МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. В. Ощепкова, Л. С. Старостина

МАТЕМАТИКА

Сборник практических задач

*Допущено Методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров
«Биология», «Биотехнология»,
«Водные биоресурсы и аквакультура»,
«Экология и природопользование»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2018

УДК 51(075)
ББК 22.1я73
О971

Ощепкова Н. В. Старостина Л. С.

О971 Математика. Сборник Электронных заданий [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Н. В. Ощепкова, Л. С. Старостина; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2018. – 2 Мб; 270 с. – Режим доступа: https://elis.psu.ru/ident/978-5-7944-3179-7. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-7944-3179-7

Пособие содержит разделы высшей математики, соответствующие стандарту обучения студентов по дисциплине «Математика». Рассматриваются основные теоретические материалы, включающие решения многочисленных примеров и упражнений для аудиторной и самостоятельной работы. Рекомендовано для студентов биологического и географического факультетов, но может использоваться студентами и других направлений и специальностей при изучении дисциплины «Математика».

УДК 51(075)
ББК 22.1я73

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра высшей математики Пермского государственного аграрно-технологического университета им. акад. Прянишникова (зав. кафедрой – канд. тех. наук, доцент ***В. В. Аюпов***); доцент кафедры высшей математики Пермского национального исследовательского политехнического университета ***В. П. Плаксина***

ISBN 978-5-7944-3178-0

Содержание

Математику уже затем учить следует,
что она ум в порядок приводит.
М.В. Ломоносов

Предисловие

Математика является необходимой частью образования студентов естественнонаучных специальностей.

Изучение математики:

- помогает понимать основы современной математики;
- помогает укреплению основ логического мышления;
- дает знания, необходимые для самостоятельного изучения и разработки количественных аспектов прикладных задач естественных наук.

Данное учебное пособие написано в соответствии с требованиями государственных общеобразовательных стандартов в области математики для студентов естественнонаучных специальностей вузов. Оно соответствует программе дисциплины «Математика» и включает следующие разделы: «Основы линейной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Основы математического анализа», «Основы дифференциального исчисления», «Основы интегрального исчисления», «Основы теории функции нескольких переменных», «Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений». Учебное пособие рассчитано на уровень подготовки студентов 1 курса и практически не требует дополнительной информации. Теоретический материал сопровождается наглядными иллюстрациями и многочисленными практическими примерами. В каждом разделе даются задачи для аудиторной и самостоятельной работы, а также подготовки к контрольным работам. В приложениях приведены основные формулы из школьной программы, а также графики и свойства элементарных функций. Ответы приведены в конце книги (нумерация задач единая).

Данное учебное пособие может использоваться студентами биологического, географического, химического и других естественнонаучных факультетов вузов.

1. Основы линейной алгебры

1.1. Матрицы и определители

Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, состоящая из m строк и n столбцов, заключенная в круглые скобки. Матрицы обычно обозначаются заглавными латинскими буквами, а их элементы — строчными латинскими буквами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ — элемент матрицы, расположенный в i-й строке и j-м столбце. Элементами матрицы могут быть числа, переменные, функции и другие математические объекты. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матриц:

$$A = (a_{ij}) = [a_{ij}] = \|a_{ij}\|,\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

П р и м е р 1. Матрица A размерности 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B одного размера $m \times n$ называются равными, если $a_{ij} = b_{ij}$ при всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$. Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*, а состоящая из одного столбца – *матрицей-столбцом*. Матрица-строка и матрица-столбец также называются *вектором*.

П р и м е р 2. $A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ — матрица-строка.

П р и м е р 3. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ — матрица-столбец.

Матрица называется *квадратной* n–го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

П р и м е р 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица 2-го порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер строки равен номеру столбца ($i = j$), называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*.

Пример 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ — диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной* матрицей n-го порядка и обычно обозначается буквой E.

Пример 6. $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица 2-го порядка, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица 3-го порядка.

Матрица любого размера называется нулевой, если все ее элементы равны нулю:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд действий.

Транспонирование матриц

Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с сохранением их порядка. Транспонированная матрица обозначается A^T.

Пример 7. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 4 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ транспонированной будет матрица $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$ *на число* k называется матрица $B = (b_{ij})$ размерности $m \times n$ элементы, которой вычисляются по формуле

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij},\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

и обозначается $B = kA$.

Пример 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & -12 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$.
Следовательно, общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Пример 9. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрицу $(-1) \cdot A$ называют *противоположной* матрице A и обозначают $-A$.

Сложение матриц

Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$, размера $m \times n$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

и обозначается $C = A + B$.

Пример 10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$,

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-9) & 0 + 4 & -4 + 5 \\ 5 + 3 & -2 + 7 & 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычитание матриц

Разность двух матриц A и B одинакового размера определяется формулой

$$C = A - B = A + (-B).$$

Пример 11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -9 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$,

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1 - (-9) & 0 - 4 & -4 - 5 \\ 5 - 3 & -2 - 7 & 3 - 2 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

Перемножать можно только матрицы *согласованных* размеров, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Пусть матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ имеют соответственно размеры $m \times p$ и $p \times n$. Их произведением $A \cdot B$, в указанном порядке, называют матрицу $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pi} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{ki}.$$

Пример 12. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \\ 2 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1{\cdot}1+(-2){\cdot}5+0{\cdot}2+1{\cdot}(-2) & 1{\cdot}0+(-2){\cdot}(-1)+0{\cdot}(-5)+1{\cdot}4 \\ 4{\cdot}1+3{\cdot}5+(-1){\cdot}2+2{\cdot}(-2) & 4{\cdot}0+3{\cdot}(-1)+(-1){\cdot}(-5)+2{\cdot}4 \\ 2{\cdot}1+5{\cdot}5+(-3){\cdot}2+4{\cdot}(-2) & 2{\cdot}0+5{\cdot}(-1)+(-3){\cdot}(-5)+4{\cdot}4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 13 & 10 \\ 29 & 26 \end{pmatrix}.$$

Если в этом примере поменять местами матрицы-сомножители и попытаться найти произведение $B \cdot A$, то увидим, что оно не существует, так как количество столбцов матрицы B не равно количеству строк матрицы A. Следовательно, в общем случае для произведения матриц не выполняется переместительный закон, т. е.

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Интересный факт: произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц это может не выполняться, т. е. произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.

Пример 13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При умножении любой квадратной матрицы на единичную матрицу E такого же порядка снова получается исходная матрица.

Пример 14. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 & a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 & a_{21}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определители

Определителем n-го порядка называется *число*, записываемое в виде квадратной таблицы элементов, содержащей n строк и n столбцов, заключенной в прямые скобки. Он имеет вид:

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{jn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$ — *элемент определителя*, расположенный в i-й строке и j-м столбце.

Каждой квадратной матрице A можно однозначно поставить в соответствие ее определитель $|A|$.

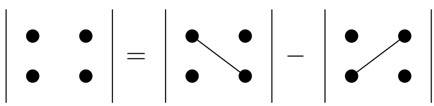
Элементы определителя $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* определителя, а элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \dots, a_{n1}$ — *побочную диагональ*.

Значения определителей находятся следующим образом:

1) если $n = 1$, то определитель равен самому элементу:

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11};$$

2) если $n = 2$, то определитель равен разности произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали:

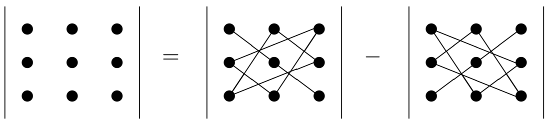


Пример 15. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$

Пример 16. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-8) - 2 \cdot 7;$

3) если $n = 3$, то для вычисления определителя можно пользоваться одним из двух удобных «геометрических» правил.

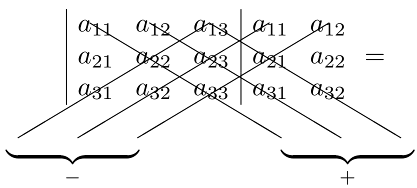
Первое — схема, которая называется *правилом треугольников.* Она показывает, что со своими знаками берутся произведения элементов, расположенных на главной диагонали, а также элементов, расположенных в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; с противоположным знаком берутся произведения элементов, расположенных на побочной диагонали, а также в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали:



Пример 17. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Второе — *правило Саррюса.* Справа от определителя дописывают первые два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со своим знаком; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, с противоположным знаком:



$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i–й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Пример 18. Найти минор элемента a_{32} для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -8 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & \cancel{5} & -2 \\ 4 & \cancel{7} & -8 \\ \cancel{-1} & \cancel{7} & \cancel{1} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 24 + 8 = 32.$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Пример 19. Найти алгебраические дополнения к элементам a_{32} и a_{11} для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & -8 \\ -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

.

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 32 = -32.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{32} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 63 = 63.$$

Основные свойства определителя

1. Определитель не изменится, если его *транспонировать*, т. е. строки записать в столбцы, не меняя их порядка.

Пример 20. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1.$

Следствие. Из этого свойства следует, что строки и столбцы определителя равноправны, т. е. свойства, сформулированные для строк, выполняются и для столбцов.

2. Если поменять местами две какие-либо строки определителя, то он сменит свой знак на противоположный.

Пример 21. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}.$

3. Если какая-либо строка определителя состоит из одних нулей, то определитель равен нулю.

Пример 22. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0.$

4. Если две какие-либо строки определителя состоят из одинаковых элементов, то определитель равен нулю.

Пример 23. $\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 7 & -2 \\ 9 & 7 & -2 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

5. Если элементы какой-либо строки определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Пример 24. $\Delta = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$

6. Если элементы каких-либо двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пример 25. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -6 \\ -1 & -3 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

7. Определитель не изменится, если к элементам любой строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки, предварительно умноженные на некоторое число.

Пример 26. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6+1\cdot 2 & -5+2\cdot 2 & 3+(-3)\cdot 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 101.$$

8. *Частный случай теоремы Лапласа.* Разложение определителя по строке. Определитель равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

П р и м е р 27. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 4 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \cdot (-3) - 5 \cdot 0 \cdot 2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) - 1 \cdot 5 \cdot 1 = 4.$
Вычислим этот же определитель разложением по третьему столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{13} + 6 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} =$$

$$= 5 \cdot \ (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (5 \cdot (-3) - 0 \cdot 2) + 6 \cdot (-1) \cdot (4 \cdot (-3) - 1 \cdot 2) + 1 \cdot (4 \cdot 0 - 1 \cdot 5) = 4.$$

Разложение можно производить по любой строке или столбцу, поэтому предпочтительно выбирать строку (столбец), содержащие нули, причем разложение тем проще, чем больше нулей в выбранной строке (столбце). Разложим тот же самый определитель по второму столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + (-3) \cdot A_{32} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 + (-3) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (5 \cdot 1 - 6 \cdot 2) + (-3) \cdot (-1) \cdot (4 \cdot 6 - 5 \cdot 5) = 4.$$

Теорема о разложении определителя позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. При этом, пользуясь вышеизложенными свойствами определителя, можно так его преобразовать, чтобы элементы выбранной для разложения строки (столбца), за исключением одного, обратились в нули.

П р и м е р 28. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Выберем элемент $a_{12} = 1$ (удобно, когда в определителе есть элемент, равный единице) и получим на месте остальных элементов второго столбца нули. Для этого ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на число 2, к третьей строке прибавим первую, к четвертой строке прибавим первую строку, умноженную на 6; получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} (2)(1)(6) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 11 & 11 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 17 & 0 & 16 & 20 \end{vmatrix}.$$

При разложении полученного определителя по элементам второго столбца останется лишь одно слагаемое, равное произведению элемента a_{12} на его алгебраическое дополнение A_{12}, так как все остальные элементы столбца равны нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 11 & 11 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 17 & 0 & 16 & 20 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 11 & 11 \\ 4 & -3 & 0 \\ 17 & 16 & 20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 11 & 11 \\ 4 & -3 & 0 \\ 17 & 16 & 20 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или подобным же путем свести к вычислению одного определителя второго порядка. Прибавив к первому столбцу второй столбец, получим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 18 & 11 & 11 \\ 1 & -3 & 0 \\ 33 & 16 & 20 \end{vmatrix},$$

затем прибавим ко второму столбцу первый столбец, умноженный на 3. Во второй строке останется единственный отличный от нуля элемент. Разложим определитель по второй строке, получим

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 18 & 65 & 11 \\ 1 & 0 & 0 \\ 33 & 115 & 20 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 65 & 11 \\ 115 & 20 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся свойством 5, а затем вычислим полученный определитель второго порядка:

$$\Delta = 5 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 23 & 20 \end{vmatrix} = 5 \cdot (13 \cdot 20 - 11 \cdot 23) = 35.$$

Обратная матрица

Матрица называется *невырожденной*, если определитель этой матрицы не равен нулю.

Квадратная матрица, обозначаемая A^{-1}, называется *обратной* для невырожденной матрицы A того же порядка, если выполняется равенство

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Для каждой невырожденной матрицы существует ***единственная*** обратная матрица.

Порядок вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица вырожденная, и обратной для нее матрицы A^{-1} не существует.

2. Каждый элемент матрицы a_{ij} заменяем своим алгебраическим дополнением A_{ij}. Полученная матрица из алгебраических дополнений называется *присоединенной*.

3. Присоединенную матрицу транспонируем и делим на определитель исходной матрицы. В результате получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р 29. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы $|A| = 11 \neq 0$. Так как определитель матрицы отличен от нуля, матрица A невырожденная, обратная матрица существует. Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |1| = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |-2| = 2,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |3| = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |5| = 5.$$

Присоединенная матрица $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица:

$$A_{-1} = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/11 & -3/11 \\ 2/11 & 5/11 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & -2 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Пример 30. Найти матрицу, обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы $|A| = 21 \neq 0$. Обратная матрица существует. Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \\ 15 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 2/7 & 1/21 & 8/21 \\ 5/7 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix}.$$

Читателю предоставляется провести проверку самостоятельно.

Ступенчатая матрица

Ступенчатой называется матрица размера $m \times n$, если она имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & a_{1k_1} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & a_{2k_2} \ldots & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ddots & \ldots\ldots & \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & a_{mk_m} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где элементы $a_{1k_1} \neq 0$, $a_{2k_2} \neq 0$, $a_{3k_3} \neq 0$, $\ldots$, $a_{mk_m} \neq 0$, при этом $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_m$.

Замечание. Ступенчатая матрица не содержит нулевых строк.

Все ступеньки ступенчатой матрицы имеют в высоту одну строку, число ступенек равно числу строк матрицы.

Пример 31. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ — ступенчатые матрицы.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются следующие преобразования:

1) умножение всех элементов какой-либо строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление к каждому элементу какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число;

3) перестановка строк;

4) вычеркивание (удаление) нулевой строки.

