неравенство:

$$-1\leqslant 3-2x\leqslant 1.$$

Вычтем из каждой части неравенства число 3, получим

$$-4\leqslant -2x\leqslant -2,$$

а затем разделим каждую часть неравенства на (-2):

$$2\geqslant x\geqslant 1,$$

$$1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Ответ: $D(y) = [1;\ 2]$.

Пример 81. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(9 - x^2).$$

В данной функции у нас присутствуют и корень, и логарифм. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а выражение под знаком логарифма — строго положительным. Таким образом, необходимо решить систему

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 9 - x^2 > 0. \end{cases}$$

Поскольку оба условия должны выполняться одновременно, решением системы является пересечение интервалов.

Ответ: $D(y) = [0;\ 3)$.

Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

1. Степенная функция $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число.
2. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$.
4. Тригонометрические функции $y = \sin x, \quad y = \cos x$,

   $y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$,

   $y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x$.

Подробнее с основными свойствами и графиками элементарных функций можно познакомиться в приложении 2 (С. 252).

Пусть $u = g(x)$, $x \in X$, $u \in U$. Если для каждого $u \in U$ определена функция $y = f(u)$, то функция $y = f\left(g(x)\right)$ называется *сложной функцией аргумента* x. В область определения сложной функции $y = f\left(g(x)\right)$ входят те и только те значения x, для которых значения $g(x)$ содержатся в области определения функции $f(u)$; x называется *основным аргументом*, u — *промежуточным*.

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), а также операций взятия функции от функции (т. е. формирования сложных функций), примененных конечное число раз.

Пример 82. Функция

$$y = \lg\left(x^2 - 3x + 2\right) + \frac{\sin(\sqrt{x})}{3^{x+2}}$$

является элементарной, т. к. представляет собой сумму сложной функции и отношения двух сложных функций.

К элементарным относятся:
алгебраические функции:

- целая рациональная функция, или многочлен:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

- дробно-рациональная функция, или отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n};$$

- иррациональная функция (когда в действиях с аргументом имеется извлечение корня). Например, $y = \sqrt[3]{x+1}$;

трансцендентные функции – функции не являющиеся алгебраическими. Простейшими примерами трансцендентных функций служат показательная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, а также гиперболические функции. Гиперболические функции задаются следующими формулами (подробнее см. С. 252):

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

3.2. Основы теории пределов

Окрестностью точки x_0 числовой оси называется любой интервал, содержащий точку x_0.

Пусть δ – положительное число.

δ-окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, симметричный относительно точки x_0.

Интервал, из которого выброшена точка x_0, называют *проколотой δ-окрестностью точки* x_0. Любая точка из проколотой окрестности точки x_0 удовлетворяет следующему неравенству:

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Рассмотрим словесное, нестрогое математически, определение предела функции:

«Число A является пределом функции $y = f(x)$, если при стремлении x к точке x_0 (и слева, и справа) соответствующие значения функции стремятся к A» (см. рис. 30). Обозначается:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

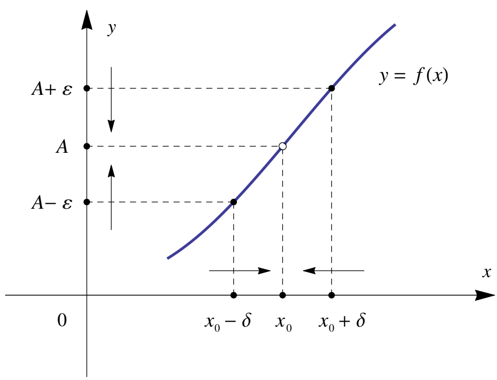


Рис. 30

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая определена на некотором промежутке X, за исключением, возможно, точки x_0 (т. е. функция там может быть не определена).

Определение предела функции по Коши. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого (сколь угодно малого), заранее выбранного числа $\varepsilon > 0$, существует число $\delta > 0$, такое, что для всех значений x из проколотой δ-окрестности точки x_0, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запись определения предела при помощи математических обозначений выглядит так:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0 | \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Понятие предела подразумевает, что функция может не иметь значение в точке x_0, но иметь предел в этой точке.

Односторонние пределы

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Это значит, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \neq x_0$ из интервала $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. Следовательно, оно выполняется и для x из левого промежутка $(x_0 - \delta;\ x_0)$, и для всех x из правого промежутка $(x_0;\ x_0 + \delta)$. Это, в свою очередь, означает, что

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Эти выражения называются соответственно *левым* и *правым* пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Функция имеет предел при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда левый и правый пределы функции существуют и равны между собой.

Предел функции на бесконечности

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Заменив в этом определении условие $|x| > N$ на $x > N$ или $x < -N$, соответственно получим

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{или} \quad A = \lim_{a \to -\infty} f(x).$$

Следовательно, число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнятся равенства $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $A = \lim\limits_{a \to -\infty} f(x)$.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Если для любого (как угодно большого) числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой при x, стремящемся к x_0*, и пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

т. е. функция $f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \to x_0$.

Если существует предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, равный нулю, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой в точке x_0*.

Аналогично понятию бесконечно малой функции при $x \to x_0$ рассматриваются понятия бесконечно малой функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Это локальное свойство функции

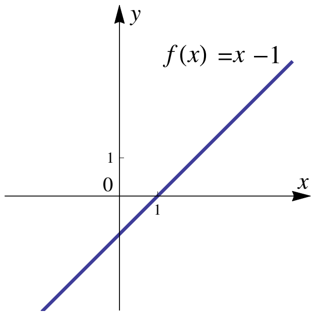


Рис. 31

Рассмотрим функцию $f(x) = x - 1$ (рис. 31). Данная функция является *бесконечно малой* в единственной точке $x_0 = 1$, т. к. $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$. Следует отметить, что на бесконечности эта же функция будет уже *бесконечно большой*: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) = -\infty$. Или в более компактной записи: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x - 1) = \pm\infty$. Во всех других точках предел функции будет равен конечному числу, отличному от нуля.

Для краткости будем говорить «бесконечно малая функция» или «бесконечно большая функция», подразумевая, что она бесконечно малая или бесконечно большая в рассматриваемой точке или на бесконечности (∞, $+\infty$, $-\infty$).

Т е о р е м а 3 (*о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми функциями*). Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$. И, наоборот, если $g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ и в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0) отлична от нуля, то функция $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ — бесконечно большая при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

Замечание 1. Если точка x_0 является внутренней точкой области определения элементарной функции $y = f(x)$, то ее предел при $x \to x_0$, равен значению функции в этой точке $f(x_0)$.

Пример 83. $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = (-2)^2 = 4.$

Замечание 2. Если точка x_0 является граничной точкой области определения элементарной функции $y = f(x)$ и функция определена в этой точке, то ее односторонний предел при $x \to x_0$, также равен значению функции в этой точке $f(x_0)$.

Правила вычисления пределов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы.

1. Предел постоянной величины равен этой постоянной:

$$\lim_{x \to x_0} C = C \qquad (C = const)\,.$$

2. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов слагаемых:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов множителей:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\qquad\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0\right).$$

6. Знак предела и знак непрерывной функции можно поменять местами (предельный переход под знаком непрерывной функции):
$$\lim_{x\to x_0}f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right).$$

Замечательные пределы

В теории математического анализа доказано, что
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Данный математический факт носит название *первого замечательного предела.* Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ тоже можно считать первым замечательным пределом.

Также доказано, что
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

число e — иррациональное ($e=2{,}71828\ldots$).

Если $\dfrac{1}{x}=y$, то y будет стремиться к нулю при x, стремящемся к бесконечности. Сделаем замену:
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=e.$$

Эти пределы носят название *второго замечательного предела.*

Примеры нахождения предела функции. Раскрытие неопределенностей

Пример 84. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

По правилам вычисления пределов, предел частного равен частному пределов. Рассмотрим числитель $2x^2 - 3x - 5$. Он представляет собой многочлен, а следовательно, это элементарная функция, область определения $(-\infty; +\infty)$. Значит, точка $x = 1$ принадлежит области определения и предел данной функции равен значению функции в этой точке: $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5 = -6$.

Аналогично рассмотрим знаменатель $g(x) = x+1$. Предел будет равен $g(1) = 1 + 1 = 2$. Таким образом,

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1 + 1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Подведем итог: при нахождении предела функции сначала подставляем число x_0 в функцию и вычисляем результат. Если он равен конечному числу, это и есть искомый предел.

Пример 85. Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}$.

Так как функция $y = x^2$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой, то $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно малой в данной точке:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Пример 86. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

Вычисляем аналогично предыдущему примеру. Функция под знаком предела $f(x) = x^2$ при $x \to 0$ является бесконечно малой, следовательно, функция $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ будет бесконечно большой в данной точке:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Пример 87. Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} (x^4 + 8x + 10)$.

Преобразуем выражение, вынесем x^4 за скобку. Используя правила вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x \to \infty} (x^4 + 8x + 10) = \lim_{x \to \infty} x^4 \left(1 + \cancelto{0}{\frac{8}{x^3}} + \cancelto{0}{\frac{10}{x^4}}\right) = +\infty.$$

Неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

П р и м е р 88. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены. Числитель и знаменатель при $x\to\infty$ являются бесконечно большими функциями. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида, необходимо разделить числитель и знаменатель на x^p, где p — наивысшая степень многочлена, находящегося в знаменателе.

Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\cancelto{0}{\dfrac{3}{x}}-\cancelto{0}{\dfrac{5}{x^2}}}{\cancelto{0}{\dfrac{1}{x^2}}+\cancelto{0}{\dfrac{1}{x}}+3}=\frac{2-0-0}{0+0+3}=\frac{2}{3},$$

так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\dfrac{3}{x}$, $\dfrac{5}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^2}$ и $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю.

П р и м е р 89. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}$.

Как и в предыдущем примере, в числителе и знаменателе — многочлены. В знаменателе многочлен первой степени, следовательно, и числитель, и знаменатель делим на x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x}+\dfrac{3x}{x}-\dfrac{5}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3-\cancelto{0}{\dfrac{5}{x}}}{1+\cancelto{0}{\dfrac{1}{x}}}=\frac{\infty+3+0}{1+0}=\frac{\infty}{1}=\infty.$$

П р и м е р 90. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$.

Снова в числителе и знаменателе — многочлены. Наивысшая степень x в знаменателе — 4. Следовательно, и числитель, и знаменатель делим на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3}{x^4}+\dfrac{15x^2}{x^4}+\dfrac{9x}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{5x^4}{x^4}+\dfrac{6x^2}{x^4}-\dfrac{3x}{x^4}-\dfrac{4}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancelto{0}{\dfrac{7}{x}}+\cancelto{0}{\dfrac{15}{x^2}}+\cancelto{0}{\dfrac{9}{x^3}}+\cancelto{0}{\dfrac{1}{x^4}}}{5+\cancelto{0}{\dfrac{6}{x^2}}-\cancelto{0}{\dfrac{3}{x^3}}-\cancelto{0}{\dfrac{4}{x^4}}}=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to\infty}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n},\qquad (a_0\neq 0,\ b_0\neq 0).$$

Здесь дробно-рациональная функция, представляющая собой отношение двух многочленов относительно x степеней m и n соответственно ($m>0$ и $n>0$).

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на x^n, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-n-1}+\ldots+a_{m-1}x^{1-n}+a_mx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n}}.$$

Ясно, что при $x\to\infty$ знаменатель дроби имеет пределом число $b_0\neq 0$. Числитель дроби при $m>n$ стремится к бесконечности; при $m=n$ предел числителя равен коэффициенту a_0; при $m<n$ предел числителя равен нулю.

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\begin{cases}\infty, & m>n;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n;\\ 0, & m<n.\end{cases}$$

Неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

П р и м е р 91. Найти предел $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{x^2-1}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x \to -1$ стремятся к нулю (неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$).

В числителе и знаменателе находятся многочлены, значит, для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ необходимо разложить данные многочлены на множители и сократить одинаковые множители, стремящиеся к нулю. Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение или использовать формулы сокращенного умножения (см. приложения на с. 248). Также можно раскрыть неопределенность делением многочленов на многочлен $(x - x_0)$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-3x-5}{x^2-1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)(x-\frac{5}{2})}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x-5}{x-1} = \frac{-7}{-2} = 3{,}5.$$

П р и м е р 92. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$.

Здесь снова имеет место неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Разложить на множители числитель не получается. В таких случаях используют метод умножения числителя и знаменателя на выражение, сопряженное выражению с корнями:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{5(x-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{5(x-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{5(x-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{5(x-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9\cancel{(x-3)}}{5\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9}{5(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{-9}{5(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}.$$

П р и м е р 93. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6})^2-2^2} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{x+6-4} =$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to -2}(x-1)(\sqrt{x+6}+2) = (-2-1)(\sqrt{-2+6}+2) = -12.$$

П р и м е р 94. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x\to 0$ стремятся к нулю. Неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но аргумент синуса $7x$ отличается от знаменателя $3x$. Однако, если сделать замену $y = 7x$, при $x\to 0$, y тоже будет стремиться к нулю, причем $x = y/7$, тогда получим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{3\cdot\dfrac{y}{7}} = \frac{7}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{7}{3}\cdot 1 = \frac{7}{3}.$$

На практике при решении таких примеров замену обычно не делают, а поступают следующим образом: так как в числителе аргумент синуса равен $7x$ ($7x\to 0$ при $x\to 0$), то в знаменателе нужно тоже получить $7x$, для этого числитель и знаменатель дроби умножаем на 7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x\cdot 7}{3x\cdot 7} = \frac{7}{3}.$$

1

П р и м е р 95. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2}$.

Также неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Если в пределе есть тангенс, то его представляют в виде отношения синуса к косинусу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{2x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x\cdot\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot\cos 2x}=\frac{1}{0\cdot 1}=\infty.$$

Неопределенность вида $\{1^\infty\}$

Пример 96. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x+1}$.

При $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице: $\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)$, а показатель — к бесконечности: $(4x+1)\to\infty$. Получили неопределенность вида $\{1^\infty\}$. Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x+1}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{e}\Bigg]^{\frac{1}{3x}\cdot(4x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x+1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{3x}}=e^{4/3}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{3x}\to 0$ при $x\to\infty$, то выражение в квадратных скобках не что иное, как второй замечательный предел (С. 92):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}=e.$$

Пример 97. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$.

Рассмотрим предел функции в основании степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}=1.$$

А так как $(2x+3)\to\infty$ при $x\to\infty$, получаем неопределенность вида $\{1^\infty\}$. Преобразуем функцию под знаком предела так, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x+1}-1\right)^{2x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right]}_{\to e}{}^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x-9}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6-9/x}{1+1/x}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

3.3. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0 и выполняется следующее условие:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Анализируя определение непрерывности функции, видим, что оно содержит в себе четыре момента:

1) существуют конечные односторонние пределы функции в точке x_0, т. е. существуют

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

2) эти пределы равны, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, следовательно, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) функция определена в точке x_0, т. е. существует $f(x_0)$;

4) предел функции при x, стремящемуся к x_0, равен значению функции в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Рассмотрим рис. 32, на котором изображена непрерывная функция. В точке x_0 функция принимает значение $f(x_0)$. Если аргумент x приближается к точке x_0, то значения функции $f(x)$ приближаются к величине $f(x_0)$ (независимо от того, приближается x к точке x_0 справа или слева). Таким образом, в точке x_0 выполняется условие

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

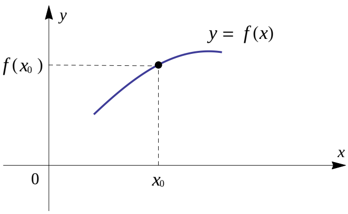


Рис. 32

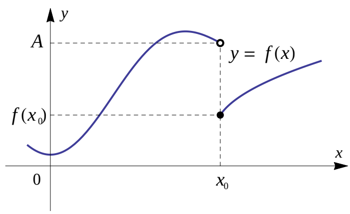


Рис. 33

Функция будет непрерывна в точке x_0, т. к. в ней выполняются четыре перечисленных условия.

Если хотя бы одно из них не выполняется, то функция $f(x)$ в точке x_0 претерпевает *разрыв*. Рассмотрим точку x_0 на рис. 33. Если $x \to x_0$ справа, то значения функции $f(x)$ приближаются к $f(x_0)$. Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Если $x \to x_0$ слева, то значения функции $f(x)$ приближаются к числу A, причем $A \neq f(x_0)$. Итак, при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет конечные правый и левый пределы, т. е. условие 1) выполняется, но эти пределы не равны между собой. Следовательно, в данном случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, условие 2) не выполняется, т. е. x_0 — точка разрыва функции $f(x)$.

Если выполняется условие 1), но не выполняется хотя бы одно из остальных условий, то точка называется *точкой разрыва первого рода*. При этом, если выполняется условие 2), но не выполняется условие 4), то получаем *устранимый разрыв*. Чтобы устранить этот разрыв, надо доопределить или переопределить значение функции в этой точке.

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 98. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2, \\ x + 1, & x > 2, \\ 5, & x = 2, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 34.

Рассмотрим точку $x = 2$. В этой точке функция определена и $f(2) =$

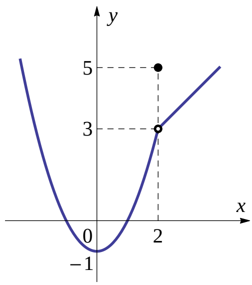


Рис. 34

5. При $x \to 2$ функция имеет правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x^2-1) = 3,$$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}(x+1) = 3.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, но $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, т. е. условие 4) не выполняется. Изменив значение функции в единственной точке $x = 2$ (положив $f(2) = 3$), мы получим непрерывную функцию.

Если выполняется условие 1), но не выполняется условие 2), получаем *неустранимый разрыв*, или *скачок функции*. Скачок равен

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) - \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

П р и м е р 99. Исследуем на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2, & x < 3, \\ x, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

График этой фунции изображен на рис. 35.

Рассмотрим точку $x = 3$. Если $x \to 3$ справа, то $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 3$, но если $x \to 3$ слева, то $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = 9$. В точке $x_0 = 3$ функция имеет скачок, равный $3 - 9 = -6$.

Если условие 1) не выполняется, т. е. хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то точка x_0 называется *точкой бесконечного разрыва* функции, или *точкой разрыва второго рода*.

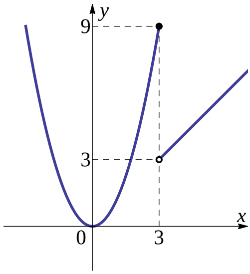


Рис. 35

П р и м е р 100. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{x^2}$, график которой изображен на рис. 36 .

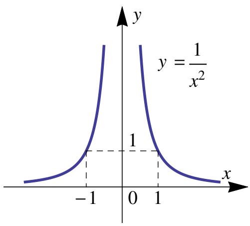


Рис. 36

В точке $x = 0$ функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ не определена, а при $x \to 0$ значение $y = \dfrac{1}{x^2}$ стремится к бесконечности, следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет бесконечный разрыв.

Непрерывность — это *локальное* (местное) свойство функции, т. е. свойство, которым функция может обладать в одной точке и не обладать в другой. Например, функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке $x = 0$ имеет бесконечный разрыв, а в точке $x = 1$ эта функция непрерывна.

Функция непрерывна не интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные (рис. 37), горизонтальные (рис. 38) и наклонные (рис. 39).

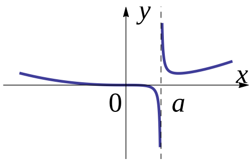


Рис. 37

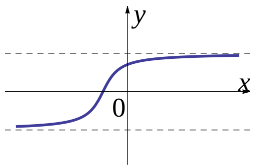


Рис. 38

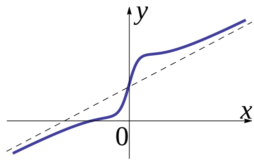


Рис. 39

Нахождение асимптот графика основано на следующих теоремах.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму точку x_0) и хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен бесконечности, т. е.

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Очевидно, что прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0, так как в этом случае $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно, вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения.

Пример 101. Рассмотрим функцию $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Найдем вертикальные асимптоты.

Функция не определена в точке $x = 0$. Вычислим пределы функции при $x \to \pm 0$:

$$\lim_{x\to\pm 0}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ имеет конечный предел при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Тогда прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Замечание. Если конечен только один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, то функция имеет лишь левостороннюю или правостороннюю асимптоту.

Пример 102. Найдем асимптоты графика функции $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Очевидно, график функции не имеет вертикальных асимптот (нет точек разрыва). Вычислим пределы функции при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1.$$

Таким образом, прямая $y = -1$ является горизонтальной асимптотой.

Теорема 6. Пусть для функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Тогда прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Наклонная асимптота, как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

Пример 103. Найдем асимптоты графика функции

$$y = \frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{x^2 + 4}.$$

Очевидно, график функции не имеет ни вертикальных асимптот (нет точек разрыва), ни горизонтальных асимптот, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{x^2 + 4} = \infty.$$

Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{x(x^2 + 4)} = 3;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{x^2 + 4} - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2 - 12x + 2}{x^2 + 4} = 5.$$

Следовательно, прямая $y = 3x + 5$ является наклонной асимптотой.

Упражнения

Вычислить пределы:

53. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x^2.$

54. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{2x^4+1}.$

55. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2}.$

56. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+15}.$

57. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x+2}{4x+1}.$

58. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^2-6x+3}{x^2-8x+1}.$

59. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2-x+42}{2x^3-x^2+5}.$

60. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3-4x-3}{7x^2+3x-1}.$

61. $\lim\limits_{x\to \infty} \log_2 \dfrac{8x^2+4}{x^2+2x}.$

62. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}.$

63. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}.$

64. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^3+64}{3x^2+11x-4}.$

65. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}.$

66. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{9+x+2x^2}-3}.$

67. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}.$

68. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right).$

Вычислить пределы, используя первый замечательный предел:

69. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}.$

70. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$

71. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{2x}.$

72. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\operatorname{tg}(4x)}.$

Вычислить пределы, используя второй замечательный предел:

73. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x-5}\right)^{8x}.$

74. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{4x-1}.$

75. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{5-3x}.$

Вычислить односторонние пределы:

76. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}$.

77. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{1}{x+1}$.

78. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x-5)$.

79. $\lim\limits_{x\to3+0} \dfrac{x}{x-3}$.

80. $\lim\limits_{x\to-1+0} \dfrac{x}{1-x^2}$.

81. $\lim\limits_{x\to2-0} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$.

82. $\lim\limits_{x\to1+0} 5^{\frac{1}{x-1}}$.

83. $\lim\limits_{x\to2-0} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2-x}}$.

84. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x-2}{3x+4}\right)^{x}$.

85. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x-2}{2x+3}\right)^{x}$.

Найти точки разрыва функций, указать их тип, сделать рисунок:

86. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$.

87. $y=\begin{cases} 2^x-1, & x\geqslant 0, \\ 2x, & x<0. \end{cases}$

88. $y=\begin{cases} 3^{x-2}-3, & x>2, \\ 5, & x=2, \\ 2x-6, & x<2. \end{cases}$

89. $y=\begin{cases} x, & x<-2, \\ -x+1, & -2\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$

90. $y=\dfrac{5}{x^2-1}$.

91. $y=\begin{cases} x^2+1, & x>0, \\ x, & x<0. \end{cases}$

Найти асимптоты графика функции:

92. $y=\dfrac{3-4x}{2+5x}$.

93. $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

94. $y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$.

95. $y=\dfrac{(x+1)(3x-2)}{x-1}$.

96. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$.

4. Основы дифференциального исчисления

4.1. Вычисление производной

Пусть x_1 и x – значения аргумента, а $y_1 = f(x_1)$ и $y = f(x)$ – соответствующие значения функции. Разность

$$\Delta x = x_1 - x$$

называется *приращением аргумента*, а разность

$$\Delta y = y_1 - y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

– *приращением функции* в точке x (рис. 40).

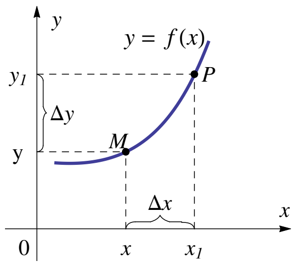


Рис. 40

Производной функции в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Наряду с обозначением y' для производной употребляются также обозначения $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, y'_x, f'_x.

П р и м е р 104. Рассмотрим функцию $y = x^2$ с областью определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$ и произвольное значение аргумента x. Пусть x получает приращение Δx. В точке x функция принимает значение x^2, в точке $(x + \Delta x)$ — значение $(x + \Delta x)^2$. Приращение функции Δy имеет вид $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$.

Отношение приращения функции к приращению аргумента равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Производная $y' = 2x$ является функцией от x. В каждой конкретной точке x производная — это число. Например, если $x = 3$, то $y'(3) = 2\cdot 3 = 6$.

Если в точке x существует производная функции $y = f(x)$, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x.

Процесс нахождения производной от функции называется ее *дифференцированием.*

Заметим, что дифференцируемая функция в точке x является непрерывной в этой точке.

Касательной к кривой в точке M называется прямая MT, которая является секущей MP в своем предельном положении, когда точка P по кривой стремится к точке M.

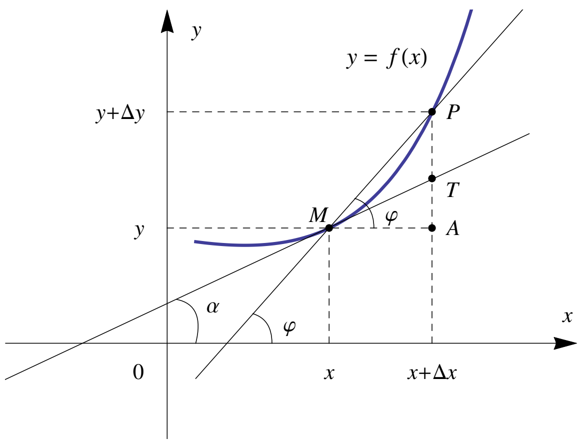


Рис. 41

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ в некоторой точке x (рис. 41). Перейдем от точки x к новой точке $x + \Delta x$. Расстояние AP равно приращению функции Δy, $MA = \Delta x$. Из треугольника MPA

получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{PA}{MA} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей MP к оси Ox. Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда точка P стремится к точке M и, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi$ стремится к $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox в точке M.

Так как $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то при Δx, стремящемся к нулю, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $\operatorname{tg}\alpha$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

Следовательно, значение производной функции в точке равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в данной точке. В этом состоит *геометрический смысл* производной.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$\begin{aligned} &y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0), \quad && \text{если } f'(x_0) \neq 0, \\ &x = x_0, && \text{если } f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Правила вычисления производной

Рассмотрим функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, имеющие производные $u' = u'(x)$ и $v' = v'(x)$.

1. Производная от постоянной величины равна нулю:

$$(C)' = 0 \qquad (C = const).$$

2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных слагаемых:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Замечание. Правило дифференцирования суммы двух слагаемых распространяется на случай суммы (разности) любого конечного числа слагаемых.

3. Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак производной

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

4. Производная частного двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

5. Производная сложной функции $y = f(u)$, где u является функцией $u = g(x)$, т. е. $y = f\left(g(x)\right)$ вычисляется так:

$$y'_x = f'_u \cdot g'_x.$$

Таблица производных

1. $(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$.
2. $(e^x)' = e^x$.
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6. $(\sin x)' = \cos x$.
7. $(\cos x)' = -\sin x$.
8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
16. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
17. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

П р и м е р 105. Вычислить производную функции $y = x + \sin x$.

$$(x + \sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x.$$

П р и м е р 106. Вычислить производную функции $y = x \cdot \sin x$:

$$(x \sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x \cdot \cos x.$$

П р и м е р 107. Вычислить производную функции $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

П р и м е р 108. Вычислить производную функции $y = \sin^3 x$.

$$\left(\sin^3 x\right)' = \left((\sin x)^3\right)' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x.$$

П р и м е р 109. Вычислить производную функции $y = \sin(x^3)$.

$$\left(\sin(x^3)\right)' = \cos(x^3) \cdot \left(x^3\right)' = 3x^2 \cdot \cos(x^3).$$

П р и м е р 110. Дана функция $y = x^3$. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику этой функции в точке $x_0 = 2$.

Уравнение касательной: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$. Вычисляем значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ при $x_0 = 2$.

Найдем значение функции: $f(x_0) = f(2) = 23 = 8$. Найдем производную: $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$; $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 22 = 12$. Подставляем найденные значения: $y = 12 \cdot (x - 2) + 8 = 12x - 24 + 8 = 12x - 16$.

Уравнение касательной имеет вид $12x - y - 16 = 0$.

Составим уравнение нормали. Так как $f'(x_0) = f'(2) = 12 \neq 0$, то $y = -\dfrac{1}{12} \cdot (x - 2) + 8$.

Уравнение нормали имеет вид $x + 12y - 98 = 0$.

П р и м е р 111. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2\sin x + 5$ в точке $x_0 = \pi/2$.

$$f(x_0) = f(\pi/2) = 2\sin(\pi/2) + 5 = 2 + 5 = 7;$$

$$f'(x) = (2\sin x + 5)' = 2\cos x;$$
$$f'(x_0) = f'(\pi/2) = 2\cos(\pi/2) = 0.$$

Подставляем в уравнение касательной $y = 0 \cdot (x - \pi/2) + 7 = 7$, т.е. касательная имеет уравнение $y = 7$.

Данная прямая оказалась горизонтальной, так как ее угловой коэффициент $k = 0$. Следовательно, нормаль расположена вертикально и имеет уравнение $x = \pi/2$.

Для любой функции $y(x)$ ее производная равна *скорости изменения* этой функции. В этом заключается *физический смысл* производной.

П р и м е р 112. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2t$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найти ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = \frac{3}{2}t^2 - 6t + 2 \text{ м/с}.$$

Тогда находим:

$$v(6) = \frac{3}{2} \cdot 6^2 - 6 \cdot 6 + 2 = 20 \text{ м/с}.$$

П р и м е р 113. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t) = x'(t) = 2t - 13 \text{ м/с}.$$

Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 3 м/с, решим уравнение

$$2t - 13 = 3.$$

Решением уравнения является $t = 8$. Следовательно, скорость точки, равная 3 м/с, была на восьмой секунде.

Логарифмическое дифференцирование

При отыскании производной сложной положительной функции иногда удобно применить следующий прием, называемый *логарифмическим дифференцированием.* Пусть $y = f(x) > 0$. Если найти производную от функции $\ln f(x)$ значительно проще, чем от самой функции, то поступают таким образом:

$$(\ln y)' = (\ln f(x))',$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln f(x))',$$

$$y' = y \cdot (\ln f(x))' \text{ или } y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Логарифмическое дифференцирование особенно удобно использовать при дифференцировании степенно-показательной функции

$$y = u^v,$$

где $u = u(x) > 0$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Имеем

$$\ln y = \ln u^v = v \cdot \ln u.$$

Дифференцируя обе части равенства, получаем

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v\frac{u'}{u},$$

откуда

$$y' = u^v \left(v' \cdot \ln u + v\frac{u'}{u} \right).$$

На практике удобнее пользоваться следующей формулой:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

Пример 114. Найти производную функции $y = (\sin x)^{2x}$.

$$y' = (\sin x)^{2x} \cdot \ln(\sin x) \cdot 2 + 2x \cdot (\sin x)^{2x-1} \cdot \cos x.$$

Понятие дифференциала функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента.

Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$. Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента:

$$dy = y' \cdot dx.$$

Геометрический смысл дифференциала $dy = f'(x)\,dx$ функции $y = f(x)$ есть приращение ординаты касательной к графику функции в точке с абсциссой x, когда аргумент получает приращение dx (рис. 42).

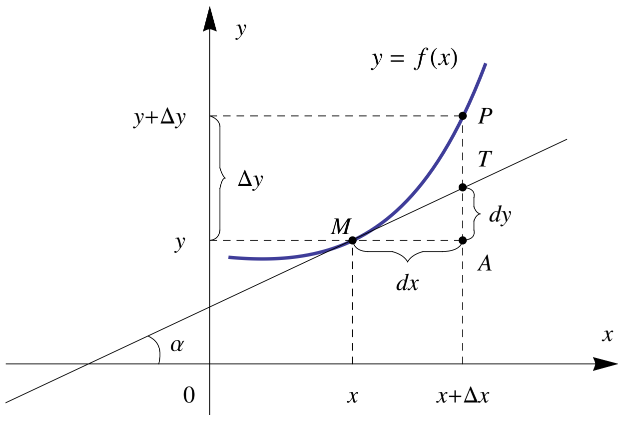


Рис. 42

П р и м е р 115. Дифференциал функции $y = \sin x$ равен

$$dy = y' \cdot dx = (\sin x)' \cdot dx = \cos x\, dx.$$

Производные высших порядков

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая производную $y'(x)$. Эта производная представляет собой также функцию от x.

Производная от первой производной называется *второй производной* или *производной второго порядка* от данной функции и обозначается символом y'':

$$y'' = (y')'\,.$$

П р и м е р 116. Найти вторую производную функции $y = x\cos x$.

Найдем первую производную функции:

$$y' = (x)' \cdot \cos x + x \cdot (\cos x)' = 1 \cdot \cos x + c \cdot (-\sin x) = \cos x - x\sin x.$$

Вторая производная:

$$y'' = (y')' = (\cos x - x\sin x)' = (\cos x)' - (x\sin x)' =$$

$$= -\sin x - ((x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)') = -\sin x - (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) =$$

$$= -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x.$$

Производная от второй производной называется *третьей производной* или *производной третьего порядка* от данной функции и обозначается y'''.

П р и м е р 117. Найти третью производную функции $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$.
Найдем первую производную:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{(x^2)} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Третья производная функции будет равна

$$y''' = (y'')' = \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{(1 - \ln x)' \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot (x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3x + 2x\ln x}{x^4} =$$

$$= \frac{x(2\ln x - 3)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}.$$

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка от данной функции и обозначается символом $y^{(n)}$.

П р и м е р 118. Дана функция $y = e^{3x}$. Найдем выражение для производной n-го порядка. Последовательно вычисляя производные, получим

$$y' = 3e^{3x},\ y'' = 3^2 e^{3x},\ y''' = 3^3 e^{3x},\ \ldots,\ y^{(n)} = 3^n e^{(3x)}.$$

Механический смысл второй производной

Если точка движется прямолинейно и задан закон ее движения $s = s(t)$, то ускорение точки равно второй производной от пути по времени:

$$a(t) = s''(t).$$

Ускорение материального тела равно первой производной от скорости:

$$a(t) = v'(t).$$

П р и м е р 119. Закон движения материальной точки задан функцией $s(t) = 2t^3 + 3t$, где s измеряется в метрах, а t – в секундах. Найти значение t, при котором ускорение точки равно 12 м/с^2.

Сначала найдем скорость материальной точки:

$$v(t) = s'(t) = (2t^3 + 3t)' = (2t^3)' + (3t)' = 2 \cdot 3t^2 + 3 \cdot 1 = 6t^2 + 3.$$

Тогда ускорение материальной точки

$$a(t) = v'(t) = (6t^2 + 3)' = (6t^2)' + (3)' = 6 \cdot 2t + 0 = 12t.$$

Искомое время t найдем из уравнения $a(t) = 12$:

$$12t = 12,$$

откуда $t = 1$ с.

Дифференциал второго порядка

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2y = d(dy) = f''(x)dx^2.$$

П р и м е р 120. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^2 + \arccos x$.

Найдем первую производную функции:

$$y' = (x^2 + \arccos x)' = (x^2)' + (\arccos x)' = 2x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Вторая производная заданной функции:

$$y'' = \left(2x - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = (2x)' - \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1-x^2)' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)^3}} \cdot (-2x) =$$

$$= 2 - \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Тогда искомый дифференциал второго порядка заданной функции

$$d^2y = \left(2 - \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right) dx^2.$$

4.2. Применение производной

Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: это и неравномерное механическое движение, и переменный ток, и химические реакции и радиоактивный распад вещества и т.д.

В географии производная помогает рассчитать некоторые значения в сейсмографии, особенности электромагнитного поля земли, радиоактивность ядерно-геофизических показателей и др.

Биологический смысл производной заключается в том, что по известной зависимости численности популяции можно определить относительный прирост особей.

Пример 121. Рост числа клеток популяции описывается уравнением:

$$N = \frac{5N_0}{(5-N_0)e^{-kt}+N_0},$$

где N_0 – начальное число клеток, а k – коэффициент линейного роста.

Формула для нахождения скорости роста численности популяции имеет вид

$$N' = \left(\frac{5N_0}{(5-N_0)e^{-kt}+N_0}\right)' =$$

$$= \frac{(5N_0)'((5-N_0)e^{-kt}+N_0) - (5N_0)((5-N_0)e^{-kt}+N_0)'}{((5-N_0)e^{-kt}+N_0)^2} =$$

$$= \frac{0-(5N_0)(5-N_0)(-k)e^{-kt}}{((5-N_0)e^{-kt}+N_0)^2} = \frac{(5N_0)(5-N_0)ke^{-kt}}{((5-N_0)e^{-kt}+N_0)^2}.$$

Правило Лопиталя

Теорема 7. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, т.е. частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке x_0 представляет собой неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел в правой части равенства существует.

Замечание 1. Правилом Лопиталя раскрытия неопределенностей можно пользоваться и при $x \to \infty$.

Замечание 2. Если частное $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ в точке $x = x_0$ также представляет собой неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, то правило следует применить второй раз (т. е. перейти к отношению вторых производных и т. д.).

Замечание 3. В случае неопределенности вида $\{\infty - \infty\}$ следует с помощью алгебраических преобразований привести функцию к неопределенности вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ и затем воспользоваться правилом Лопиталя.

Пример 122. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x \to 1$, поэтому имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}.$$

Пример 123. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Это также неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

Пример 124. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x}$.

Это — неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

П р и м е р 125. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Это неопределенность вида $\{\infty-\infty\}$. Для того чтобы найти предел функции, приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\,(e^x-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x\,(e^x-1))'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\,e^x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+x\,e^x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

Применение производной к исследованию функции

Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции

Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале $(a;\,b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1<x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$.

Т е о р е м а 8. Для того чтобы функция $y=f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a;\,b)$, возрастала (убывала) на этом интервале, достаточно, чтобы ее производная была положительна (отрицательна) на этом интервале, т. е. $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f'(x)=0$.

П р и м е р 126. Найдем интервалы возрастания и убывания функции $y=x^2$. Производная функции $y'=2x<0$ на интервале $(-\infty;\,0)$. Следовательно, функция убывает для всех $x\in(-\infty;\,0)$. Производная $y'=2x>0$ на интервале $(0;\,+\infty)$, следовательно, функция возрастает для всех $x\in(0;\,+\infty)$.

Функция имеет в точке x_0 (рис. 43) *строгий локальный максимум* (*минимум*), если существует такой интервал $(x_0-\delta;\,x_0+\delta)$, что для всех x из этого интервала выполняется неравенство

$$f(x)<f(x_0)\quad (f(x)>f(x_0)).$$

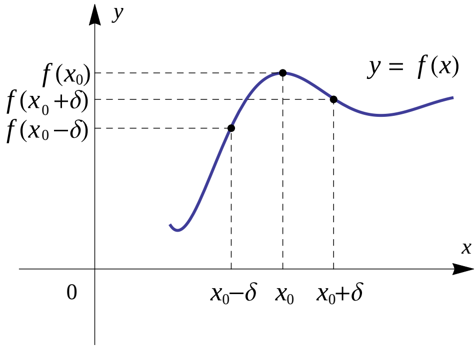


Рис. 43

Максимум или минимум функции $y = f(x)$ называется *экстремумом* функции $y = f(x)$. По определению, экстремумы могут достигаться лишь внутри области определения.

Теорема 9 (*необходимое условие существования экстремума*). Пусть x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$. Тогда производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Точки x_0, в которых выполняется необходимое условие экстремума (производная равна нулю или не существует), называются *критическими точками первого порядка* или точками *возможного экстремума*. Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются*стационарными точками*. Таким образом, если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка критическая. Обратное утверждение неверно. Критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Пример 127. Функция $y = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в этой точке в нуль.

Теорема 10 (*достаточное условие существования экстремума*). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в окрестности критической точки x_0 и дифференцируема в любой точке этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке x_0 функция имеет максимум (минимум). Если же при переходе через точку производная знака не меняет, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Алгоритм исследования функции на монотонность и экстремум

1. Находим производную функции $f'(x)$.

2. Находим критические точки первого порядка функции, т.е. корни уравнения $f'(x) = 0$ и точки, в которых производная не существует.

3. Вычисляем знак $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки и делаем вывод о характере монотонности функции на соответствующим интервале и наличии экстремумов функции в критических точках.

4. Вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример 128. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции $y = -x^2 + 4x - 5$.

Находим производную $y' = -2x+4$. Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет, т. е. $f'(x)$ определена на всей числовой оси. Приравнивая ее к нулю, получаем $-2x + 4 = 0$, или $x = 2$. Если $x < 2$, то $y' > 0$ и на интервале $(-\infty; 2)$ функция возрастает, если $x > 2$, то $y' < 0$ и на интервале $(2; +\infty)$ функция убывает. Точка $x = 2$ является точкой максимума функции.

Вычисляем соответствующее значение функции $y_{max} = y(2) = -1$.

Пример 129. Найдем экстремумы функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Находим производную $y' = -\dfrac{1}{x^2}$. Производная не существует в точке $x = 0$, но и функция не определена в точке $x = 0$. Следовательно, критических точек нет и экстремумов также нет.

Пример 130. Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции $y = \sqrt[3]{x}$. Область определения функции — вся числовая ось. Находим производную $y' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Точек, в которых производная равна нулю, нет. Производная функции не существует в точке $x = 0$. Если $x < 0$, то $y' > 0$ и на интервале $(-\infty; 0)$ функция возрастает, если $x > 0$, то $y' > 0$ и на интервале $(0; +\infty)$ функция тоже возрастает. Следовательно, критическая точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции.

Пример 131. Найдем экстремумы функции $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Область определения функции — вся числовая ось. Находим производную

$$y' = \left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)' = \left((x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Точек, в которых производная равна нулю, нет. Производная функции не существует в точке $x = 1$. Если $x < 1$, то $y' < 0$, если $x > 1$, то $y' > 0$. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой минимума функции. Вычисляем соответствующее значение функции $y_{min} = y(1) = 0$.

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке

При решении прикладных задач важное значение имеют задачи нахождения *наибольшего* и *наименьшего* значений (*глобального максимума* и *глобального минимума*) непрерывной функции на каком-либо отрезке. Если функция непрерывна на отрезке, то на этом отрезке обязательно существуют точки, в которых она достигает своего наибольшего и наименьшего значения. При этом точкой глобального максимума или глобального минимума может оказаться либо критическая точка, либо любая граничная точка отрезка.

Порядок нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции, принадлежащие отрезку.
3. Вычислить значения функции в этих критических точках и на концах отрезка. Выбрать из полученных значений наибольшее $f_{наиб}$ и наименьшее $f_{наим}$.

Пример 132. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 6x^2 - 48x + 5$ на отрезке $[-3;\ 4]$.

Вычисляем производную $y' = 6x^2 + 12x - 48 = 6(x^2 + 2x - 4)$. Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет. Находим точки, в которых производная равна нулю, получаем $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Точка $x_1 = -4$ не принадлежит отрезку $[-3;\ 4]$. Вычисляем значения функции в точке $x_2 = 2$ и на концах отрезка: $y(-3) = 149$, $y(2) = -51$, $y(4) = 37$. Следовательно, $f_{наиб} = f(-3) = 149$, $f_{наим} = f(2) = -51$.

Выпуклость функции. Точки перегиба

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$. Функция $f(x)$ называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) на интервале $(a; b)$, если все точки ее графика расположены ниже (выше) любой касательной, проведенной к графику функции на этом интервале.

Точка, в которой меняется направление выпуклости функции, называется точкой *перегиба*.

На рис. 44 точкой перегиба является точка $x = c$. На интервале $(a; c)$ функция выпуклая вверх, на интервале $(c; b)$ — выпуклая вниз.

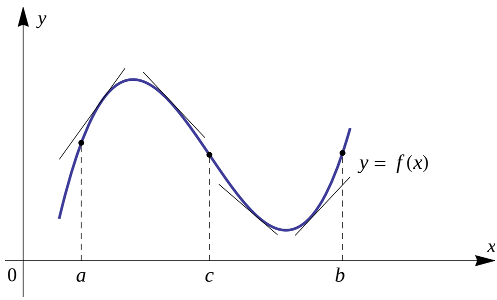


Рис. 44

Для дважды дифференцируемых функций выполняются следующие теоремы.

Т е о р е м а 11(*достаточные условия выпуклости на интервале*). Для того, чтобы функция $y = f(x)$ дважды дифференцируемая на интервале $(a; b)$ являлась выпуклой вверх (выпуклой вниз) достаточно, чтобы ее производная второго порядка была отрицательной (положительной) на этом интервале, т. е. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) за исключением, быть может, конечного числа точек, в которых $f''(x) = 0$.

Т е о р е м а 12 (*необходимое условие существования перегиба*). Если точка x_0 является точкой перегиба функции $y = f(x)$, то вторая производная в этой точке равна нулю: $f''(x_0) = 0$ или не существует.

Точки, в которых выполняется необходимое условие существования перегиба (вторая производная равна нулю или не существует)называются *критическими точками второго порядка* или *точками возможного перегиба*.

Теорема 13 (*достаточное условие существования перегиба*). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и дифференцируема в точке x_0, в которой $f''(x_0) = 0$ или не существует. Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ при переходе через эту точку x_0 меняет свой знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба данной функции.

Алгоритм исследования на выпуклость и перегиб функции

1. Находим вторую производную $f''(x)$.

2. Находим критические точки второго порядка, т.е. корни уравнения $f''(x) = 0$ и точки, в которых вторая производная не существует.

3. Вычисляем знак $f''(x)$ слева и справа от каждой критической точки и делаем вывод о направлении выпуклости функции на соответствующем интервале и наличии перегиба функции в критических точках.

4. Вычисляем значения функции в точках перегиба.

Пример 133. Функция $y = x^3$ выпукла вверх на интервале $(\infty; 0)$ вследствие того, что $y'' = 6x < 0$ на этом интервале, и выпукла вниз на интервале $(0; \infty)$, так как на этом интервале $y'' = 6x > 0$. Точка $(0; 0)$ является точкой перегиба.

Общая схема исследования функций и построение их графиков

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции, промежутки непрерывности, точки разрыва.

2. Исследовать функцию на четность или нечетность, периодичность.

3. Найти (по возможности) точки пересечения графика функции с осями координат, интервалы знакоопределенности.

4. Исследовать функцию в окрестности точек разрыва и найти вертикальные асимптоты.

5. Исследовать поведение функции на бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.

6. Найти интервалы монотонности функции и экстремумы.

7. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

8. Построить график функции.

9. По графику функции определить область значений функции.

П р и м е р 134. Исследовать функцию $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ и построить ее график.

1. Областью определения функции является вся числовая ось, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$, функция непрерывна на всей числовой оси, точек разрыва нет.

2. Проверяем функцию на четность-нечетность

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 8(-x)^3 + 6(-x)^2 = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2,$$

$$f(-x) \neq f(x), \qquad f(-x) \neq -f(x),$$

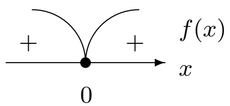
значит, функция не является ни четной, ни нечетной. Функция непериодическая.

3. Находим точки пересечения с осью Ox, ее уравнение $y = 0$:

$$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = 0, \qquad x^2(3x^2 - 8x + 6) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 3x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, других точек пересечения нет.



Находим точки пересечения с осью Oy, ее уравнение $x = 0$; получаем ту же точку.

Таким образом, точка пересечения с осями координат $O(0; 0)$.

4. Функция определена на всей числовой оси, следовательно, точек разрыва нет, значит, нет и вертикальных асимптот.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(3x^4 - 8x^3 + 6x^2) = +\infty.$$

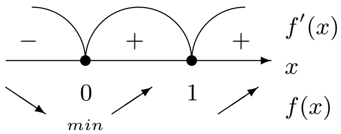
График функции горизонтальных асимптот не имеет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4 - 8x^3 + 6x^2}{x} = \infty,$$

следовательно, наклонных асимптот у графика функции также нет.

6. Найдем интервалы монотонности функции и ее экстремумы. Вычислим $y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$. Производная функции определена на всей числовой оси; $y' = 0$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. Поскольку при $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x \in (0;\,1)$ и при $x > 1$ $f'(x) > 0$, то $x = 0$ — точка минимума функции и $f_{min} = f(0) = 0$. В точке $x = 1$ производная функции знак не меняет, следовательно, эта точка не является точкой экстремума. На интервале $(-\infty;\,0)$ функция убывает, на интервале $(0;\,+\infty)$ функция возрастает.

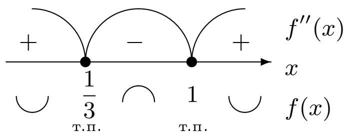


7. Найдем интервалы выпуклости функции и точки перегиба. Вычислим вторую производную функции:

$$y'' = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) =$$

$$= 36\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1).$$

Вторая производная функции $y'' = 0$ в точках $x = \dfrac{1}{3}$ и $x = 1$. Очевидно, что $y'' > 0$ на интервалах $\left(-\infty;\,\dfrac{1}{3}\right)$ и $(1;\,+\infty)$, следовательно, на этих интервалах функция выпукла вниз; $y'' < 0$ на интервале $\left(\dfrac{1}{3};\,1\right)$, на этом интервале функция выпукла вверх.



Точки $x = \dfrac{1}{3}$ и $x = 1$ являются точками перегиба. Значения функции в этих точках $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{27}$ и $y(1) = 1$.

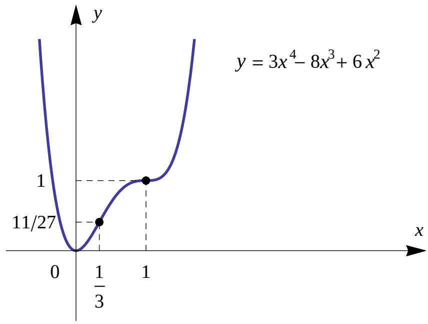


Рис. 45

8. График функции приведен на рис. 45
9. Область значений функции E(y): $y \in [0; +\infty)$.

Пример 135. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$ и построить ее график.

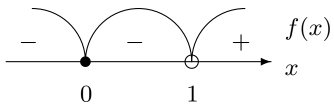
1. Область определения функции: $D(y)$: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Функция непрерывна во всех точках области определения, $x = 1$ – точка разрыва.

2. Проверяем функцию на четность-нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\frac{x^2}{2(x+1)}; \quad y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

3. При подстановке значения $x = 0$ получим $y(0) = \dfrac{0}{2(0-1)} = 0$. Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $O(0,0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.



4. В данном случае имеем одну точку разрыва $x = 1$. Вычислим пределы слева и справа от этой точки:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{2(x-1)} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{2(x-1)} = +\infty.$$

Итак, $x = 1$ — точка разрыва второго рода. Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x-1)} = \pm\infty,$$

следовательно, горизонтальных асимптот график функции не имеет. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Находим

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2(1-\frac{1}{x})} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{2(x-1)} =$$

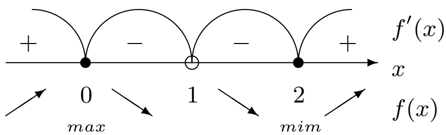
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2}.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

6. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y' = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2}{2(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x = 0, x = 2$ и $x = 1$ (не принадлежит области определения). Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения.



Исследуемая функция на интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $2;\ +\infty$ и на интервалах $(0;\ 1)$, $(1;\ 2)$ убывает.

Точка $x = 0$ — точка локального максимума, $x = 2$ — локального минимума.

Найдем значения функции:

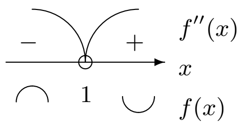
$$y_{max} = y(0) = 0,$$

$$y_{min} = y(2) = \frac{2^2}{2(2-1)} = 2.$$

7. Для отыскания интервалов выпуклости найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная не определена при $x = 1$, как и сама функция, и ни при каких значениях x вторая производная не обращается в нуль. Следовательно, точек перегиба график данной функции не имеет. При $x < 1$ $f''(x) < 0$, при $x > 1$ $f''(x) > 0$, следовательно, на интервале $(-\infty; 1)$ график функции выпуклый вверх, а на интервале $(1; +\infty)$ — выпуклый вниз.



8. График функции приведен на рис. 46.

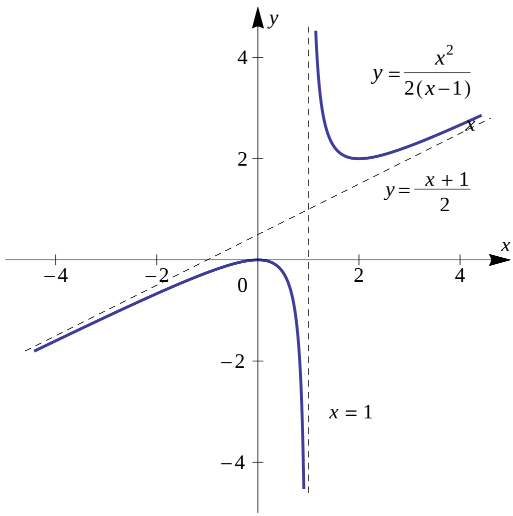


Рис. 46

9. Область значений функции $E(y)$: $y \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

П р и м е р 136. Исследовать функцию $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

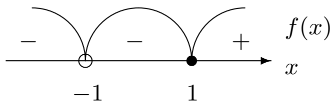
1. Область определения функции $D(y)$: $(\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Функция непрерывна во всех точках области определения, $x = -1$ – точка разрыва.

2. Проверяем функцию не четность-нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2} = \frac{-(x+1)^3}{(-x+1)^2}; \quad y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция не является ни четной, ни нечетной. Функция непериодическая.

3. Находим точки пересечения с осями координат. При $x = 0$ получаем $y(0) = -1$. Приравняем функцию к нулю: $\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = 0$, получим $x = 1$.



Таким образом, график функции пересекает оси координат в точках $(0, -1)$ и $(1, 0)$.

4. Функция имеет разрыв в точке $x = -1$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1+0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

следовательно, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \pm\infty.$$

График функции горизонтальных асимптот не имеет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2 x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - 1 \cdot x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1} = -5,$$

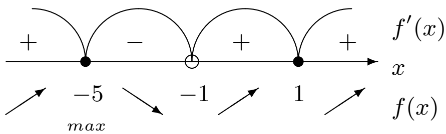
следовательно, прямая $y = x - 5$ является наклонной асимптотой графика функции.

6. Найдем интервалы монотонности функции и ее экстремумы. Вычислим

$$y' = \frac{3(x-1)^2 \cdot (x+1)^2 - (x-1)^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)^2(x+1)(3(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}.$$

Производная функции не существует в точке $x = -1$. Производная равна нулю в точках $x = 1$ и $x = -5$. При $x \in (-5; -1)$ $f'(x) < 0$, а при $x \in (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$ $f'(x) > 0$.



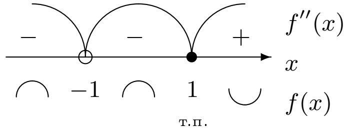
точка $x = -5$ — точка максимума функции и $f_{max} = f(-5) = -13{,}5$. В точке $x = 1$ производная функции знак не меняет, следовательно, эта точка не является точкой экстремума. На интервале $(-5; -1)$ функция убывает, на интервалах $(-\infty; -5)$, $(-1; +\infty)$ функция возрастает.

7. Найдем интервалы выпуклости функции и точки перегиба. Вычислим

$$y'' = \frac{2(x-1)(x+5) + (x+1)^2)(x+1)^3 - 3(x-1)^2(x+5)(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{(x+1)^2(x-1)((x+1)(3x+9) - 3(x^2+4x-5))}{(x+1)^6} = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Вторая производная функции не существует в точке $x = -1$, которая не принадлежит области определения функции; $y'' = 0$ в точке $x = 1$. Очевидно, что $y'' < 0$ на интервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, следовательно, на этих интервалах график функции выпуклый вверх; $y'' > 0$ на интервале $(1; +\infty)$, на этом интервале график функции выпуклый вниз.



Точка $x = 1$ является точкой перегиба. Значение функции в этой точке $y(1) = 0$.

8. График функции изображен на рис. 47.

9. Область значений функции $E(y)$: $y \in (-\infty; +\infty)$.

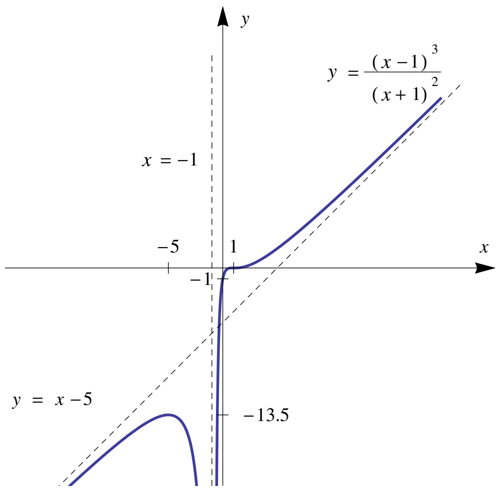


Рис. 47

Упражнения

Найти производные следующих функций:

97. $y = 5x^4 + x - 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{17}{x^5} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{5}.$

98. $y = 3\sin x + \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} - 7 \cdot 2^x - \ln x + \dfrac{\arcsin x}{2} - \operatorname{arcctg} x.$

99. $y = \left(2x^3 - 5\right)\cos x.$

100. $y = \dfrac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$

101. $y = \sqrt[5]{(4+5x)^2} + \sqrt[3]{\pi}.$

102. $y = \sin(3 - 5x) + \dfrac{1}{e}.$

103. $y = \ln \dfrac{3x-2}{4x+3}.$

104. $y = \ln^3(2x - 1).$

105. $y = \operatorname{arctg} x^3 \cdot e^{2x+3}.$

106. $y = \operatorname{arctg}^3 x \cdot \sqrt{\ln x}.$

107. $y = \dfrac{\ln \cos x}{\cos x}.$

108. $y = \dfrac{\ln \sqrt[3]{x^4}}{\operatorname{tg} 4x}.$

Найти производные следующих функций:

109. $y = \arcsin\left(3x^4 - 3\right)$ в точке $x_0 = 1$.

110. $y = 4\ln^5 x$ в точке $x_0 = e^2$.

111. $y = \dfrac{\cos 5x}{\ln\sqrt{x}}$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{5}$.

112. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

113. $y = (x+1)^{x^2}$.

114. Дана кривая $y = 3x^2 - x$. Найти тангенс угла наклона касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x = -1$. Написать уравнение касательной и уравнение нормали к данной кривой в этой точке.

115. Пусть закон движения материальной точки задан функцией $x(t) = 6 + 8t - t^2$, где x – координата точки в момент времени t. Найти скорость точки в момент времени $t = 3$.

116. Объем продукции, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, $0 \leqslant t \leqslant 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда через час после начала работы и за час до ее окончания.

117. Пусть закон движения материальной точки задан функцией $x(t) = 4 + 10t^3$, где x – координата точки в момент времени t. Найти ускорение точки в момент времени $t = 2$.

118. Найти производные функций до пятого порядка включительно:

а) $y = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2$.

б) $y = \cos 5x$.

119. Найти производную третьего порядка функций:

а) $y = \cos^2 x$.

б) $y = x\sin x$.

Найти дифференциал функции:

120. $y = \operatorname{tg} 3x$. **121.** $y = \cos 7x$. **122.** $y = e^{\operatorname{ctg} x}$.

123. Найти дифференциал второго порядка функции

а) $y = \sqrt{3x+7}$. б) $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Найти предел функции, используя правило Лопиталя:

124. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$ **125.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$.

126. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$. **127.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

128. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$. **129.** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

130. $y = 4x^3+3x^2-6x-5$. **131.** $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

132. $y = xe^x$. **133.** $y = \ln(x^2+2x-2)$.

134. Дана функция $y = 3x^2-6x$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x \in [0;\ 3]$.

135. Дана функция $y = x^4-8x^2+3$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x \in [-3;\ 1]$.

Для данных функций найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика:

136. $y = 2x^3-3x^2+15$. **137.** $y = e^{-x^2}$.

138. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Исследовать функции и построить их графики:

139. $y = \dfrac{x^4}{4} + x^3$.

140. $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$.

141. $y = \dfrac{4x^2 - 1}{1 + x^2}$.

142. $y = 3x^2 e^x$.

5. Функции нескольких переменных

5.1. Основные понятия

Многим природным, экономическим и социальным явлениям присуща многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей привело к совершенствованию математического аппарата, в частности, к введению понятия функции нескольких переменных.

Пример 137. Уравнение $p = R_c \rho T$ – одно из уравнений, описывающее состояние сухого воздуха, где p – давление, R_c – удельная газовая постоянная сухого воздуха, ρ – плотность, T – температура. Функция $p = p(\rho, T)$ – функция двух переменных.

Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ из некоторого множества $\mathbb{X}$ соответствует одно значение переменной величины z. Тогда говорят, что на множестве $\mathbb{X}$ задана *функция нескольких переменных*

$$z = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n).$$

Переменные $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ называются *независимыми переменными* или *аргументами*, z – зависимой переменной, а символ f означает *закон соответствия*. Множество $\mathbb{X}$ называется *областью определения функции*.

Пример 138. Найти область определения функции двух переменных $z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

Для данной функции область определения задается условием

$$1 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0 \text{ или } x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1,$$

т. е. представляет собой единичный круг с центром в начале координат.

В данной главе будем рассматривать в основном функции двух переменных, но практически все понятия и теоремы легко переносятся на случай большего числа переменных.

Функцию двух переменных будем обозначать $z = f(x, y)$. Тогда ее область определения является подмножеством координатной плоскости xOy.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства с координатами (x, y, z), аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y данным соотношением $z = f(x, y)$.

Обычно график функции двух переменных $z = f(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве переменных x, y, z.