Замечание. Те же операции, применяемые для столбцов, называются *элементарными преобразованиями столбцов* матрицы.

Матрица, которая получается из данной матрицы элементарными преобразованиями ее строк (столбцов), называется *эквивалентной* данной. Обозначается символом $\sim$.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду

1. Найти первый из столбцов, содержащих ненулевые элементы. Выбрать строку, содержащую один из этих ненулевых элементов.

2. Выбранную строку (если она не первая) поменять местами с первой строкой.

3. Сделать нулевыми все элементы матрицы под крайним элементом первой строки, используя при этом элементарное преобразование № 2. В первом ненулевом столбце останется только один верхний ненулевой элемент. Так будет получена первая ступенька.

4. Сохраняя неизменной первую строку полученной матрицы, рассмотреть матрицу из остальных строк и применить к ней шаги 1—3 описанного алгоритма.

В результате получим ступенчатую матрицу, эквивалентную исходной матрице.

Пример 32. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Первый из столбцов, содержащий ненулевые элементы, — столбец №2. Для удобства вычислений выбираем строку с элементом во втором столбце, равным единице. Это 3-я и 5-я строки. Выберем 3-ю строку и поменяем местами 1-ю и 3-ю строки.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Используя элементарное преобразование 2, получим во втором столбце нули во всех строках, кроме 1-й, т. е. будем прибавлять к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-3), к элементам 4-й строки – соответствующие элементы первой строки, умноженные на (-2), и к элементам 5-й строки – соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-1):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} (-3)(-2)(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично получим нули в третьем столбце в 3-й, 4-й и 5-й строках. Для этого к элементам этих строк будем прибавлять соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на соответствующие числа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} (1)(-1)(1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -16 & 5 \end{pmatrix}.$$

Умножая элементы 3-й строки на (-1) и прибавляя их к соответствующим элементам 5-й строки, вычеркивая нулевые строки (элементарное преобразование 4), получим *ступенчатую матрицу*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -16 & 5 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы

При решении некоторых практических задач требуется найти собственные значения (или числа) матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n. Составим матрицу $A - \lambda \cdot E$, где E – единичная матрица порядка n, а λ – некоторая неизвестная. Приравняем определитель полученной матрицы к нулю, т. е. получим уравнение

$$|A - \lambda \cdot E| = 0,$$

называемое *характеристическим уравнением* матрицы A. Корни данного характеристического уравнения являются *собственными числами матрицы* A.

Пример 33. Найти собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица A второго порядка, то и единичную матрицу берем второго порядка, тогда

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, при составлении характеристического уравнения берем определитель матрицы A и из элементов главной диагонали вычитаем λ.

Находим корни полученного уравнения:

$$(5-\lambda)\cdot(3-\lambda)-2\cdot 4=0,$$
$$\lambda^2-8\lambda-7=0, \text{ т. е. } \lambda_1=1, \lambda_2=7.$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1=1, \lambda_2=7$.

Пример 34. Найти собственные числа матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Найдем его корни:

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)+1+1-(5-\lambda)-(3-\lambda)-(3-\lambda)=0,$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda)-3(3-\lambda)=0,$$

$$(3-\lambda)\cdot((3-\lambda)(5-\lambda)-3)=0,$$

$$\lambda=3 \text{ или } \lambda^2-8\lambda+12=0,$$

$$\lambda=3 \text{ или } \lambda=2 \text{ или } \lambda=6.$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

Упражнения

1. Написать матрицу, противоположную матрице A, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Транспонировать матрицу:

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ на число $k = 3$.

5. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ на число $k = -2$.

6. Вычислить сумму и разность матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислить сумму и разность матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Найти матрицу $3A - 2B^T + 5E$, если E — единичная матрица второго порядка, а

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить те произведения матриц $A{\cdot}B$ и $B{\cdot}A$, которые имеют смысл:

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$.

10. $A = B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычислить те произведения матриц $A{\cdot}B$ и $B{\cdot}A$, которые имеют смысл:

11. $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

18. Найти A^3, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Найти значение матричного выражения $A^2 - 2BC^T$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислить определители второго порядка:

20. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 7 & -8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

Вычислить значения определителей третьего порядка по правилу треугольников (или методом Саррюса):

24. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **25.** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}$. **26.** $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители третьего порядка, используя свойства определителей:

27. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$. **28.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 6 & -5 & -4 \\ 8 & -10 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. **30.** $\begin{vmatrix} -3 & 15 & 12 \\ 10 & 20 & 30 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix}$.

31. Вычислить алгебраические дополнения A_{12}, A_{44}, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

32. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив по любой строке (любому столбцу):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители четвертого порядка, используя разложение по строке (столбцу), предварительно получив нули в выбранной строке (в выбранном столбце):

33. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. **34.** $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & -8 & -1 \end{vmatrix}$.

Определить, имеет ли матрица A обратную, и если имеет, то вычислить ее. Сделать проверку:

35. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

36. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти собственные числа матриц:

37. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

38. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

39. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы

40. Написать матрицу, противоположную матрице A, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Транспонировать матрицу:

41. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

42. $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

43. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ на число $k = 3$.

44. Умножить матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$на число $k = -2$.

45. Вычислить сумму и разность матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

46. Вычислить сумму и разность матриц A и B, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

47. Найти матрицу $-2A+3B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить те произведение матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$, которые имеют смысл:

48. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

49. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

50. $A=B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

51. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 5 & 8 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

52. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

53. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

54. Вычислить значение матричного выражения $(AB)^2-3C^T$, где

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислить определители второго порядка:

55. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$.

56. $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$.

57. $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$.

58. $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Найти значения определителей третьего порядка по правилу треугольников (или методом Саррюса):

59. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

60. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

61. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

63. Вычислить алгебраические дополнения A_{22}, A_{31}, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители четвертого порядка, разложив по любой строке (любому столбцу):

64. $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

65. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители четвертого порядка, используя разложение по строке (столбцу), предварительно получив нули в выбранной строке (в выбранном столбце):

66. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \\ 6 & 7 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

67. $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$.

68. Определить, имеет ли матрица A обратную, и если имеет, то вычислить ее. Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные числа матриц:

69. $\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$.

70. $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

71. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

72. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b,$$

где $a_i, i = \overline{1, n}$, которые называются коэффициентами уравнения, и b — свободный член — являются заданными числами. Линейное уравнение называется *однородным*, если его свободный член равен нулю.

Решением линейного уравнения называется упорядоченный набор $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0\right)$ из n действительных чисел, подстановка которых вместо соответствующих неизвестных обращает данное уравнение в тождество.

Уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b, b \neq 0,$$

называется *противоречивым.* Оно не имеет решений.

Уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$$

называется *тривиальным.* Его решением является любой набор из n действительных чисел.

Системой линейных уравнений называется конечная совокупность линейных уравнений. Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Действительные числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ называются *коэффициентами системы*. Первый индекс у коэффициента a_{ij} соответствует номеру уравнения, второй — номеру переменной, при которой стоит данный коэффициент. Числа b_i, $i = \overline{1,m}$ называются *свободными членами*.

Коэффициенты при неизвестных образуют прямоугольную таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей системы*.

Введем следующие обозначения:

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матрица-столбец неизвестных,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ — матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, то их произведение

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} \end{pmatrix}$$

является матрицей-столбцом. Элементы этой матрицы совпадают с левыми частями системы линейных уравнений, а так как правые части совпадают с элементами матрицы B, то можно записать равенство

$$AX = B.$$

Это *матричная форма* записи системы линейных уравнений.

Расширенной матрицей системы называется матрица системы A, к которой добавлен столбец свободных членов:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Система линейных уравнений называется *однородной*, если она состоит из однородных линейных уравнений (матрица B является нулевой). В противном случае система называется *неоднородной*.

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченный набор $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0\right)$ из n действительных чисел, которые при подстановке вместо соответствующих неизвестных обращают *каждое* уравнение системы в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Очевидно, что однородная система всегда совместна, поскольку у нее всегда есть нулевое решение.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют либо одно и то же множество решений, либо обе системы несовместны.

Метод обратной матрицы

Рассмотрим систему линейных уравнений $AX = B$. Пусть число уравнений равно числу неизвестных:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + +a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right.$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A квадратная, следовательно, можно найти определитель этой матрицы $|A|$, называемый *определителем системы*. Если $|A| \neq 0$, т. е. матрица A невырожденная, то для нее существует обратная A^{-1}. Умножая обе части матричного уравнения на матрицу A^{-1} слева, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение системы дает формула

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

П р и м е р 35. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Матрица A невырожденная, и метод применим. Найдем обратную матрицу A^{-1}. Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Записываем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получаем решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решением системы будет $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$.
Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Формулы Крамера

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными и невырожденной матрицей системы.

Теорема 1 (*Крамера*). Пусть Δ — определитель матрицы системы, а Δ_j — определитель, получаемый из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Формулы получили название *формул Крамера*.

Замечание. Если система несовместная или неопределенная, то определитель матрицы системы $\Delta = 0$.

Пример 36. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 23 \neq 0,$$

т. е. матрица A невырожденная, метод применим. По теореме Крамера система имеет единственное решение. Вычислим определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, последовательно заменяя в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов. Получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 13 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 23, \qquad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{23}{23} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 13 & 2 \end{vmatrix} = -46, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-46}{23} = -2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 13 \end{vmatrix} = 69, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{69}{23} = 3.$$

Таким образом, решение системы $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$.

Метод Гаусса

Самым общим, применимым для решения любых систем m линейных уравнений с n неизвестными, является *метод Гаусса*.

Метод Гаусса заключается в том, что при помощи элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида. Алгоритм метода состоит из двух частей, называемых *прямым* и *обратным* ходом.

Прямой ход – это последовательность действий по приведению системы уравнений к ступенчатому виду.

Обратный ход – это процедура нахождения решения системы, когда неизвестные определяются последовательно, начиная с последнего уравнения и до первого.

Методом Гаусса удобно пользоваться в матричной форме. Запишем расширенную матрицу системы. Для наглядности проведем черту, разделяющую коэффициенты системы и свободные члены:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

С помощью элементарных преобразований строк приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду. Исходная система будет эквивалентна системе, определяемой полученной ступенчатой матрицей.

Система *несовместна*, если последняя ступенька полученной матрицы находится за чертой расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} \dots & \dots & \dots & \dots & & a_{1n} & b_1 \\ 0 \dots 0 & a_{2k_2} \dots & \dots & \dots & & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & & & \\ \dots\dots & \dots\dots & & \dots\dots & & & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & a_{(r-1)k_m} & \dots & a_{(r-1)n} & b_{r-1} \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & & 0 \dots 0 & & b_r \end{array} \right).$$

Если же последняя ступенька начинается до черты расширенной матрицы, то система *совместна*. Возможны два случая, когда $r < n$ и $r = n$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} \dots & \dots & \dots & \dots & & a_{1n} & b_1 \\ 0 \dots 0 & a_{2k_2} \dots & \dots & \dots & & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & & & \\ \dots\dots & \dots\dots & & \dots\dots & & & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$$\text{или} \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ & & & \ddots & & \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

После того как матрицу привели к ступенчатому виду, в случае совместной системы начинается обратный ход.

1. Случай $r = n$. Система, соответствующая ступенчатой матрице, у которой ступеньки идут по главной диагонали, имеет вид:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
$$

Поскольку $a_{nn} \neq 0$, из последнего уравнения системы находим

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Подставив полученное значение в предпоследнее уравнение системы, найдем значение неизвестного x_{n-1}. Затем, подставляя найденные значения x_n, x_{n-1} в вышестоящее уравнение, находим x_{n-2} и т.д. Наконец из первого уравнения получим x_1. Таким образом, система имеет *единственное решение*, если число строк ступенчатой матрицы равно числу неизвестных $r = n$.

2. Случай $r < n$. В ступенчатой матрице хотя бы одна из ступенек до черты имеет более одного столбца в ширину.

Неизвестные, соответствующие первым ненулевым элементам строк ступенчатой матрицы, называются *базисными неизвестными*. Остальные называются *свободными неизвестными*.

Для определенности будем считать, что переменные x_1, x_2, ..., x_r — базисные, а x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n — свободные. Перенесем свободные неизвестные в правые части уравнений системы:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\
\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\
\qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3r}x_r = b_3 - a_{3(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{3n}x_n, \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r = b_n - a_{r(r+1)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n.
\end{cases}
$$

Из последнего уравнения выразим неизвестное x_r через неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n:

$$x_r = \frac{1}{a_{rr}} \left(b_r - \sum_{k=r+1}^{n} a_{rk}x_k \right).$$

Подставив выражение x_r в предпоследнее уравнение, найдем x_{r-1} и остальные неизвестные (аналогично первому случаю). В результате базисные неизвестные x_1, x_2, ..., x_r будут выражены через свободные неизвестные x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, т. е. получим систему

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ x_2 = f_2(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n), \end{cases}$$

которая называется *общим решением* исходной системы уравнений. Задавая значения свободных неизвестных, из общего решения можно получить соответствующее *частное решение* системы.

Таким образом, совместная система в случае $r < n$ имеет *бесконечное множество решений.*

Замечание. Система линейных алгебраических уравнений может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Пример 37. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду.

Смотрим на левый верхний элемент. Для удобства вычислений там должна быть единица. Проблема состоит в том, что в первом столбце единиц нет вообще, поэтому перестановкой строк ничего не решить. В таких случаях единицу нужно получить с помощью элементарного преобразования. Обычно это можно сделать несколькими способами. Один из них такой: к 1-й строке прибавляем 2-ю строку, умноженную на (-1), при этом 2-я строка у нас не изменилась:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right).$$

Теперь слева вверху «минус один»; умножим 1-ю строку на -1 (сменим у нее знак). Первая строка останется неизменной до конца решения. Далее, в соответствии с алгоритмом, следует получить нули в первом столбце расширенной матрицы системы. Умножаем 1-ю строку на -5 и прибавляем ко 2-й строке, затем умножаем 1-ю строку на -3 и прибавляем к 3-й строке:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \end{array}\right)(-5)(-3) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Для того чтобы получить единицу на второй «ступеньке», умножаем 3-ю строку на (-1) и меняем местами 2-ю и 3-ю строки:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right).$$

Затем к 3-й строке прибавляем 2-ю строку, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -3 \end{array}\right)(2) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

Можно еще разделить 3-ю строку на 5, но необязательно. Мы привели расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, ступеньки идут по главной диагонали, следовательно, система имеет единственное решение.