Для построения графика функции $z = f(x, y)$ полезно рассматривать функции одной переменной $z = f(x, y_0)$ и $z = f(x_0, y)$. Их графики – это линии пересечений поверхности $z = f(x, y)$ и плоскостей, параллельных координатным плоскостям xOz и yOz, т. е. плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$.

Пример 139. Построить график функции $z = x^2 + y^2$.

Сечения поверхности $z = x^2 + y^2$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, являются параболами. Например, при $y = h$ (плоскости, параллельные плоскости xOz) получаем параболы $z = x^2 + h^2$. В сечении поверхности плоскостью $z = h$ (параллельной координатной плоскости xOy) получаются окружности $x^2 + y^2 = h^2$. Графиком функции является поверхность, которая называется параболоидом (см. рис. 48).

Очевидно, что график функции двух переменных – более сложный объект, чем график функции одной переменной. Изображения функций трех и большего числа переменных не имеют геометрического смысла. В некоторых случаях можно получить наглядное геометрическое представление о характере изменения функции, рассматривая ее *линии уровня* (*поверхности уровня*).

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество всех точек плоскости xOy, для которых данная функция сохраняет постоянное значение, т.е. уравнение линии уровня есть

$$f(x, y) = C, \quad \text{где} \quad C = const. \tag{30}$$

Если пересекать график функции $z = f(x, y)$ плоскостями $z = C$,

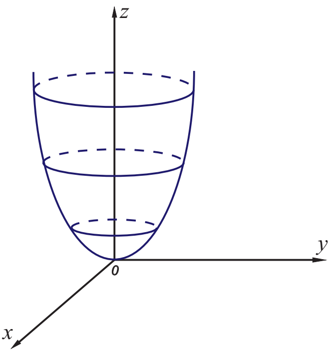


Рис. 48

придавая различные значения C, и проектировать линии пересечения на плоскость xOy, можно получить систему линий уровня (рис. 49).

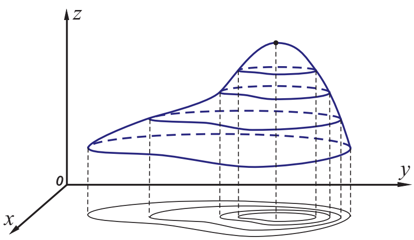


Рис. 49

П р и м е р 140. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Придавая z неотрицательные значения $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, … (очевидно, что z не может быть отрицательным), получим уравнения линий уровня функции: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;\,0)$; $x^2 + y^2 = 1$ – окружность радиуса $R = 1$ с центром $O(0;\,0)$; $x^2 + y^2 = 2$ – окружность радиуса $R = \sqrt{2}$ с центром $O(0;\,0)$ и т.д. (рис. 50).

Таким образом, линии уровня функции представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в точке $O(0;\,0)$.

Очевидно, что значение функции $z = x^2 + y^2$ растет вдоль каждого радиального направления. В трехмерном пространстве с координатами $(x,\,y,\,z)$ геометрический образ функции представляет собой «яму» с круто растущими краями (см. рис. 48).

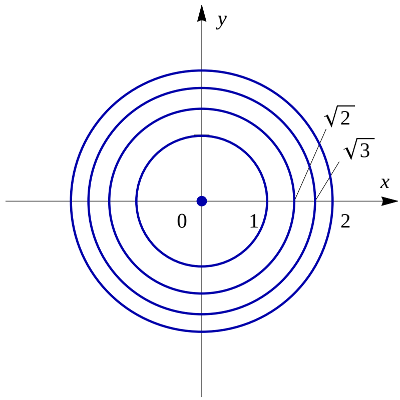


Рис. 50

Поверхностью уровня функции $u = f(x,\, z,\, y)$ называется множество всех точек пространства с координатами $(x,\, y,\, z)$, для которых данная функция имеет одно и то же значение.

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических вопросах. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или с одинаковым средним суточным давлением, получим линии уровня, которые называются *изотермы* и *изобары*, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды. Также, например, в географии рассматривается эквискалярная поверхность $f(x, y, z, t) = C$ – поверхность, в каждой точке которой метеорологическая величина сохраняет постоянное значение. Известны изобарические поверхности (p – const), изотермические поверхности (T – const), изопикнические поверхности (ρ –const) и т. д.

Частные производные функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x,\, y)$ в некоторой точке $(x,\, y)$. Перейдем от точки $(x,\, y)$ к новой точке $(x + \Delta x,\, y)$, т. е. дадим переменной x приращение Δx, оставляя переменную y неизменной. Разность

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x,\, y) - f(x, y)$$

называется *частным приращением функции* $z = f(x,\, y)$ *по переменной* x. Аналогично, если переменной y дать приращение Δy, оставляя переменную x неизменной, то разность

$$\Delta_y z = f(x,\, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется *частным приращением функции* $z = f(x,\, y)$ *по переменной* y. Если обе переменные x и y получили приращения Δx и Δy, то соответствующее приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)$$

называется *полным приращением функции* $z = f(x,\, y)$, или просто *приращением функции.*

Аналогично определяются частные и полные приращения функции с числом переменных, большим двух.

Замечание. Полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений.

Пример 141. Найти частные и полное приращения функции

$$z = x \cdot y.$$

Частное приращение по переменной x равно

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - x \cdot y = \Delta x \cdot y;$$

частное приращение по переменной y равно

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = x \cdot \Delta y.$$

Полное приращение равно

$$\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = \Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Очевидно, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции $z = f(x,\, y)$ *по переменной* x называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к приращению переменной Δx при $\Delta x \to 0$ и обозначается z'_x (или $f'_x(x,\, y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$), т.е.

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично, *частной производной функции* $z = f(x,\, y)$ *по переменной* y называется предел отношения частного приращения функции

$\Delta_y z$ к приращению переменной Δy при $\Delta y \to 0$ и обозначается z'_y (или $f'_y(x, y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$), т. е.

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что приращение переменной стремится к нулю.

Поскольку $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном значении переменной y, а $\Delta_y z$ – при неизменном значении переменной x, то определения частных производных можно переформулировать следующим образом:

частной производной по x функции $z = f(x, y)$ называется обыкновенная производная этой функции по переменной x, вычисленная в предположении, что y – постоянная;

частной производной по y функции $z = f(x, y)$ называется обыкновенная производная этой функции по переменной y, вычисленная в предположении, что x – постоянная.

Следовательно, правила вычисления частных производных совпадают с правилами, рассмотренными для функций одной переменной.

Аналогично определяются и вычисляются частные производные функции с большим числом переменных.

Пример 142. Найти частные производные функции

$$z = x \ln y + \frac{y}{x}.$$

Частная производная по x (считаем y константой) равна

$$z'_x = (x)'_x \ln y + y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = \ln y - \frac{y}{x^2};$$

частная производная по y (считаем x константой) равна

$$z'_y = x(\ln y)'_y + \left(\frac{1}{x}\right)(y)'_y = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

Пример 143. Найти частные производные функции $z = x^y$.

При фиксированном y имеем степенную функцию от x, поэтому

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}.$$

При фиксированном x функция является показательной относительно y

$$z'_y = x^y \cdot \ln x.$$

Пример 144. Найти частные производные функции

$$u = x^6 - y^4 + 3z^5.$$

Поскольку функция u зависит от трех переменных, то и частных производных имеет три. При нахождении u'_x считаем постоянными переменными y и z, т.е. $u'_x = 6x^5$. Аналогично, считая константами x и z, получаем $u'_y = -4y^3$ и, считая константами x и y, получаем $u'_z = 15z^4$.

Пример 145. Поток пассажиров определяется функцией $z = \dfrac{x^2}{y}$, где x – число жителей, y – расстояние между городами. Найти частные производные и пояснить их смысл.

Производная $z'_x = \dfrac{2x}{y}$ показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей. Производная $z'_y = -\dfrac{x^2}{y^2}$ показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами.

Геометрический смысл частных производных функций двух переменных. Графиком функции $z = f(x,\, y)$ является поверхность P.

Px – линия пересечения поверхности P с плоскостью $y = y_0$,

Py – линия пересечения поверхности P с плоскостью $x = x_0$.

Частная производная по переменной x

$$f'_x(x_0,\, y_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол наклона касательной к линии Px относительно оси Ox, а частная производная по переменной y

$$f'_y(x_0,\, y_0) = \operatorname{tg} \beta,$$

где β – угол наклона касательной к линии Py относительно оси Oy.

Физический смысл частых производных. Частная производная функции по некоторой переменной показывает скорость изменения функции в направлении соответствующей оси.

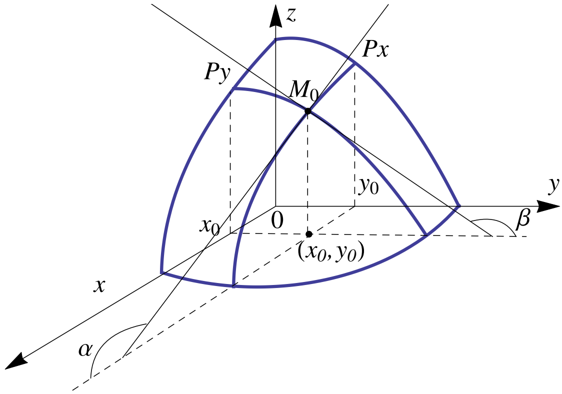


Рис. 51

Дифференциал функции двух переменных

Обобщая понятие дифференциала функции на случай двух независимых переменных, приходим к следующему определению.

Полным дифференциалом функции двух переменных называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т. е.

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y.$$

Учитывая, что $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$, формулу дифференциала функции двух независимых переменных можно записать в виде

$$dz = z'_x dx + z'_y dy. \tag{31}$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y), если ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где dz – дифференциал функции, α и β – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Таким образом, дифференциал функции нескольких переменных, как и в случае одной переменной, является главной, линейной относительно приращений аргументов, частью полного приращения функции.

Для функции нескольких переменных существование частных производных является *необходимым*, но не достаточным условием дифференцируемости функции.

Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных выражает следующая теорема.

Теорема 14. Если частные производные функции z'_x и z'_y непрерывны в точке $(x,\, y)$, то функция $z = f(x,\, y)$ дифференцируема в этой точке.

Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x,\, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x,\, y)$ и пусть $\vec{l}$ – некоторый вектор с началом в точке M. Направление вектора $\vec{l}$ определяют направляющие косинусы (см. с. 46). Переместим точку $M(x,\, y)$ вдоль направления $\vec{l}$ в точку $M_1(x{+}\Delta x,\, y{+}\Delta y)$, тогда функция $z = f(x,\, y)$ получит приращение

$$\Delta_l z = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y),$$

которое называется *приращением функции в данном направлении* l (рис. 52).

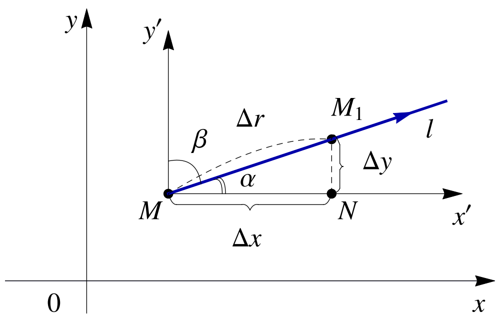


Рис. 52

Если $MM_1 = \Delta r$ есть величина перемещения точки M, то из прямоугольного треугольника MM_1N получаем $\Delta x = \Delta r \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta r \cdot \cos\beta$, следовательно,

$$\Delta_l z = f(x + \Delta r \cdot \cos\alpha,\, y + \Delta r \cdot \cos\beta) - f(x,\, y).$$

Производной функции $z = f(x,\, y)$ по направлению $\bar{l}$ называется предел (если он существует) отношения приращения $\Delta_l z$ функции $z = f(x,\, y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ к величине этого смещения Δr при условии, что $\Delta r \to 0$, т.е.

$$z'_l = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta r}.$$

Производная z'_l характеризует скорость изменения функции в направлении $\vec{l}$.

Если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением оси Ox, то производная по направлению совпадает с частной производной по переменной x. Аналогично, производная по направлению оси Oy совпадает с частной производной по переменной y.

Нетрудно доказать, что

$$z'_l = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta.$$

Для функции трех переменных $u = f(x,\, y,\, z)$ производная по направлению $\vec{l}$ определяется аналогично. Соответствующая формула имеет вид

$$u'_l = u'_x \cdot \cos\alpha + u'_y \cdot \cos\beta + u'_z \cdot \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Пример 146. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в направлении вектора $\vec{l}$, образующего угол $\alpha = 60^\circ$ с положительным направлением оси Ox.

Найдем частные производные $z'_x = 2x$, $z'_y = -2y$. Поскольку $\alpha = 60^\circ$, угол $\beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$, $\cos\alpha = 1/2$, $\cos\beta = \sqrt{3}/2$. Следовательно,

$$z'_l = 2x \cdot \frac{1}{2} + (-2y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \sqrt{3}y.$$

Пример 147. Найти производную функции $z = 2x + 3e^{x-y}$ в направлении вектора $\vec{l} = \{3;\, -3\}$.

Вектор $\vec{l}$ задан своими координатами, найдем направляющие косинусы вектора $\vec{l}$. Длина вектора

$$|\vec{l}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

тогда направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\beta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Частные производные функции $z = 2x + 3e^{x-y}$:

$$z'_x = 2 + 3e^{x-y}, \qquad z'_y = -3e^{x-y}.$$

Таким образом, производная в направлении вектора $\vec{l}$ равна

$$z'_l = \left(2 + 3e^{x-y}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-3e^{x-y}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}e^{x-y}.$$

Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке M, имеющий своими координатами частные производные функции z, вычисленные в данной точке. Обозначается градиент ∇z или $\operatorname{grad} z$:

$$\operatorname{grad} z = z'_x\vec{i} + z'_y\vec{j} \qquad (\text{или} \ \ \operatorname{grad} z = \{z'_x;\, z'_y\}).$$

Градиент функции $\operatorname{grad} z$ – это *вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции* $z = f(x, y)$ в данной точке и имеющий модуль $|\operatorname{grad} z| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}$, равный *скорости наибольшего возрастания.*

Пример 148. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = 3x^2y^3 - 4x$ в точке $M_0(-1;\, 2)$.

Найдем частные производные функции

$$z'_x = 6xy^3 - 4; \qquad z'_y = 9x^2y^2.$$

Вычислим значения частных производных в точке M_0:

$$z'_x = -52; \qquad z'_y = 36.$$

Получаем градиент grad z $= \{-52;\, 36\}$.

Скорость наибольшего возрастания

$$|\operatorname{grad} z| = \sqrt{(-52)^2 + (36)^2} = 20\sqrt{10}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. Пусть задана дифференцируемая функция двух переменных $z = f(x, y)$, и в точке $M_0(x_0, y_0)$ величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент функции в данной точке перпендикулярен линии уровня функции z, проходящей через эту точку.

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u = \{u'_x;\, u'_y;\, u'_z\}.$$

П р и м е р 149. Найти градиент функции $u = \dfrac{x}{y} + z^2$ в точке $M_0(2;\ 1;\ 0)$.

Находим частные производные функции

$$u'_x = \frac{1}{y}; \qquad u'_y = -\frac{x}{y^2}; \qquad u'_z = 2z.$$

Вычисляем значения частных производных в точке M_0:

$$u'_x(M_0) = \frac{1}{1} = 1; \quad u'_y(M_0) = -\frac{2}{1^2}; \quad u'_z = 2 \cdot 0 = 0.$$

Получаем $\operatorname{grad} u(M_0) = \{1;\ -2;\ 0\}$.

Частные производные высших порядков

Пусть имеется некоторая функция $z = f(x,\ y)$ от двух переменных x и y. Ее частные производные $z'_x = f'_x(x,\ y)$ и $z'_y = f'_y(x,\ y)$ также являются функциями двух переменных. Если они являются дифференцируемыми функциями, то их производные называются *частными производными второго порядка* (или просто *вторыми частными производными*) и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (z'_x)'_x = f''_{xx}(x,\ y);\\
z''_{xy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (z'_x)'_y = f''_{xy}(x,\ y);\\
z''_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (z'_y)'_y = f''_{yy}(x,\ y);\\
z''_{yx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (z'_y)'_x = f''_{yx}(x,\ y).
\end{aligned} \tag{32}$$

Производные z''_{xy} и x''_{yx} называются *смешанными производными.* Для смешанных производных выполняется следующая теорема.

Т е о р е м а 16. Если частные производные второго порядка функции $z = f(x,\ y)$ непрерывны в точке, то в этой точке производные z''_{xy} и x''_{yx} равны, т. е. результат дифференцирования не зависит от последовательности дифференцирования:

$$x''_{xy} = x''_{yx}.$$

П р и м е р 150. Найти частные производные второго порядка функции $z = x \cdot \ln y + \dfrac{y}{x}$.

В примере 142 (с. 140) уже найдены первые частные производные $z'_x = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$ и $z'_y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$. Продолжая дифференцирование, находим

$$z''_{xx} = \frac{2y}{x^3}; \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}; \qquad z''_{yy} = -\frac{x}{y^2}.$$

Пример 151. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^y$.

В примере 143 (с. 140) найдены первые производные $z'_x = y \cdot x^{y-1}$ и $z'_y = x^y \cdot \ln x$. Дифференцируя второй раз, находим

$$z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = yx^{y-2}\ln x; \quad z''_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

Аналогично определяются и записываются частные производные высших порядков от функций трех и большего числа переменных.

Теорема 17. Если для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какие-либо смешанные производные порядка $m \geqslant 2$ отличаются между собой только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они в этой точке имеют одно и то же значение.

Пример 152. Найти частные производные второго порядка функции $u = x^6 - y^4 + 3z^5$.

Первые частные производные найдены в примере 144 (с. 141). Частные производные второго порядка находятся аналогично:

$$u''_{xx} = 30x^4; \qquad u''_{yy} = -12y^2; \qquad u''_{zz} = 60z^3,$$

а все смешанные производные в данном случае равны нулю, т. е.

$$u''_{xy} = u''_{yx} = u''_{xz} = u''_{zx} = u''_{yz} = u_{zy} = 0.$$

Продолжая дифференцировать, можно определить частные производные третьего порядка (третьи частные производные) и т. д.

Пример 153. Для функции $z = 3x^2y^5 - 2\cos x + 7\ln y$ найти частные производные четвертого порядка.

Частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6x\,y^5 + 2\sin x, \qquad z'_y = 15x^2y^4 + \frac{7}{y}.$$

Частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y^5 + 2\cos x, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 60x^2y^3 - \frac{7}{y^2},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 30x\,y^4.$$

Частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -2\sin x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 30y^4, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 120x\,y^3,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 180x^2y^2 + \frac{14}{y^3}.$$

Частные производные четвертого порядка:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -2\cos x, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 120y^3,$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 360x\,y^2, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 360x^2y - \frac{42}{y^4}.$$

Дифференциал второго порядка

Напомним, что полный дифференциал первого порядка функции двух переменных имеет вид

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Аналогично, дифференциал второго порядка вычисляется по формуле

$$d^2z = d(dz) = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dx\,dy + z''_{yy}\,dy^2.$$

Пример 154. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции двух переменных $z = x^2 \ln y$.

Найдем частные производные первого порядка

$$z'_x = 2x\ln y, \qquad z'_y = \frac{x^2}{y}.$$

Тогда дифференциал первого порядка равен

$$dz = z'_x\,dx + z'_y\,dy = 2x\ln x\,dx + \frac{x^2}{y}\,dy.$$

Найдем частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = 2\ln y, \quad z''_{xy} = \frac{2x}{y}, \quad z''_{yy} = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Тогда дифференциал второго порядка равен

$$d^2z = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dx\,dy + z''_{yy}\,dy^2 = 2\ln y\,dx^2 + \frac{4x}{y}\,dx\,dy - \frac{x^2}{y^2}\,dy^2.$$

5.2. Экстремум функции двух переменных

Безусловный экстремум

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой строгого локального максимума (минимума) функции* $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad (f(x_0, y_0) < f(x, y)).$$

Значение функции $z = f(x, y)$ в точке строгого локального максимума (минимума) $f(x_0, y_0)$ называется *максимумом (минимумом) функции*.

Максимум или минимум функции $z = f(x, y)$ называется *экстремумом* этой функции.

Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.

Теорема 18 (*необходимое условие экстремума*). Пусть точка $M(x_0, y_0)$ является точкой экстремума дифференцируемой функции $z = f(x, y)$. Тогда частные производные функции $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ в этой точке равны нулю.

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума, называются *критическими* или *стационарными*.

Для того чтобы сформулировать достаточное условие экстремума, составим матрицу из частных производных второго порядка (матрицу Гессе)

$$G = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

и вычислим ее главные миноры в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_1 = |f''_{xx}(x_0, y_0)| = f''_{xx}(x_0, y_0);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = $$
$$= f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - f''_{xy}(x, y) \cdot f''_{yx}(x, y).$$

Теорема 19 (*достаточные условия экстремума*). Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды дифференцируема в критической точке $M_0(x_0, y_0)$, в которой $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Если:

1) $\Delta_2 > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума, причем, если

$\Delta_1 > 0$, то точкой строгого локального минимума;

$\Delta_1 < 0$, то точкой строгого локального максимума;

2) $\Delta_2 < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция не имеет локального экстремума;

3) $\Delta_2 = 0$, то невозможно сделать вывод о наличии экстремума в данной точке, требуются дополнительные исследования.

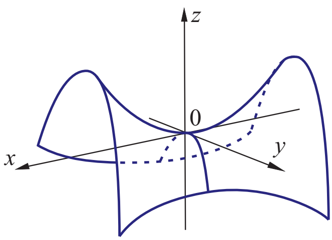


Рис. 53

Замечание. Если $\Delta_2 < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является так называемой *седловой* точкой функции $z = f(x, y)$, так как график функции в окрестности этой точки имеет вид «седла» (рис. 53). Такие седловые точки являются двумерными аналогами точек перегиба функций одной переменной.

Алгоритм нахождения экстремума функции нескольких переменных

1. Находим частные производные функции.

2. Приравниваем частные производные к нулю и решаем полученную систему уравнений, т.е. находим критические точки.

3. Для каждой критической точки проверяем выполнение достаточных условий существования экстремума и делаем соответствующие выводы.

4. Вычисляем значения функции в точках экстремума.

П р и м е р 155. Найти экстремумы функции

$$z = 2 \cdot \frac{x + y + x^2y + xy^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Находим частные производные

$$z'_x = \frac{2}{1+y^2} \cdot \frac{(1+2xy+y^2)(1+x^2)-(x+y+x^2y+xy^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$
$$= \frac{2}{1+y^2} \cdot \frac{1+y^2-x^2-x^2y^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+y^2)(1-x^2)}{(1+y^2)(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Аналогично

$$z'_y = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

Критические точки определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0, \\ \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = 0. \end{cases}$$

Получаем четыре решения: $A(1;\,1)$, $B(1;\,-1)$, $C(-1;\,1)$, $D(-1;\,-1)$.

Проверяем выполнение достаточного условия экстремума в каждой критической точке. Для этого находим частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}, \quad z''_{yy} = \frac{4y(y^2-3)}{(1+y^2)^3}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0$$

и составляем из них матрицу

$$G = \begin{pmatrix} \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{4y(y^2-3)}{(1+y^2)^3} \end{pmatrix}.$$

1. В точке $A(1;\,1)$ матрица имеет вид

$$G_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем главные миноры. $\Delta_2 = (-1)^2 - 0 = 1 > 0$, следовательно, в точке A функция имеет экстремум и, поскольку $\Delta_1 = -1 < 0$, то точка $A(1;\,1)$ – точка строгого локального максимума функции. Вычисляем $z_{\max} = z(1;\,1) = 2$.

2. В точке $B(1;\,-1)$ матрица имеет вид

$$G_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Главный минор $\Delta_2 = (-1)\cdot 1 - 0 = -1 < 0$, следовательно, экстремума нет и точка $B(1;\,-1)$ – седловая.

3. В точке $C(-1;\,1)$ матрица имеет вид

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Главный минор $\Delta_2 = 1 \cdot (-1) - 0 = -1 < 0$, следовательно, экстремума нет и точка $C(-1;\,1)$ также седловая.

4. В точке $D(-1;\,-1)$ матрица имеет вид

$$G_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Главный минор $\Delta_2 = 1^2 - 0 = 1 > 0$, следовательно, в точке D функция имеет экстремум, а так как главный минор $\Delta_1 = 1 > 0$, то точка $D(-1;\,-1)$ – точка строгого локального минимума функции. Вычисляем $z_{\min} = z(-1;\,-1) = -2$.

Условный экстремум

Рассмотрим функцию $z = f(x,\,y)$. Пусть аргументы x и y удовлетворяют условию $\varphi(x,\,y) = 0$. Это условие называется *уравнением связи*. Точка M_0 называется *точкой строгого условного максимума (минимума) функции* $z = f(x,\,y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $(x,\,y)$ из этой окрестности, удовлетворяющих условию $\varphi(x,\,y) = 0$, выполняется неравенство $f(x_0,\,y_0) > f(x,\,y)$ $(f(x_0,\,y_0) < f(x,\,y))$.

Одним из методов нахождения условного экстремума является *метод исключения неизвестных*. Он заключается в том, что из уравнения связи одну из переменных выражают через другую, например, выражают y через x: $y = \psi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим

$$z = f(x,\,y) = f(x,\,\psi(x)) = \widetilde{z}(x),$$

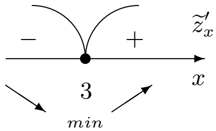
т. е. функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z = f(x,\,y)$.

Пример 156. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

Выразим из уравнения $3x + 2y = 11$ переменную y через x, получим $y = 5{,}5 - 1{,}5x$. Подставив полученное выражение в функцию z, получим

$$\widetilde{z}(x) = x^2 + 2(5{,}5 - 1{,}5x)^2 = 5{,}5x^2 - 33x + 60{,}5.$$

Производную
$$\widetilde{z}'_x = 11x - 33$$
приравняем к нулю и получим, что функция z имеет единственную критическую точку $x_0 = 3$. Определим знаки производной z_x справа и слева от этой точки.



Соответствующее значение $y_0 = 5{,}5 - 1{,}5 \cdot 3 = 1$.
Таким образом, $z_{min} = z(3;\, 0) = 3^2 + 2 \cdot 0^2 = 9$ при условии $3x + 2y = 11$.

В рассмотренном примере уравнение связи $\varphi(x,\, y) = 0$ является линейным относительно переменных x и y, поэтому его легко разрешить относительно одной из них.

Методом исключения неизвестных можно пользоваться, если ограничение $\varphi(x,\, y)$ линейная функция. В других случаях следует избегать использование этого метода, т. к. он может приводить к ошибочным результатам.

Если уравнение связи нелинейное, для нахождения условного экстремума обычно используют *метод множителей Лагранжа.* Вводится переменная λ, которая называется *множителем Лагранжа* и составляется функция трех переменных
$$L(x,\, y,\, \lambda) = f(x,\, y) + \lambda \cdot \varphi(x,\, y),$$
которая называется *функцией Лагранжа.*

Теорема 20 (*необходимое условие условного экстремума*). Пусть

1) точка $M_0(x_0,\, y_0)$ является точкой условного экстремума функции $z = f(x,\, y)$ при условии $\varphi(x,\, y) = 0$;

2) функции $f(x,\, y)$ и $\varphi(x,\, y)$ дифференцируемы в точке M_0;

3) $\mathrm{grad}\varphi(x_0, y_0) \neq 0$,

тогда существует такое значение λ_0, что точка $P(x_0, y_0, \lambda_0)$ – стационарная точка функции Лагранжа $L(x,\, y,\, \lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z = f(x,\, y)$ при условии $\varphi(x,\, y) = 0$ требуется найти стационарную функции $L(x,\, y,\, \lambda)$, что приводит нас к решению системы

уравнений
$$\begin{cases} L'_x = f_x(x,\, y) + \lambda \cdot \varphi'_x(x,\, y) = 0, \\ L'_y = f_y(x,\, y) + \lambda \cdot \varphi'_y(x,\, y) = 0, \\ \qquad L'_\lambda = \varphi(x,\, y) = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Первые два уравнения системы можно переписать в виде

$$\mathrm{grad} f(x,\, y) = -\lambda \cdot \mathrm{grad} \varphi(x,\, y),$$

т.е. *геометрический смысл условий Лагранжа* заключается в том, что в точке условного экстремума $M_0(x_0, y_0)$ градиенты функций $f(x,\, y)$ и $\varphi(x,\, y)$ коллинеарны.

Достаточные условия наличия экстремума основаны на использовании дифференциала второго порядка

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dx\, dy + L''_{yy}dy^2.$$

Теорема 21 (*достаточное условие условного экстремума*). Пусть $P_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ – стационарная точка функции Лагранжа, т.е. точка, являющаяся решением системы уравнений (33). Если в точке $P_0(x_0,\, y_0,\, \lambda_0)$ при всех $dx,\, dy$, удовлетворяющих уравнению

$$d\varphi = \varphi'_x(x_0,\, y_0)\, dx + \varphi'_y(x_0,\, y_0)\, dy = 0,$$

$d^2L < 0$, то точка $M_0(x_0,\, y_0)$ является точкой условного максимума, если $d^2L > 0$ – то точкой условного минимума.

Например, если $d^2L = 3dx^2 + 4dy^2$, то видно, что знак дифференциал второго порядка не зависит от значений dx и dy и всегда положительный, а если $d^2L = -5dx^2 - 2dy^2$, то дифференциал d^2L отрицательный.

Если знак дифференциала второго порядка зависит от значений dx и dy, например, $d^2L = 2dx^2 - 4dy^2$ или $d^2L = 3dx^2 - 8dxdy + 6dy^2$, то необходимо вычислить дифференциал от уравнения связи, приравнять его к нулю, выразить из полученного уравнения dy через dx (или dx через dy) и подставить его в полный дифференциал. После этого можно однозначно определить знак d^2L.

Рассмотрим применение метода Лагранжа на примерах.

Пример 157. Для функции $z = 5 - 3x - 4y$ найти экстремумы при наличии уравнения связи $x^2 + y^2 = 25$.

Представим уравнение связи в виде $x^2+y^2-25=0$ и составим функцию Лагранжа:

$$L(x,\, y,\, \lambda) = 5 - 3x - 4y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 25).$$

Найдем частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = -3 + 2\lambda \cdot x,$$

$$L'_x = -4 + 2\lambda \cdot y,$$

$$L'_\lambda = \varphi(x,\, y) = x^2 + y^2 - 25.$$

Составим и решим следующую систему:

$$\begin{cases} -3 + 2\lambda \cdot x = 0, \\ -4 + 2\lambda \cdot y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Из первого уравнения $2\lambda \cdot x = 3$; из второго уравнения $2\lambda \cdot y = 4$, тогда

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \qquad y = \frac{4}{2\lambda}.$$

Подставим в уравнение связи и упростим:

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 = 25,$$

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{16}{2\lambda^2} = 25,$$

$$\frac{25}{4\lambda^2} = 25,$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}.$$

В результате получаем две стационарные точки.

Если $\lambda = -\dfrac{1}{2}$, то

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -3, \qquad y = \frac{3}{2\lambda} = \frac{4}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -4,$$

т. е. $M_1(-3;\, -4)$.

Если $\lambda = \dfrac{1}{2}$, то

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3, \qquad y = \frac{3}{2\lambda} = \frac{4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 4,$$

т. е. $M_2(3;\, 4)$.

Легко видеть, что координаты обеих точек удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 25$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$L''_{xx} = (-3 + 2\lambda x)'_x = 2\lambda, \quad L''_{yy} = (-4 + 2\lambda x)'_y = 2\lambda,$$

$$L''_{xy} = (-3 + 2\lambda x)'_y = 0.$$

Дифференциал второго порядка функции Лагранжа примет вид

$$d^2L = 2\lambda \cdot dx^2 + 2\lambda \cdot dy^2.$$

При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$

$$d^2L = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot dx^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot dy^2 = -dx^2 - dy^2 < 0,$$

значит функция достигает условного максимума в точке M_1:
$z_{\max} = z(-3;\, -4) = 30$;
при $\lambda = \dfrac{1}{2}$

$$d^2L = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot dx^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot dy^2 = dx^2 + dy^2 > 0,$$

значит, функция достигает условного минимума в точке M_2:
$z_{\min} = z(3;\, 4) = -20$.

Пример 158. Методом множителей Лагранжа найти экстремум функции $f(x,\, y) = 2x + 16y$ при условии $xy + y^2 = 7$.

Запишем функцию Лагранжа:

$$L = 2x + 16y + \lambda(xy + y^2 - 7).$$

Найдем частные производные первого порядка

$$L'_x = 2 + \lambda y,\ L'_y = 16 + \lambda(x + 2y).$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 + \lambda y = 0, \\ 16 + \lambda x + 2\lambda y = 0, \\ xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим y: $y = -2/\lambda$. Подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$16 + \lambda x + 2(-2) = 0,$$

откуда $x = -12/\lambda$.

Подставим выражение для x и y в уравнение связи:

$$-\frac{12}{\lambda} \cdot \left(-\frac{2}{\lambda}\right) + \left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 7,$$

$$\frac{24}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 7,$$

$$\frac{28}{\lambda^2} = 7$$

Таким образом, $\lambda^2 = 4$, следовательно, $\lambda = \pm 2$.

Получили две критические точки:

при $\lambda = 2$: $x = -6$, $y = -1$, т. е. $A(-6;\,-1)$;

при $\lambda = -2$: $x = 6$, $y = 1$, т. е. $B(6;\,1)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$L''_{xx} = 0,\ L''_{yy} = 2\lambda,\ L''_{xy} = \lambda.$$

Дифференциал второго порядка функции Лагранжа запишется в виде

$$d^2L = 0 \cdot dx^2 + 2\lambda\, dx\, dy + 2\lambda\, dy^2 = 2\lambda(dx\, dy + dy^2).$$

Для определения знака второго дифференциала найдем дифференциал уравнения связи. Частные производные уравнения связи равны:

$$\varphi'_x = y, \qquad \varphi'_y = x + 2y.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'_x\, dx + \varphi'_y\, dy = y\, dx + (x + 2y)\, dy = 0,$$

откуда

$$dx = -\frac{x + 2y}{y}\, dy = -\left(\frac{x}{y} + 2\right) dy.$$

Подставим это выражение во второй дифференциал, получим

$$d^2L = 2\lambda\left(-\left(\frac{x}{y} + 2\right) dy^2 + dy^2\right) = -2\lambda\left(\frac{x}{y} + 1\right) dy^2.$$

Найдем знак второго дифференциала в точках A и B:

$$d^2L(A) = -2 \cdot 2\left(\frac{-6}{-1} + 1\right) < 0;\ d^2L(B) = -2 \cdot (-2)\left(\frac{6}{1} + 1\right) > 0.$$

Следовательно, в точке $A(-6;\,-1)$ функция достигает максимума ($z_{\max} = -28$), а в точке $B(6;\,1)$ – минимума ($z_{\min} = 28$) при условии $xy + y^2 = 7$.

Упражнения

143. Дана функция $u = \dfrac{x^2 - 3y^2}{\sqrt{x-y}}$. Вычислить значение данной функции в точке $A(3;\,-1)$.

144. Найти область определения функций:

а) $z = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}$;

б) $z = \dfrac{x^2 + 4xy - 3}{x + y - 5}$;

в) $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$;

г) $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$;

д) $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$;

е) $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$.

Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = f(x,\,y)$:

145. $z = x^2 y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5$.

146. $z = \dfrac{2^y}{y} + x^2 \operatorname{tg} x + \ln(5x^4 + 3y^2)$.

147. $z = (2 - x)^{y^2}$.

148. Для функции $z = \dfrac{xy}{x - y}$ найти частные производные z'_x и z'_y в точке $A(2;\,1)$.

149. Для функции $u = \operatorname{arctg}(xy^2 + z)$ найти частные производные в точке $A(2;\,1;\,0)$,

150. Найти производную функции $z = x - y$ в точке $M_0(0;\,0)$ по направлению вектора $\vec{l} = \{2;\,2\}$.

151. Найти производную функции $z = y^3 - x^2 y + 2xy$ в точке $M_0(-1;\,3)$ по направлению вектора $\vec{l} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$.

152. Найти производную функции $z = x + 3y$ в точке $M_0(2;\, -1)$ по направлению вектора $\vec{l}$, образующего с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = 30°$.

153. Найти производную функции $u = xy^2 + x^2 - xyz$ в точке $M_0(1;\, 2;\, 3)$ по направлению вектора $\vec{a} = \{1;\, -2;\, 2\}$.

154. Найти градиент функции $z = -y^3 - x^2y + 2xy$ в точке $M_0(0;\, 1)$, сделать рисунок.

155. Для функции $z = \left(5x^2y - y^3 + 7x + 2\right)^3$ найти длину вектора–градиента в точке $M_0(-1;\, 1)$.

156. Для функции $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ найти наибольшую скорость возрастания в точке $M(2;\, -2)$.

Для функций $z = f(x,\, y)$ найти все частные производные второго порядка:

157. $z = 2x^2y^3 - x^3y^5 - xy + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3.$

158. $z = \sin(xy).$

159. $z = \dfrac{y \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}.$

160. $z = \left(\dfrac{y}{x}\right)^4.$

161. $z = \ln\cos(2x - 3y).$

162. $u = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z.$

163. Для функции $z = e^{x^2 y}$ найти частные производные $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ и $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ в точке $M_0(1;\, 0)$.

164. Для функции $z = x^3 + 3x^2y - y^3$ найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков.

165. Исследовать на экстремум функции:
а) $z = y^2 + 2xy - 4x - 2y - 3;$
б) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 1;$
в) $z = 3x^2y - x^3 - y^4;$
г) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$

166. Найти экстремум функции $z = e^{xy}$ при условии $x + y = 1$.

167. Найти условный экстремум функции $z = x^2 - 3xy + 12x$, если $2x + 3y = 6$.

168. Найти условный экстремум функции $z = x + 9y$, если $xy = 1$.

169. Найти экстремум функции $z = 3x - 6y$, если $y^2 - xy = 1$.

6. Основы интегрального исчисления

6.1. Неопределенный интеграл

Рассмотрим задачу нахождения функции по ее производной. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором интервале, если на этом интервале выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. График первообразной называется *интегральной кривой.*

Пример 159. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси, так как для любого x выполняется равенство $(x^3)' = 3x^2$. Вместе с функцией $F(x) = x^3$ первообразной, для функции $f(x) = 3x^3$, является и любая функция $\Phi(x) = x^3 + C$, где C — произвольная постоянная.

1. Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то всякая функция $F(x) + C$, где C — произвольное постоянное число, также является первообразной для $f(x)$.
2. Две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную величину.

Из данных утверждений следует, что, зная одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, можно получить все ее первообразные, прибавляя к $F(x)$ всевозможные постоянные.

Множество функций $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, представляет собой множество интегральных кривых данной функции, графики которых являются «параллельными линиями» (рис. 54). Любую кривую из этого семейства можно получить из одной интегральной кривой $y = F(x)$ смещением на величину C вдоль оси Oy.

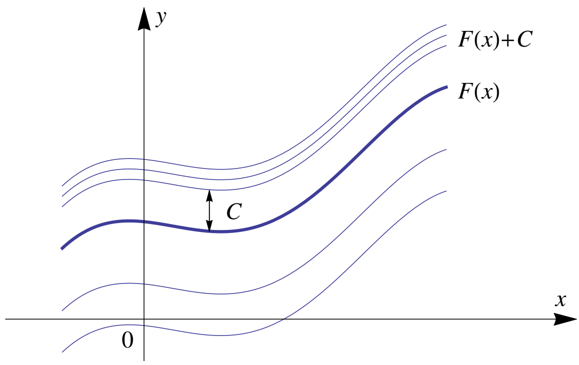


Рис. 54

Множество всех первообразных $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\displaystyle\int f(x)\,dx$. Здесь знак $\displaystyle\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, сама функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а x называется *переменной интегрирования*.

Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$, C — произвольная постоянная.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Дифференцирование и интегрирование — это две взаимно обратные операции.

Достаточным условием интегрируемости функции на некотором интервале является непрерывность этой функции на данном интервале.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = (F(x) + C)' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = (F(x)+C)'\;dx = f(x)\,dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)+C.$$

Частный случай:

$$\int dx = x + C.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

5. Интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

Таблица интегралов

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1, \\[2ex] \displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, & n = -1. \end{cases}$

2. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

3. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Методы интегрирования

Метод разложения (непосредственное интегрирование)

Метод разложения заключается в приведении подынтегрального выражения к табличной форме путем алгебраических преобразований и применения свойств неопределенного интеграла (вынос за скобку постоянного множителя и/или представление подынтегральной функции в виде суммы функций — разложения подынтегральной функции на слагаемые).

Пример 160. Найти $\displaystyle\int (5x^4 - 3x^2 + 1)\,dx.$

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 1)\,dx = 5\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C.$$

Пример 161. Найти $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{x^2}\,dx.$

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int dx - \int \frac{dx}{x} + 2\int x^{-2}\,dx =$$

$$= x - \ln|x| - \frac{2}{x} + C.$$

Пример 162. Найти $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^2 dx$.

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C.$$

Пример 163. Найти $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$.

$$\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx \; - \; \frac{1}{2}\int \cos x\, dx =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + C.$$

Пример 164. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \, \cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \, \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \, \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Пример 165. Найти $\int \frac{x^2}{1 - x^2}\, dx$.

$$\int \frac{x^2}{1 - x^2}\, dx = -\int \frac{x^2}{x^2 - 1}\, dx = -\int \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1}\, dx =$$

$$= -\int \frac{(x^2 - 1) + 1}{x^2 - 1}\, dx = -\left(\int \frac{(x^2 - 1)}{x^2 - 1}\, dx + \int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx\right) =$$

$$= -\left(\int dx + \int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx\right) = -x - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C.$$

Пример 166. Найти $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$.

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 9} = \int \frac{dx}{4(x^2 - 9/4)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 - (3/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3/2} \ln\left|\frac{x - 3/2}{x + 3/2}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x - 3/2}{x + 3/2}\right| + C.$$

Замена переменной интегрирования

Сделаем замену $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x) = f[\varphi(t)]$, $dx = \varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Вместо замены $x = \varphi(t)$ иногда удобно применять подстановку $t = \psi(x)$.

Если интеграл $\int f(x)\,dx$ является табличным

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

то интеграл $\int f(ax+b)dx$ может быть найден с помощью подстановки $t = ax + b$, т.к. $dt = d(ax+b) = a\,dx$, следовательно, $dx = \dfrac{1}{a}dt$ и

$$\int f(ax+b)dx = \int f(t) \cdot \frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

П р и м е р 167. Вычислим интеграл $\int \dfrac{dx}{4x^2-9}$ из примера 166, используя замену переменных. Делаем подстановку $t = 2x$ и находим $dt = d(2x) = (2x)'dx = 2\,dx$, тогда $dx = 1/2\,dt$, следовательно,

$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \int \frac{dx}{(2x)^2-3^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t^2-3^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\cdot 3} \ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C.$$

П р и м е р 168. Вычислим интеграл $\int \sqrt{x+3}\,dx$. Делаем подстановку $t = x + 3$ и находим $dt = d(x+3) = (x+3)'dx = dx$. Отсюда

$$\int \sqrt{x+3}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}dt = \frac{3}{2}t^{3/2} + C = \frac{3}{2}(x+3)^{3/2} + C.$$

Пример 169. Вычислим интеграл $\int \cos(3x-5)\,dx$. Делаем подстановку $t = 3x - 5$ и находим $dt = d(3x+5) = (3x+5)'dx = 3\,dx$, откуда $dx = \frac{1}{3}dt$. Данный интеграл запишется в виде

$$\int \cos(3x-5)dx = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x-5) + C.$$

Пример 170. Вычислим интеграл $\int e^{x/4}dx$. Делаем подстановку $t = \frac{1}{4}x$ и находим $dt = d\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{4}dx$, откуда $dx = 4dt$. Данный интеграл запишется в виде

$$\int e^{x/4}dx = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{x/4} + C.$$

Для интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в квадратном трехчлене выделяют полный квадрат и осуществляют линейную замену переменной.

Пример 171. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{9x^2-3x-20}$. В квадратном трехчлене выделяем полный квадрат

$$9x^2-3x-20 = 9\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{20}{9}\right) = 9\left(x^2 - 2\cdot\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{20}{9}\right) =$$

$$= 9\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{81}{36}\right) = 9\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{9}{4}\right),$$

а затем осуществляем замену этого выражения на новую переменную $t = x - \frac{1}{6}$, $dt = dx$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{9x^2-3x-20} = \int \frac{dx}{9\left((x-1/6)^2 - 9/4\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x-1/6)^2 - 9/4} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2 - (3/2)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot 3/2}\ln\left|\frac{t-3/2}{t+3/2}\right| + C = \frac{1}{27}\ln\left|\frac{3x-5}{3x+4}\right| + C.$$

Этот же интеграл можно вычислить, используя другую замену. Выделим полный квадрат таким образом:

$$9x^2-3x-20 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 20 = \left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4},$$

а затем введем замену $t = 3x - 1/2$, $dt = 3dx$, $dx = 1/3\,dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{9x^2 - 3x - 20} = \int \frac{dx}{(3x-1/2)^2 - 81/4} = \int \frac{dx}{(3x-1/2)^2 - 81/4} =$$

$$= \int \frac{1/3\,dt}{t^2 - (9/2)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot 9/2} \ln\left|\frac{t-9/2}{t+9/2}\right| + C = \frac{1}{27} \ln\left|\frac{3x-5}{3x+4}\right| + C.$$

Пример 172. Вычислим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 12x - 4x^2}}$.

Учитывая, что

$$16 - 12x - 4x^2 = -4\left(x^2 + 3x - 4\right) = -4\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4\right) =$$

$$= -4\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) = 4\left(\frac{25}{4} - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2\right),$$

делаем замену $t = x + \frac{3}{2}$. Эта замена переменной позволяет свести искомый интеграл к табличному

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 12x - 4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(25/4 - (x+3/2)^2\right)}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{25/4 - t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(5/2)^2 - t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{5/2} + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x+3}{5} + C.$$

Если подынтегральная функция является произведением двух множителей, один из которых зависит от некоторой функции $\psi(x)$, а другой является производной этой функции (с точностью до постоянного множителя), то нужно применять подстановку $t = \psi(x)$.

Пример 173. Вычислим интеграл $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. Делаем подстановку $t = x^2 + 1$ и находим $dt = d\left(x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)' dx = 2x\,dx$. Данный интеграл запишется в виде

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Пример 174. Вычислим интеграл $\int \operatorname{tg} dx$. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, таким образом,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Заменяем $t = \cos x$ и находим $dt = (\cos x)'dx = -\sin x\,dx$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 175. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$. Делаем подстановку $t = \ln x$ и находим $dt = d(\ln x) = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}dx$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две непрерывно-дифференцируемые функции. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\displaystyle\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\displaystyle\int v\,du$.

При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден достаточно просто.

Применение метода интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл, или подобен ему.

Так, например, для интегралов вида

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,dx, \int P(x)a^{\beta x}dx, \int P(x)\sin\alpha x\,dx, \int P(x)\cos\alpha x\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, за u следует взять многочлен $P(x)$, а за dv — соответственно выражения $e^{\alpha x}$, $a^{\beta x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$.
А для интегралов вида

$$\int P(x)\ln\alpha x\,dx, \int P(x)\log_a\beta x\,dx, \int P(x)\arcsin\alpha x\,dx,$$

$$\int P(x)\arccos\alpha x\,dx, \int P(x)\,\mathrm{arctg}\,\alpha x\,dx, \int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,\alpha x\,dx,$$

за u принимают соответственно функции $\ln \alpha x$, $\log_a \beta x$, $\arcsin \alpha x$, $\arccos \alpha x$, $\operatorname{arctg} \alpha x$, $\operatorname{arcctg} \alpha x$, а за dv — выражение $P(x)\,dx$.

Пример 176. Найдем интеграл $\int (3x-2)\cos(5x)\,dx$.

Введем обозначения $u = 3x-2$, $dv = \cos(5x)\,dx$. Тогда $du = 3dx$. Для нахождения v введем замену $t = 5x$, тогда $dt = 5dx$ и $dx = 1/5dt$: $v = \int \cos(5x)\,dx = \int \frac{1}{5}\cos t\,dt = \frac{1}{5}\sin t = \frac{1}{5}\sin(5x)$, получаем

$$\int (3x-2)\cos(5x)\,dx = (3x-2)\cdot\frac{1}{5}\sin(5x) - \frac{1}{5}\int \sin(5x)\cdot 3\,dx.$$

При вычислении получившегося интеграла используем ту же замену $(t = 5x)$ и в итоге получаем

$$\int (3x-2)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{5}(3x-2)\sin(5x) + \frac{3}{25}\cos(5x) + C.$$

Пример 177. Найдем интеграл $\int (x^2-7x)e^x\,dx$.

Обозначим $u = x^2 - 7x$, $dv = e^x\,dx$. Тогда $du = 2x - 7\,dx$, $v = e^x$ и

$$\int (x^2-7x)e^x\,dx = (x^2-7x)e^x - \int (2x-7)e^x\,dx.$$

В полученном в правой части интеграле снова введем обозначения $u = 2x - 7$, $dv = e^x\,dx$, тогда $du = 2\,dx$, $v = e^x$ и

$$(x^2-7x)e^x - \int (2x-7)e^x\,dx = (x^2-7x)e^x - \left((2x-7)e^x - \int 2e^x\,dx\right) =$$

$$= (x^2-7x)e^x - (2x-7)e^x + 2e^x + C.$$

Пример 178. Найдем интеграл $\int x^3 \ln x\,dx$.

Здесь $u = \ln x$, $dv = x^3\,dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^4}{4}$ и

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Иногда, перед применением формулы интегрирования по частям, целесообразно сделать замену переменных.

Пример 179. Найдем интеграл $\int \operatorname{arctg}(3x)\,dx$.

Сначала используем замену переменных: $t = 3x$, $dt = 3\,dx$, тогда $dx = 1/3\,dt$.

$$\int \operatorname{arctg}(3x)\,dx = \int \operatorname{arctg} t \cdot \frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} t\,dt.$$

Обозначим $u = \operatorname{arctg} t$, $dv = dt$. Тогда $du = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $v = t$ и

$$\frac{1}{3}\int \operatorname{arctg} t\,dt = \frac{1}{3}\left(t \operatorname{arctg} t - \int \frac{t\,dt}{1+t^2}\right).$$

При вычислении интеграла $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{1+t^2}$ используем замену $z = 1+t^2$, тогда $dz = 2t\,dt$ и $t\,dt = \dfrac{1}{2}dz$:

$$\int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{3}\left(t \operatorname{arctg} t - \int \frac{t\,dt}{1+t^2}\right) = \frac{1}{3}\left(t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{6}\ln|1+t^2| + C = \frac{1}{3}3x \operatorname{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\ln|1+(3x^2)| + C =$$

$$= x \operatorname{arctg}(3x) - \frac{1}{6}\ln|1+9x^2| + C.$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Простейшей рациональной функцией является многочлен степени n, т. е. функция вида

$$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} + b_n, \tag{34}$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — действительные числа, причем $b_0 \neq 0$. Для простоты будем считать, что $b_0 = 1$.

Действительное число a называется *корнем* многочлена $Q_n(x)$, если $Q_n(a) = 0$.

Каждый многочлен $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами единственным образом разлагается на линейные и квадратичные множители:

$$\begin{aligned} Q_n(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_{m_k})^{m_k}\times \\ \times(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}\ldots, \end{aligned} \tag{35}$$

где p_i, q_i $(i = 1, 2, ...)$— действительные коэффициенты, причем $p_i^2 - 4q_i < 0$, т.е. трехчлены $x^2 + p_i x + q_i$ не имеют действительных корней и, следовательно, неразложимы на действительные линейные множители, а $m_1 + m_2 + \ldots + m_k + 2(n_1 + n_2 + \ldots) = n$.

Корень a_i многочлена называется *простым*, если $m_i = 1$, и *кратным*, если $m_i > 1$; число m_i называется кратностью корня a_i.

Дробно-рациональной функцией $f(x)$ называется отношение двух многочленов
$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$
причем предполагается, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих множителей.

Рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, т. е. $m < n$. Если же $m \geqslant n$, то рациональная дробь называется *неправильной*, и в этом случае, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде
$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_n(x)},$$
где $R_{m-n}(x)$, $\tilde{P}(x)$ — некоторые многочлены, а $\dfrac{\tilde{P}(x)}{Q_n x}$ является правильной рациональной дробью.

Пример 180. Рациональная дробь $\dfrac{x^5+1}{x^2+1}$ является неправильной дробью. Разделим $P_5(x) = x^5 + 1$ на $Q_2(x) = x^2 + 1$ «столбиком».

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^5 + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{3-3}
 & x^5 + x^3 & x^3 - x \\ \cline{1-2}
- & -x^3 + 1 & \\
 & x^3 - x & \\ \cline{2-2}
 & x + 1 &
\end{array}$$

Следовательно,
$$\frac{x^5+1}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1},$$

причем $R_3(x) = x^3 - x$ – многочлен третьей степени, а дробь $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ есть правильная дробь.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные рациональные дроби следующего вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$,

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Правильная рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$ с действительными коэффициентами, знаменатель которой $Q_n(x)$ имеет вид (35), разлагается единственным способом на сумму простейших дробей по правилу

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} + \\ &\quad + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{B_{m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} + \dots + \\ &+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{C_{n_1}x+D_{n1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots \frac{M_{n_2}x+N_{n2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}} + \dots .\end{aligned} \tag{36}$$

В этом разложении A_1, A_2, …, A_{m_1}, B_1, B_2, …, B_{m2}, C_1, D_1, C_2, D_2, …, C_{n1}, D_{n1}, M_1, N_1, M_2, N_2, …, M_{n2}, N_{n2}, … – некоторые действительные постоянные, часть которых может быть равна нулю.

Для нахождения этих постоянных нужно правую часть равенства (36) привести к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных постоянных называется *методом неопределенных коэффициентов*. Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей. Для первых двух типов имеем

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Эти формулы легко получить, сделав замену переменной $t = x - a$.

Для того чтобы найти интеграл от простейшей дроби III типа, выделим в числителе дроби производную знаменателя. Заметим, что $(x^2+px+q)' = 2x+p$. Выделим выражение $2x+p$ в числителе. Для этого числитель представим в виде

$$Ax + B = (2x+p)\cdot\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B.$$

Тогда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом интеграле числитель является производной знаменателя, поэтому

$$\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln(x^2+px+q) + C,$$

так как $x^2+px+q > 0$ для любого значения x. Для вычисления второго интеграла выделяем в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Делаем замену переменной $t = x + \dfrac{p}{2}$, получаем $x^2+px+q = t^2+a^2$, где $a = \dfrac{\sqrt{4p-p^2}}{2}$. Отсюда следует

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q} = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Окончательно получаем

$$\text{III.} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2} \ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Пример 181. Вычислим интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Производная знаменателя $(x^2-4x+8)' = 2x-4$, выделяя в знаменателе полный квадрат, получаем

$$(x^2-4x+8) = (x^2-4x+4)+4 = (x-2)^2+2^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx = \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь, как интегрируются простейшие дроби IV типа. Для того чтобы найти $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где $p^2/4-q<0$, выделим в числителе производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, и разобьем интеграл на сумму двух интегралов (как в предыдущем случае):

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \\ + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Первый интеграл в правой части равенства находится с помощью подстановки $x^2+px+q=t$, а во втором в знаменателе выделяют полный квадрат и берут его по частям, сделав линейную замену $t = x+\frac{p}{2}$.

Для интегрирования дробно-рациональных функций необходимо:

1) представить дробно-рациональную функцию в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;

2) разложить знаменатель правильной рациональной дроби на линейные и квадратичные множители по формуле (35) и представить дробь в виде суммы простейших дробей по формуле (36);

3) вычислить неопределенные коэффициенты;

4) проинтегрировать полученный многочлен и простейшие дроби.

Пример 182. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^5+4x^4-7x^3-21x^2+26x+5}{x^3+x^2-6x}dx.$$

Дробь является неправильной, поэтому сначала выделяем из нее целую часть:

$$\frac{x^5+4x^4-7x^3-21x^2+26x+5}{x^3+x^2-6x}=x^2+3x-4+\frac{x^2+2x+5}{x^3+x^2-6x}.$$

Затем раскладываем знаменатель правильной дроби на множители:

$$x^3+x^2-6x=x\left(x^2+x-6\right)=x(x-2)(x+3).$$

Так как каждый из множителей x, $x-2$, $x+3$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{x^2+2x+5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+2x+5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

Приравниваем числители, сгруппировав члены с одинаковыми степенями x:

$$x^2+2x+5=x^2(A+B+C)+x(A+3B-2C)+(-6A).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ A+3B-2C=2, \\ -6A=5, \end{cases}$$

решив которую, найдем $A = -5/6$, $B = 13/10$, $C = 8/15$. Таким образом, разложение дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+5}{x(x-2)(x+3)} = \frac{-5/6}{x} + \frac{13/10}{x-2} + \frac{8/15}{x+3}.$$

Неизвестные A, B и C в разложении можно было определить другим способом. Приравняв числители, можно придать переменной столько частных значений, сколько содержится в системе неизвестных, в данном случае — три частных значения.

Особенно удобно придавать x значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. В нашем примере действительными корнями знаменателя являются числа 0, 2 и -3. Подставляем эти значения в обе части равенства

$$x^2+2x+5 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2).$$

При $x = 0$ получаем $5 = A \cdot (-2) \cdot 3$, откуда следует $A = -5/6$; при $x = 2$ получим $2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = B \cdot 2 \cdot (2+3)$, откуда находим $B = 13/10$; при $x = -3$ имеем $-3^2 + 2 \cdot (-3) + 5 = C \cdot (-3) \cdot (-3-2)$, откуда получаем $C = 3/15$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^5+4x^4-7x^3-21x^2+26x+5}{x^3+x^2-6x}dx =$$
$$= \int \left(x^2+3x-4+\frac{x^2+2x+5}{x^3+x^2-6x}\right)dx = \int (x^2+3x-4)dx -$$
$$-\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{13}{10}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{8}{15}\int\frac{dx}{x+3} =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x - \frac{5}{6}\ln|x| + \frac{13}{10}\ln|x-2| + \frac{8}{15}\ln|x+3| + C.$$

П р и м е р 183. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx.$$

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, и многочлен в знаменателе разложен на множители. Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

а множителю $(x+3)$ — простейшая дробь $\dfrac{D}{x+3}$. Следовательно,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+3},$$

откуда получаем

$$x^2+1 = A(x-1)^2(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x+3) + D(x-1)^3.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 1 и -3. Полагая $x = 1$, получим $2 = 4C$, т.е. $C = 1/2$. При $x = -3$ получаем $10 = -64D$, т.е. $D = -5/32$.

Сгруппируем коэффициенты по степеням x и сравним их:

$$\begin{aligned} x^2+1 = x^3(A+D) + x^2(A+B-3D) &+ \\ + x(-5A+2B+C+3D) &+ (3A-3B+3C-D). \end{aligned}$$

В левой части равенства нет члена с x^3, значит, коэффициент при x^3 равен 0, $A+D=0$, следовательно, $A = -D = 5/32$. Для определения B приравняем коэффициенты при x^2. Получаем $1 = A+B-3D$, откуда находим, что $B = 3/8$. Следовательно,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{5/32}{x-1} + \frac{3/8}{(x-1)^2}\frac{1/2}{(x-1)^3} - \frac{5/32}{x+3},$$

и интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1^3)(x+3)}dx = \frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2} &+ \\ + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3} - \frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3} &= \\ = \frac{5}{32}\ln|x-1| + \frac{3}{8(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{5}{32}\ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

Пример 184. Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$$

Подынтегральная рациональная дробь является правильной. Знаменатель содержит квадратичный множитель, который неразложим на линейные множители, так как $\dfrac{p^2}{4} - q = \dfrac{1^2}{4} - 1 = -\dfrac{3}{4} < 0$. Следовательно, разложение рациональной дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Приводим выражение к общему знаменателю, приравниваем числители

$$\begin{aligned} 2x^2+x+3 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+2) &= \\ = x^2(A+B) + x(A+2B+C) &+ (A+2C). \end{aligned}$$

Действительным корнем знаменателя является число (-2). При $x = -2$ получаем $9 = 3A$, откуда находим $A = 3$. Сравнивая коэффициенты при x^2 и x^0, получаем $2 = A + B$, откуда $B = 2 - A = -1$; $3 = A + 2C$, откуда $C = (3 - A)/2 = 0$. Следовательно,

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{3}{x+2} - \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x+2)(x^2+x+1)} dx = 3\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} =$$
$$= 3\ln|x+2| + \int \frac{1/2(2x+1) - 1/2}{x^2+x+1} dx =$$
$$= 3\ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} =$$
$$= 3\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование некоторых видов иррациональных функций

1. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ и $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

Для вычисления первого интеграла в квадратном трехчлене выделяют полный квадрат и осуществляют линейную замену переменной (см. пример 171 на С. 166).

Пример 185. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Учитывая, что $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$, замена $t = x + 2$ позволяет свести искомый интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C =$$
$$= \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+5}\right| + C.$$

При вычислении второго интеграла поступают так же, как при интегрировании простейшей дроби III типа (см. С. 173). Сначала в числителе выделяют производную от квадратного трехчлена, затем разбивают интеграл на сумму двух интегралов. В первом интеграле делают замену $t = ax^2 + bx + c$, во втором выделяют полный квадрат и осуществляют линейную замену.

П р и м е р 186. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$.