Обратным ходом «снизу вверх» вычисляем неизвестные. Запишем систему, соответствующую получившейся ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ \qquad x_2 + x_3 = 4, \\ \qquad\qquad 5x_3 = 5. \end{cases}$$

Из третьей строки получаем $x_3 = 1$, подставляя во вторую строку найденное x_3, находим $x_2 = 3$ и, наконец, подставляя в первую строку найденные значения x_2 и x_3, вычисляем $x_1 = -1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

П р и м е р 38. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$$

В этой системе количество уравнений меньше, чем количество переменных. В этом случае сразу можно сказать, что система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Начало решения такое же, как в предыдущем примере — запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 2 & -1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & 1 & -8 & 1 \end{array}\right)(-3)(-5) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -18 & -4 \end{array}\right)(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Последняя ступенька начинается за чертой расширенной матрицы, следовательно, система *несовместна* (не имеет решения).

П р и м е р 39. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 9 & -7 & 3 \end{array}\right)(-4)(-2)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & 2 \end{array}\right)(1)(2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \downarrow & & \downarrow & & \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -1 \end{array}\right).$$

Мы получили случай, когда ступеньки имеют более одного столбца в ширину, т. е. система имеет бесконечно много решений. Базисными будут являться неизвестные, соответствующие первым ненулевым элементам строк, это x_1 и x_3 (отмечены стрелочками). Следовательно, неизвестные x_2 и x_4 свободные.

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ \qquad\quad -5x_3 + 4x_4 = -1. \end{cases}$$

Свободные неизвестные перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 1 - 3x_2 - x_4, \\ \qquad -5x_3 = -1 - 4x_4. \end{cases}$$

Обратный ход алгоритма Гаусса традиционно работает снизу вверх. Из второго уравнения системы выражаем базисную переменную x_3:

$$x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}.$$

В первое уравнение подставляем найденное выражение x_3 и выражаем базисную переменную x_1 через свободные переменные x_2 и x_4:

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5}.$$

Пусть $x_2 = u$, $x_4 = v$, где u и v — произвольные числа.

Общее решение системы: $x_1 = -\frac{3}{2}u - \frac{1}{10}v + \frac{3}{5}$, $x_2 = u$, $x_3 = \frac{4}{5}v + \frac{1}{5}$, $x_4 = v$.

Придавая u и v произвольные значения, можно найти бесконечно много частных решений. Например, подставив $u = v = 0$ в общее решение, получим частное решение: $x = \frac{3}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{5}$, $x_4 = 0$.

Подставив $u = 4$, $v = 6$ в общее решение, получим другое частное решение: $x_1 = -6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$.

Система уравнений имеет бесконечно много решений, так как свободные неизвестные могут принимать *любые* значения.

Упражнения

Решить системы уравнений методом обратной матрицы:

73. $\begin{cases} 3x - 2y = 9, \\ x - y = 2. \end{cases}$

74. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

75. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = -2. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом Гаусса:

77. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$ **78.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ **80.** $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$

81. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=4, \\ 3x_1+7x_2+5x_3-4x_4=5, \\ 2x_1+5x_2+7x_3-3x_4=11, \\ 4x_1+10x_2+9x_3-5x_4=12. \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4=2. \end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

Решить системы уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

83. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$ **84.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

Решить системы уравнений методом Гаусса:

85. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3+x_4=4, \\ x_1+2x_2+2x_3-2x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+x_4=-6, \\ -3x_1+2x_2-4x_3+2x_4=6. \end{cases}$ **86.** $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

87. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5=2, \\ 6x_1-3x_2+2x_3+4x_4+5x_5=3, \\ 6x_1-3x_2+4x_3+8x_4+13x_5=9, \\ 4x_1-2x_2+x_3+x_4+2x_5=1. \end{cases}$

88. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 7, \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13. \end{cases}$

89. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 12, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 24, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$

Дополнительные задачи к разделу

90. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычислить:

а) $2A^T - 3B$; б) $A^2 - 2AB + BA$.

Вычислить произведение матриц:

91. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

92. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 0 & 6 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти все значения параметра λ, при которых определитель равен нулю:

93. $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 4 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$. **94.** $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -3 & \lambda \end{vmatrix}$.

95. Вычислить определитель третьего порядка по правилу треугольников (или методом Саррюса)

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

96. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 0 \\ -4 & -1 & 2 & 1 \\ -6 & 7 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

разложив его по произвольной строке или столбцу: а) без предварительного получения нулей; б) получив предварительно нули в выбранной строке (столбце).

97. Найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти собственные числа матриц:

98. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

99. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

100. Найти решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Если система неопределенная, найти общее и два произвольных частных решения:

101. $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

102. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$$

2. Основные понятия аналитической геометрии

2.1. Система координат. Простейшие задачи аналитической геометрии

В основе аналитической геометрии лежит метод координат, позволяющий устанавливать положение точек плоскости с помощью чисел. Впервые этот метод был применен французским математиком и философом Декартом.

Простейшая и наиболее употребительная система координат на плоскости представляет собой две взаимно перпендикулярные оси с заданными единичными отрезками для измерения длин. Точка пересечения осей называется *началом координат* (обозначается буквой O), сами оси – *координатными осями*, горизонтальная ось называется *осью абсцисс* (обозначается Ox), вертикальная – *осью ординат* (обозначается Oy). Пусть M – произвольная точка плоскости. Проведем через эту точку перпендикуляры к прямым Ox и Oy; основания перпендикуляров обозначим x_M и y_M (рис. 1). Координатами точки M в заданной системе называются числа $x = x_M$, $y = y_M$.

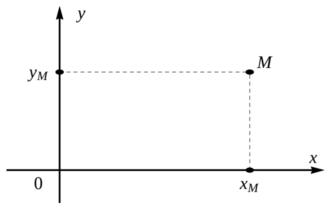


Рис. 1

Каждой точке M ставится в соответствие упорядоченная пара чисел $(x;\, y)$; каждой паре чисел соответствует точка плоскости. Любая геометрическая задача благодаря этому может быть сведена к задаче алгебраической, при этом сохраняется наглядность благодаря геометрическим построениям.

В пространстве декартова система координат представляет собой три взаимно перпендикулярные оси с заданными единичными отрезками для измерения длин. Точка пересечения осей O – *начало координат*, а оси Ox – ось *абсцисс*, Oy – ось *ординат*, а ось Oz – ось *аппликат*.

Возьмем произвольную точку M в пространстве и проведем через эту точку перпендикуляры к координатным осям (рис. 2). Основания перпендикуляров – координаты точки M в пространстве x_M, y_M и z_M. Таким образом, в пространстве каждой точке M ставится в соответствие тройка чисел $(x;\, y;\, z)$.

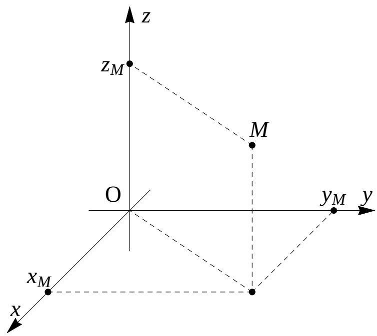


Рис. 2

Рассмотрим две простейшие задачи аналитической геометрии.

Задача 1. Нахождение расстояния между точками.

Пусть на плоскости xOy даны две точки $M(x_1;\, y_1)$ и $N(x_2;\, y_2)$. Расстояние между ними вычисляется по формуле

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Пример 40. Даны точки $A(2;\, 4)$, $B(-3;\, 8)$. Найти расстояние $|AB|$.

$$|AB| = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (-4 - 8)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Замечание. Если точки $M(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $N(x_2;\, y_2;\, z_2)$ заданы в пространстве, то расстояние между ними вычисляется по следующей формуле

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача 2. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть известны две точки плоскости $A(x_A;\, y_A)$ и $B(x_B;\, y_B)$. Точка $M(x_M;\, y_M)$ лежит на отрезке AB и делит его в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$ (рис. 3), т. е.

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Тогда координаты точки M выражаются формулами:

$$x_M = \frac{\lambda_2 x_A + \lambda_1 x_B}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad y_M = \frac{\lambda_2 y_A + \lambda_1 y_B}{\lambda_1 + \lambda_2}. \qquad (2)$$

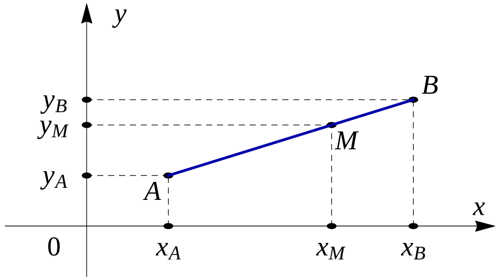


Рис. 3

П р и м е р 41. Найти координаты точки M, делящей отрезок AB в отношении $1 : 3$, если известны точки $A(5; 3)$, $B(-3; -1)$. В данной задаче $\lambda_1 = 1$, а $\lambda_2 = 3$, тогда

$$x_M = \frac{3 \cdot 5 + 1 \cdot (-3)}{1 + 3} = 3, \qquad y_M = \frac{3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1)}{1 + 3} = 2.$$

Таким образом, $M(3; 2)$.

Очевидно, что для нахождения середины отрезка $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

П р и м е р 42. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 2)$, $B(6; 4)$, $C(4; -6)$. Найти координаты точки P – центра тяжести треугольника.

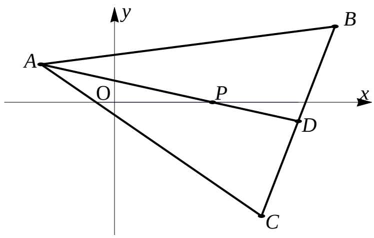


Рис. 4

Известно, что в точке P пересекаются медианы (рис. 4). Поэтому проведем медиану AD, где точка D – середина отрезка BC. Найдем ее координаты:

$$x_D = \frac{1 \cdot 6 + 1 \cdot 4}{2} = 5, \qquad y_D = \frac{1 \cdot 4 + 1 \cdot (-6)}{2} = -1,$$

т. е. $D(5; -1)$.

Рассмотрим отрезок AD. Точка P, по свойству медианы, делит его так, что

$$\frac{AP}{PD} = \frac{2}{1}.$$

Найдем координаты точки P:

$$x_P = \frac{1 \cdot (-2)_+ 2 \cdot 5}{2+1} = \frac{8}{3}, \qquad y_P = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{2+1} = 0.$$

Точка P имеет координаты (8/3; 0).

2.2. Основы векторной алгебры

Основные понятия

Вектором $\vec{a}$ называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B. *Длиной* (или *модулем*) вектора $\vec{a}$ называется число, равное длине отрезка AB, изображающего вектор. Обозначается длина вектора $|\vec{a}|$.

Если начало и конец вектора совпадают, вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы, расположенные на перпендикулярных прямых называются *ортогональными*. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Векторы, лежащие в одной плоскости, называются *компланарными*. Нулевой вектор компланарен любому вектору.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Свободным называется вектор, который без изменения длины и направления может быть перенесен в любую точку пространства.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число, обозначаемое $\text{пр}_l\vec{a}$ и равное произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла, образованного вектором $\vec{a}$ с положительным направлением оси l, т. е.

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

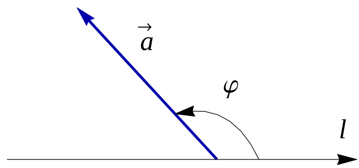


Рис. 5

где φ – угол между положительным направлением оси l и вектором $\vec{a}$ (рис. 5).

Геометрически проекция вектора $\vec{a}$ равна длине отрезка CD, взятой со знаком «+», если $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, и со знаком «$-$», если $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (рис. 6). При $\varphi = \pi/2$ отрезок CD превращается в точку и $\text{пр}_l \vec{a} = 0$.

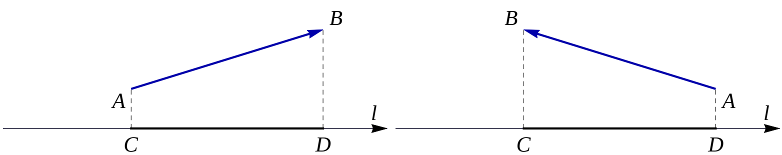


Рис. 6

Координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Если началом свободного вектора считать начало системы координат – точку $O(0;\,0)$ на плоскости (или $O(0;\,0;\,0)$ в пространстве), то координаты точки, являющейся концом вектора, можно считать координатами вектора.

Следовательно, вектор $\vec{a}$ можно записать в виде $\vec{a} = \{x_a;\, y_a\}$ (или $\vec{a} = \{x;\, y\}$) на плоскости и $\vec{a} = \{x_a;\, y_b;\, z_b\}$ (или, соответственно, $\vec{a} = \{x;\, y;\, z\}$) в пространственном случае.

Если обозначить векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (*орты*) на осях Ox, Oy и Oz, то вектор $\vec{a}$ можно представить в следующем виде:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Такое представление вектора $\vec{a}$ называется его *разложением по осям координат.*

Пример 43. Вектор $\vec{a} = \{4;\, -3;\, 2\}$ можно записать в виде $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Если вектор $\vec{a}$ не является свободным, его можно задать координатами начала – точка $A(x_A;\, y_A;\, z_A)$ и координатами конца – точка $B(x_B;\, y_B;\, z_B)$ следующим образом:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A;\, y_B - y_A;\, z_B - z_A\}.$$

Пример 44. Точка $A(5;\, 3;\, -7)$, точка $B(-1;\, 6;\, 12)$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \{-1 - 5;\, 6 - 3;\, 12 - (-12)\} = \{-6;\, 3;\, 19\}$.

Поскольку координаты вектора взаимно однозначно соотносятся с самими векторами, *действия с векторами можно заменить действиями с их координатами.*

Если $\vec{a} = \{x_1;\, y_1;\, z_1\}$, а $\vec{b} = \{x_2;\, y_2;\, z_2\}$, то действия с векторами можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered} \vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\, y_1 + y_2;\, z_1 + z_2\}, \\ \vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2;\, y_1 - y_2;\, z_1 - z_2\}, \\ \lambda\vec{a} = \{\lambda x_1;\, \lambda y_1;\, \lambda z_1\}. \end{gathered}$$

Пример 45. Даны векторы $\vec{a} = \{2;\, -1;\, -2\}$ и $\vec{b} = \{8;\, -4;\, 0\}$. Найдем векторы $2\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{a}$.

$$2\vec{a} = \{2 \cdot 2;\, 2 \cdot (-1);\, 2 \cdot (-2)\} = \{4;\, -2;\, -4\};$$

$$\vec{b} - \vec{a} = \{8 - 2;\, -4 - (-1);\, 0 - (-2)\} = \{6;\, -3;\, 2\}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то $\vec{a} = k\vec{b}$, следовательно, выполняются условия $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, $z_1 = kz_2$. Отсюда следует условие коллинеарности векторов

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\, \vec{a}_2,\, \cdots,\, \vec{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные действительные числа $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \cdots,\, \lambda_n$ вида

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n.$$

Числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ называются коэффициентами линейной комбинации.