Производная квадратного трехчлена $(8+4x+x^2)' = 4-8x$. Выделяя в квадратном трехчлене полный квадрат, получаем

$$8+4x+x^2 = -(4x^2-4x-8) = -\big((2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2-1^2-8\big) = \\ = -\big((2x-1)^2-9\big) = 9-(2x-1)^2.$$

Осуществляем замену $t_1 = 8+4x-4x^2$, $dt_1 = 4-8x$ и $t_2 = 2x-1$, откуда получаем $x = (t_2+1)/2$, $dx = dt_2/2$. В результате

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}} = \int \frac{-1/8(4-8x)+1/2}{\sqrt{8+4x-4x^2}}dx = \\ = -\frac{1}{8}\int \frac{4-8x}{8+4x-4x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x-1)^2}} = \\ = -\frac{1}{8}\int \frac{dt_1}{\sqrt{t_1}} + \frac{1}{4}\int \frac{dt_2}{\sqrt{9-t_2^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{t_1} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{t_2}{3} + C = \\ = -\frac{1}{4}\sqrt{8+4x-4x^2} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{2x-1}{3} + C.$$

Рассмотрим иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций. Такое преобразование называется *рационализацией.*

Обозначим рациональную функцию буквой R.

2. Интегралы вида $\displaystyle\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}\right)dx$.

Рационализация осуществляется при помощи замены $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\dfrac{m}{n}$, …, $\dfrac{p}{q}$.

П р и м е р 187. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Поскольку $\sqrt{x} - x^{1/2}$, а $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, то $k = 6$. Осуществляем замену $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} = \\ = 6\int \left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|+C\right) = \\ = 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1| = \\ = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C.$$

3. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$ можно рационализировать подстановкой $ax + b = t^n$, а интегралы более общего вида $\int R\left(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}\right) x^{m-1} dx$ – подстановкой $ax^m + b = t^n$.

Пример 188. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$.
Заменим $x^4+1=t^3$, тогда $4x^3\,dx = 3t^2\,dt$ и $x^3\,dx = \frac{3}{4}t^2\,dt$. Получаем

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}} = \frac{3}{4}\int \frac{t^2\,dt}{1+t} =$$
$$= \frac{3}{4}\int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C =$$
$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4+1} + \frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{x^4+1}\right| + C.$$

Упражнения

Вычислить неопределенные интегралы:

170. $\int \frac{\sqrt[4]{x}-2x+5}{x^2}\,dx.$

171. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

172. $\int \frac{x^2-5}{x^2+2}\,dx.$

173. $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\,dx.$

Вычислить интегралы методом разложения или используя линейную замену:

174. $\int \frac{dx}{7x^2-3}.$

175. $\int \frac{6dx}{\sqrt{9x^2-2}}.$

176. $\int \frac{15dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

177. $\int \frac{dx}{1+6x^2}.$

Вычислить неопределенные интегралы, используя метод замены переменной:

178. $\int \cos 3x\, dx.$

179. $\int e^{7-2x}\, dx.$

180. $\int \frac{dx}{\cos^2(2-7x)}.$

181. $\int \frac{dx}{5x+2}.$

182. $\int \sqrt[4]{(11-5x)^3}\, dx.$

183. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}.$

184. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-12x-9x^2}}.$

Вычислить неопределенные интегралы:

185. $\int \sqrt[3]{x^2+7} \cdot x\, dx.$

186. $\int \frac{x^3 dx}{3x^4-2}.$

187. $\int \operatorname{ctg}(5x+1)\, dx.$

188. $\int \frac{\sin x}{3+\cos x}\, dx.$

189. $\int \frac{x dx}{1+x^4}.$

190. $\int \frac{dx}{(2x+5)\ln^3(2x+5)}.$

191. $\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}\, dx.$

Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

192. $\int \ln(3-2x)\, dx.$

193. $\int (5x-2)\sin 3x\, dx.$

194. $\int (3x-2)\, e^{-7x}\, dx.$

195. $\int \operatorname{arctg} 8x\, dx.$

196. $\int \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\, dx.$

197. $\int (2x-3)\cos 2x\, dx.$

Вычислить неопределенные интегралы от рациональных дробей:

198. $\displaystyle\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx.$ **199.** $\displaystyle\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}dx.$

200. $\displaystyle\int \frac{3x+13}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx.$ **201.** $\displaystyle\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы:

202. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}dx.$ **203.** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}.$

204. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$ **205.** $\displaystyle\int \frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}}.$

206. $\displaystyle\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}.$

6.2. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла

Рассмотрим задачу о нахождении площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь фигуры $aABb$ (рис. 55), ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;\, b]$ функции $y=f(x)$ и отрезками прямых $y=0$, $x=a$, $x=b$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.*

Разобьем рассматриваемый отрезок $[a;\, b]$ произвольным образом точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ на n частичных отрезков и обозначим их длины $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1};\, x_k]$, $k=\overline{1,n}$ выберем произвольную точку ξ_k. Произведение $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ равно площади прямоугольника, имеющего основание Δx_k и высоту $f(\xi_k)$, а сумма $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ приближенно равна площади криволинейной трапеции $aABb$. Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

Если существует конечный предел интегральной суммы при n, стремящемся к бесконечности, не зависящий от способа разбиения

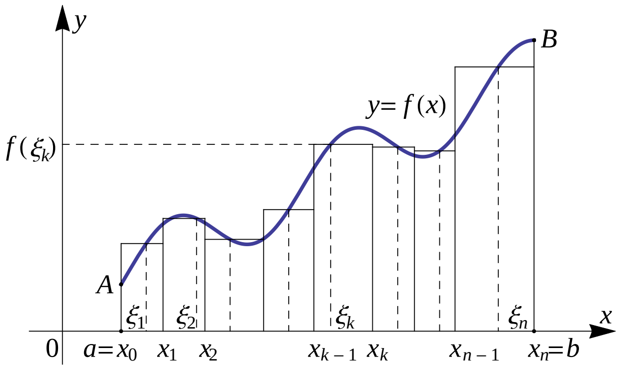


Рис. 55

отрезка $[a;\, b]$ и выбора точек ξ_k, то этот предел называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ и обозначается символом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k,$$

где $f(x)$ — *подынтегральная функция*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*, числа a и b – *пределы интегрирования* (a — нижний предел, b — верхний предел).

Теорема 22. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 23. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется *формулой Ньютона – Лейбница.* Она дает правило вычисления определенного интеграла.

П р и м е р 189. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Основные свойства определенного интеграла

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a;\, b]$ функцию $f(x)$.

1. Определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

3. Определенный интеграл от суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) определенных интегралов от этих функций:

$$\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

Данное свойство распространяется на случай суммы (разности) любого конечного числа функций.

4. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

5. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где $a \leqslant c \leqslant b$.

Пример 190. Вычислить $\int\limits_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5)dx$.

Используя свойства 2 и 3, получаем

$$\int\limits_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5)dx = 3\int\limits_1^2 x^4 dx + 2\int\limits_1^2 x^2 dx - 5\int\limits_1^2 dx =$$

$$= \frac{3}{5}\,x^5\,\Big|_1^2 + \frac{2}{3}\,x^3\,\Big|_1^2 - 5x\Big|_1^2 = \frac{3}{5}\left(2^5 - 1\right) + \frac{2}{3}\left(2^3 - 1\right) - 5\,(2-1) = \frac{274}{15}.$$

Замена переменной под знаком определенного интеграла

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, функция $x = \varphi(t)$ строго монотонна и имеет на отрезке $[\alpha;\, \beta]$ непрерывную производную. Пусть $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда формула замены переменной в определенном интеграле выглядит так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Пример 191. Вычислим интеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

Воспользуемся подстановкой $t = \ln x$, тогда $dt = \frac{1}{x}\,dx$, причем при $x = 1$, $t = 0$, а при $x = e$, $t = 1$:

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$, тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 192. Вычислим интеграл $\int_0^\pi x\cos x\,dx$.

Обозначим $u = x$, $dv = \cos x\,dx$, получим

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = (x\sin x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \pi\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin 0 - (-\cos x)\Big|_0^\pi =$$

$$= \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ является некоторым числом. Смысл этого числа зависит от геометрического, физического и прочего смысла функции $f(x)$.

Если переменная x является временем, а функция $y = f(x)$ — скоростью движения некоторого тела, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен длине пути, пройденного за время $x = b - a$.

Если функция $y = f(x)$ — производительность труда, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен объему продукции, выпущенной за промежуток времени $x = b - a$.

Если x — перемещение, а функция $y = f(x)$ — сила, действующая на перемещаемое тело, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$

численно равен работе силы на пройденном пути.

Если $y = f(x)$ рассматривается как график некоторой неотрицательной функции, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Пример 193. Найти путь, пройденный материальной точкой за четвертую секунду, если скорость ее прямолинейного движения задана функцией $v = 3t^2 - 2t - 3$ м/с.

$$S = \int\limits_3^4 (3t^2 - 2t - 3)\,dt = (t^3 - t^2 - 3t)\Big|_3^4 = 27\,(\text{м}).$$

Пример 194. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 4$ (рис. 56).

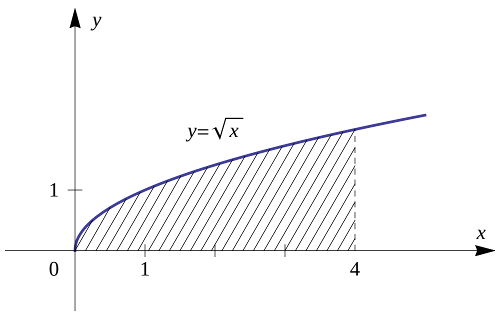


Рис. 56

$$S = \int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}\,(\text{кв. ед.}).$$

Решение задач на вычисление площадей плоских фигур упрощает следующая теорема.

Теорема 24. Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ (рис. 57). Тогда площадь S фигуры, заключенной между графиками данных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b (f_1(x) - f_2(x))\ dx.$$

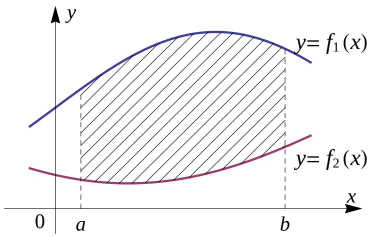


Рис. 57

П р и м е р 195. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ (рис. 58).

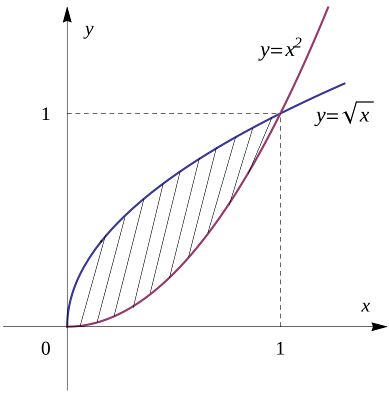


Рис. 58

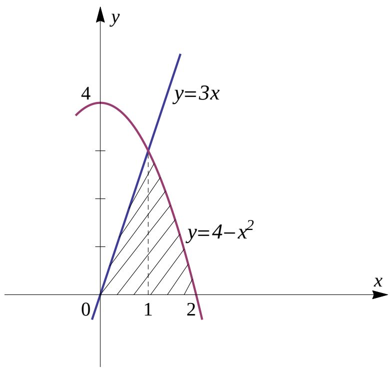


Рис. 59

Найдем точки пересечения графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$. Их координаты (0; 0) и (1; 1). Следовательно,

$$S = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\ dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ (\text{кв.ед.}).$$

П р и м е р 196. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3x$, $y = 4 - x^2$ и осью Ox, находящейся в первой четверти координатной плоскости (рис. 59).

Графики функций $y = 3x$ и $y = 4 - x^2$ пересекаются в точке (1; 3), линия $y = 3x$ пересекает ось Ox в точке (0; 0), линия $y = 4-x^2$ пересекает ось Ox в точке (2; 0). Площадь криволинейной трапеции равна

$$S = \int_0^1 3x\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1 + \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = \frac{19}{6} \text{ (кв.ед.)}.$$

Упражнения

Вычислить определенные интегралы:

207. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

208. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$.

209. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x}\,dx$.

210. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$.

211. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2}$.

212. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5 - x}}$.

213. $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

214. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 9}\,dx$.

215. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x + 1}$.

216. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

217. $\displaystyle\int_1^5 x\sqrt{x - 1}\,dx$.

218. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5 - 4x}}$.

Вычислить определенные интегралы:

219. $\int\limits_0^1 x\,e^{-x}\,dx.$

220. $\int\limits_0^{\pi/2} (1+5x)\sin x\,dx.$

221. $\int\limits_1^2 x^2\ln x\,dx.$

222. $\int\limits_{-1}^1 x\operatorname{arctg} x\,dx.$

223. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2$ и прямыми $x = -1$, $x = 2$ и $y = 0$.

224. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 6x + 5$ и осью Ox.

225. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 3x$ и $y = x$.

226. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x$ и $y = 4 - x^2$.

227. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -2x^2$ и $y = 1 - 3x^2$.

228. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x^3$ и $y = 4 - 2x$.

229. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2$, $y = 1 + 2x$ и осью Ox.

230. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \dfrac{2}{x}$ и прямыми $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

6.3. Несобственный интеграл

Определенный интеграл — это интеграл от непрерывной функции, заданной на конечном отрезке. Непрерывная функция ограничена на отрезке. Но ряд задач (в частности, задачи теории случайных величин) приводит к расширению понятия определенного интеграла на случаи бесконечных промежутков и разрывных функций. Такие интегралы называются несобственными. Различают *несобственные интегралы первого рода* (с бесконечными пределами интегрирования) и *несобственные интегралы второго рода* (от разрывных подынтегральных функций).

Несобственные интегралы I рода

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на произвольном отрезке $[a; b]$. Следовательно, она интегрируема на этом отрезке, т.е. существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для любого $b \geqslant a$.

Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования от функции $y = f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ определяется равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если предел не существует или равен бесконечности — *расходящимся.*

П р и м е р 197. Найти $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx.$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^x}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^b} - \frac{1}{e^0}\right) = 1.$$

Данный интеграл сходится.

Геометрический смысл. Величина $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, осью Oy и графиком функции $y = e^{-x}$ (рис. 60).

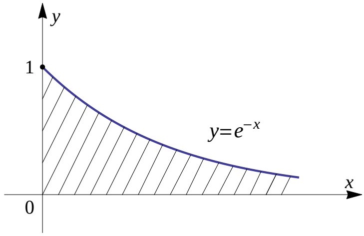


Рис. 60

По мере удаления верхнего предела интегрирования от начала координат ($b \to +\infty$) площадь криволинейной трапеции возрастает, но не безгранично: она стремится к единице, т.е. площадь *конечна*.

П р и м е р 198. Найти $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Следовательно, интеграл расходится.

Аналогично несобственному интегралу с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется *несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования*:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

и *с двумя бесконечными пределами интегрирования*:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\, dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^0 f(x)\, dx + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^b f(x)\, dx.$$

Замечание. Интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования сходится, если сходится каждый интеграл в правой части равенства.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$, называемый интегралом *Эйлера – Пуассона*. Доказано, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$, т.е. площадь под кривой $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (получившей название *кривой Гаусса*) на интервале $(\infty; +\infty)$ равна единице (рис. 61).

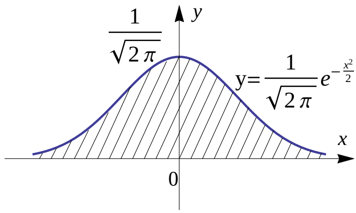


Рис. 61

Несобственные интегралы II рода

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \leqslant b$ и имеет точку разрыва при $x = a$. Тогда несобственный интеграл определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

и называется *несобственным интегралом II рода.*

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся.*

П р и м е р 199. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx.$

Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[a;\, b]$ не существует при $x = 0$, поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

Данный интеграл сходится.

Это означает, что полубесконечная фигура, ограниченная осями координат, кривой и прямой, имеет конечную площадь, равную 2 кв. ед. (см. рис. 62).

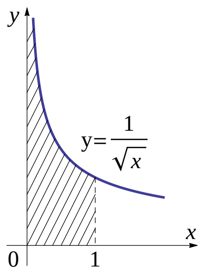


Рис. 62

Аналогично определяется несобственный интеграл, имеющий точку разрыва $x = b$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)\,dx.$$

П р и м е р 200. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx.$$

Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$ не определена при $x = 4$, следовательно,

$$\int\limits_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_0^{4-\delta}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx = \lim_{\delta\to 0}\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^{4-\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left(\arcsin\frac{4-\delta}{4} - \arcsin 0\right) = \lim_{\delta\to 0}\arcsin\left(1-\frac{\delta}{4}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Если подынтегральная функция имеет разрыв в точке c, содержащейся внутри интервала $(a;\, b)$, то эта точка c разбивает отрезок интегрирования на два отрезка, и несобственный интеграл определяется так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Замечание. Несобственный интеграл II рода сходится, если сходится каждый интеграл в правой части равенства.

Упражнения

Исследовать на сходимость несобственный интеграл первого рода:

231. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^3+1}{x^5}\,dx.$

232. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2x}\,dx.$

233. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx.$

234. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx.$

235. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-2x}\,dx.$

236. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

237. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

Исследовать на сходимость несобственный интеграл второго рода:

238. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

239. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{1-x^2}.$

240. $\displaystyle\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

241. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

242. $\displaystyle\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^5}}$.

243. $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

244. $\displaystyle\int\limits_{0,5}^{1} \frac{dx}{x\cdot\ln^3 x}$.

245. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-2x}$.

246. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{ctg} x\,dx$.

7. Дифференциальные уравнения

Основные понятия

При изучении природных и общественных явлений не всегда удается непосредственно найти законы, которым подчиняются величины, характеризующие эти явления, но можно установить зависимость между этими величинами и их производными или дифференциалами.

Зависимость, связывающая независимую переменную x, неизвестную функцию одной переменной $y(x)$ и ее производные (или дифференциалы) различных порядков, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Если функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит от нескольких переменных, то такое дифференциальное уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных.* Например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

В рамках данного курса будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Порядок старшей производной (старшего дифференциала) в дифференциальном уравнении, называется *порядком данного уравнения.*

Например, уравнения

$$y' - x^2y + x^2 = 0 \quad \text{и} \quad (x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$$

первого порядка, а уравнение

$$xy^{(5)} + yy''' = 1$$

пятого порядка.

Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Пример 201. Закон распада некоторых радиоактивных веществ состоит в том, что скорость распада пропорциональна количеству этого вещества. Если $x(t)$ – количество неразложившегося вещества в момент времени t, то этот закон можно записать так:

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

где $\dfrac{dx}{dt}$ – скорость распада, k – некоторая положительная постоянная, характеризующая данное вещество. Поскольку в уравнение радиоактивного распада входит производная первого порядка, оно является уравнением первого порядка.

Знак «минус» в правой части указывает на то, что x убывает со временем; знак «плюс», подразумеваемый всегда, когда знак явно не указан, означал бы, что x возрастает со временем.

Пример 202. Уравнение движения точки массы m под влиянием силы F (второй закон Ньютона) описывает уравнение второго порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t,\, x,\, \frac{dt}{dx}\right).$$

Произведение массы на ускорение равно силе, которая зависит от времени, положения точки и ее скорости.

Пример 203. Уравнение распространения эпидемий

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n + m - x),$$

где $x(t)$ – число незараженных индивидов в момент времени t, n и m – число зараженных и незараженных людей в начальный момент времени соответственно, β – коэффициент пропорциональности (зависит от вида инфекции).

Пример 204. Модель Мальтуса – одна из первых моделей, описывающих скорость изменения численности популяций:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N, \quad N(0) = N_0 > 0,$$

где $\dfrac{dN}{dt}$ – скорость изменения численности популяции $\lambda > 0$ – мальтузианский коэффициент линейного роста $N(t)$ – численность популяции в момент времени t.

Пример 205. Уравнение Ферхюльста, используемое в экологии для описания роста численности популяции

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

где параметр r характеризует скорость роста (размножения), а K – емкость среды (т. е. максимально возможную численность популяции).

Пример 206. Модель Лотки – Вольтерры. Данная модель описывает популяцию, состоящую из двух взаимодействующих видов. Первый из них, называемый *хищниками*, при отсутствии второго вымирает по закону $x' = -a_1x, \quad (a > 0)$, а второй – *жертвы* – при отсутствии хищников неограниченно размножается в соответствии с законом Мальтуса $y' = a_2y$. Взаимодействие двух этих видов моделируется так. Жертвы вымирают со скоростью, равной числу встреч хищников и жертв, которое в данной модели предполагается пропорциональным численности обеих популяций, т. е. равной b_2xy $(b_2 > 0)$. Поэтому $y' = a_2y - b_2xy$. Хищники же размножаются со скоростью, пропорциональной числу съеденных жертв: $x' = -a_1x + b_1xy \quad (b_1 > 0)$.

Система уравнений

$$\begin{cases} x' = -a_1x + b_1xy, \\ y' = a_2y - b_2xy, \end{cases}$$

описывающая такую популяцию *хищник – жертва*, называется системой (или моделью) Лотки — Вольтерры (рис. 63).

Пример 207. Распределение скорости ветра в приземном слое атмосферы обратно пропорционально высоте. Обозначим $V(h)$ – скорость

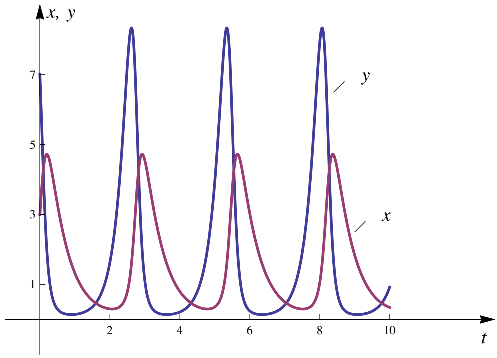


Рис. 63

ветра в приземном слое атмосферы на высоте h (h_0 – высота над поверхностью, где скорость ветра равна нулю), k – параметр шероховатости (зависит от подступающих поверхностей), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dV}{dh} = \frac{k}{h}.$$

Легко проверить, что решением этого уравнения будет логарифмическая зависимость скорости ветра от высоты подъема.

Пример 208. Атмосферное давление уменьшается с высотой, т. к. чем выше над уровнем моря, тем разряженнее воздух. Для определения зависимости давления от высоты используют дифференциальное уравнение

$$\frac{dp(h)}{dh} = -g\rho(h),$$

где $p(h)$ – давление на высоте h, $\rho(h)$ – плотность воздуха на высоте h, g – ускорение свободного падения.

7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$F(x,\, y(x),\, y'(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением *первого порядка*. Его также можно представить в виде уравнения, разрешенного относительно производной:

$$y' = f(x,\,y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,\,y).$$

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Пример 209. Покажем, что функция $y = \sqrt{x^2+C}$ является решением дифференциального уравнения $y\,y' = x$.

Подставим в данное уравнение саму функцию $y = \sqrt{x^2+C}$ и ее производную $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+C}}$, получим тождество

$$\sqrt{x^2+C}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+C}} \equiv x.$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y = \varphi(x,\,C)$, содержащее одну произвольную постоянную C. Общее решение может быть записано как $\Phi(x,y,C) = 0$, тогда оно будет называться *общим интегралом.*

Всякое решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольной постоянной, называется *частным решением.*

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши.*

Простейшим дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение вида

$$y' = f(x).$$

Чтобы его решить, нужно представить производную y' как отношение дифференциалов dy/dx, домножить обе части уравнения на dx и проинтегрировать обе части получившегося уравнения:

$$y = \int f(x)\,dx + C.$$

Пример 210. Решить уравнение $y' = 2x$.

Заменим производную y' отношением дифференциалов dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

умножим уравнение на dx:

$$dy = 2x\,dx.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\int dy = \int 2x\,dx + C.$$

Получаем общее решение

$$y = x^2 + C.$$

Как видно, это уравнение имеет бесконечное количество решений, отличающихся друг от друга на постоянную C.

Если переменные x и y рассматривать как декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости Oxy, то решение уравнения $y = \varphi(x,\,C)$ является семейством интегральных кривых, зависящим от одного параметра C. На рис. 64 общее решение уравнения из примера 210 – семейство парабол.

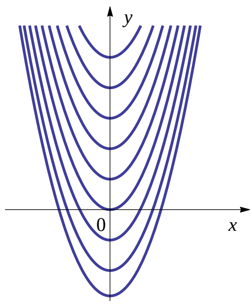


Рис. 64

Частное решение на плоскости Oxy – это одна кривая из семейства интегральных кривых, проходящая через точку $M(x_0;\,y_0)$.

П р и м е р 211. Как мы уже рассмотрели в примере 210, общим решением дифференциального уравнения $y' = 2x$ является семейство парабол $y = x^2 + C$. Частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$, – это парабола с уравнением $y = x^2 + 1$ (рис. 65 слева), а частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = -1$, – парабола с уравнением $y = x^2 - 5$ (рис. 65 справа).

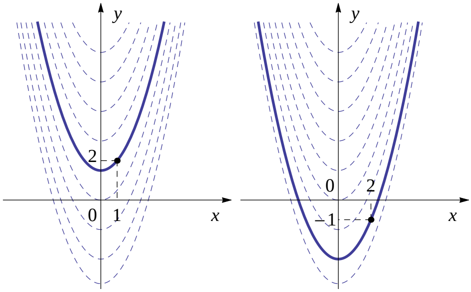


Рис. 65

Согласно геометрическому смыслу производной в точке x_0, значение $y'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику решения в этой точке, т. е. дифференциальное уравнение устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$$

называется *уравнением с разделенными переменными.* Чтобы найти решение этого уравнения, интегрируем обе его части:

$$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + C.$$

П р и м е р 212. Решить уравнение $x\,dx + y\,dy = 0$.

Перенесем слагаемое, содержащее dx, в правую часть:

$$y\,dy = -x\,dx.$$

Интегрируя обе части этого уравнения

$$\int y\,dy = -\int x\,dx + C,$$

получаем

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Графиком общего решения (интегральными кривыми) является семейство окружностей с центром в начале координат и радиусом $R = C_1$:

$$x^2 + y^2 = 2C = C_1^2.$$

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функцию $f(x, y)$ можно представить в виде произведений функций, зависящих только от одной переменной x или y, т. е.

$$M_1(x)N_1(y)\,dx + M_2(x)N_2(y)\,dy = 0$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y).$$

Тогда это уравнение можно привести к уравнению с разделенными переменными.

Алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными

1. Производную y' нужно заменить отношением дифференциалов dy/dx.

2. Умножить уравнение на dx.

3. Все слагаемые, содержащие множитель dy, оставить с одной стороны от знака равно, а слагаемые с dx перенести в другую часть.

4. С каждой стороны равенства вынести общие множители за скобки (если они есть).

5. В той части равенства, где множитель dy, нужно оставить только множители, зависящие от переменной y, а в части равенства, где множитель dx, должны остаться только множители, зависящие от x. Все остальные множители – «лишние», на них нужно разделить обе части уравнения (предполагая, что они не равны нулю). В результате получим уравнение с разделенными переменными.

6. Проинтегрировать обе части уравнения.

Замечание. При делении на «лишние» множители полагаем, что они не равны нулю, это может привести к потере частных решений. Необходимо проверить, являются ли функции, обращающие «лишние» множители в нуль, частными решениями данного уравнения.

Пример 213. Решить уравнение $xy' = y^2 + 1$.

Представим производную y' как отношение дифференциалов $\dfrac{dy}{dx}$

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 + 1.$$

Умножим обе части уравнения на dx

$$x\,dy = (y^2 + 1)\,dx.$$

Приведем полученное уравнение к уравнению с разделенными переменными, разделив обе части уравнения на $x \neq 0$ и $(y^2 + 1) \neq 0$:

$$\frac{dy}{(y^2+1)} = \frac{dx}{x},$$

а затем проинтегрируем его:

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)} = \int \frac{dx}{x} + C,$$

$$\operatorname{arctg} y = \ln x + C,$$

$$y = \operatorname{tg}(\ln x + C).$$

При решении мы делили на $x(y^2 + 1)$. Проверим, не потеряны ли частные решения. Множитель $y^2 + 1$ нулю не равен. Подставим $x = 0$ в исходное уравнение $0 \cdot y' = y^2 + 1$, поскольку выражение справа нулю не равно, то частное решение не потеряно.

Общее решение уравнения:

$$y = \operatorname{tg}(\ln x + C).$$

Пример 214. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy\,dx + xy\,dy + y\,dx + x\,dy = 0$.

Так как в уравнении не присутствует y'в явном виде, то в алгоритме первые два пункта пропускаем. Перенесем слагаемые с dx в правую часть равенства и вынесем общие множители за скобки:

$$xy\,dy + x\,dy = -xy\,dx - y\,dx,$$

$$x(y+1)\,dy = -y(x+1)\,dx.$$

Разделим уравнение на $x \neq 0$ и $y \neq 0$:

$$\frac{y+1}{y}dy = -\frac{x+1}{x}dx$$

или

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = -\left(1+\frac{1}{x}\right)dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными, проинтегрируем его:

$$\int \left(1+\frac{1}{y}\right)dy = -\int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx + C.$$

В результате получаем общий интеграл

$$y + \ln|y| = -x - \ln|x| + C.$$

При решении уравнения мы делили на xy. Проверим, являются ли частными решениями $x = 0$ или $y = 0$. Если $x = 0$, то и $dx = 0$, аналогично, если $y = 0$, то $dy = 0$. Подставляя в уравнение, получим тождество, следовательно, $x = 0$ или $y = 0$ являются частными решениями уравнения.

Общий интеграл можно переписать следующим образом:

$$y + \ln|y| + x + \ln|x| = \ln C_1,$$

$$\ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln C_1,$$

$$xye^{x+y} = C_1.$$

В этом случае частные решения $x = 0$ и $y = 0$ получаются из общего интеграла при $C_1 = 0$.

Пример 215. Решить задачу Коши (найти частное решение) $(1+y^2)dx - xy\,dy = 0$, $y(2) = 1$.

Разделяя переменные

$$(1+y^2)dx = xy\,dy,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{y}{1+y^2}dy$$

и интегрируя обе части уравнения

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y}{1+y^2}dy + C,$$

получим

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C_1,$$

откуда
$$x = C_1\sqrt{1+y^2}.$$

Используя начальное условие $2 = C_1\sqrt{1+1^2}$, находим $C_1 = \sqrt{2}$. Окончательно будем иметь $x = \sqrt{2(1+y^2)}$.

Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида
$$y' + p(x)\cdot y = f(x), \tag{37}$$
где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.* Это уравнение линейно относительно неизвестной функции и ее производной.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным.* Это уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример 216. Решить уравнение $y' + 2xy = 0$.

Заменим производную y' отношением дифференциалов
$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0,$$
умножим уравнение на dx:
$$dy + 2xy\,dx = 0.$$
Перенесем слагаемое с dx в правую часть
$$y = -2xy\,dx.$$
Разделим уравнение на y
$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx.$$

После интегрирования получим
$$\int \frac{dy}{y} = \int -2x\,dx_{+}\ln C$$
$$\ln|y| = -x^2 + \ln C,$$
откуда
$$y = C\cdot e^{-x^2}. \tag{38}$$

Если в линейном уравнении (37) правая часть $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным.* Такие уравнения можно решить или *методом вариации произвольной постоянной*, или *методом Бернулли.*

1. Находим решение соответствующего однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$, получаем $y = C \cdot \varphi(x)$.

2. В общем решении однородного уравнения постоянную C полагаем неизвестной функцией $C(x)$, т. е. $y = C(x) \cdot \varphi(x)$.