Пример 46. Для векторов из примера 45 линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с коэффициентами $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ равна

$$\vec{a} + 3\vec{b} = \{26;\ -13;\ -2\}.$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пример 47. Для вектора $\vec{a} = \{6;\ -3;\ 2\}$ длина равна

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7.$$

Вектор называется *нормированным*, если его длина равна единице. Для того чтобы нормировать вектор, нужно каждую координату вектора поделить на его длину.

Пример 48. Дан вектор $\vec{a} = \{1;\ -1;\ 1\}$.

Длина $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, следовательно, нормированный вектор имеет вид

$$\vec{e_a} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Скалярное произведение векторов

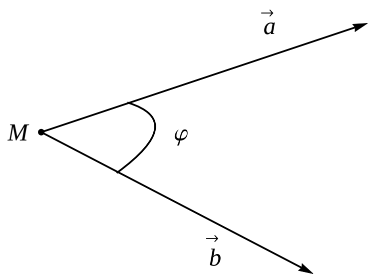


Рис. 7

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **число**, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (рис. 7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на $\vec{a}$ равно квадрату его длины:
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

2. Скалярное произведение равно нулю, если хотя бы один из векторов нулевой или векторы ортогональны, и наоборот, если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$
Данное свойство дает *условие ортогональности векторов.*

3. Для скалярного произведения выполняется коммутативный (переместительный) закон:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак скалярного произведения:
$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

5. Для скалярного произведения выполняется дистрибутивный (распределительный) закон:
$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

В координатной форме скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b.$$

Очевидно,
$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1.$$

Используя определение скалярного произведения, можно найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \tag{3}$$

или в координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Пример 49. Найдем угол между векторами $\vec{a} = \{3;\ 4;\ 5\}$ и $\vec{b} = \{4;\ 5;\ -3\}$.

$$\cos\varphi \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{4^2 1 + 5^2 + (-3)^2}} = \frac{17}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \frac{17}{50}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{17}{50}$.

Если векторы ортогональны, то угол $\varphi = \pi/2$ и $\cos\varphi = 0$.

Пример 50. Решим задачу: при каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ ортогональны?

Скалярное произведение ортогональных векторов равно нулю, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, следовательно, $4m + 3m - 28 = 0$, откуда находим $m = 4$.

Обозначим углы, которые образует вектор $\vec{a} = \{x_a;\ y_a;\ z_a\}$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно через α, β и γ. Эти же углы вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ (рис. 8). Найдем косинусы этих углов:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}} = \frac{x_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}} = \frac{y_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}} = \frac{z_a}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}.$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора*** $\vec{a}$, которые для любого ненулевого вектора связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Направляющие косинусы вектора пропорциональны его соответствующим проекциям. Это значит, что проекции любого единичного вектора $\vec{a_0}$ на оси координат совпадают с его направляющими косинусами, и, следовательно,

$$\vec{a_0} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma.$$

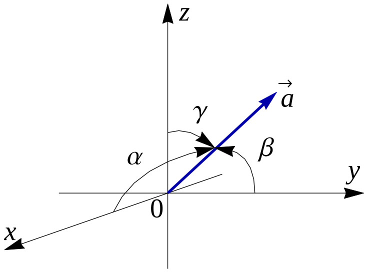


Рис. 8

Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который определяется следующим образом:

1) модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.

$$|\vec{c}| = S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (т. е. если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден против часовой стрелки (рис. 9).

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак:
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак векторного произведения:
$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

3. Для векторного произведения выполняется дистрибутивный (распределительный) закон:
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

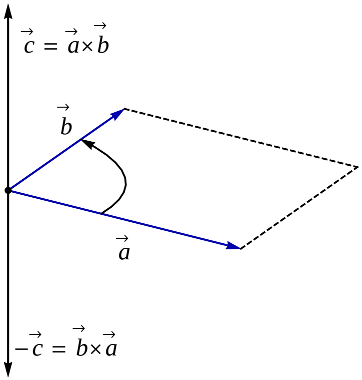


Рис. 9

4. Векторное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Это свойство дает еще одно *условие коллинеарности векторов.*

Рассмотрим векторы $\vec{a} = \{x_a;\, y_a;\, z_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b;\, y_b;\, z_b\}$, заданные своими координатами. Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равно

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}) \times (x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$

$$= x_a x_b \cdot \vec{i} \times \vec{i} + x_a y_b \cdot \vec{i} \times \vec{j} + x_a z_b \cdot \vec{i} \times \vec{k} + y_a x_b \cdot \vec{j} \times \vec{i} + y_a y_b \cdot \vec{j} \times \vec{j} +$$
$$+ y_a z_b \cdot \vec{j} \times \vec{k} + z_a x_b \cdot \vec{k} \times \vec{i} + z_a y_b \cdot \vec{k} \times \vec{j} + z_a z_b \cdot \vec{k} \times \vec{k}.$$

Учитывая, что

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \qquad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{i}; \qquad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j};$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0,$$

векторное произведение двух векторов можно вычислить по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_a z_b - y_b z_a) \cdot \vec{i} - (x_a z_b - x_b z_a) \cdot \vec{j} + (x_a y_b - x_b y_a) \cdot \vec{k}.$$

Эту формулу удобно записать в виде определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}.$$

П р и м е р 51. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найдем $\vec{a} \times \vec{b}$. В соответствии с формулой нахождения векторного произведения векторов в координатной форме получаем

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

П р и м е р 52. Найти площадь треугольника, если его вершины заданы координатами $A(0;\ 2;\ 0)$, $B(-2;\ 5;\ 0)$, $C(-2;\ 2;\ 6)$.

Сначала найдём векторы: $\overrightarrow{AB} = \{-2-0;\ 5-2;\ 0-0\} = \{-2;\ 3;\ 0\}$; $\overrightarrow{AC} = \{-2-0;\ 2-2;\ 6-0\} = \{-2; 0; 6\}$.

Затем векторное произведение:

$$\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Вычислим длину вектора $\vec{N}$:

$$|\vec{N}| = \sqrt{18^2 + 12^2 + 6^2} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, совпадает с длиной вектора $\vec{N}$, а площадь треугольника равна половине площади параллелограмма:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\vec{N}| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14} \text{ (кв. ед.)}.$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется *число*, равное скалярному произведению вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Т е о р е м а 2. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно объему параллелограмма, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая; и со знаком «минус», если векторы образуют левую тройку.

Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю, если

1) два любых вектора коллинеарны;

2) три вектора компланарны.

Поэтому *условием компланарности* трех векторов будет

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$$

При круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется, а при перестановке любых двух векторов знак меняется на противоположный, т. е. выполняются равенства:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{c} \cdot \vec{b} = -\vec{c} \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Выражение смешанного произведения векторов $\vec{a} = \{x_a;\, y_a;\, z_a\}$, $\vec{b} = \{x_b;\, y_b;\, z_b\}$, и $\vec{c} = \{x_c;\, y_c;\, z_c\}$, заданных своими координатами, можно вычислить по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

П р и м е р 53. Для векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ найти смешанное произведение.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 33.$$

П р и м е р 54. Даны векторы $\vec{a} = \{1;\, -1;\, 2\}$, $\vec{b} = \{0;\, 4;\, 3\}$ и $\vec{c} = \{3;\, 2;\, -6\}$. Вычислить:

а) смешанное произведение векторов;

б) объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

в) объём тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Решение:

а) По формуле смешанного произведения:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -63.$$

б) Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен модулю смешанного произведения данных векторов:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}| = |-63| = 63 \text{ (куб. ед.)}.$$

в) Вычислим объём тетраэдра, построенного на данных векторах:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}V_{\text{пар-да}} = \frac{1}{6}\cdot 63 = 10{,}5 \text{ (куб. ед.)}.$$

Упражнения

103. Дан вектор $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Записать его в координатной форме.

104. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(0;\ 1;\ 1)$ и $B(-2;1;-4)$.

105. Даны точки $A(8;\ 2;\ 5)$ и $B(0;\ 7;\ -1)$. Найти:

а) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и противоположного вектора $\overrightarrow{BA}$;

б) модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

106. Даны векторы $\vec{a} = \{3;-2;6\}$, $\vec{b} = \{-2;1;0\}$. Найти векторы:

а) $\vec{a}+\vec{b}$;

б) $\vec{a}-\vec{b}$;

в) $-2\vec{a}+3\vec{b}$.

107. Даны векторы $\vec{a} = \{2;-6;-8\}$ и $\vec{b} = \{-1;3;4\}$. Проверить коллинеарность этих векторов. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены — в одну или в противоположные стороны.

108. Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарны.

109. Найти скалярное произведение векторов $\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 7$, а угол между ними равен $60°$.

110. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных координатами $\vec{a} = \{2; 4; -6\}$ и $\vec{b} = \{3; -7; 6\}$.

111. Найти угол между векторами $\vec{a}=\{8; -7; -2\}$ и $\vec{b}=\{7; -11; 8\}$.

112. Проверить ортогональность векторов

а) $\vec{a} = \{4; -2; -4\}$ и $\vec{b} = \{6; -3; 2\}$;

б) $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ и $\vec{d} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

113. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p}+2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p}-3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, а угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

114. Найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

115. Даны точки $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ и $C(1; -2; 1)$. Найти:
а) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
б) площадь треугольника ABC.

116. Найти смешанное произведение трех векторов $\vec{a} = \{5; 4; 1\}$, $\vec{b} = \{-3; 5; 2\}$ и $\vec{c} = \{2; -1; 3\}$.

117. Даны векторы $\vec{a} = \{-1; 0; -3\}$, $\vec{b} = \{4; -3; 2\}$, $\vec{c} = \{0; -1; 0\}$. Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. В случае отрицательного ответа указать, какую тройку они образуют — левую или правую.

118. Даны точки $A(0; -2; 5)$, $B(6; 6; 0)$, $C(3; -3; 6)$, $D(2; -1; 3)$.

а) Показать, что они не лежат в одной плоскости.

б) Найти площадь треугольника ABD.

в) Найти объем пирамиды $ABCD$.

Задания для самостоятельной работы

119. Дан вектор $\vec{a} = -2\vec{i}+3\vec{j}$. Записать его в координатной форме.

120. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(2;-1;3)$ и $B(2;-4;-3)$.

121. Найти модуль вектора:
а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$;
б) $\overrightarrow{AB}$, если $A(8;-4;3)$ и $B(-2;6;-2)$;
в) $\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a} = \{3;-5;8\}$, $\vec{b} = \{-1;1;4\}$.

122. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$. Найти векторы:
а) $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{d} = \vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{p} = 3\vec{a}-4\vec{b}$.

123. Проверить коллинеарность векторов:
а) $\vec{a} = \{6;-2;-3\}$ и $\vec{b} = \{3;4;-12\}$;
б) $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$ и $\vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$.

124. Даны векторы $\vec{a} = \{-1;0;-3\}$, $\vec{b} = \{4;-3;2\}$ и $\vec{c} = \{0;-1;0\}$. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{b}$.

125. Найти угол между векторами:
а) $\vec{a} = \{3;4;0\}$ и $\vec{b} = \{4;4;2\}$; б) $\vec{c} = \{1;0;3\}$ и $\vec{d} = \{5;5;0\}$.

126. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если $A(1;\ -3;\ -4)$, $B(-1;\ 0;\ 2)$, $C(2;\ -4;\ -6)$ и $D(2;\ -4;\ 1)$.

127. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} - 7\vec{k}$ ортогональны.

128. Найти $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$.

129. Проверить, лежат ли точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ и $D(5;0;-6)$ в одной плоскости.

130. Даны точки $A(-1;0;3)$, $B(0;0;-2)$, $C(4;3;2)$, $D(0;1;-2)$:

а) проверить коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$;

б) найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

в) найти площадь треугольника ABC;

г) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;

д) объем пирамиды $ABCD$.

2.3. Прямая на плоскости

В аналитической геометрии линия рассматривается как множество точек, обладающих некоторым свойством. Например, *окружность* – это множество точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от некоторой точки, называемой центром окружности.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Возьмем какую-нибудь линию и рассмотрим ее произвольную («текущую») точку. Координаты x и y этой точки связывает условие, характеризующее любую точку данной линии.

Зависимость

$$\Phi(x, y) = 0,$$

связывающая координаты x и y текущей точки линии, называется *уравнением данной линии*. Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Всякое уравнение первой степени относительно переменных x и y определяет на плоскости *прямую*. Верно и обратное: всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени относительно переменных x и y.

Таким образом, уравнение

$$Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

где A, B и C — некоторые числа, причем коэффициенты A и B одновременно не равны нулю, определяет прямую на плоскости. Уравнение (4) называется *общим уравнением* прямой.

Вектор $\vec{n} = \{A;\ B\}$, перпендикулярный прямой, называется *вектором нормали прямой*.

Если в уравнении (4) число $B \neq 0$, то общее уравнение прямой можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y = kx + b. \tag{5}$$

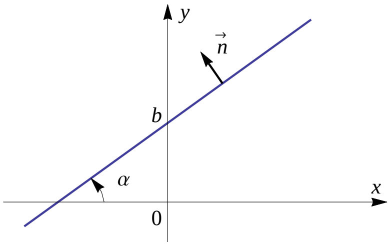


Рис. 10

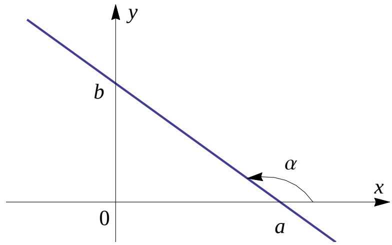


Рис. 11

Уравнение (5) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* $k = \operatorname{tg}\alpha$. Угол α – это угол между прямой и **положительным** направлением оси Ox, называемый *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 10, 11).

Если в уравнении (4) коэффициент $C \neq 0$, то общее уравнение прямой можно привести к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{6}$$

Это уравнение прямой называется *уравнением прямой в отрезках.* Числа a и b определяют величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно (рис. 11).

Рассмотрим другие уравнения прямой на плоскости.

Если известна точка $M(x_o;\, y_0)$ прямой и угловой коэффициент k, то уравнение прямой имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{7}$$

Пусть вектор $\vec{q} = \{l;\, m\}$ параллелен прямой. Такой вектор называется *направляющий вектор* прямой. Очевидно, что у любой прямой бесконечно много направляющих векторов, причем все они будут коллинеарны (сонаправлены или нет – неважно).

Вектор нормали всегда ортогонален направляющему вектору прямой.

Если известна точка $M(x_0;\, y_0)$, принадлежащая прямой, и направляющий вектор прямой $\vec{q} = \{l;\, m\}$, то можно получить *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{8}$$

Если прямая задана общим уравнением (4), то направляющий вектор данной прямой имеет координаты $\vec{q} = \{-B;\, A\}$.

Пример 55. Для прямой, заданной уравнением $5x+7y-1=0$, направляющий вектор будет $\vec{q} = (-7;\, 5)$; а для прямой $2y+3=0$ $(0 \cdot x + 2y + 3 = 0)$ направляющий вектор $\vec{q} = \{-2;\, 0\}$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки, заданные своими координатами $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$, можно составить по формуле

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{9}$$

Зная точку, принадлежащую прямой $M(x_0;\, y_0)$, и вектор нормали прямой $\vec{n} = \{A;\, B\}$, уравнение прямой составляется по формуле

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{10}$$

Пример 56. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \dfrac{3}{2}$, если известно, что точка $A(3;\, -2)$ принадлежит данной прямой. Воспользуемся формулой (7):

$$y - (-2) = \frac{3}{2}(x - 3),$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}.$$

Можно привести полученное уравнение к общему уравнению прямой: $3x - 2y - 13 = 0$.

Пример 57. Составить уравнение прямой по точке $M(1;\, 2)$ и направляющему вектору $\vec{q} = \{2;\, 1\}$.

Уравнение прямой составим по формуле (8). В данном случае:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1}.$$

С помощью свойств пропорции избавляемся от дробей и приводим уравнение к общему виду: $x - 2y + 3 = 0$.

Пример 58. Составить уравнение прямой по точке $A(-4;\, 2)$ и направляющему вектору $\vec{q} = \{4;\, 0\}$.

Формулу (8) применить невозможно, так как знаменатель правой части равен нулю. Используя свойства пропорции, перепишем формулу в виде $m(x - x_0) = l(y - y_0)$, тогда уравнение прямой, проходящей через точку A и имеющей направляющий вектор $\vec{q}$, примет вид $y - 2 = 0$.

Пример 59. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $K(8;\, 2)$ и $L(3;\, 0{,}75)$.

Подставим координаты точек в формулу (9):

$$\frac{x - 8}{3 - 8} = \frac{y - 2}{0{,}75 - 2}.$$

После преобразований уравнение прямой примет вид $x - 4y = 0$.

Пример 60. Составить уравнение прямой по точке $M(-1;\, -3)$ и вектору нормали $\vec{n} = \{3;\, -1\}$. Найти направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой составим по формуле (10):

$$3(x - (-1)) + (-1)(y - (-3)) = 0.$$

Общее уравнение прямой, проходящей через точку M с нормалью $\vec{n}$, имеет вид $3x - y = 0$, направляющий вектор прямой $\vec{q} = \{1;\, 3\}$.

Пример 61. Дана прямая $5x - 7y + 11 = 0$. Составить уравнение прямой в отрезках и определить точки пересечения графика с координатными осями.

Приведем уравнение прямой к виду (6), для этого перенесем 11 в правую часть и разделим обе части уравнения на (-11), получим уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{-\frac{11}{5}} + \frac{y}{\frac{11}{7}} = 1.$$

Таким образом, точки пересечения с координатными осями имеют координаты $M_1\left(-\frac{11}{5};\, 0\right)$ и $M_2\left(0;\, \frac{11}{7}\right)$.

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Две прямые называются *пересекающимися*, если они имеют одну единственную общую точку. Эта общая точка двух прямых называется *точкой пересечения прямых* (рис. 12).

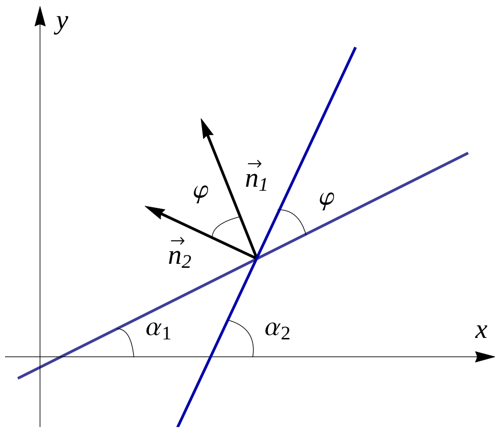


Рис. 12

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется мера **меньшего** из углов, образованных этими прямыми, т. е. по определению $\varphi \in (0;\, 90°]$.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости.

1. Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то угол φ между прямыми будет совпадать с углом между нормалями этих прямых. Таким образом, угол между прямыми равен углу между векторами $\vec{n}_1=\{A_1;\, B_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2;\, B_2\}$, который можно найти по формуле (3). С учетом того, что $\varphi \in (0;\, 90°]$, получаем:

$$\cos\varphi=\left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}\right|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{11}$$

Условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$A_1A_2+B_1B_2=0,$$

а *условие параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

В случае, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

оба уравнения описывают одну и ту же прямую.

Пример 62. Проверить параллельность прямых, заданных уравнениями $2x - y + 5 = 0$ и $2x - y - 11 = 0$.

Проверим пропорциональность соответствующих коэффициентов при переменных x и y:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{-1}{-1} = 1, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{5}{-11} \quad \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Следовательно, данные прямые параллельны.

Пример 63. Рассмотрим, как располагаются на плоскости прямые $4x+3y-1 = 0$ и $5x-2y+3 = 0$. Проверим пропорциональность коэффициентов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{5}, \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{3}{-2}, \quad \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Поскольку коэффициенты непропорциональны, прямые не являются параллельными, следовательно, они пересекаются в некоторой точке $M(x;\, y)$, координаты которой должны удовлетворять уравнениям обеих прямых. Таким образом, чтобы найти координаты точки пересечения двух прямых, нужно решить систему из этих двух уравнений:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0, \\ 5x - 2y + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $x = -\dfrac{7}{23}$, $y = \dfrac{17}{23}$.

Вывод: данные прямые пересекаются в точке $M\left(-\dfrac{7}{23};\, \dfrac{17}{23}\right)$.

Пример 64. Найти угол между двумя прямыми $2x - 3y = 0$ и $x + 3y - 7 = 0$.

По формуле (11)

$$\cos\varphi = \frac{|2\cdot 1 + (-3)\cdot 3|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

П р и м е р 65. Дана прямая $x - y + 3 = 0$. Составить уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку $M(1;\,-1)$.

Направляющий вектор данной прямой $\vec{q} = \{1;\,1\}$ может являться направляющим вектором для любой прямой, параллельной данной, следовательно, можно воспользоваться формулой (8):

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-(-1)}{1}.$$

Прямая $x - y - 2 = 0$ проходит через точку M параллельно данной прямой.

П р и м е р 66. Дана прямая $2x + y - 3 = 0$. Составить уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через точку $M(2;\,3)$.

Поскольку искомая прямая перпендикулярна данной, то вектор нормали данной прямой $\vec{n} = \{2;\,1\}$ является направляющим вектором искомой прямой, следовательно, по формуле (8)

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1}.$$

Искомая прямая имеет уравнение $x - 2y + 4 = 0$.

2. Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, а α_1 и α_2 – углы наклона прямых (рис. 12), то угол $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Тангенс угла между прямыми находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Поскольку, по определению, угол между прямыми не может быть тупым, то и тангенс не может быть отрицательным, следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}\right|. \qquad (12)$$

Если прямые параллельны, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и, следовательно,

$$k_1 = k_2,$$

т. е. *параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты.*

В случае, когда прямые перпендикулярны, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\varphi$ не существует, поэтому условие перпендикулярности имеет следующий вид:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Пример 67. Прямые $y = 3x + 5$ и $y = -\dfrac{x}{3} + 4$ взаимно перпендикулярны, так как $k_1 \cdot k_2 = 3\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -1$.

Пример 68. Прямые $y = -5x+2$ и $y = -5x-11$ параллельны, так как $k_1 = k_2 = -5$.

Пример 69. Найдем угол между прямыми из примера 64.

Приведем уравнения прямых к виду уравнений с угловым коэффициентом:

$$2x - 3y = 0, \Rightarrow y = \frac{2}{3}x,$$

$$x + 3y - 7 = 0, \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Таким образом, угловые коэффициенты прямых: $k_1 = \dfrac{2}{3}$, $k_2 = -\dfrac{1}{3}$. Используем формулу (12):

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}}\right| = \left|\frac{-1}{\frac{7}{9}}\right| = \frac{9}{7}.$$

Расстояние d от точки $M(x_M;\, y_M)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|A\cdot x_M + B\cdot y_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{13}$$

Пример 70. Найти расстояние от точки $M(-1;\, 1)$ до прямой $3x + 4y - 12 = 0$.

По формуле (13)

$$d = \frac{|3\cdot(-1) + 4\cdot 1 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{11}{5}.$$

П р и м е р 71. Задача с треугольником на плоскости. Даны вершины треугольника $A(-1;\,3)$, $B(-2;\,-1)$, $C(2;\,3)$. Требуется:

1) составить уравнения сторон AB, AC, BC и найти их угловые коэффициенты;
2) найти длину стороны BC;
3) найти угол BAC;
4) составить уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB;
5) составить уравнение высоты AH и найти ее длину;
6) составить уравнение медианы BM;
7) найти точку пересечения высоты AH и медианы BM.

Начать целесообразно с выполнения чертежа (рис. 13).

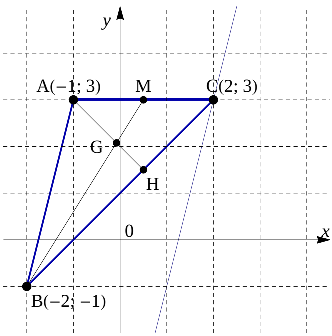


Рис. 13

1) Составим уравнения сторон AB, AC, BC и найдём их угловые коэффициенты. Поскольку известны вершины треугольника, то уравнения каждой стороны составим по двум точкам, используя формулу (9). Составим уравнение стороны AB по точкам $A(-1;\,3)$ и $B(-2;\,-1)$:

$$\frac{x-(-1)}{-2-(-1)} = \frac{y-3}{-1-3},$$

т. е. $4x - y + 7 = 0$ – общее уравнение стороны AB; $y = 4x + 7$ – уравнение стороны AB с угловым коэффициентом; $k_{AB} = 4$ – угловой коэффициент.

Аналогично находим уравнения остальных сторон треугольника:

AC: $y - 3 = 0$, $k_{AC} = 0$;

BC: $x - y + 1 = 0$, $k_{BC} = 1$.

2) Найдем длину стороны BC. Для точек $B(-2;\,-1)$ и $C(2;\,3)$ используем формулу (1):

$$|BC| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ (ед.)}.$$

3) Найдем угол $\angle BAC$. Это угол при вершине A. Есть несколько способов решения:

а) как угол между нормалями прямых AB и AC, т. е. как угол между векторами $\vec{n}_{AB} = \{4;\,-1\}$ и $\vec{n}_{AC} = \{0;\,1\}$, по формуле (3):

$$\cos\angle BAC = \frac{4\cdot 0 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}.$$

Внимание! Угол треугольника и угол между векторами могут быть как острыми, так и тупыми, а угол между прямыми тупым быть не может!

б) как угол между направляющими векторами $\vec{q}_{AB}$ и $\vec{q}_{AC}$ прямых AB и AC аналогично предыдущему случаю;

в) как угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ также по формуле (3);

г) как угол между прямыми AB и AC с использованием угловых коэффициентов k_{AB} и k_{AC} по формуле (12):

$$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{0-4}{1+4\cdot 0} = -4.$$

На чертеже видно, что этот угол тупой, следовательно, тангенс угла должен быть отрицательным.

4) Составим уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB. Общее уравнение прямой AB имеет вид $4x - y + 7 = 0$, следовательно, направляющий вектор $\vec{q}_{AB} = \{1;\,4\}$. Составляем уравнение прямой по точке $C(2;\,3)$ и направляющему вектору $\vec{q}_{AB} = \{1;\,4\}$, используя формулу (8):

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB, имеет вид $4x - y - 5 = 0$.

5) Составим уравнение высоты AH и найдем ее длину. Уравнение высоты находят из соотношения угловых коэффициентов перпендикулярных прямых:

$$k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}}.$$

В данном случае $k_{BC} = 1$, тогда: $k_{AH} = -1$. Уравнение высоты составим по точке $A(-1; 3)$ и угловому коэффициенту $k_{AH} = -1$ по формуле (7):

$$y - 3 = -1 \cdot (x - (-1)).$$

Уравнение высоты AH: $x + y - 2 = 0$.

Данную задачу можно решить и другим способом, учитывая, что нормаль стороны BC совпадает с направляющим вектором высоты AH, т. е. $\vec{n}_{BC} = \vec{q}_{AH} = \{1; -1\}$, можно использовать формулу канонического уравнения прямой (8).

Длина высоты AH равна расстоянию между точкой $A(-1; 3)$ и прямой BC, имеющей уравнение $x - y + 1 = 0$. По формуле (13) имеем:

$$|AH| = \frac{|1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (ед.)}.$$

6) Составим уравнение медианы BM.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Найдём точку M – середину стороны AC. Используем формулы координат точки деления отрезка в заданном соотношении (3). Известны координаты концов отрезка: $A(-1; 3)$, $C(2; 3)$, тогда координаты середины $M(0{,}5; 3)$.

Уравнение медианы BM составим как уравнение прямой по двум точкам $B(-2; -1)$ и $M(0{,}5; 3)$ (9):

$$\frac{x - (-2)}{0{,}5 - (-2)} = \frac{y - (-1)}{3 - (-1)}.$$

Уравнение медианы BM: $8x - 5y + 11 = 0$.

7) Найдем точку пересечения высоты AH и медианы BM:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ 8x - 5y + 11 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы — координаты точки пересечения высоты и медианы — $G\left(-\dfrac{1}{13}; \dfrac{27}{13}\right)$.

Упражнения

131. Найти расстояние между точкой $A(1;\,5)$ и точкой $B(-2;\,-1)$.

132. Найти площадь квадрата, если две смежные вершины имеют координаты $A(3;\,-5)$ и $B(-4;\,2)$.

133. Даны точки $A(-2;\,5)$ и $B(4,17)$. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB пополам.

134. Даны точки $A(-2;\,1)$ и $B(3;\,6)$. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $AC : CB = 3 : 2$.

135. Определить, какие из точек $A(2;\,3)$, $B(3;\,3)$, $C(4;\,4)$ лежат на прямой $x-2y+4=0$.

136. Дано уравнение прямой $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{y+5}{2}=0$. Требуется:

а) написать общее уравнение прямой, найти координаты вектора нормали прямой $\vec{n}$ и координаты направляющего вектора $\vec{q}$;

б) написать уравнение с угловым коэффициентом, найти угловой коэффициент прямой k и ординату точки пересечения данной прямой с осью Oy;

в) написать уравнение прямой в отрезках и определить координаты точек пересечения с осями координат.

137. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\,1)$ и $B(5;\,4)$.

138. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(2;\,0)$ и $B(7;\,4)$.

139. Найти угол между прямыми $5x-y+7=0$ и $2x-3y+1=0$.

140. Проверить, что прямые $3x-2y+1=0$ и $2x+5y-12=0$ пересекаются и найти координаты точки пересечения.

141. Дана точка $A(-2;\ 5)$ и прямая $2x-y=0$. Написать уравнение прямых, проходящих через т. A:

а) параллельную данной прямой;

б) перпендикулярную данной прямой.

142. Найти расстояние от точек $K(4;\ 3)$, $L(2;\ 1)$ и $N(1;\ 0)$ до прямой $3x+4y-10=0$.

143. Вершины треугольника ABC заданы координатами $A(-7;\ 7)$, $B(-1;\ -1)$, $C(-22;\ -29)$. Требуется:

а) составить уравнения сторон AB, AC, BC и найти их угловые коэффициенты;

б) найти длину стороны BC;

в) найти угол BAC;

г) составить уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно прямой AB;

д) составить уравнение высоты AH и найти её длину;

е) составить уравнение медианы BM;

ж) найти точку пересечения прямых AH и BM.

Задания для самостоятельной работы

144. Найти расстояние между точкой $A(-3;\ 8)$ и точкой $B(2;\ -4)$.

145. Найти периметр квадрата, две смежные вершины которого $A(2;\ 2)$, $B(-1;\ 6)$.

146. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $\lambda_1 : \lambda_2 = 1 : 3$, если $A(-5;\ 1)$, $B(11;\ 5)$.

147. Дана прямая $5x+2y+10=0$. Найти уравнение прямой в отрезках, построить ее и проверить, лежат ли на ней точки $A(2;\ -10)$ и $B(1;\ 4)$.

148. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки $A(2;\ -5)$ и $B(3;\ 2)$.

149. Написать общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ -3)$ параллельно прямой $x+9y-11=0$.

150. Написать общее уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3;\,2)$ перпендикулярно прямой $7x + 4y - 11 = 0$.

151. Через точку пересечения прямых $2x-y-3 = 0$ и $x-3y-4 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $x+y-1 = 0$. Написать ее уравнение.

152. В треугольнике с вершинами $A(-2;\,0)$, $B(2;\,6)$ и $C(4;\,2)$ проведены высота BD и медиана BE. Написать уравнения стороны AC, медианы DE и высоты BD.

153. Определить координаты вершин и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 3y = 0$, $x = 3$, $x - 2y + 3 = 0$.

2.4. Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, которая в декартовой системе координат имеет уравнение второй степени относительно координат x и y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B , C, D, E, F – действительные числа, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Если линиями первого порядка являются прямые и только они, то множество кривых второго порядка заметно разнообразней. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Окружность

Окружность – это множество точек плоскости, находящихся на равном расстоянии от некоторой точки, называемой центром окружности. *Каноническое уравнение окружности* с центром в начале координат и радиусом, равным R, имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (14)$$

Если центр окружности находится в точке $O_1(x_0;\,y_0)$, то уравнение окружности примет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, причем эта величина больше, чем расстояние между фокусами (рис. 14). В прямоугольной декартовой системе координат xOy *каноническое уравнение эллипса* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{15}$$

где $a \geqslant b > 0$.

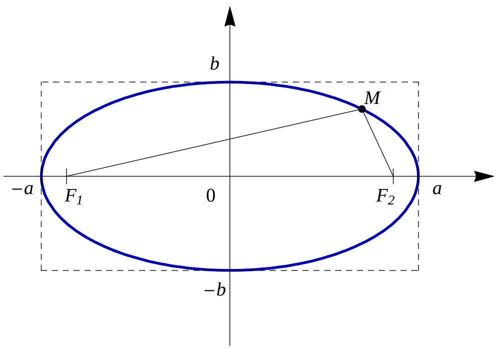


Рис. 14

Система координат xOy, в которой уравнение эллипса имеет вид (15), называется *канонической системой* (для данного эллипса).

Эллипс имеет форму выпуклого овала с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Оси симметрии эллипса называются *главными осями эллипса*, а точка пересечения осей – *центром эллипса*. Точки, в которых эллипс пересекает главные оси, называются его *вершинами*. В канонической системе главными осями эллипса являются оси Ox и Oy, а центром – начало координат O. Вершинами эллипса в канонической системе являются точки с координатами $(-a;\, 0)$, $(a;\, 0)$, $(-b;\, 0)$, $(b;\, 0)$.

Замечание. Осями эллипса также принято называть длины отрезков, образованных пересечением эллипса с главными осями, равные $2a$ и $2b$. Так как $2a > 2b$, отрезок $2a$ называется *большой осью эллипса*, а отрезок $2b$ — *малой осью*. Соответственно, отрезки a и b называются *большой* и *малой полуосями*.

График эллипса (15) находится внутри прямоугольника

$$-a \leqslant x \leqslant a, \qquad -b \leqslant y \leqslant b.$$

Фокусы эллипса находятся на большой оси и имеют координаты $F_1(-c;\,0)$ и $F_2(c;\,0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$ и называется *фокусным расстоянием.*

Замечание. При совпадении точек F_1 и F_2 эллипс превращается в окружность, при этом $a = b = R$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Эксцентриситет характеризует форму эллипса, чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытянут. В случае окружности $a = b$ и $\varepsilon = 0$.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b > a$ тоже определяет эллипс, расположенный так, что его фокусы будут на оси Oy. Таким образом, отрезок b – большая полуось, отрезок a – малая полуось, координаты фокусов $F_1(0;\,c)$ и $F_2(0;\,-c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, причем эта величина меньше расстояния между фокусами (рис. 15). В прямоугольной системе координат xOy *каноническое уравнение гиперболы* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{16}$$

где $a > 0$, $b > 0$.

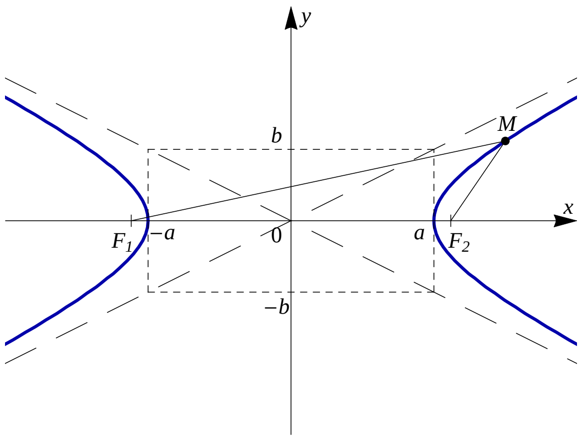


Рис. 15

Система координат xOy, в которой уравнение гиперболы имеет вид (16), называется *канонической системой* (для данной гиперболы).

Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии. Они называются *главными осями гиперболы*, а точка их пересечения называется *центром гиперболы*. Одна из двух осей пересекается с гиперболой в двух точках, называемых *вершинами гиперболы*. Она называется *действительной осью гиперболы*. Другая ось не имеет общих точек с гиперболой и называется ее *мнимой осью*.

В канонической системе главные оси совпадают с осями координат, причем ось Ox – действительная, а ось Oy – мнимая; центр гиперболы совпадает с началом координат.

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно главных осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, называется *основным прямоугольником гиперболы*.

Замечание. Осями гиперболы также принято называть отрезки длиной $2a$ (действительная ось) и $2b$ (мнимая ось), соединяющие середины противоположных сторон основного прямоугольника. Соответственно, a – действительная полуось, b – мнимая полуось.

График гиперболы (16) лежит в вертикальных углах, образованных прямыми $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ и содержащих точки оси Ox.

Таким образом, гипербола состоит из двух частей – *ветвей ги-*

перболы, левой и правой.

Прямые

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

называются *асимптотами* гиперболы. Асимптоты гиперболы проходят через диагонали главного прямоугольника гиперболы.

Фокусы гиперболы расположены на действительной оси и имеют координаты $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$ и называется *фокусным расстоянием.*

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \varepsilon > 1.$$

Эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы. Чем меньше эксцентриситет, тем более вытянут ее основной прямоугольник в направлении действительной оси.

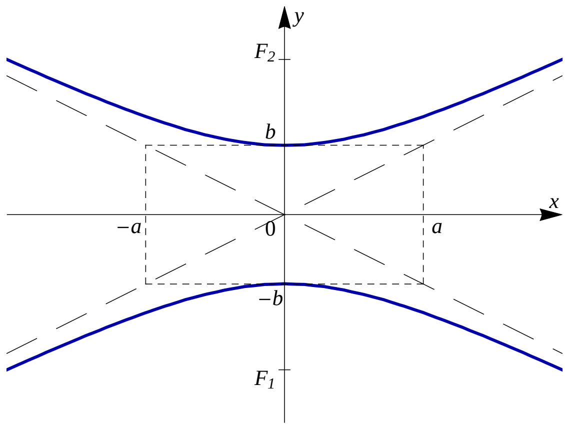


Рис. 16

Уравнение вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{17}$$

определяет гиперболу, ветви которой расположены сверху и снизу от основного прямоугольника и для которой меняются местами действительная и мнимая оси с сохранением тех же асимптот (рис. 16).

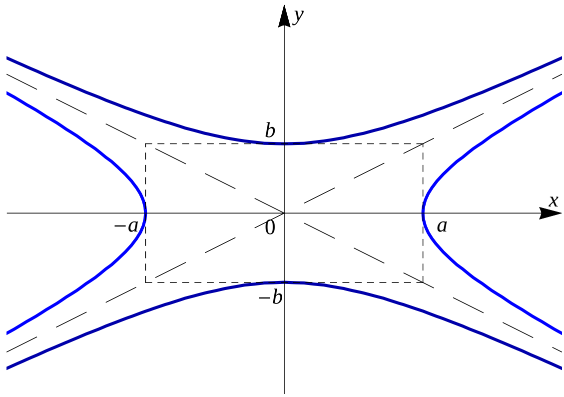


Рис. 17

Уравнение (17) также называется каноническим уравнением гиперболы.

Две гиперболы, которые определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

в одной и той же системе координат и при одних и тех же a и b называются *сопряженными* друг с другом.

Взаимное расположение гипербол (16) и (17) представлено на рис. 17.

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется *равносторонней*, и в этом случае основной прямоугольник гиперболы представляет собой квадрат.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой (рис. 18). *Каноническое уравнение параболы* в прямоугольной декартовой системе координат xOy имеет вид

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{18}$$

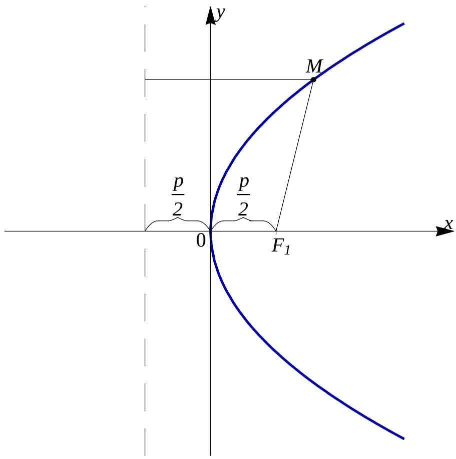


Рис. 18

Система координат xOy, в которой уравнение параболы имеет вид (18), называется *канонической системой* (для данной параболы).

Парабола имеет единственную ось симметрии, которая называется *осью параболы*. Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется *вершиной параболы*. В канонической системе ось параболы совпадает с осью Ox, а вершина – с началом координат.

Число p – *фокальный параметр параболы*, равен расстоянию от фокуса до директрисы. Фокус параболы расположен на оси параболы и имеет координаты $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Прямая, называемая директрисой, расположена перпендикулярно оси параболы и имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Все точки параболы лежат в правой полуплоскости, т. е. $x \geqslant 0$.

Уравнение

$$y^2 = -2px, \quad p > 0, \tag{19}$$

определяет параболу, ось которой совмещена с осью Ox, а вершина – с началом координат, но которая расположена в левой полуплоскости (рис. 19). Таким образом, фокус имеет координаты $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы $x = \frac{p}{2}$.

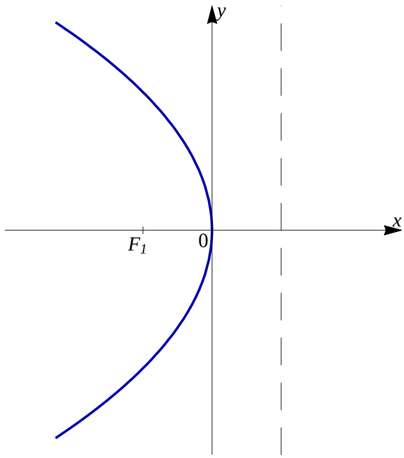


Рис. 19

Аналогично, уравнение

$$x^2 = 2py, \quad p > 0, \tag{20}$$

определяет параболу с вершиной в начале координат, расположенную симметрично относительно оси Oy, расположенную в верхней полуплоскости (рис. 20). Ее фокус $F(0; \dfrac{p}{2})$ и директриса $y = -\dfrac{p}{2}$.

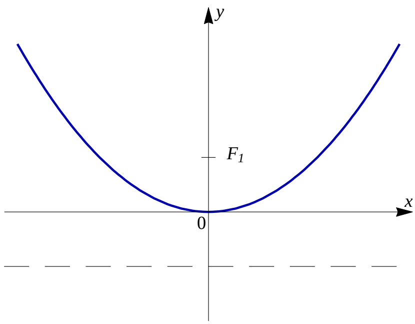


Рис. 20

А уравнение

$$x^2 = -2py, \quad p > 0, \tag{21}$$

определяет параболу с вершиной в начале координат и осью Oy, т. е. расположенную в нижней полуплоскости (рис. 21). Ее фокус $F(0;\ -\frac{p}{2})$ и директриса $y = \frac{p}{2}$.

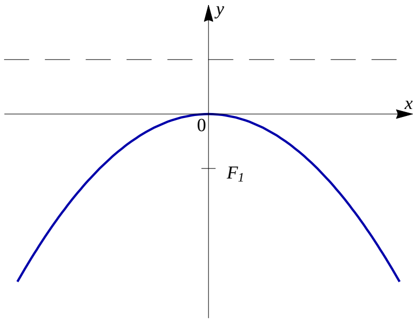


Рис. 21

Уравнения (19), (20) и (21), как и уравнение (18), называются каноническими уравнениями параболы.