3. Подставляем это решение в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

4. Решаем полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $C(x)$.

5. Подставляем найденное $C(x)$ в решение линейного однородного уравнения.

П р и м е р 217. Решить уравнение $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Сначала найдем решение соответствующего однородного уравнения $y' - \dfrac{2y}{x+1} = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+1}dx + \ln C,$$

$$\ln y = 2\ln|x+1| + \ln C,$$

$y = C \cdot (x+1)^2$ – решение однородного уравнения.

Представим, что $C = C(x)$, тогда $y = C(x) \cdot (x+1)^2$ – вид решения неоднородного уравнения. Подставим это выражение в исходное уравнение:

$$C'(x) \cdot (x+1)^2 + 2C(x) \cdot (x+1) - \frac{2C(x) \cdot (x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3,$$

откуда получаем

$$C'(x) \cdot (x+1)^2 = (x+1)^3 \qquad \text{или} \qquad C'(x) = x+1.$$

Интегрируя обе части уравнения, находим

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C_1.$$

Окончательно получаем общее решение линейного неоднородного уравнения
$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1\right) \cdot (x+1)^2.$$

Метод Бернулли

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения находим в виде произведения двух пока еще неизвестных функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$:
$$y = u \cdot v.$$
Рассмотрим метод Бернулли при решении линейного неоднородного уравнения из примера 217.

П р и м е р 218. Подставим $y = u \cdot v$ в уравнение
$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$
Для этого находим производную от функции $y = u \cdot v$:
$$y' = u \cdot v' + v \cdot u'.$$
Подставляем в уравнение
$$u \cdot v' + v \cdot u' - \frac{2u \cdot v}{x+1} = (x+1)^3.$$
Группируем слагаемые, содержащие множитель u, получаем
$$u\left(v' - \frac{2v}{x+1}\right) + v \cdot u' = (x+1)^3.$$

Функцию v выберем таким образом, чтобы выражение в скобках было равным нулю, т.е.
$$v' - \frac{2v}{x+1} = 0.$$
Достаточно найти одно частное решение v:
$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1},$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1}\,dx,$$
$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2}{x+1}\,dx,$$
$$\ln|v| = 2\ln|(x+1)|,$$

откуда одно из решений

$$v = (x+1)^2.$$

Подставив найденное значение v, приходим к уравнению

$$u' \cdot (x+1)^2 = (x+1)^3,$$

или

$$u' = x+1,$$

откуда находим

$$u = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Окончательно получаем

$$y = u \cdot v = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right) \cdot (x+1)^2.$$

П р и м е р 219. Найти решение задачи Коши для линейного уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ при начальном условии $y(1) = 0$.

Решим методом Бернулли, получим

$$u\left(v' - \frac{v}{x}\right) + v \cdot u' = x^2.$$

Полагаем

$$v' - \frac{v}{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим $\ln|v| = \ln|x|$, или $v = x$ – одно из решений.

Уравнение для нахождения u имеет вид

$$xu' = x^2 \qquad \text{или} \qquad u' = x.$$

Поэтому $du = x\,dx$, следовательно, $u = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Общее решение имеет вид

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot x,$$

откуда, используя начальное условие $y(1) = 0$, определяем $C = -\dfrac{1}{2}$.

В результате получим решение задачи Коши

$$y = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot x.$$

Уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение Бернулли имеет вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n, \tag{39}$$

где n – любое действительное число, отличное от нуля или единицы (в этих случаях уравнение Бернулли превращается в линейное), а $p(x)$ и $q(x)$ – некоторые функции переменной x.

Степень n может быть как положительной, так и отрицательной (во втором случае получится дробь), кроме того, n может быть обыкновенной дробью, например $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$.

Одним из очевидных решений уравнения Бернулли (если $n > 0$) является решение: $y = 0$. Действительно, если найти $y' = (0)' = 0$ и подставить в уравнения рассмотренных типов, то получится верное равенство.

Уравнение Бернулли с помощью замены $z = y^{1-n}$, где z – новая неизвестная функция x, сводится к линейному неоднородному уравнению первого порядка. Введем обозначения: $\beta = 1-n$, $\gamma = \dfrac{1}{\beta}$, тогда $n = 1 - \beta$, $\beta = \dfrac{1}{\gamma}$:

$$y = z^{\frac{1}{1-n}} = z^{\frac{1}{\beta}} = z^{\gamma},$$

$$y' = \gamma\, z^{\gamma-1} \cdot z' = \gamma\, z^{\gamma(1-\frac{1}{\gamma})} \cdot z' = \gamma\, z^{\gamma(1-\beta)} \cdot z' = \gamma\, z^{\gamma n} \cdot z'.$$

Подставим соотношения для y и y' в уравнение (39), получим, что функция $z(x)$ является решением уравнения

$$\gamma\, z^{\gamma n} \cdot z' + p(x) \cdot z^{\gamma} = q(x) \cdot z^{\gamma n}.$$

Разделив обе части уравнения на $\gamma x^{\gamma n}$, получим, что уравнение Бернулли преобразуется в линейное уравнение относительно функции z:

$$z' + p_0(x) \cdot z = q_0(x),$$

где

$$p_0(x) = \beta \cdot p(x), \qquad q_0(x) = \beta \cdot q(x).$$

Пример 220. Решить уравнение $x\,y' + y = x\,y^2 \ln x$.

Перепишем уравнение в виде:

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x.$$

Сравнивая его с видом уравнения Бернулли, получаем, что $p(x) = \dfrac{1}{x}$, $q(x) = \ln x$, $n = 2$. Значит $\beta = 1 - n = 1 - 2 = -1$, $\gamma = \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

Делаем замену переменных $y = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ и получаем уравнение вида

$$z' - \frac{z}{x} = -\ln x.$$

Решением этого линейного уравнения будет функция

$$z = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\ln^2 x + C\right).$$

Отсюда

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x \cdot \left(-\frac{1}{2}\ln^2 x + C\right)}$$

– общее решение уравнения.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,\, y)\, dx + Q(x,\, y)\, dy = 0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция двух переменных $u(x,\, y)$ с непрерывными частными производными, что справедливо выражение

$$du(x,\, y) = P(x,\, y)\, dx + Q(x,\, y)\, dy.$$

Из равенства нулю полного дифференциала следует, что общее решение исходного уравнения определяется формулой

$$u(x,\, y) = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Необходимое и достаточное условие. Пусть функции $P(x,\, y)$ и $Q(x,\, y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области D. Дифференциальное уравнение

$$P(x,\, y)\, dx + Q(x,\, y)\, dy = 0$$

будет являться уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда справедливо равенство:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах

1. Сначала убедимся, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, используя необходимое и достаточное условие:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

2. Затем запишем систему двух дифференциальных уравнений, которые определяют функцию $u(x,\, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,\, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,\, y). \end{cases}$$

3. Интегрируем первое уравнение по переменной x. Вместо постоянной C запишем неизвестную функцию, зависящую от y:

$$u(x,\, y) = \int P(x,\, y)\, dx + \varphi(y).$$

4. Дифференцируя по переменной y, подставим функцию $u(x,\, y)$ во второе уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,\, y)\, dx + \varphi(y)\right) = Q(x, y).$$

Отсюда получаем выражение для производной неизвестной функции $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = Q(x,\, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,\, y)\, dx\right).$$

Это выражение уже не будет зависеть от переменной x.

5. Интегрируя последнее выражение по переменной y, находим функцию $\varphi(y)$ и, следовательно, функцию $u(x,\, y)$:

$$u(x,\, y) = \int P(x,\, y)\, dx + \varphi(y).$$

6. Общее решение уравнения в полных дифференциалах записывается в виде:
$$u(x,\,y) = C.$$

Замечание. На шаге 3, вместо интегрирования первого уравнения по переменной x, мы можем проинтегрировать второе уравнение по переменной y. После интегрирования нужно определить неизвестную функцию $\psi(x)$.

П р и м е р 221. Решить дифференциальное уравнение
$$2xy\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy = 0.$$

Проверим, является ли данное уравнение уравнением в полных дифференциалах:
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3y^2) = 2x,\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x.$$

Поскольку частные производные равны, то это уравнение в полных дифференциалах. Запишем систему
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 3y^2. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по x, получаем:
$$u(x,\,y) = \int 2xy\,dx = x^2 y + \varphi(y).$$

Подставляем выражение для $u(x,\,y)$ во второе уравнение:
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y + \varphi(y)\right) = x^2 + 3y^2,$$
следовательно,
$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 + 3y^2,$$
откуда
$$\varphi'(y) = 3y^2.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим неизвестную функцию $\varphi(y)$:
$$\varphi(y) = \int 3y^2\,dy = y^3,$$

так что общее решение данного уравнения в полных дифференциалах имеет вид:
$$x^2 y + y^3 = C,$$
где C – произвольная постоянная.

Упражнения

Решить дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной:

247. $y' = 3x^2 + 2x + 1.$

248. $y' = e^x + 3,\ y(0) = 2.$

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

249. $4(x^2y + y)dy + dx = 0.$

250. $2y'\sqrt{x} = y,\ y(4) = 1.$

251. $\left(x^2 + x\right) y' = 2y + 1.$

252. $y\,dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$

Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

253. $y' - y = e^x.$

254. $y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x},\ y(0) = 0.$

255. $(1 + x^2)dy - (1 + x^2)^2 dx = 2xy\,dx.$

Решить дифференциальные уравнения Бернулли:

256. $y' + 2e^x y = 2e^x\sqrt{y}.$

257. $y' + \dfrac{3y}{x} = x^3y^3.$

258. $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0,\ y(0) = 1.$

Решить уравнения в полных дифференциалах:

259. $(2x - y + 1)\,dx + (2y - x - 1)\,dy = 0.$

260. $(3x^2 - 3y^2 + 4x)\,dx - (6xy + 4y) = 0.$

261. $\dfrac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)}\,dx + \dfrac{e^y}{1 + x^2}\,dy = 0.$

262. $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{2xy'}{y^3},\ y(1) = 1.$

Определить тип дифференциального уравнения первого порядка и решить его:

263. $y' = \dfrac{y + x^3}{x}$.

264. $y' = 2x \ln x$.

265. $(1 + e^x)y' = ye^x$

266. $x \sin y\, y' = 2(\cos y)^3$.

267. $xy' = y - 3x^2y^2$

268. $y'x \ln x - y = 2x^2 \ln^2 x$.

269. $(2xy - \sin x)\, dx + (x^2 - \cos y)\, dy = 0$.

270. $xy' + y = 4x^3 + 3x^2,\ y(1) = 2$.

7.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет следующий общий вид:

$$F(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x),\, \ldots,\, y^{(n)}(x)) = 0.$$

В частных случаях в уравнение могут не входить x, y и ее некоторые производные, порядок которых ниже, чем n.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = \varphi(x)$, при подстановке которой вместе с ее производными в уравнение обращает его в тождество.

Пример 222. В уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$ не входит переменная x. Покажем, что функция $y = xe^{2x}$ является решением данного уравнения. Подставим в него саму функцию и ее производные $y' = e^{2x}(2x + 1)$ и $y'' = 4e^{2x}(x + 1)$, получим тождество

$$4x^{2x}(x + 1) - 4e^{2x}(2x + 1) + 4xe^{2x} = 4e^{2x}(x + 1 - 2x - 1 + x) \equiv 0.$$

Задача Коши или *задача с начальными условиями* для дифференциального уравнения n-го порядка состоит в нахождении решения, удовлетворяющего n дополнительным условиям, заданным в некоторой точке x_0: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется его решение $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)$, содержащее n

независимых произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, причем их значения могут быть определены при любых начальных условиях.

Общим интегралом дифференциального уравнения n-го порядка называется его общее решение, которое выражено в виде неявной функции:

$$\Phi(x,\, y,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n) = 0.$$

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется решение, в котором произвольным постоянным приданы конкретные числовые значения.

Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Уравнения n-го порядка, зависящие только от производной n-го порядка и переменной x:

$$y^{(n)} = f(x),$$

решаются последовательным интегрированием, т. е. последовательным понижением порядка уравнения до тех пор, пока не будет найдена функция $y(x)$.

Пример 223. Решить уравнение $y'' = 6x$.

Поскольку $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то исходное уравнение можно записать в виде $\dfrac{dy'}{dx} = 6x$, откуда получим $dy' = x\,dx$. Интегрируя обе части уравнения, получаем $y' = 3x^2 + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то полученное уравнение можно записать в виде $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + C_1$, откуда получим $dy = \left(3x^2 + C_1\right)$. Интегрируя обе части уравнения, окончательно получаем $y = x^3 + C_1x + C_2$, где C_2 – произвольная постоянная.

Пример 224. Найти частное решение уравнения $y''' = e^{2x}$, с заданными начальными условиями $y(0) = \dfrac{9}{8}$, $y'(0) = \dfrac{1}{4}$, $y''(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Данное уравнение третьего порядка, поэтому необходимо три раза проинтегрировать его. Понижаем до второго порядка:

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1.$$

В первом интеграле появилась константа C_1. В уравнениях рассматриваемого типа целесообразно сразу же применять заданные начальные условия. Используем условие $y''(0) = -\dfrac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^0 + C_1 = \frac{1}{2} + C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1.$$

Таким образом, $y'' = \dfrac{1}{2}e^{2x} - 1$. На следующем шаге получим

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right) dx = \frac{1}{4}e^{2x} - x + C_2.$$

Постоянную C_2 находим из условия $y'(0) = \dfrac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - 0 + C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, $y' = \dfrac{1}{4}e^{2x} - x$. На последнем шаге получим

$$y = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} - x\right) dx = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + C_3.$$

Для нахождения C_3 используем последнее условие $y(0) = \dfrac{9}{8}$:

$$\frac{9}{8} = \frac{1}{8} - 0 + C_3, \quad \Rightarrow \quad C_3 = 1.$$

Ответ: частное решение $y = \dfrac{1}{8}e^{2x} - \dfrac{x^2}{2} + 1$.

Уравнения, не содержащие неизвестную функцию

Порядок уравнений вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, в которые не входит искомая функция $y(x)$, можно понизить, если взять за новую неизвестную функцию $z(x)$ низшую из производных данного уравнения, т. е. $z = y^{(k)}$. Получится новое уравнение

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Таким образом, порядок уравнения понижается на k единиц.

Например, для уравнения второго порядка $F(x, y', y'') = 0$ используется замена $y' = z$, $y'' = z'$, и уравнение сводится к уравнению первого порядка $F(x, z, z') = 0$.

П р и м е р 225. Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Данное уравнение не содержит функции y. Полагаем $z = y'$, тогда $z' = y''$, и исходное уравнение сводится к уравнению первого порядка

$$xz' + z = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части уравнения, приходим к решению $z = \dfrac{C_1}{x}$. Поскольку $z = y'$, получаем уравнение

$$y' = \frac{C_1}{x}, \quad \text{или} \quad dy = \frac{C_1 dx}{x},$$

решая которое, окончательно получаем $y = C_1 \ln x + C_2$.

Уравнения, не содержащие независимую переменную

В уравнениях вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, в которые не входит независимая переменная x, порядок можно понизить на одну единицу, если положить

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y), \text{ причем } p' = \frac{dp}{dy}.$$

В полученном уравнении новой неизвестной функцией будет $p(y)$, а y будет новой независимой переменной. Значения производных y'', y''', … выразим через p, используя правила дифференцирования сложной функции:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p,$$

$$y''' = p''p^2 + (p')^2 p, \ \ldots \ \text{ и т. д.}$$

и получим

$$F(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

П р и м е р 226. Решить задачу Коши $2y(y')^3 + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

Данное уравнение $2y(y')^3 + y'' = 0$ не содержит x, поэтому полагаем $y' = p$, $y'' = p'p$, где $p = p(y)$. Исходное уравнение принимает вид

$$2yp^3 + p'p = 0.$$

Получили уравнение первого порядка. В нашем случае это уравнение с разделяющимися переменными, его общий интеграл равен $y^2 = \frac{1}{p} + C_1$, т. е. $y^2 = \frac{1}{y'} + C_1$. Используя начальное условие $y'(0) = -3$, находим $C_1 = \frac{1}{3}$. Подставляем в уравнение и выражаем производную y':

$$y' = \frac{3}{3y^2 - 1}.$$

Таким образом, получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\left(y^2 - \frac{1}{3}\right) dy = dx,$$

интегрируя которое, получаем

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y}{3} = x + C_2.$$

Используя начальное условие $y(0) = 0$, находим $C_2 = 0$. Окончательно получаем решение $y^3 - y = 3x$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и всех ее производных:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (40)$$

где a_1, a_2, ..., a_n – константы.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае — *линейным неоднородным*.

Однородные дифференциальные уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (41)$$

обладают следующими свойствами:

1. Если y_1 является решением линейного однородного уравнения, то Cy_1, где C – произвольная постоянная, тоже является решением того же уравнения.

2. Если y_1 и y_2 являются решениями линейного однородного уравнения, то и их сумма $y = y_1 + y_2$ тоже будет являться решением того же уравнения.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называются *линейно зависимыми*, если существуют постоянные α_1, α_2, …, α_n (не все равные нулю), такие, что справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Если это тождество выполняется только при $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1, n})$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ называются *линейно независимыми.*

Зная n частных решений y_1, y_2, …, y_n линейного однородного уравнения n-го порядка, мы можем получить решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

зависящее от n произвольных постоянных, т. е. от такого количества постоянных, какое должно содержать общее решение дифференциального уравнения n-го порядка.

Если частные решения y_1, y_2, …, y_n – линейно независимы,то $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ является *общим решением линейного однородного дифференциального уравнения.*

Таким образом, задача интегрирования линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка сводится к нахождению его n линейно независимых частных решений.

Частное решение этого уравнения может быть найдено в виде $y = e^{kx}$. Подставляя его в уравнение, получаем

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на e^{kx} ($e^{kx} \neq 0$ при любых x) и получим *характеристическое уравнение*

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{42}$$

определяющее те значения k, при которых $y = e^{kx}$ будет решением исходного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n-го порядка. Правая часть уравнения представляет собой многочлен n-го порядка (34), который можно разложить на линейные и квадратичные множители по формуле (35). Каждый линейный множитель имеет простой или кратный вещественный корень, а квадратичные множители вещественных корней не имеют, т. к.

дискриминант отрицательный. Каждый из квадратичных множителей имеет *пару сопряженных комплексных корней*, которые также могут быть простыми или кратными.

Парой комплексных сопряженных чисел называется выражение вида

$$z = a \pm bi,$$

где a и b – действительные числа, а i – *мнимая единица*, которая удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Числа a и b называются соответственно *действительной* (*вещественной*) и *мнимой частями* комплексного числа $z = a + bi$. Комплексное число вида $a + 0 \cdot i$ равно действительному числу a.

Таким образом, характеристическое уравнение имеет n корней. Пусть k_1, k_2, …, k_n – корни характеристического уравнения. Возможны следующие случаи:

1. Корни характеристического уравнения (42) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *действительные и различные*. Тогда линейно независимые частные решения уравнения (41) имеют вид

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x},$$

и общим решением однородного уравнения (41) будет

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 227. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 2 = 0$. Решая его, находим корни $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Они действительные и различные, следовательно, частные решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$, а общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

2. Корни характеристического уравнения (42) k_1, k_2, …, k_n *действительные, но среди них есть кратные*. Пусть, например, $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = a$, т. е. корень a является s-кратным корнем уравнения, а остальные $(n - s)$ корней различные. Линейно независимые частные решения уравнения (41) имеют вид

$$y_1 = e^{ax},\ y_2 = xe^{ax},\ y_3 = x^2 e^{ax},\ \ldots,\ y_s = x^{s-1} e^{\alpha x},$$

$$y_{s+1} = e^{k_{s+1} x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x},$$

и общим решением однородного уравнения (41) будет

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax} + \ldots + C_s x^{s-1} e^{ax} + C_{s+1} e^{k_{s+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

П р и м е р 228. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$. Решая его, находим корни $k_1 = k_2 = 1$. Они вещественные и совпадают, т. е. корень $k = 1$ имеет кратность равную двум. Следовательно, частные решения запишутся в виде $y_1 = e^x$ и $y_2 = x \cdot e^x$, а общее решение $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

П р и м е р 229. Решить уравнение $y^{IV} - 18y'' + 81y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^4 - 18k^2 + 81 = 0$ представляет собой биквадратное уравнение и имеет 4 корня, из которых $k_{1,2} = 3$ – корень кратности 2 и $k_{3,4} = -3$ – тоже корень кратности 2. Следовательно, частные решения запишутся в виде $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = x \cdot e^{3x}$, $y_3 = e^{-3x}$, $y_4 = x \cdot e^{-3x}$, а общее решение $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{-3x} + C_4 x e^{-3x}$.

3. Среди корней характеристического уравнения (42) есть *комплексные*. Пусть, для определенности, $k_{1,\,2} = a \pm bi$ – пара комплексных сопряженных корней, а остальные корни $k_3, \ldots, k_n$ – действительные. Так как коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уравнения (41) действительные, то комплексные корни уравнения (42) могут быть только попарно сопряженными. Линейно независимые частные решения уравнения в этом случае будут иметь вид

$$y_1 = e^{ax}\cos(bx),\ y_2 = e^{ax}\sin(bx),\ y_3 = e^{k_3 x},\ \ldots,$$

и общим решением однородного уравнения (41) будет

$$y = C_1 e^{ax}\cos(bx) + C_2 e^{ax}\sin(bx) + C_3 e^{k_3 x} + \ldots.$$

П р и м е р 230. Решить уравнение $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 13 = 0$. Дискриминант $D = (-6)^2 - 4 \cdot 13 = -16 < 0$, следовательно, характеристическое уравнение не имеет действительных корней. Заменяем -1 на квадрат мнимой единицы i^2, получаем, что дискриминант равен $D = -16 = 16 \cdot i^2$, и корни уравнения равны

$$k_{1,\,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

Получаем $a = 3$, $b = 2$. Следовательно, частные решения дифференциального уравнения $y_1 = e^{3x}\cos 2x$, $y_2 = e^{3x}\sin 2x$, а общее решение $y = C_1 e^{3x}\cos 2x + C_2 e^{3x}\sin 2x$.

П р и м е р 231. Решить уравнение $y''' + y' = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^3 + k = 0,$$

$$k(k^2 + 1) = 0,$$

$$k_1 = 0 \text{ или } k^2 + 1 = 0, \quad k^2 = -1 = i^2,$$

$$k_1 = 0 \text{ или } k_{2,\,3} = \pm i.$$

Получили один действительный корень $k_1 = 0$ и два сопряженных комплексных корня $k_{2,\,3} = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$, для которых $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Частные решения запишутся в виде

$$y_1 = e^0 = 1, \quad y_2 = e^0 \cos x = \cos x \quad y_3 = e^0 \sin x = \sin x,$$

а общим решением будет $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

4. Если комплексные корни являются кратными корнями кратности s, то s пар частных решений для каждой пары сопряженных корней записываются в соответствии с пунктом 2:

$$y_1 = e^{ax} \cos(bx), \; y_2 = e^{ax} \sin(bx),$$

$$y_3 = xe^{ax} \cos(bx), y_4 = xe^{ax} \sin(bx),$$

$$y_5 = x^2 e^{ax} \cos(bx), \; y_6 = x^2 e^{ax} \sin(bx), \; \ldots$$

$$y_{2s-1} = x^{s-1} e^{ax} \cos(bx), \; y_{2s} = x^{s-1} e^{ax} \sin(bx).$$

Пример 232. Решить уравнение $y^V + y''' + 16y' = 0$.

Характеристическое уравнение $k^5 + 8k^3 + 16k = 0$ можно представить в виде

$$k(k^4 + 8k^2 + 16) = k(k^2 + 4)^2 = 0.$$

Оно имеет 5 корней: $k_1 = 0$ – действительный корень и две пары комплексных корней $k_{2,3,4,5} = \pm 2i$. В этом случае общее решение запишется в виде

$$y = C_1 + C_2 \sin(2x) + C_3 \cos(2x) + C_4 x \sin(2x) + C_5 x \cos(2x).$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{43}$$

где $f(x) \neq 0$.

Теорема 25. Общим решением неоднородного дифференциального уравнения (43) является сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{\text{оо}}$ и частного решения исходного уравнения $y_{\text{чн}}$, т. е.

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Нахождение общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения осуществляется по правилам, рассмотренным ранее. Таким образом, задача интегрирования неоднородного уравнения сводится к нахождению частного решения неоднородного уравнения. В общем случае интегрирование уравнения может быть осуществлено методом вариации произвольных постоянных, однако в некоторых случаях частное решение можно найти методом подбора по виду правой части.

Частное решение неоднородного уравнения можно подобрать для уравнений, правая часть которых имеет специальный вид, а именно,

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)),$$

где $P_m(x)$ и $Q_l(x)$ – многочлены.

Частные случаи для различных значений коэффициентов α и β представлены в таблице.

№	Значения α и β	Вид правой части $f(x)$
1	$\alpha = \beta = 0$	$P_m(x)$
2	$\alpha \neq 0,\ \beta = 0$	$P_m(x)e^{\alpha x}$
3	$\alpha = 0,\ \beta \neq 0$	$P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x)$
4	$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$	$e^{\alpha x}\,(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x))$

При нахождении решения линейного неоднородного уравнений удобно составлять таблицу:

<table>
<tr><td colspan="4">$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_l(x)\sin(\beta x))$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = \ldots$</td><td>$\beta = \ldots$</td><td>$z = \alpha + \beta \cdot i = \ldots$</td><td>$r = \ldots$</td></tr>
<tr><td>$P_m(x) = \ldots$</td><td>$m = \ldots$</td><td rowspan="2">$t = \max(m, l) = \ldots$</td><td>$\widetilde{P}_t(x) = \ldots$</td></tr>
<tr><td>$Q_l(x) = \ldots$</td><td>$l = \ldots$</td><td>$\widetilde{Q}_t(x) = \ldots$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{\text{чн}} = x^r \cdot e^{\alpha x}(\widetilde{P}_t(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_t(x)\sin(\beta x))$</td></tr>
</table>

Если комплексное число $z = \alpha + \beta i$ окажется равным одному из корней характеристического уравнения $k = a + bi$ кратности s, то r равен кратности s этого корня (если z не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$).

$\widetilde{P}_t(x)$, и $\widetilde{Q}_t(x)$, – *полные* многочлены соответствующих степеней с *неопределенными* коэффициентами (содержащие ***все*** степени переменной), например,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_0(x) = A \quad (\widetilde{Q}_0(x) = B),\\
&\widetilde{P}_1(x) = Ax + B \quad (\widetilde{Q}_1(x) = Cx + D),\\
&\widetilde{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (\widetilde{Q}_2(x) = Dx^2 + Ex + F),\\
&\widetilde{P}_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (\widetilde{Q}_3(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots
\end{aligned}$$

Замечание. При $\beta = 0$ считаем, что $Q_l(x) = 0$.

При нахождении частного решения используем метод *неопределенных коэффициентов*. Функцию $y_{\text{чн}}$ с неопределенными коэффициентами вместе с ее производными подставляем в исходное линейное неоднородное уравнение, а затем, приравнивая коэффициенты при различных комбинациях функций: x^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $e^{\alpha x}$, $\sin(\beta x)$, $\cos(\beta x)$, находим значения коэффициентов.

Пример 233. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 3k + 2 = 0$ имеет два различных действительных корня $k_1 = -1$ и $k_2 = -2$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Теперь нужно найти какое-либо частное решение $y_{\text{чн}}$ исходного неоднородного уравнения. Составим таблицу:

<table>
<tr><td colspan="4">$f(x) = x\sin x = e^{0\cdot x}(0\cdot\cos(1\cdot x) + x\cdot\sin(1\cdot x))$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 0$</td><td>$\beta = 1$</td><td>$z = 1\cdot i = i$</td><td>$r = 0$</td></tr>
<tr><td>$P_m(x) = 0$</td><td>$m = 0$</td><td rowspan="2">$t = 1$</td><td>$\widetilde{P}_t(x) = \widetilde{P}_1(x)$</td></tr>
<tr><td>$Q_l(x) = x$</td><td>$l = 1$</td><td>$\widetilde{Q}_t(x) = \widetilde{Q}_1(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{\text{чн}} = x^r\cdot e^{\alpha x}(\widetilde{P}_t(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)) =$
$= x^0\cdot e^{0\cdot x}(\widetilde{P}_1(x)\cos(1\cdot x) + \widetilde{Q}_1(x)\sin(1\cdot x)) =$
$= (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$</td></tr>
</table>

Поскольку число $z = i$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x,$$

где A, B, C и D – пока еще неизвестные коэффициенты. Так как $y_{\text{чн}}$ – решение исходного уравнения, то при подстановке этого решения в уравнение должно получаться тождество. Таким образом, значения коэффициентов A, B, C и D должны удовлетворять равенству

$$y''_{\text{чн}} + 3y'_{\text{чн}} + 2y_{\text{чн}} = x\sin x$$

Найдем значения коэффициентов A, B, C и D. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = (A + Cx + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (-Ax - B + 2C)\cos x + (-2A - Cx - D)\sin x.$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}((A + 3C)x + (3A + B + 2C + 3D))\cos x +&\\ + ((-3A + C)x + (-2A - 3B + 3C + D))\sin x &= x\sin x.\end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в множителях при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства и получаем систему уравнений для определенияA, B, C и D:

$$\begin{cases} A + 3C = 0, \\ 3A + B + 2C + 3D = 0, \\ -3A + C = 1, \\ -2A - 3B + 3C + D = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $A = -\dfrac{3}{10}$, $B = \dfrac{17}{50}$, $C = \dfrac{1}{10}$, $D = \dfrac{3}{25}$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y_{\text{чн}} = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

Пример 234. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 25e^x\sin x$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 = 3$ (т.е. значение $k = 3$ является корнем кратности 2). Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Для нахождения частного решения неоднородного линейного уравнения составим таблицу:

<table>
<tr><td colspan="4">$f(x) = 25e^x \sin x = e^{1 \cdot x}(0 \cdot \cos(1 \cdot x) + 25 \cdot \sin(1 \cdot x))$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1$</td><td>$\beta = 1$</td><td>$z = 1 + 1 \cdot i = 1 + i$</td><td>$r = 0$</td></tr>
<tr><td>$P_m(x) = 0$</td><td>$m = 0$</td><td rowspan="2">$t = 0$</td><td>$\widetilde{P}_t(x) = \widetilde{P}_0(x)$</td></tr>
<tr><td>$Q_l(x) = 25$</td><td>$l = 0$</td><td>$\widetilde{Q}_t(x) = \widetilde{Q}_0(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{\text{чн}} = x^r \cdot e^{\alpha x}(\widetilde{P}_t(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)) =$
$= x^0 \cdot e^{1 \cdot x}(\widetilde{P}_0(x)\cos(1 \cdot x) + \widetilde{Q}_0(x)\sin(1 \cdot x)) =$
$= e^x(A\cos x + B\sin x)$</td></tr>
</table>

Найдем значения коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = e^x\left((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x\right),$$

$$y''_{\text{чн}} = e^x\left(2B\cos x - 2B\sin x\right).$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение:

$$(3A - 4B)\cos x + (4A + 3B)\sin x = 25\sin x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства и получаем систему уравнений для определения A и B

$$\begin{cases} 3A - 4B = 0, \\ 4A + 3B = 25. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $A = 4$, $B = 3$, т. е. искомое частное решение примет вид

$$y_{\text{чн}} = e^x\left(4\cos x + 3\sin x\right).$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения примет вид

$$y_{\text{он}} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + e^x\left(4\cos x + 3\sin x\right).$$

П р и м е р 235. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 6e^x$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 = 1$ (т. е. значение $k = 1$ является корнем кратности 2). Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения.