Упражнения

154. Составить каноническое уравнение эллипса и сделать рисунок, если:
а) его полуоси $a = 5$ и $b = 2$;
б) его большая ось равна $2a = 10$, а расстояние между фокусами $2c = 8$;
в) его малая ось равна 24, а один из фокусов имеет координаты $F(-5;\ 0)$;
г) фокусное расстояние равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
д) его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$;
е) его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

155. Составить каноническое уравнение гиперболы и сделать рисунок, если:
а) ее оси $2a = 10$ и $2b = 8$;
б) расстояние между фокусами $2c = 10$ и мнимая ось $2b = 8$;
в) фокусное расстояние равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

г) действительная ось $2a = 16$, а эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$;

д) уравнения асимптот $y = \pm\dfrac{4}{3}x$, а расстояние между фокусами $2c = 20$.

156. Составить каноническое уравнение параболы и сделать рисунок, если:
а) осью параболы является ось Ox, парабола расположена в правой полуплоскости и ее параметр $p = 3$;
б) уравнение директрисы $x = \dfrac{1}{4}$;
в) фокус параболы имеет координаты $F\left(0;\ \dfrac{1}{8}\right)$;
г) осью параболы является ось Oy, точка $M(2;\ -1)$ принадлежит параболе.

157. Даны уравнения кривых второго порядка:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

б) $4x^2 + 25y^2 - 80x + 100y + 400 = 0$.

в) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y - 24 = 0$.

г) $9x^2 - y^2 - 90x + 6y + 225 = 0$.

д) $y^2 - 4x - 8y = 0$.

е) $x^2 + 6x - 2y + 5 = 0$.

Определить тип кривой, привести уравнение кривой к каноническому виду, сделать рисунок и найти основные параметры в канонической системе координат:

– для окружности найти координаты центра и радиус;

– для эллипса найти полуоси и координаты фокусов;

– для гиперболы найти полуоси, координаты фокусов и уравнения асимптот;

– для параболы найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

Задания для самостоятельной работы

158. Написать уравнение окружности с центром в точке $C(-1;\ 4)$ и радиусом, равным 6. Построить ее.

159. Составить каноническое уравнение эллипса, зная,что

а) его полуоси $a = 6$, $b = 4$;

б) расстояние между фокусами $2c = 10$, а большая ось эллипса $2a = 16$.

160. Составить каноническое уравнение параболы и сделать рисунок, если:

а) фокус параболы $F(0;\ -3)$;

б) уравнение директрисы параболы $x - 7 = 0$.

161. Найти длины осей и координаты фокусов эллипса, заданного уравнением $4x^2 + 9y^2 = 144$.

162. Дано уравнение $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$. Определить тип кривой, ее полуоси, координаты фокусов, уравнения асимптот и построить ее.

163. Дана парабола $y^2 + 2x - 3 = 0$. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокус и уравнение директрисы, построить кривую.

Дополнительные задачи к разделу

164. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, построенные по векторам $\vec{c}$ и $\vec{d}$, если $\vec{a} = 4\vec{c} - 3\vec{d}$; $\vec{b} = 9\vec{d} - 12\vec{c}$; $\vec{c} = \{-1;\ 2;\ 8\}$; $\vec{d} = \{3;\ 7;\ -1\}$?

165. Даны векторы $\vec{a} = \{-1;\ 3;\ 2\}$ и $\vec{b} = \{3;\ -2;\ 5\}$. Найти их скалярное произведение.

166. Даны векторы $\vec{a} = \{-4;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{b} = \{3;\ 1 - 1\}$. Найти их векторное произведение.

167. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \{-1;\ 2;\ 8\}$ и $\vec{b} = \{3;\ 7;\ -1\}$.

168. Найти смешанное произведение векторов, заданных координатами $\vec{u} = \{-4;\ 5;\ -2\}$, $\vec{v} = \{1;\ 0;\ -3\}$ и $\vec{w} = \{2;\ -1;\ 2\}$.

169. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах из упражнения 168.

170. Ответить на вопрос, правой или левой является тройка векторов из упражнения 168.

171. Дан треугольник ABC: $A(2;\ -6)$, $B(10;\ 0)$, $C(-6;\ 8)$. Требуется:

а) написать уравнение сторон AB, BC и AC; найти их длины и угловые коэффициенты;

б) найти углы A, B и C;

в) написать уравнения высот AH_1, BH_2 и CH_3;

г) найти длины высот AH_1, BH_2 и CH_3;

д) точки M_1, M_2, M_3 – середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найти координаты точек M_1, M_2, M_3;

е) написать уравнения медиан AM_1, BM_2 и CM_3;

ж) найти точку пересечения высоты AH_1 и медианы CM_3.

172. Даны уравнения кривых второго порядка:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$;

б) $x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 4 = 0$;

в) $x^2 - 6x + 2y + 13 = 0$;

г) $-x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 3 = 0$.

Определить тип кривой, привести уравнение кривой к каноническому виду, сделать рисунок и найти основные параметры в канонической системе координат:

– для окружности найти координаты центра и радиус;

– для эллипса найти полуоси и координаты фокусов;

– для гиперболы найти полуоси, координаты фокусов и уравнения асимптот;

– для параболы найти координаты фокуса и уравнение директрисы.

3. Функции одной переменной

3.1. Понятие функции

Если каждому числу x из множества $\mathbb{X}$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное (и единственное) число y из множества $\mathbb{Y}$, то говорят, что на множестве $\mathbb{X}$ определена функция $y = f(x)$. Буквой x обозначается *независимая переменная*, или *аргумент* функции, y — *зависимая переменная*, или значение функции, буквой f обозначается правило, по которому для каждого значения аргумента можно определить значение функции.

Множество значений, которые может принимать аргумент x, называется *областью определения функции* $\mathbb{D}(y)$.

Множество значений, которые принимает зависимая переменная y называется *областью изменения функции* $\mathbb{E}(y)$.

Так же, как и с числами, с функциями можно производить арифметические действия: сложение $f(x) + g(x)$, вычитание $f(x) - g(x)$, умножение $f(x) \cdot g(x)$, деление $f(x)/g(x)$, можно также находить функцию от функции $f(g(x))$.

Область определения функции

Рассмотрим функцию одной переменной $y = f(x)$. Если функция задана формулой, но при этом область ее определения не указана, то за область ее определения принимается множество таких значений аргумента, при которых формула имеет смысл.

Рассмотрим примеры.

Пример 72. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}.$$

Функция представляет собой дробь. Знаменатель дроби не должен равняться нулю. Следовательно, те значения переменной x, которые обращают знаменатель в ноль, не входят в область определения данной функции: $x^2 - 3 \neq 0$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Пример 73. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{3-2x}.$$

Функции с корнем чётной степени: $\sqrt{\alpha(x)}$, $\sqrt[4]{\alpha(x)}$, $\sqrt[6]{\alpha(x)}$, ... определены только при тех значениях переменной x, когда подкоренное выражение неотрицательно: $\alpha(x) \geqslant 0$. В нашем случае: $3 - 2x \geqslant 0$.

Ответ: $D(y) = (-\infty;\, 3/2]$.

Пример 74. Найти область определения функции

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+3)}.$$

Если некоторая функция содержит логарифм $\log_b(\alpha(x))$, то в ее область определения должны входить только те значения переменной x, которые удовлетворяют неравенству $\alpha(x) > 0$. Если логарифм находится в знаменателе, например $\dfrac{1}{\log_b(\alpha(x))}$, то дополнительно накладывается условие $\alpha(x) \neq 1$ (так как $\log_b 1 = 0$).

В нашем случае:

$$\begin{cases} x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Ответ: $D(x) = (-3;\, -2) \cup (-2;\, +\infty)$.

Пример 75. Для функции $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ найти область определения.

Если в некоторую функцию входит $\operatorname{tg}\alpha(x)$, то из её области определения исключаются точки $\alpha(x) = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. А если в некоторую функцию входит $\operatorname{ctg}\alpha(x)$, то из её области определения исключаются точки $\alpha(x) = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В нашем примере присутствует тангенс и $\alpha(x) = 2x$, следовательно,

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Делим на 2 обе части равенства:

$$x \neq \frac{\frac{\pi}{2} + \pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

В результате

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, где $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел. Данная запись означает, что переменная x может принимать любые значения из интервала $(-\infty; +\infty)$ за исключением точек, указанных в фигурных скобках.

Пример 76. Найти область определения функции

$$y = \arcsin(3 - 2x).$$

Для функций, содержащих $\arcsin(\alpha(x))$ и $\arccos(\alpha(x))$, должно выполняться неравенство $-1 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1$.

В нашем случае получим двойное неравенство:

$$-1 \leqslant 3 - 2x \leqslant 1.$$

Вычтем из каждой части неравенства число 3, получим:

$$-4 \leqslant -2x \leqslant -2,$$

а затем разделим каждую часть неравенства на (-2):

$$1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Ответ: $D(y) = [1;\ 2]$.

Пример 77. Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln(9 - x^2).$$

В данной функции у нас присутствуют и корень, и логарифм. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а выражение под знаком логарифма — строго положительным. Таким образом, необходимо решить систему

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 9 - x^2 > 0. \end{cases}$$

Поскольку оба условия должны выполняться одновременно, решением системы является пересечение интервалов.

Ответ: $D(y) = [0;\ 3)$.

Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

1. Степенная функция $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число.

2. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0, \quad a \neq 1$.

4. Тригонометрические функции $y = \sin x, \quad y = \cos x,$

   $y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x,$

   $y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$

Подробнее с основными свойствами и графиками элементарных функций можно познакомиться в приложении 2 (с. 261).

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления), а также операций взятия функции от функции (т. е. формирования сложных функций), примененных конечное число раз.

К элементарным относятся:

- целая рациональная функция, или многочлен:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

- дробно-рациональная функция, или отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n};$$

- иррациональная функция (когда в действиях с аргументом имеется извлечение корня). Например, $y = \sqrt[3]{x+1}$;

- сложные функции. Пусть $u = g(x)$, $x \in X$, $u \in U$. Если для каждого $u \in U$ определена функция $y = f(u)$, то функция $y = f\left(u(x)\right)$ называется сложной функцией аргумента x. В область определения сложной функции $y = f\left(u(x)\right)$ входят те и только те значения x, для которых значения $g(x)$ содержатся в области определения функции $f(u)$; x называется *основным аргументом*, u — *промежуточным*.

Пример 78. Функция $y = \lg x$ является простой, ее аргумент — независимая переменная x; а функция $y = \lg\left(x^2 - 3x + 2\right)$ — сложная функция, ее можно представить как $y = \lg u$, где функция $u = x^2 - 3x + 2$.

3.2. Основы теории пределов

Рассмотрим словесное, не строгое математически, определение предела функции:

«Число A является пределом функции $y = f(x)$, если при стремлении x к точке x_0 (и слева, и справа) соответствующие значения функции стремятся к A» (см. рис. 22). Обозначается:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

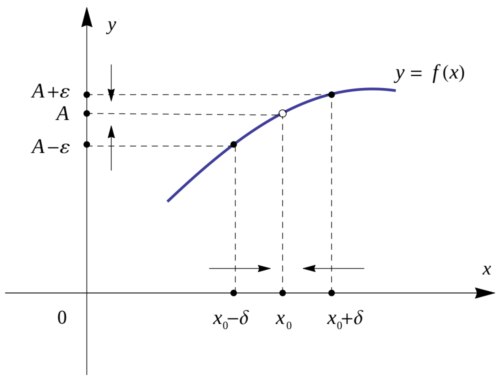


Рис. 22

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая определена на некотором промежутке X за исключением, возможно, точки x_0 (т. е. функция там может быть не определена).

Определение предела функции по Коши. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого (сколь угодно малого), заранее выбранного числа $\varepsilon > 0$, существует число $\delta > 0$, такое, что для всех достаточно близких к x_0 значений x (принадлежащих X), т. е. для всех x из δ-окрестности $(0 < |x - x_0| < \delta)$, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Запись при помощи математических обозначений выглядит так: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 | \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Понятие предела подразумевает не попадание x в точку x_0, а именно бесконечно близкое приближение, при этом неважно – определена ли функция $f(x)$ в точке x_0 или нет.

Односторонние пределы

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Это значит, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \neq x_0$ из интервала $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. Следовательно, оно выполняется и для x из левого промежутка $(x_0 - \delta;\ x_0)$, и для всех x из правого промежутка $(x_0;\ x_0 + \delta)$. Это, в свою очередь, означает, что

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Эти выражения называются соответственно *левым* и *правым* пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Функция имеет предел при $x \to x_0$, когда левый и правый пределы функции существуют и равны между собой.

Предел функции в бесконечности

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Заменив в этом определении условие $|x| > N$ на $x > N$ или $x < -N$, соответственно получим

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{или} \quad A = \lim_{a \to -\infty} f(x).$$

Следовательно, число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнятся равенства $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $A = \lim\limits_{a\to-\infty} f(x)$.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Если для любого (как угодно большого) числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$, то функцию $f(x)$ называют *бесконечно большой при x, стремящемся к x_0*, и пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

т. е. функция $f(x)$ имеет бесконечный предел при $x \to x_0$.

Если существует предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, равный нулю, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой в точке x_0*.

Существенным моментом утверждения является тот факт, что *функция может быть бесконечно малой лишь в конкретной точке.*

Аналогично понятию бесконечно малой функции при $x \to x_0$ рассматриваются понятия бесконечно малой функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

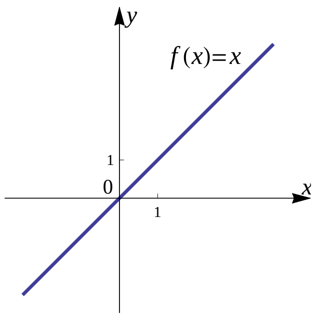


Рис. 23

Рассмотрим функцию $f(x) = x$ (рис. 23). Данная функция *бесконечно малая* в единственной точке: $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Следует отметить, что в бесконечности эта же функция будет уже *бесконечно большой*: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. Или в более компактной записи: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$. Во всех других точках предел функции будет равен конечному числу, отличному от нуля.

Для краткости будем говорить «бесконечно малая функция» или «бесконечно большая функция», подразумевая, что она бесконечно малая или бесконечно большая в рассматриваемой точке или на бесконечности (∞, $+\infty$, $-\infty$).

Теорема 3 (*о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми функциями*). Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ ($x \to \infty$). И, наоборот, если $g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$ ($x \to \infty$) и в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, может быть, самой точки x_0) отлична от нуля, то функция $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ — бесконечно большая при $x \to x_0$ ($x \to \infty$).

Замечание. Если точка x_0 принадлежит области определения элементарной функции $y = f(x)$, то ее предел при $x \to x_0$, равен значению функции в этой точке $f(x_0)$.

Пример 79. $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = (-2)^2 = 4$.

Правила вычисления пределов

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют пределы.

1. Предел постоянной величины равен этой постоянной:

$$\lim_{x \to x_0} C = C \qquad (C = const)\,.$$

2. Предел алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов множителей:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \qquad \left(\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0\right).$$

6. Знак предела и знак непрерывной функции можно поменять местами (предельный переход под знаком непрерывной функции):
$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$$

Замечательные пределы

В теории математического анализа доказано, что
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Данный математический факт носит название *первого замечательного предела.* Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$ тоже можно считать первым замечательным пределом.