<table>
<tr><td colspan="4">$f(x) = 6e^x = e^{1\cdot x}(6\cdot\cos(0\cdot x) + 0\cdot\sin(0\cdot x))$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1$</td><td>$\beta = 0$</td><td>$z = 1 + 0\cdot i = 1$</td><td>$r = 2$</td></tr>
<tr><td>$P_m(x) = 6$</td><td>$m = 0$</td><td rowspan="2">$t = 0$</td><td>$\widetilde{P}_t(x) = \widetilde{P}_0(x)$</td></tr>
<tr><td>$Q_l(x) = 0$</td><td>$l = 0$</td><td>$\widetilde{Q}_t(x) = \widetilde{Q}_0(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{\text{чн}} = x^r \cdot e^{\alpha x}(\widetilde{P}_t(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)) =$
$= x^2 \cdot e^{1\cdot x}(\widetilde{P}_0(x)\cos(0\cdot x) + \widetilde{Q}_0(x)\sin(0\cdot x)) =$
$= x^2 A e^x$</td></tr>
</table>

Поскольку значение $z = 1$ совпадает с двумя одинаковыми корнями характеристического уравнения ($k_1 = k_2 = 1$), то $r = 2$.

Найдем значение коэффициента A. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = 2Axe^x + Ax^2e^x = e^x(2Ax + Ax^2),$$

$$y''_{\text{чн}} = e^x(2Ax + Ax^2) + e^x(2A + 2Ax) = e^x(2A + 4Ax + Ax^2).$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, получаем равенство

$$e^x(2A + 4Ax + Ax^2) - 2e^x(2Ax + Ax^2) - Ax^2e^x = 6e^x.$$

Упрощаем выражение, получаем $A = 3$, т. е. искомое частное решение

$$y_{\text{чн}} = 3x^2e^x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1e^x + C_2xe^x + 3x^2e^x.$$

П р и м е р 236. Решить уравнение $y'' + y' = 4xe^x$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + y' = 0$. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 = 0$ и $k_2 = -1$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения.

<table>
<tr><td colspan="4">$f(x) = 4xe^x = e^{1\cdot x}(4x \cdot \cos(0 \cdot x) + 0 \cdot \sin(0 \cdot x))$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 1$</td><td>$\beta = 0$</td><td>$z = 1 + 0 \cdot i = 1$</td><td>$r = 0$</td></tr>
<tr><td>$P_m(x) = 4x$</td><td>$m = 1$</td><td rowspan="2">$t = 1$</td><td>$\widetilde{P}_t(x) = \widetilde{P}_1(x)$</td></tr>
<tr><td>$Q_l(x) = 0$</td><td>$l = 0$</td><td>$\widetilde{Q}_t(x) = \widetilde{Q}_1(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{\text{чн}} = x^r \cdot e^{\alpha x}(\widetilde{P}_t(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)) =$
$= x^0 \cdot e^{1\cdot x}(\widetilde{P}_1(x)\cos(0 \cdot x) + \widetilde{Q}_1(x)\sin(0 \cdot x)) =$
$= (Ax + B)e^x$</td></tr>
</table>

Найдем значение коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем $y'_{\text{чн}} = (Ax + A + B)\, e^x$, $y''_{\text{чн}} = (Ax + 2A + B)\, e^x$. Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, получаем

$$(Ax + 2A + B)\, e^x + (Ax + A + B)\, e^x = 4xe^x.$$

Разделим обе части уравнения на e^x и упростим выражение в правой части:

$$2Ax + 3A + 2B = 4x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 2A = 4, \\ 3A + 2B = 0, \end{cases}$$

решением которой будет $A = 2$ и $B = -3$.

Частное неоднородное решение примет вид

$$y_{\text{чн}} = (2x - 3)\, e^x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения примет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 + C_2e^{-x} + (2x - 3)\, e^x.$$

Пример 237. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 8x^3$.

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4 = 0, \ \Rightarrow \ (k - 2)(k + 2) = 0, \ \Rightarrow \ k_1 = 2, k_2 = -2.$$

Получены различные действительные корни, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{оо}} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Теперь нужно найти какое-либо частное решение $y_{\text{чн}}$ исходного неоднородного уравнения. Составим таблицу:

<table>
<tr><td colspan="4">$f(x) = 8x^3 = e^{0\cdot x}(8x^3\cos(0\cdot x) + 0\cdot\sin(0\cdot x))$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 0$</td><td>$\beta = 0$</td><td>$z = 0 + 0\cdot i = 0$</td><td>$r = 0$</td></tr>
<tr><td>$P_m(x) = 8x^3$</td><td>$m = 3$</td><td rowspan="2">$t = 3$</td><td>$\widetilde{P}_t(x) = \widetilde{P}_3(x)$</td></tr>
<tr><td>$Q_l(x) = 0$</td><td>$l = 0$</td><td>$\widetilde{Q}_t(x) = \widetilde{Q}_3(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{чн} = x^r\cdot e^{\alpha x}(\widetilde{P}_t(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)) =$
$= x^0\cdot e^{0\cdot x}(\widetilde{P}_3(x)\cos(0\cdot x) + \widetilde{Q}_3(x)\sin(0\cdot x)) =$
$= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$</td></tr>
</table>

Найдем первую и вторую производную от частного решения:

$$y'_{чн} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$y''_{чн} = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$$

и поставим $y_{чн}$ и $y''_{чн}$ в исходное неоднородное уравнение:

$$6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 8x^3.$$

Упростим выражение в левой части равенства и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, составим систему линейных уравнений и найдем ее решение:

$$x^3(-4A) + x^2(-4B) + x(6A - 4C) + (2B - 4D) = 8x^3,$$

$$\begin{cases} -4A = 8, \\ -4B = 0, \\ 6A - 4C = 0, \\ 2B - 4D = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2, \\ B = 0, \\ C = -3, \\ D = 0. \end{cases}$$

Подставляем найденные значения A, B, C и D в формулу для частного решения $y_{чн}$, получаем частное решение неоднородного уравнения

$$y_{чн} = -2x^3 - 3x$$

и общее решение неоднородного уравнения

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x.$$

Пример 238. Решить задачу Коши $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет пару сопряженных комплексных корней $k_{1,2} = \pm i$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{оо} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

<table>
<tr><td colspan="4">$f(x) = 2\cos x = e^{0\cdot x}(2\cdot\cos(1\cdot x) + 0\cdot\sin(1\cdot x))$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 0$</td><td>$\beta = 1$</td><td>$z = 0 + 1\cdot i = i$</td><td>$r = 1$</td></tr>
<tr><td>$P_m(x) = 2$</td><td>$m = 0$</td><td rowspan="2">$t = 0$</td><td>$\widetilde{P}_t(x) = \widetilde{P}_0(x)$</td></tr>
<tr><td>$Q_l(x) = 0$</td><td>$l = 0$</td><td>$\widetilde{Q}_t(x) = \widetilde{Q}_0(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$y_{\text{чн}} = x^r\cdot e^{\alpha x}(\widetilde{P}_t(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)) =$
$= x^1\cdot e^{0\cdot x}(\widetilde{P}_0(x)\cos(1\cdot x) + \widetilde{Q}_0(x)\sin(1\cdot x)) =$
$= Ax\cos x + Bx\sin x$</td></tr>
</table>

Найдем значения коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = (A + xB)\cos x + (-Ax + B)\sin x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (-Ax + 2B)\cos x + (-A - Bx)\sin x.$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, после преобразований получаем равенство

$$2B\cos x - 2A\sin x = 2\cos x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства и получаем $A = 0$, $B = 1$, т. е. искомое частное решение примет вид

$$y_{\text{чн}} = x\sin x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x.$$

Для нахождения значений C_1 и C_2 находим

$$y'_{\text{он}} = -C_1\sin x + C_2\cos x + \sin x + x\cos x.$$

Используя начальные условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, получаем систему

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + 0\cdot\sin 0 = 2, \\ -C_1\sin 0 + C_2\cos 0 + \sin 0 + 0\cdot\cos 0 = 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $C_1 = 2$ и $C_2 = 0$. Частное решение исходного неоднородного уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y = 2\cos x + x\sin x.$$

Замечание. Если правая часть неоднородного уравнения является суммой нескольких функций, т. е.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

то частное решение неоднородного уравнения равно сумме соответствующих частных решений

$$y_{\text{чн}} = y_{\text{чн}_1} + y_{\text{чн}_2} + \ldots + y_{\text{чн}_k}.$$

Пример 239. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 5e^{2x} + 11e^{-x}$.

Общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x).$$

Для $f_1(x) = 5e^{2x}$ частное неоднородное решение будем находить в виде

$$y_{\text{чн}_1} = Ae^{2x},$$

а для $f_2(x) = 11e^{-x}$ – в виде

$$y_{\text{чн}_2} = Be^{-x}.$$

В итоге общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{он}} = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x) + e^{2x} + \frac{11}{8}e^{-x}.$$

Пример 240. Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 4y = \sin(2x) + 1$, соответствующее заданным начальным условиям $y(0) = \dfrac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.

Соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$, корнями которого является пара комплексных чисел $k_{1,2} = \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{оо}} = C_1\cos(2x) + C_1\sin(2x).$$

Правая часть неоднородного уравнения состоит из суммы двух функций $f_1(x) = \sin(2x)$ и $f_2(x) = 1$.

Для $f_1(x) = \sin(2x)$ частное неоднородное решение будем находить в виде

$$y_{\text{чн}_1} = x^1 \cdot (A\sin(2x) + B\cos(2x)),$$

а для $f_2(x) = 1$ – в виде

$$y_{\text{чн}_2} = C.$$

В итоге общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{он}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}.$$

Подставляя начальные условия, получаем частное решение

$$y = \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}.$$

Упражнения

Решить дифференциальные уравнения, используя понижение порядка:

271. $y''' = e^{5x}$.

272. $y'' = 4\cos 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

273. $y^{(4)} = \cos^2 x,\ y(0) = \dfrac{1}{32},\ y'(0) = 0,\ y''(0) = \dfrac{1}{8},\ y'''(0) = 0$.

274. $xy'' = (1 + 2x^2)y'$.

275. $x\,(y'' + 1) + y' = 0$.

276. $yy'' + (y')^2 = 0$.

277. $y'' = 2yy',\ y(0) = y'(0) = 1$.

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения:

278. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

279. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

280. $y'' + 4y' = 0$.

281. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

282. $y''' - y' = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$.

283. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

284. $y^{IV} - 2y'' + y = 0$.

285. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

286. $y^{IV} - y = 0$.

Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

287. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2$.

288. $y'' + y' = 2x + 1$.

289. $y'' + y = 4xe^x$.

290. $y'' - y = 12x^2 e^x$.

291. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

292. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

293. $y'' + y = x \sin x$.

294. $y'' + 8y' + 17y = e^x(60\cos x + 5\sin x)$.

295. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

7.3. Системы линейных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

называется *нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка* с неизвестными функциями $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. Число уравнений, входящих в систему, называется ее *порядком.*

Если правые части системы $F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = \overline{1, n})$ – линейные функции относительно y_1, y_2, …, y_n с постоянными коэффициентами, то система называется *линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* и имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x). \end{cases}$$

Если все функции $f_i(x) = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной.*

Решением системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, …, $y = y_n(x)$, при подстановке которых вместе с их производными в систему, каждое уравнение системы обращается в тождество.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка состоит в нахождении решения системы уравнений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, …, $y = y_n(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, …, $y_n(x_0) = b_n$.

Общим решением системы называется совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные, причем их значения могут быть определены при любых начальных условиях.

Частным решением системы называется решение, полученное из общего при некоторых частных значениях произвольных постоянных.

Одним из методов решения системы дифференциальных уравнений первого порядка является *метод исключения*, который заключается в сведении решения системы к решению одного дифференциального уравнения n-го порядка.

Рассмотрим на примерах решение систем второго порядка.

Пример 241. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y - 5z, \\ z' = y - z. \end{cases}$$

Найдем решение данной системы методом исключения. Для этого из первого уравнения системы выразим функцию z:

$$z = \frac{1}{5}\left(y - y'\right).$$

Продифференцируем обе части равенства:

$$z' = \frac{1}{5}\left(y' - y''\right).$$

Подставим найденные z и z' во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{5}\left(y' - y''\right) = y - \frac{1}{5}\left(y - y'\right).$$

После преобразований получим одно линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$. Его корнями будет пара сопряженных комплексных чисел $k_{1,\,2} = \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

От найденной функции находим производную

$$y'_{\text{общ}} = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$$

и подставляем найденное общее решение $y_{\text{общ}}$ и его производную $y'_{\text{общ}}$ в выражение для функции z:

$$z_{\text{общ}} = \frac{1}{5}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - (-2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x))\right)$$

или

$$z_{\text{общ}} = \left(\frac{1}{5}C_1 - \frac{2}{5}C_2\right)\cos(2x) + \left(\frac{2}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2\right)\sin(2x).$$

Общее решение системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} y_{\text{общ}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x), \\ z_{\text{общ}} = \left(\dfrac{1}{5}C_1 - \dfrac{2}{5}C_2\right)\cos(2x) + \left(\dfrac{2}{5}C_1 + \dfrac{1}{5}C_2\right)\sin(2x). \end{cases}$$

Пример 242. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -2y + 4z, \\ z' = -y + 3z \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 3$, $z(0) = 0$.

Сначала находим общее решение системы. Из первого уравнения выражаем функцию z:

$$z = \frac{1}{4}(y' + 2y),$$

дифференцируем ее:

$$z' = \frac{1}{4}(y'' + 2y')$$

и, подставляя z и z' во второе уравнение системы, получаем уравнение второго порядка

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Решением уравнения будет функция

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Находим производную от функции y_0:

$$y'_{\text{общ}} = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$$

и подставляем $y_{\text{общ}}$ и $y'_{\text{общ}}$ в выражение для функции z:

$$z_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \\ z_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + \dfrac{1}{4} C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Подставляя начальные условия в общее решение, найдем частное решение системы:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 = 3, \\ C_1 e^0 + \dfrac{1}{4} C_2 e^0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + \dfrac{1}{4} C_2 = 0. \end{cases}$$

Поставляя найденные значения $C_1 = -1$ и $C_2 = 4$ в общее решение, получаем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} y_{\text{ч}} = -e^{2x} + 4e^{-x}, \\ z_{\text{ч}} = -e^{2x} + e^{-x}. \end{cases}$$

Упражнения

Найти общее решение систем дифференциальных уравнений:

296. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -y + z. \end{cases}$

297. $\begin{cases} y' = -7y + z, \\ z' = -2y - 5z. \end{cases}$

298. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$

299. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 3y + z. \end{cases}$

300. $\begin{cases} y' = y + 3z, \\ z' = y - z. \end{cases}$

301. $\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = y - 2z + 2\sin x. \end{cases}$

Ответы

Раздел 1

1. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$. **2.** а) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
4. $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$. **6.** а) $AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 18 & -21 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 8 & -19 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$; б) AB не имеет смысла, $BA = \begin{pmatrix} 43 & -11 \\ 17 & 28 \\ 29 & 33 \end{pmatrix}$; в) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ -9 & 15 & 0 \\ 27 & -13 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$; г) $AB = \begin{pmatrix} 8 & 24 & -6 & 0 \\ -10 & 61 & 26 & 17 \end{pmatrix}$, BA не имеет смысл; д) $AB = (14)$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; е) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -9 \\ -2 & -7 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
7. $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} 56 & 30 \\ 43 & -5 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 49 & 76 \\ 57 & 68 \end{pmatrix}$. **10.** $A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -15 & 14 \end{pmatrix}$, $C \cdot A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 10 & 75 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **11.** $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 6 & -3 & 15 \\ 32 & 0 & 82 \end{pmatrix}$.
12. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $\left(A - A^T\right)^2 = \begin{pmatrix} -13 & 9 & -6 \\ 9 & -13 & -6 \\ -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$.
13. а) -2; б) 46; в) 10. **14.** а) 49, б) 50, в) -11. **15.** а) 0; б) 0; в) 2520. **16.** $A_{21} = -5$, $A_{22} = -2$. **17.** $A_{12} = -52$, $A_{44} = 70$. **18.** а) -54; б) 43; в) -624. **19.** а) $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ -7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$. **20.** а) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 11$; б) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 5$; в) $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$; г) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. **21.** $x = 5$, $y = 3$. **22.** а) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$. **23.** а) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$; в) Система

неопределенная, $x_1 = -4 + \dfrac{19}{5}u$, $x_2 = 1 - \dfrac{6}{5}u$, $x_3 = 2 + \dfrac{1}{5}u$, $x_4 = u$; г) Система несовместна; д) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$; е) Система несовместна; ж) Система неопределенная, $x_1 = -\dfrac{19}{2} + 2u + \dfrac{13}{2}v$, $x_2 = u$, $x_3 = -\dfrac{9}{2} + \dfrac{11}{6}v$, $x_4 = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}v$, $x_5 = v$.

Раздел 2

24. $\{1;\ -3;\ 5\}$. **25.** а) $\overrightarrow{AB} = \{-8;\ 5;\ -6\}$, $\overrightarrow{BA} = \{8;\ -5;\ 6\}$; б) $5\sqrt{5}$. **26.** а) $\{1;\ -1;\ 6\}$; б) $\{5;\ -3;\ 6\}$; в) $\{-12;\ 7;\ -12\}$. **27.** Векторы коллинеарны, направлены в противоположные стороны; вектор $\vec{a}$ в два раза длиннее вектора $\vec{b}$. **28.** 229. **29.** -58. **30.** $45°$. **31.** а) не ортогональны; б) ортогональны. **32.** 50. **33.** $\{-6;\ 0;\ -12\}$. **34.** а) $2\sqrt{65}$; б) $\sqrt{65}$. **35.** 130. **36.** Векторы не компланарны; образуют правую тройку. **37.** б) 7,5; в) 7,5. **38.** $3\sqrt{5}$. **39.** 98. **40.** $C(1;\ 11)$. **41.** A и C. **42.** а) $x + 2y + 8 = 0$, $\vec{n} = \{1;\ 2\}$, $\vec{q} = \{-2;\ 1\}$; б) $y = -\dfrac{x}{2} - 4$, $k = -\dfrac{1}{2}$, $b = -4$; в) $\dfrac{x}{-8} + \dfrac{y}{-4} = 1$, $A(-8;\ 0)$, $B(0;\ -4)$. **43.** $3x - 2y - 7 = 0$, $k = 3/2$. **44.** $45°$. **45.** $(1;\ 2)$. **46.** а) $2x - y + 9 = 0$; б) $x + 2y - 8 = 0$. **47.** 2,8; 0; 1,4. **48.** а) AB: $4x + 3y + 7 = 0$, AC: $12x - 5y + 119 = 0$, BC: $4x - 3y + 1 = 0$; б) 35; в) $\arccos\left(\dfrac{33}{65}\right)$; г) $4x + 3y + 175 = 0$; д) $3x + 4y - 7 = 0$, $d = \dfrac{48}{5}$; е) $20x - 27y - 7 = 0$; ж) $\left(\dfrac{31}{23};\ \dfrac{17}{23}\right)$. **49.** а) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$. **50.** а) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$; в) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$. **51.** а) $y^2 = 6x$; б) $y^2 = -x$; в) $x^2 = \dfrac{1}{2}y$; г) $x^2 = -4y$. **52.** а) Окружность с центром в точке $(2;\ -3)$, радиусом 4; б) Эллипс с центом в точке $(10;\ -2)$, $a = 5$, $b = 2$, $F_1(-\sqrt{21};\ 0)$, $F_2(\sqrt{21};\ 0)$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$; в) Сопряженная гипербола с центром в точке $(5;\ 3)$, $a = 1$, $b = 3$, $F_1(0;\ -\sqrt{10})$, $F_2(0;\ \sqrt{10})$, $y = \pm 3x$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$; г) Парабола с вершиной в точке $(-4;\ 4)$, симметричная относительно прямой, параллельной оси Ox, $p = 2$, $F(1;\ 0)$, D: $x = -1$; д) Гипербола с центом в точке $(-4;\ -3)$, $a = 2$, $b = 1$ $F_1(-\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(\sqrt{5};\ 0)$, $y = \pm\dfrac{1}{2}x$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; е) Парабола с вершиной в точке $(-3;\,-2)$, симметричная относительно прямой, параллельной оси Oy, $p=1$, $F\left(0;\,\frac{1}{2}\right)$, D: $y=-\frac{1}{2}$.

Раздел 3

53. 0. **54.** ∞. **55.** 0. **56.** ∞. **57.** $\frac{3}{4}$. **58.** 4. **59.** 0. **60.** ∞. **61.** 3. **62.** ∞. **63.** $\frac{1}{2}$. **64.** $-\frac{48}{13}$. **65.** $\frac{1}{4}$. **66.** 6. **67.** $\frac{2}{3}$. **68.** $-\frac{1}{2}$. **69.** 5. **70.** 10. **71.** $\frac{3}{2}$. **72.** $\frac{3}{4}$. **73.** e^{12}. **74.** $\frac{1}{e^4}$. **75.** e^3. **76.** 0. **77.** $-\infty$. **78.** $-\frac{\pi}{2}$. **79.** $+\infty$. **80.** $-\infty$. **81.** $-\frac{\pi}{2}$. **82.** $+\infty$. **83.** 0. **84.** 0. **85.** $+\infty$. **86.** В точке $x=0$ бесконечный разрыв. **87.** Функция непрерывна. **88.** В точке $x=2$ конечный устранимый разрыв. **89.** В точке $x=-2$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 5. **90.** В точках $x=-1$ и $x=1$ бесконечные разрывы. **91.** В точке $x=0$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 1. **92.** Вертикальная асимптота $x=-0.4$, горизонтальная асимптота $y=-0.8$. **93.** Горизонтальная асимптота $y=-1$. **94.** Вертикальная асимптота $x=-1$, горизонтальная асимптота $y=0$. **95.** Вертикальная асимптота $x=1$, наклонная асимптота $y=3x+4$. **96.** Вертикальная асимптота $x=0$, наклонная асимптота $y=x-3$.

Раздел 4

97. $y'=20x^3+1-x^{-2/3}+85x^{-6}-x^{-3/2}$. **98.** $y'=3\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}\sin^2 x}-7\cdot 2^x\ln 2-\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{1+x^2}$. **99.** $y'=6x^2\cos x-\left(2x^3-5\right)\sin x$. **100.** $y'=\frac{-\sin x(1+\ln^2 3)}{3^x}$. **101.** $y'=\frac{2}{\sqrt[5]{(4+5x)^3}}$. **102.** $y'=-5\cos(3-5x)$. **103.** $y'=\frac{17}{(3x-2)\,(4x+3)}$. **104.** $y'=\frac{6\ln^2(2x-1)}{2x-1}$. **105.** $y'=\frac{3x^2e^{2x+3}}{1+x^6}+2\operatorname{arctg}x^3e^{2x+3}$. **106.** $y'=\frac{3\operatorname{arctg}^2 x\sqrt{\ln x}}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arctg}^3 x}{2x\sqrt{\ln x}}$. **107.** $y'=\frac{-\sin x+\ln\cos x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$. **108.** $y'=\dfrac{\frac{4\operatorname{tg}4x}{3x}-\frac{4\ln\sqrt[3]{x^4}}{\cos^2 4x}}{\operatorname{tg}^2 4x}$. **109.** $y'(1)=12$. **110.** $y'(1)=\frac{320}{e^2}$. **111.**

$y'\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{5}{2\pi \ln^2 \sqrt{\pi/5}}$. **112.** $y' = \operatorname{tg} x(\sin x)^{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \cos x + (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln(\sin x) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$. **113.** $y' = x^2(x+1)^{x^2-1} + (x+1)^{x^2} \ln(x+1) \times 2x$. **114.** -7; касательная: $7x+y+3=0$; нормаль: $x-7y+29=0$. **115.** 2. **116.** 112,5 ед./ч; 82,5 ед./ч. **117.** 120. **118.** а) $y' = 4x^3 + 12x^2 + 6x$, $y'' = 12x^2 + 24x + 6$, $y''' = 24x + 24$, $y^{(4)} = 24$, $y^{(5)} = 0$; б)$y' = -5\sin 5x$, $y'' = -25\cos 5x$, $y''' = 125\sin 5x$, $y^{(4)} = 625\cos 5x$, $y^{(5)} = -3125\sin 5x$. **119.** а) $y''' = 4\sin 2x$; б) $y''' = -(x\cos x + 3\sin x)$. **120.** $dy = \dfrac{3dx}{\cos^2 3x}$. **121.** $dy = -7\sin 7x dx$. **122.** $dy = -\dfrac{e^{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$. **123.** а) $d^2y = -\dfrac{9}{4\sqrt{(3x+7)^3}}dx^2$; б) $d^2y = \dfrac{6}{x^4}dx^2$. **124.** -4. **125.** 0. **126.** $\dfrac{1}{3}$. **127.** 0,5. **128.** $\dfrac{9}{50}$. **129.** $-\dfrac{1}{2}$. **130.** Функция возрастает при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (0{,}5;\ +\infty)$, убывает при $x \in (-1;\ 0{,}5)$; $y_{max}(-1) = 0$; $y_{min}(0{,}5) = -6{,}75$. **131.** Функция возрастает на всей числовой оси. **132.** Функция убывает при $x \in (-\infty;\ -1)$, возрастает при $x \in (-1;\ \infty)$; экстремумы: $y_{min}(-1) = -1/e$. **133.** Функция убывает при $x \in \left(-\infty;\ -1-\sqrt{3}\right)$ и возрастает при $x \in \left(-1+\sqrt{3};\ +\infty\right)$. Экстремумы отсутствуют. **134.** $y_{\text{наим}}(1) = -3$; $y_{\text{наиб}}(3) = 9$. **135.** $y_{\text{наим}}(-2) = -13$; $y_{\text{наиб}}(-3) = 12$. **136.** График функции выпуклый вверх при $x \in (-\infty;\ 0{,}5)$, выпуклый вниз при $x \in (0{,}5;\ +\infty)$; точка перегиба $(0{,}5;\ 14{,}5)$. **137.** График функция выпуклый вверх при $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, выпуклый вниз $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$; точки перегиба $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$. **138.** График функции выпуклый вверх при $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{3}\right)$, выпуклый вниз при $x \in \left(-\sqrt{3};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$; точки перегиба $(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3}/2)$, $(0;\ 0)$, $(\sqrt{3};\ \sqrt{3}/2)$.

139. $D(y) = \mathbb{R}$. Функция общего вида. Точки пересечения с осями координат $(0;\ 0)$ и $(-4;\,,0)$. Асимптот нет. Функция убывает при $x \in (-\infty;\ -3)$, возрастает при $x \in (-3;\ +\infty)$; $y_{min}(-3) = -6{,}75$. График функции выпуклый вверх при $x \in (-2;\ 0)$, выпуклый вниз при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$. Точки перегиба: $(-2;\ -4)$ и $(0;\ 0)$. $E(y) = (-6{,}75;\ +\infty)$. График на рис. 66. **140.** $D(y) = (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ = \infty)$. Функция нечетная. Точка пересечения с осями координат $(0;\ 0)$. Асимптоты: $x = -2$, $x = 2$ и $y = 2x$. Функция

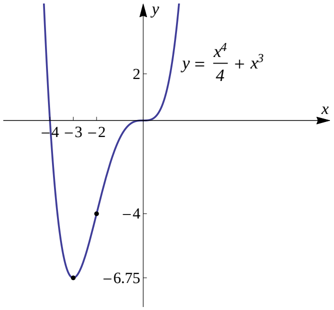


Рис. 66

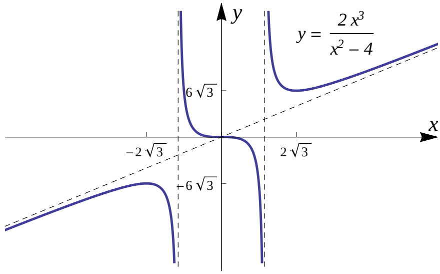


Рис. 67

убывает при $x \in (-2\sqrt{3};\,-2) \cup (-2;\,2) \cup (2;\,2\sqrt{3})$, возрастает при $x \in (-\infty;\,-2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3};\,+\infty)$; $y_{min}(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$, $y_{max}(-2\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$. График выпуклый вверх при $x \in (-\infty;\,-2) \cup (0;\,2)$, выпуклый вниз при $x \in (-2;\,0) \cup (2;\,+\infty)$. Точка перегиба: $(0;\,0)$. $E(y) = (-\infty;\,+\infty)$. График на рис. 67. **141.** $D(y) = \mathbb{R}$. Функция четная. Точки пересечения с осями координат $(0;\,-1)$, $(-0{,}5;\,0)$ и $(0{,}5;\,0)$. Асимптота $y = 4$. Функция убывает при $x \in (-\infty;\,0)$, возрастает при $x \in (0;\,+\infty)$; $y_{min}(0) = -1$. График функции выпуклый вверх при $x \in \left(-\infty;\,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\,+\infty\right)$, выпуклый вниз при $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Точки перегиба: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\,\frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\,\frac{1}{4}\right)$.

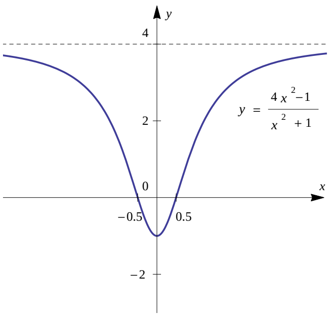


Рис. 68

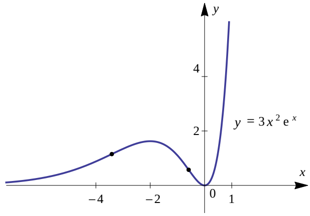


Рис. 69

$E(y) = [-1;\, 4)$. График на рис. 68. **142.** $D(y) = \mathbb{R}$. Функция общего вида. Точка пересечения с осями координат $(0;\, 0)$. Асимптота: $y = 0$. Функция убывает при $x \in (-2;\, 0)$, возрастает при $x \in (-\infty;\, -2) \cup (0;\, +\infty)$; $y_{max}(-2) = \dfrac{12}{e^2}$. График выпуклый вверх при $x \in (-2-\sqrt{2};\, -2+\sqrt{2})$, выпуклый вниз при $x \in (-\infty;\, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2};\, +\infty)$. Точки перегиба: $(-2-\sqrt{2};\, 6(3+2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}})$ и $(-2+\sqrt{2};\, 6(3-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}})$. $E(y) = [0;\, +\infty)$. График на рис. 69.

Раздел 5

143. 3. **144.** а) $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2$ (рис. 70); б) $x + y - 5 \neq 0$ (рис. 71); в) $4 - x^2 \geqslant 0$ и $9 - y^2 \geqslant 0$ (рис. 72); $x^2 + y^2 - 5 > 0$ (рис. 74); д) $16 - x^2 - y^2 \geqslant 0$ (рис. 73); е) $4 - x^2 \geqslant 0$ (рис. 75). **145.** $z'_x = 2xy - 4\sqrt{y}$, $z'_y = x^2 - 2\dfrac{x}{\sqrt{y}} - 12y$. **146.** $z'_x = 2x \operatorname{tg} x + x^2 \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{20x^3}{5x^4 + 3y^2}$, $z'_y = \dfrac{2^y \ln 2 \cdot y - 2^y}{y^2} + \dfrac{6y}{5x^4 + 3y^2}$. **147.** $z'_x = -y^2 \cdot (2-x)^{y^2-1}$, $z'_y = \ln(2-x) \times 2y \cdot (2-x)^{y^2}$. **148.** В точке $A(2;\, 1)$ $z'_x = -1$, $z'_y = 4$. **149.** В точке $A(2;\, 1;\, 0)$, $u'_x = 1/5$; $u'_y = 4/5$; $u'_z = 1/5$. **150.** 0. **151.** $-\dfrac{132}{5}$. **152.** $\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$. **153.** -2. **154.** $2\vec{i} - 3\vec{j}$. **155.** $3\sqrt{13}$. **156.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

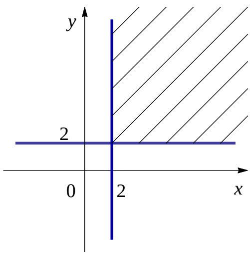


Рис. 70

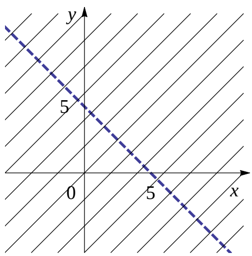


Рис. 71

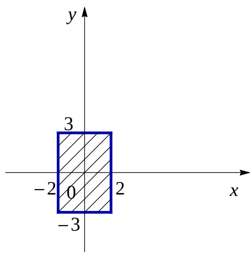


Рис. 72

157. $z''_{xx} = 4y^3 - 6xy^5 + 1$, $z''_{yy} = 12x^2y - 20x^3y^3$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 12xy^2 - 15x^2y^4 - 1$. **158.** $z''_{xx} = -y^2 \sin(xy)$, $x''_{yy} = -x^2 \sin(xy)$, $z''_{xy} = x''_{yx} = \cos(xy) - yx \sin(xy)$. **159.** $z''_{xx} = \dfrac{10y \sin 2y}{9\sqrt[3]{x^8}}$, $z''_{yy} = \dfrac{4\cos 2y - 4y \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{2\sin 2y + 4y \cos 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}$. **160.** $z''_{xx} =$

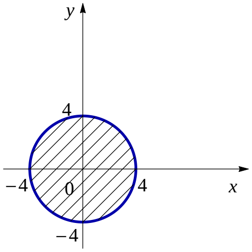


Рис. 73

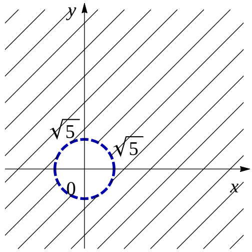


Рис. 74

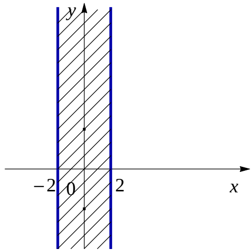


Рис. 75

$= \dfrac{20y^4}{x^6}$, $z''_{yy} = \dfrac{12y^2}{x^4}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{16y^3}{x^5}$. **161.** $z''_{xx} = \dfrac{-4}{\cos^2(2x-3y)}$, $z''_{yy} = \dfrac{-9}{\cos^2(2x-3y)}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{6}{\cos^2(2x-3y)}$. **162.** $u''_{xx} = 6x$, $u''_{yy} = 0$, $u''_{zz} = 2y$, $u''_{xy} = u''_{yx} = 3$, $u''_{xz} = u''_{zx} = 0$, $u''_{yz} = u''_{zy} = 2z$. **163.** $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}(M_0) = 0$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 4$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}(M_0) = 1$. **164.** $dz = (3x^2+6xy)\,dx + (3x^2-3y^2)\,dy$; $d^2z = (6x+6y)\,dx^2 + 12x\,dx\,dy - 6y\,dy^2$. **165.** а) Экстремума нет; точка $(-1;\,2)$ – критическая; б) $z_{min}(2;\,1) = -27$, $z_{max}(-2;\,-1) = 29$; критические точки $(1;\,2)$ и $(-1;\,-2)$; в) $z_{max}(6;\,3) = 27$; в точке $(0;\,0)$ нужны доп. исследования; г) $z_{min}(0;\,-2/3) = 4/3$, $(2;\,-2/3)$ – критическая точка. **166.** $z_{max}\left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$ при $x+y=1$. **167.** $z_{min}\left(-1;\,\dfrac{8}{3}\right) = -3$ при $2x+3y=6$. **168.** $z_{\min}\left(3;\,\dfrac{1}{3}\right) = 6$, $z_{\max}\left(-3;\,-\dfrac{1}{3}\right) = -6$ при $xy=1$. **169.** $z_{\min}(0;\,-1) = 6$, $z_{\max}(0;\,1) = -6$ при $y^2 - xy = 1$.

Раздел 6

170. $-\dfrac{4}{3\sqrt[4]{x^3}} - 2\ln x - \dfrac{5}{x} + C$. **171.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$. **172.** $x - \dfrac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$. **173.** $3\operatorname{tg}x + 2\operatorname{ctg}x + C$. **174.** $\dfrac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3/7}}{x+\sqrt{3/7}}\right| + C$. **175.** $2\ln\left|x+\sqrt{x^2-\dfrac{2}{9}}\right| + C$. **176.** $3\arcsin 5x + C$. **177.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{6}x + C$. **178.** $\dfrac{1}{3}\sin 3x + C$. **179.** $-\dfrac{1}{2}e^{7-2x} + C$.

180. $-\frac{1}{7}\operatorname{tg}(2-7x)+C$. **181.** $\frac{1}{5}\ln|5x+2|+C$. **182.** $-\frac{4}{35}\sqrt[4]{(11-5x)^7}+$ $+C$. **183.** $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{5}+C$. **184.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+2}{3}+C$. **185.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+7)^4}+$ $+C$. **186.** $\frac{1}{12}\ln\left|3x^4-2\right|+C$. **187.** $\frac{1}{5}\ln|\sin(5x+1)|+C$. **188.** $-\ln|3+\cos x|+C$. **189.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)+C$. **190.** $-\frac{1}{4\ln^2(2x+5)}+C$. **191.** $-\frac{1}{6}\ln\left|1-3e^{2x}\right|+C$. **192.** $x\ln(3-2x)-\frac{3}{2}\ln|3-2x|-x+C$. **193.** $-\frac{1}{3}(5x-2)\cos 3x+\frac{5}{9}\sin 3x+C$. **194.** $-\frac{1}{7}\,(3x-2)\,e^{-7x}-\frac{3}{49}e^{-7x}+C$. **195.** $x\operatorname{arctg}8x-\frac{1}{16}\ln\left|1+64x^2\right|+C$. **196.** $x\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+\sqrt{9-x^2}+C$. **197.** $\frac{1}{2}(2x-3)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$. **198.** $-\ln|x+1|+6\ln|x+3|-$ $-2\ln|x+5|+C$. **199.** $x^2+\ln|x-1|+\ln|x+2|+5\ln|x+3|+C$. **200.** $2\ln|x-1|-\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **201.** $\frac{1}{2(x-1)^2}+$ $+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$. **202.** $\frac{2}{7}\sqrt{(1+x)^7}-\frac{6}{5}\sqrt{(1+x)^5}+$ $+2\sqrt{(1+x)^3}-2\sqrt{1+x}+C$. **203.** $2\sqrt{x+3}-2\ln\left|1+\sqrt{x+3}\right|+C$. **204.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **205.** $-2\sqrt{12x-4x^2-5}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{2x-3}{2}+$ $+C$. **206.** $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2-4x+5}-\frac{1}{4}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right|+C$. **207.** $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **208.** $\frac{21}{8}$. **209.** $\frac{21}{2}-\ln 2$. **210.** $-\frac{\ln 5}{12}$. **211.** $\frac{1}{4}$. **212.** 2. **213.** $\ln\frac{4}{3}$. **214.** $\frac{98}{3}$. **215.** $\frac{\pi}{4}$. **216.** $\frac{1}{3}$. **217.** $\frac{272}{15}$. **218.** $\frac{1}{6}$. **219.** $\frac{e-2}{e}$. **220.** 6. **221.** $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$. **222.** $\frac{\pi}{2}-1$. **223.** 9 кв. ед. **224.** $10\frac{2}{3}$ кв.ед. **225.** $10\frac{2}{3}$ кв.ед. **226.** 9 кв.ед. **227.** $\frac{4}{3}$ кв.ед. **228.** $\frac{21}{2}$ кв.ед. **229.** $\frac{7}{12}$ кв.ед. **230.** $2+2\ln 3$. **231.** Сходится, равен $\frac{5}{4}$. **232.** Расходится. **233.** Сходится, равен $\frac{\pi^2}{8}$. **234.** Сходится, равен $-\frac{1}{2}$. **235.** Сходится, равен $\frac{1}{4}$. **236.** Расходится. **237.** Сходится, равен π. **238.** Сходиться, равен $\frac{\pi}{2}$. **239.** Расходится. **240.** Сходится, равен $-\frac{5}{16}$. **241.** Расходится. **242.** Расходится. **243.** Сходится, равен $\frac{\pi}{2}$. **244.**

Расходится. **245.** Расходится. **246.** Расходится.

Раздел 7

247. $y = x^3 + x^2 + x + C$. **248.** $y = e^x + 3x + 1$. **249.** $2y^2 = -\operatorname{arctg} x + C$. **250.** $\ln y = \sqrt{x} + \ln C$ – общий интеграл ($y_{\text{общ}} = Ce^{\sqrt{x}}$), $\ln y = \sqrt{x} - 2$ – частный интеграл. **251.** $\frac{1}{2}\ln(2y+1) = \ln x - \ln(x+1) + \ln C$ или $\sqrt{2y+1} = \frac{Cx}{x+1}$. **252.** $2\sqrt{y} - \ln y = -2\sqrt{x} + C$. **253.** $y = e^x(x+C)$. **254.** $y_{\text{общ}} = \frac{C + \operatorname{tg} x}{\cos x}$, $y_{\text{част}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$. **255.** $y = (x+C)(1+x^2)$. **256.** $\sqrt{y} = 1 + e^{C - e^x}$. **257.** $y^{-2} = x^4 + Cx^6$. **258.** $y^{-1} = (x+1)(\ln|x+1| + 1)$. **259.** $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$. **260.** $x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 = C$. **261.** $\frac{e^y - 1}{1 + x^2} = C$. **262.** $\frac{1}{y^2} + \ln\frac{1}{x^2} = 1$. **263.** $y = x\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$. **264.** $y = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C$. **265.** $y = C(1 + e^x)$. **266.** $\frac{1}{2(\cos y)^2} = 2\ln x + C$. **267.** $y^{-1} = \frac{x^3 + C}{x}$. **268.** $y = \ln x(x^2 + C)$. **269.** $x^2 y + \cos x - \sin y = C$. **270.** $y_{\text{общ}} = \frac{x^4 + x^3 + C_1}{x}$, $y_{\text{част}} = x^3 + x^2$. **271.** $y = \frac{e^{5x}}{125} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$. **272.** $y = 1 - \cos 2x$. **273.** $y = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{32}\cos 2x$. **274.** $y = C_1 e^{x^2} + C_2$ **275.** $y = C_1 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$. **276.** $\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$. **277.** $y = \frac{1}{1-x}$. **278.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. **279.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$. **280.** $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$. **281.** $y = C_1 e^{-x}\cos 2x + C_2 e^{-x}\sin 2x$. **282.** $y = e^{-x} + 2$. **283.** $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$. **284.** $y = C_1\cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \sin x + C_4 \cos x)$. **285.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{3x} + C_5 x e^{3x}$. **286.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$. **287.** $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12$. **288.** $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - x$. **289.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x-2)e^x$. **290.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (2x^3 - 3x^2 + 3x)e^x$. **291.** $y = e^x$. **292.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$. **293.** $y = C_1\cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$. **294.** $y = C_1 e^{-4x}\cos x + C_2 e^{-4x}\sin x + e^x(2\cos x + \sin x)$. **295.** $y = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\sin 2x + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{20}\sin 2x$. **296.** $y = C_1 + C_2 e^{2x}, z = C_1 - C_2 e^{2x}$. **297.** $y = C_1 e^{-6x}\cos x +$

$+ C_2e^{-6x}\sin x,\ z = (C_1 + C_2)e^{-6x}\cos x - (C_1 - C_2)e^{-6x}\sin x$. **298.** $y = C_1e^x + C_2e^{6x}, z = -C_1e^x + \dfrac{3}{2}C_2e^{6x}$. **299.** $y = C_1e^x\cos 3x + C_2e^x\sin 3x,\ z = C_1e^x\cos 3x - C_2e^x\sin 3x$. **300.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, $z = \dfrac{1}{3}C_1e^{2x} - C_2e^{-2x}$. **301.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \sin x, z = \dfrac{1}{3}C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{2}{3}\sin x - \dfrac{1}{3}\cos x$.

Приложение I

Основные формулы и соотношения

Разложение на множители

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3,$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3,$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2),$$
где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Арифметический корень и его свойства

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a} = x$ означает:
1) $x \geqslant 0$;
2) $x^n = a$.

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, \quad \sqrt[n\cdot m]{a^{k\cdot m}} = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n\cdot k]{a}, \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Степень с рациональным показателем

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{множителей}}, \quad a^1 = a, \quad a^0 = 1\,(a \neq 0),$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\,(a \geqslant 0), \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}\,(a > 0).$$

$$a^x\cdot a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}, \quad (a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Квадратное уравнение и его корни

Квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

- Если $D > 0$, уравнение имеет два различных вещественных корня
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$
- Если $D = 0$, уравнение имеет два одинаковых вещественных корня
$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$
- Если $D < 0$, уравнение вещественных корней не имеет.

В случае если коэффициент b — четное число,

$$ax^2 + 2kx + c = 0;$$

$$D_1 = k^2 - ac, \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Логарифмы и их основные свойства

Запись $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$; здесь $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$.

Частные случаи: $\lg b$ — сокращенная запись для $\log_{10} b$ — десятичный логарифм; $\ln x$ — сокращенная запись для $\log_e x$ — натуральный логарифм, $e \approx 2{,}7182818284590\ldots$; $ln\, e = 1$, $ln 1 = 0$.

Основные преобразования:

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

$$\log_a b^p = p \cdot \log_a b,$$

Тригонометрические формулы

1. Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

2. Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

3. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

4. Формулы сложения аргументов:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

5. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

6. Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов:

Функция	Аргумент						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Приложение II

Свойства и графики элементарных функций

Степенная функция $y = x^{\alpha}$

Здесь α — любое действительное число. В общем случае степенная функция определена при $x > 0$; она монотонно возрастает, если $\alpha > 0$, и монотонно убывает, если $\alpha < 0$.

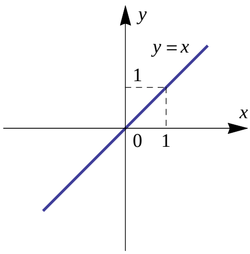


Рис. 76

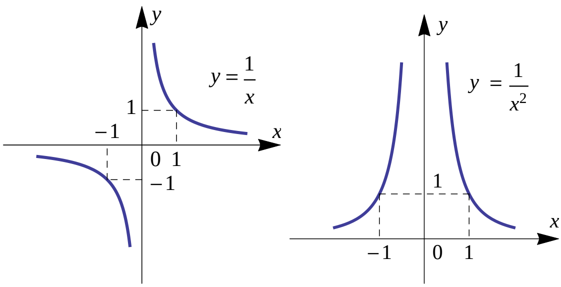


Рис. 77

Частные случаи

1. Если α — целое положительное число, то функция $y = x^{\alpha}$ определена на всей вещественной оси $-\infty < x < +\infty$. Графики степенной функции при $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ изображены на рис. 76.

2. Если α — целое отрицательное число, то функция x^α определена при всех значениях x, кроме $x = 0$ (рис. 77).

3. Если $\alpha = \dfrac{p}{q} > 0$ — рациональное число, причем дробь $\dfrac{p}{q}$ – несократимая, где q — нечетное, то функция x^α определена на всей вещественной оси , а при четном q функция x^α определена для $x \geqslant 0$. Например, функции $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ и $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, представленные на рис. 78.

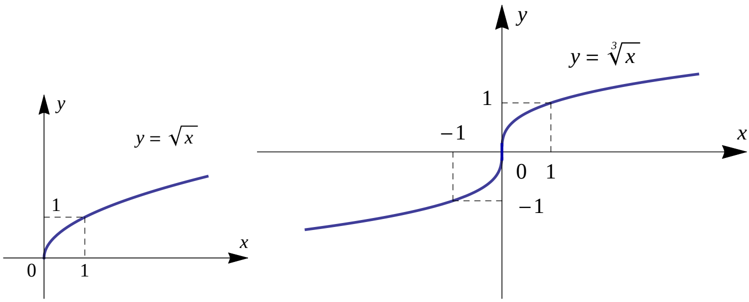


Рис. 78

Показательная функция $y = \alpha^x$ $(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$

Область определения — вся числовая прямая $\mathbb{R}$. Число α называется основанием степени. При $\alpha > 1$ показательная функция монотонно возрастает, а при $0 < \alpha < 1$ — монотонно убывает (рис. 79).

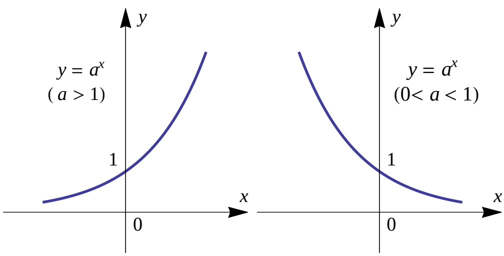


Рис. 79

Логарифмическая функция $y = \log_\alpha x$ $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$

Число α называется *основанием* логарифмической функции. Функция определена для всех $x > 0$. При $\alpha > 1$ логарифмическая функция монотонно возрастает, а при $0 < \alpha < 1$ монотонно убывает (рис. 80).

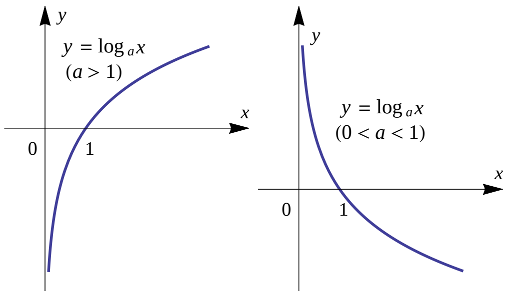


Рис. 80

Логарифмическая функция $y = \log_\alpha x$ является обратной функцией для показательной функции $y = \alpha^x$. Логарифмическую функцию с основанием $\alpha = e$ обозначают $\ln x$ и называют *натуральным логарифмом*, а логарифмическую функцию с основанием $\alpha = 10$ обозначают $\lg x$ и называют *десятичным логарифмом*.

Тригонометрические функции

1. Функция синус $y = \sin x$

Функция определена для всех x, она периодическая с периодом равным $T = 2\pi$. График синуса называют *синусоидой* (рис. 81).

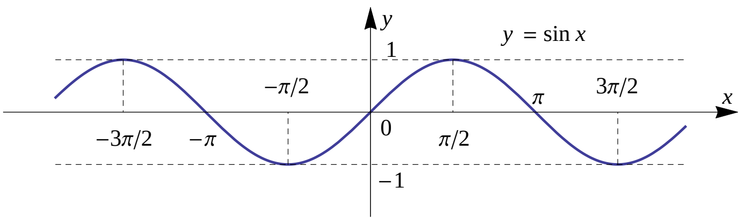


Рис. 81

2. Функция косинус $y = \cos x$

Функция определена для всех x, ее период $T = 2\pi$. График косинуса изображен на рис. 82. График функции $y = \cos x$ получается из графика $y = \sin x$ смещением его вдоль оси Ox влево на отрезок $\dfrac{\pi}{2}$.

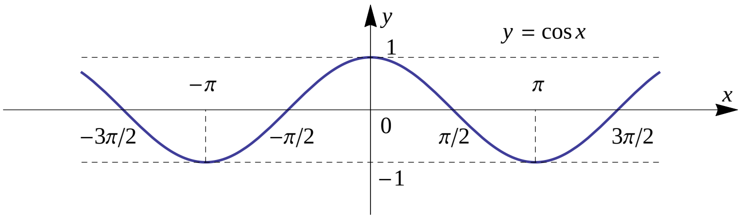


Рис. 82

3. Функция тангенс $y = \operatorname{tg} x$

Функция определена всюду, кроме точек $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Она периодическая с периодом $T = \pi$. Ее график изображен на рис. 83.

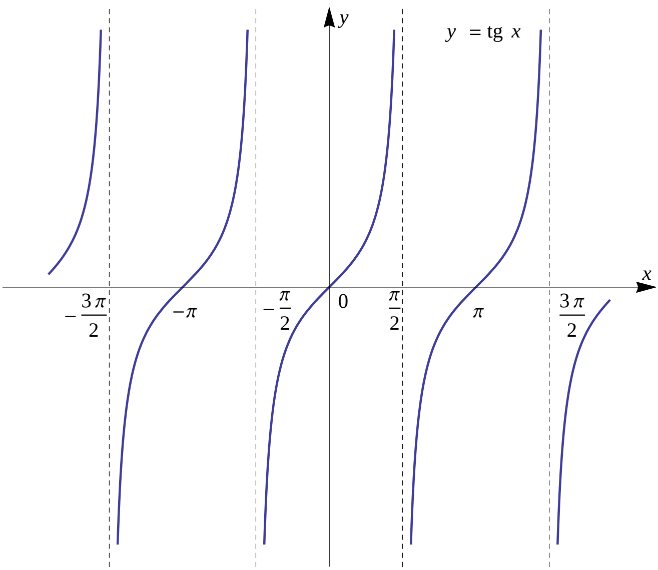


Рис. 83

4. Функция котангенс $y = \operatorname{ctg} x$

Функция определена всюду, кроме точек $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция периодическая, $T = \pi$ (рис. 84).

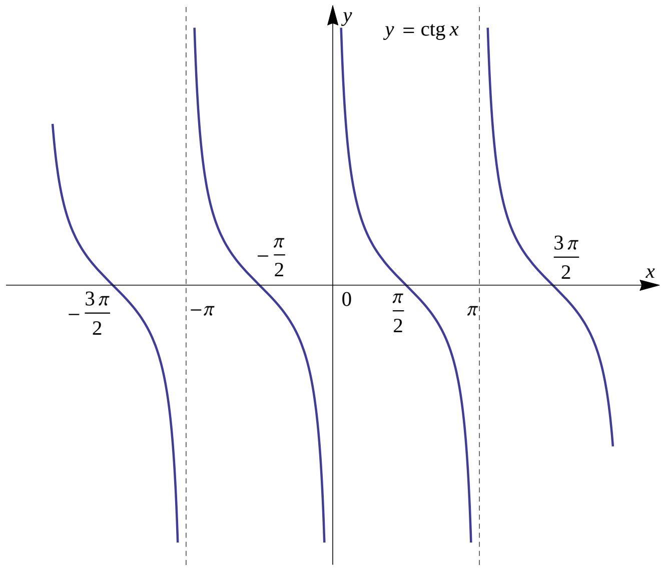


Рис. 84

Обратные тригонометрические функции

1. Функция арксинус $y = \arcsin x$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Значит, она имеет обратную функцию $x = \arcsin y$, которая определена на отрезке $[-1; 1]$, а область ее значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 85.

2. Функция арккосинус $y = \arccos x$

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$. На этом отрезке функция $y = \cos x$ монотонно убывает, так что она имеет обратную функцию $x = \arccos y$, которая определена на отрезке $[-1; 1]$, а ее значения принадлежат отрезку $[0; \pi]$. График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 86.

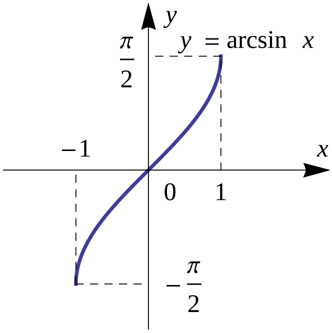


Рис. 85

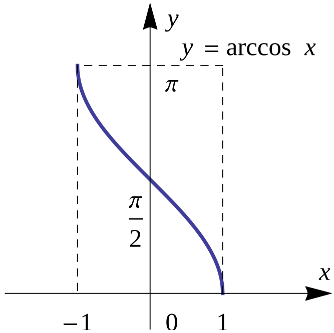


Рис. 86

3. Функция арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. При этих значениях x функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастающая и ее значения изменяются $(-\infty; +\infty)$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную, которая обозначается $x = \operatorname{arctg} y$. Она определена на всей числовой оси, а область ее значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 87.

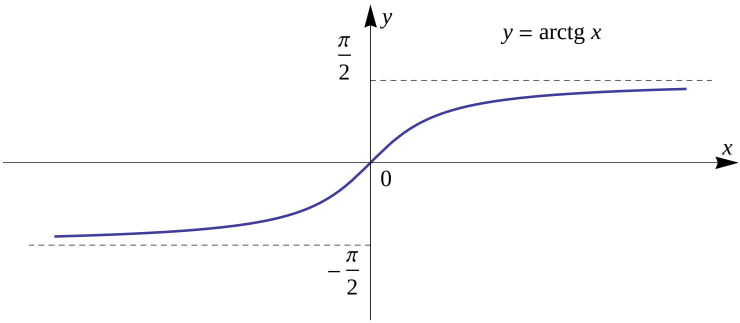


Рис. 87

4. Функция арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0; \pi)$. При этих значениях x функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает, а ее значения изменяются $(-\infty; +\infty)$. Поэтому она имеет обратную, которая обозначается $x = \operatorname{arcctg} y$. Эта функция определена на всей числовой оси, а ее значения принадлежат интервалу $(0;\ \pi)$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 88.

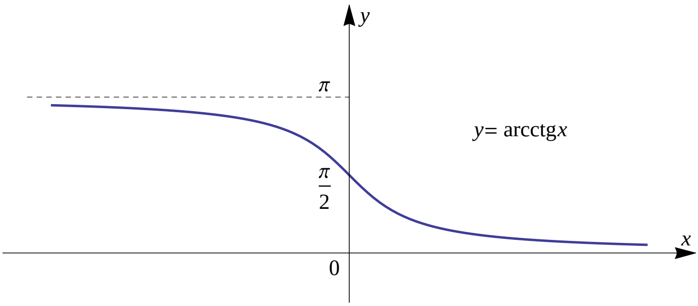


Рис. 88

Гиперболические функции

1. Гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Функция определена на всей числовой оси и является нечетной, т. е. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$. Функция принимает значения $(-\infty;\ +\infty)$. График функции представлен на рис. 89.

2. Гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Функция определена на всей числовой оси и является четной, т. е. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Функция принимает значения $(1;\ +\infty)$. График функции представлен на рис. 90.

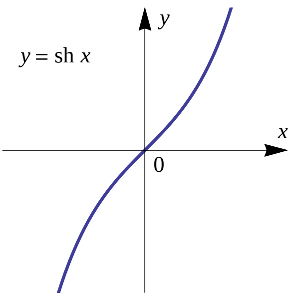


Рис. 89

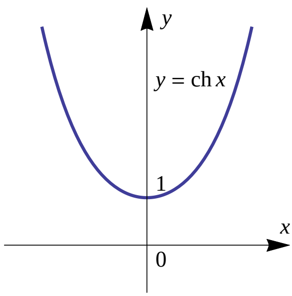


Рис. 90

3. Гиперболический тангенс $\boldsymbol{y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$

Функция определена на всей числовой оси и является нечетной. Функция принимает значения $(-1;\ 1)$, т. е. $|\operatorname{th} x| < 1$. График функции представлен на рис. 91.

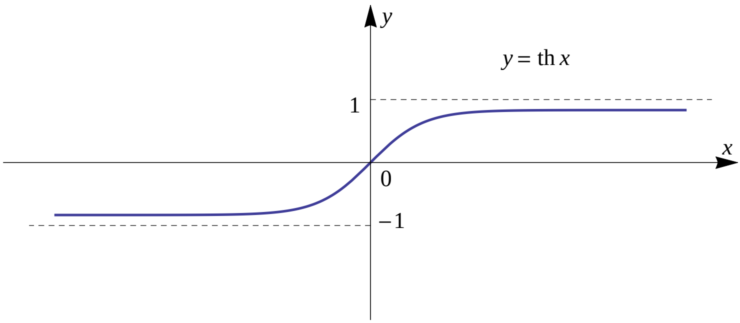


Рис. 91

4. Гиперболический котангенс $\boldsymbol{y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$

Функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$, и является нечетной, т. е. $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$. Функция принимает значения $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$, т. е. $|\operatorname{cth} x| > 1$. График функции представлен на рис. 92.

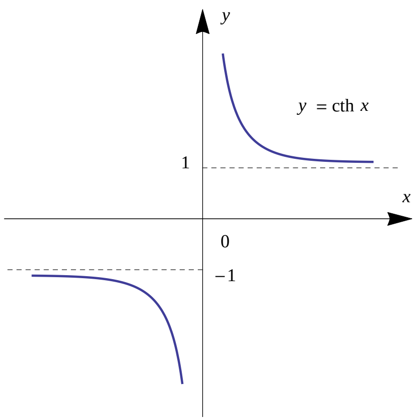


Рис. 92

Библиографический список

1. *Баврин И. И.* Математика: Учебник и практикум. М.: Юрайт, 2017.

2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие. Т.1,2. М.: Высшая школа, 2015.

3. *Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2008.

4. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2008.

5. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

6. *Ильин В. А.* Высшая математика: учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина. М.: Проспект, 2017.

7. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие / ред. А. П. Рябушко. Минск: Вышейшая школа, 1991.

8. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Шикин Е. В., Заляпин В. И.* Вся высшая математика. Т. 1, 2. М.: Едиториал УРСС, 2003.

9. *Шипачев В. С.* Высшая математика: учебное пособие для бакалавров / В. С. Шипачев. М.: Юрайт, 2013.

10. *Виленкин И. В.* Высшая математика: для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов / И. В. Виленкин, В. М. Гробер. Ростов-на-Дону : Феникс, 2009.

Учебное издание

Ощепкова Наталья Владимировна
Старостина Лариса Сергеевна

МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Редактор *Л. Л. Савенкова*
Корректор *Л. Л. Соболева*
Техническая подготовка материалов: *Н. В. Ощепкова*

Объем данных 2,5 Мб
Подписано к использованию 08.12.2021

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15