Также доказано, что
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$
число e — иррациональное ($e \approx 2{,}7183\ldots$).

Если $\dfrac{1}{x} = y$, то y будет стремиться к нулю при x, стремящемся к бесконечности. Сделаем замену:
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Эти пределы носят название *второго замечательного предела.*

Примеры нахождения предела функции. Раскрытие неопределенностей

Пример 80. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

По правилам вычисления пределов, предел частного равен частному пределов. Рассмотрим числитель $2x^2-3x-5$. Он представляет собой многочлен, а следовательно, это элементарная функция, область определения $(-\infty; +\infty)$. Значит, точка $x = 1$ принадлежит области определения и предел данной функции равен значению функции в этой точке: $f(1) = 2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 5 = -6$.

Аналогично рассмотрим знаменатель $g(x) = x+1$. Предел будет равен $g(1) = 1+1 = 2$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x+1} = \frac{2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 5}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Подведем итог: при нахождении предела функции сначала подставляем число x_0 в функцию и вычисляем результат. Если он равен конечному числу, это и есть искомый предел.

Пример 81. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4 + 8x + 10)$.

Подставляя вместо x бесконечность, получаем

$$\lim_{x\to\infty}(x^4 + 8x + 10) = \infty.$$

Пример 82. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

Так как функция $y = x^2$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой, то $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно малой в данной точке:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Пример 83. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

Вычисляем аналогично предыдущему примеру. Функция под знаком предела $f(x) = x^2$ при $x \to 0$ является бесконечно малой, следовательно, функция $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ будет бесконечно большой в данной точке:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$

Пример 84. Найти передел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$.

Функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены. Числитель и знаменатель при $x \to \infty$ являются бесконечно большими функциями. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия неопределенности такого вида, необходимо разделить числитель и знаменатель на x^p, где p — наивысшая степень многочлена, находящегося в знаменателе.

Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\cancelto{0}{\dfrac{3}{x}}-\cancelto{0}{\dfrac{5}{x^2}}}{\cancelto{0}{\dfrac{1}{x^2}}+\cancelto{0}{\dfrac{1}{x}}+3}=\frac{2-0-0}{0+0+3}=\frac{2}{3},$$

так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $\dfrac{3}{x}$, $\dfrac{5}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^2}$ и $\dfrac{1}{x}$ стремится к нулю.

Пример 85. Найти передел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$.

Как и в предыдущем примере, в числителе и знаменателе — многочлены. Наивысшая степень x в знаменателе — 4. Следовательно, и числитель, и знаменатель делим на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3}{x^4}+\dfrac{15x^2}{x^4}+\dfrac{9x}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{5x^4}{x^4}+\dfrac{6x^2}{x^4}-\dfrac{3x}{x^4}-\dfrac{4}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancelto{0}{\dfrac{7}{x}}+\cancelto{0}{\dfrac{15}{x^2}}+\cancelto{0}{\dfrac{9}{x^3}}+\cancelto{0}{\dfrac{1}{x^4}}}{5+\cancelto{0}{\dfrac{6}{x^2}}-\cancelto{0}{\dfrac{3}{x^3}}-\cancelto{0}{\dfrac{4}{x^4}}}=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0.$$

Пример 86. Найти передел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}$.

Снова в числителе и знаменателе — многочлены. В знаменателе многочлен первой степени, следовательно, и числитель, и знаменатель делим на x.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x}+\dfrac{3x}{x}-\dfrac{5}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3-\cancelto{0}{\frac{5}{x}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}} = \frac{\infty+3+0}{1+0} = \frac{\infty}{1} = \infty.$$

П р и м е р 87. Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}, \qquad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0).$$

Здесь дробно-рациональная функция, представляющая собой отношение двух многочленов относительно x степеней m и n соответственно ($m > 0$ и $n > 0$).

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на x^n, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^{m-n} + a_1x^{m-n-1} + \ldots + a_{m-1}x^{1-n} + a_mx^{-n}}{b_0 + b_1x^{-1} + \ldots + b_{n-1}x^{1-n} + b_nx^{-n}}.$$

Ясно, что при $x \to \infty$ знаменатель дроби имеет пределом число $b_0 \neq 0$. Числитель дроби при $m > n$ стремится к бесконечности; при $m = n$ предел числителя равен коэффициенту a_0; при $m < n$ предел числителя равен нулю.

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \infty, & m > n; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m = n; \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

Неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$

П р и м е р 88. Найти предел $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-1}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x \to -1$ стремятся к нулю (неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$).

В числителе и знаменателе находятся многочлены, значит, для раскрытия неопределенности $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ необходимо разложить данные многочлены на множители и сократить одинаковые множители, стремящиеся к нулю. Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение или использовать формулы сокращенного умножения (см. приложения на с. 258). Также можно раскрыть неопределенность делением многочленов на многочлен $(x - x_0)$.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 - 1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)(x - \frac{5}{2})}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2x - 5}{x - 1} = \frac{-7}{-2} = 3{,}5.$$

П р и м е р 89. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x - 21}}{5x - 15}$.

Здесь снова имеет место неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Разложить на множители числитель не получается. В таких случаях используют метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{10x - 21}}{5x - 15} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6} - \sqrt{10x-21})(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}{5(x-3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - (\sqrt{10x-21})^2}{5(x-3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x + 6 - (10x - 21)}{5(x-3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{x + 6 - 10x + 21}{5(x-3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x + 27}{5(x-3)(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9\cancel{(x-3)}}{5\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9}{5(\sqrt{x+6} + \sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{-9}{5(\sqrt{3+6} + \sqrt{10\cdot 3 - 21})} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}.$$

П р и м е р 90. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6})^2-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{x+6-4}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-1)(\sqrt{x+6}+2)=(-2-1)(\sqrt{-2+6}+2)=-12.$$

П р и м е р 91. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3x}$.

Числитель и знаменатель дроби при $x\to 0$ стремятся к нулю. Неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Выражение под знаком предела похоже на первый замечательный предел, но аргумент синуса $7x$ отличается от знаменателя $3x$. Однако, если сделать замену $y=7x$, при $x\to 0$, y тоже будет стремиться к нулю, причем $x=y/7$, тогда получим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{3\cdot\dfrac{y}{7}}=\frac{7}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{7}{3}\cdot 1=\frac{7}{3}.$$

На практике при решении таких примеров замену обычно не делают, а поступают следующим образом: так как в числителе аргумент синуса равен $7x$ ($7x\to 0$ при $x\to 0$), то в знаменателе нужно тоже получить $7x$, для этого числитель и знаменатель дроби умножаем на 7:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\nearrow 1}{\sin 7x}\cdot 7}{3x\cdot 7}=\frac{7}{3}.$$

П р и м е р 92. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2}$.

Также неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Если в пределе есть тангенс, то его превращают в отношение синуса и косинуса:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x\cdot\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\cdot\cos 2x}=\frac{1}{0\cdot 1}=\infty.$$

Неопределенность вида $\{1^\infty\}$

П р и м е р 93. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{4x+1}$.

При $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице: $\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)$, а показатель — к бесконечности: $(4x+1)\to\infty$. Получили неопределенность вида $\{1^\infty\}$. Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x+1}=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right]}_{\to e}{}^{\frac{1}{3x}\cdot(4x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{4x+1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{3x}}=e^{4/3}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{3x}\to 0$ при $x\to\infty$, то выражение в квадратных скобках не что иное, как второй замечательный предел (с. 92):

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}=e.$$

П р и м е р 94. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$.

Рассмотрим предел функции в основании степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+1}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}=1.$$

А так как $(2x+3) \to \infty$ при $x \to \infty$, получаем неопределенность вида $\{1^\infty\}$. Преобразуем функцию под знаком предела так, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \{1^\infty\} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x+1}-1\right)^{2x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{-3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right]}_{\to e}{}^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6x-9}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-6-9/x}{1+1/x}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.$$

3.3. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняется следующее условие:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Анализируя определение непрерывности функции, видим, что оно содержит в себе четыре момента:

1) существуют конечные односторонние пределы функции в точке x_0, т. е. существуют

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

2) эти пределы равны, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, следовательно, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) функция определена в точке x_0, т. е. существует $f(x_0)$;

4) предел функции при x, стремящемуся к x_0, равен значению функции в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

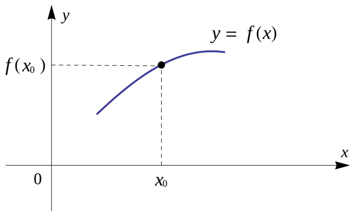


Рис. 24

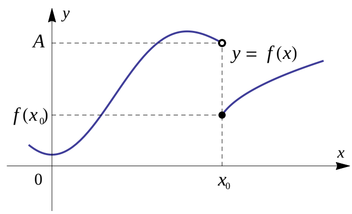


Рис. 25

Рассмотрим рис. 24, на котором изображена непрерывная функция. В точке x_0 функция принимает значение $f(x_0)$. Если аргумент x приближается к точке x_0, то значения функции $f(x)$ приближаются к величине $f(x_0)$ (независимо от того, приближается x к точке x_0 справа или слева). Таким образом, в точке x_0 выполняется условие

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция будет непрерывна в точке x_0, т. к. в ней выполняются четыре перечисленных условия.

Если хотя бы одно из них не выполняется, то функция $f(x)$ в точке x_0 претерпевает *разрыв*. Рассмотрим точку x_0 на рис. 25. Если $x \to x_0$ справа, то значения функции $f(x)$ приближаются к $f(x_0)$. Следовательно,

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Если $x \to x_0$ слева, то значения функции $f(x)$ приближаются к числу A, причем $A \neq f(x_0)$. Итак, при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет конечные правый и левый пределы, т. е. условие 1) выполняется, но эти пределы не равны между собой. Следовательно, в данном случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, условие 2) не выполняется, т. е. x_0 — точка разрыва функции $f(x)$.

Если выполняется условие 1), но не выполняется хотя бы одно из остальных условий, то точка называется *точкой разрыва первого рода*. При этом, если выполняется условие 2), но не выполняется условие 4), получаем *устранимый разрыв*. Чтобы устранить этот разрыв, надо доопределить или переопределить значение функции в этой точке.

Рассмотрим примеры.

Пример 95. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 2, \\ x + 1, & x > 2, \\ 5, & x = 2, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 26.

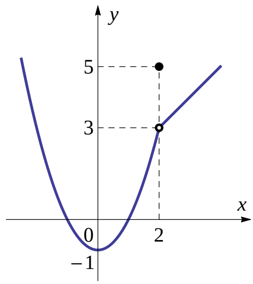


Рис. 26

Рассмотрим точку $x = 2$. В этой точке функция определена и $f(2) = 5$. При $x \to 2$ функция имеет правый и левый пределы:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x^2 - 1) = 3,$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x + 1) = 3.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$, но $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, т. е. условие 4) не выполняется. Изменив значение функции в единственной точке $x = 2$ (положив $f(2) = 3$), мы получим непрерывную функцию.

Если выполняется условие 1), но не выполняется условие 2), получаем *неустранимый разрыв*, или *скачок функции*. Скачок равен

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) - \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

Пример 96. Исследуем на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2, & x < 3, \\ x, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

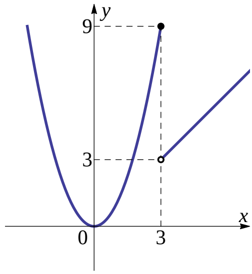


Рис. 27

График этой фунции изображен на рис. 27.

Рассмотрим точку $x = 3$. Если $x \to 3$ справа, то $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 3$, но если $x \to 3$ слева, то $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = 9$. В точке $x_0 = 3$ функция имеет скачок, равный $3 - 9 = -6$.

Если условие 1) не выполняется, т. е. хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то точка x_0 называется *точкой бесконечного разрыва* функции, или *точкой разрыва второго рода.*

П р и м е р 97. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{1}{x^2}$, график которой изображен на рис. 28 .

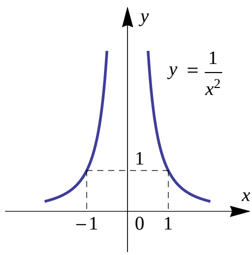


Рис. 28

В точке $x = 0$ функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ не определена, а при $x \to 0$ значение $y = \dfrac{1}{x^2}$ стремится к бесконечности, следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет бесконечный разрыв.

Непрерывность — это *локальное* (местное) свойство функции, т. е. свойство, которым функция может обладать в одной точке и не обладать в другой. Например, функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ в точке $x = 0$ имеет бесконечный разрыв, а в точке $x = 1$ эта функция непрерывна.

Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные (рис. 29), горизонтальные (рис. 30) и наклонные (рис. 31).

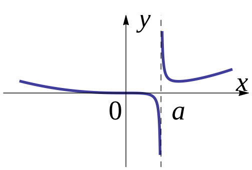


Рис. 29

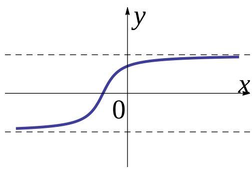


Рис. 30

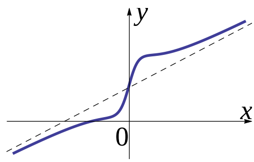


Рис. 31

Нахождение асимптот графика основано на следующих теоремах.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму точку x_0) и хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке равен бесконечности, т. е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

Тогда прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Очевидно, что прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если функция непрерывна в точке x_0, так как в этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно, вертикальные асимптоты следует искать в точках бесконечного разрыва функции $y = f(x)$ или на концах ее области определения.

Пример 98. Рассмотрим функцию $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$. Найдем вертикальные асимптоты.

Функция не определена в точке $x = 0$. Вычислим пределы функции при $x \to \pm 0$:

$$\lim_{x\to\pm 0}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Тогда прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Замечание. Если конечен только один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, то функция имеет лишь левостороннюю или правостороннюю асимптоту.

Пример 99. Найдем асимптоты графика функции $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Очевидно, график функции не имеет вертикальных асимптот (нет точек разрыва). Вычислим пределы функции при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2} = -1.$$

Таким образом, прямая $y = -1$ является горизонтальной асимптотой.

Теорема 6. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы функции

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b.$$

Тогда прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Наклонная асимптота, как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

Пример 100. Найдем асимптоты графика функции

$$y = \frac{3x^3 + 5x^2 + 2}{x^2 + 4}.$$

Очевидно, график функции не имеет ни вертикальных асимптот (нет точек разрыва), ни горизонтальных асимптот, так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+5x^2+2}{x^2+4} = \infty.$$

Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3+5x^2+2}{x(x^2+4)} = 3;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{3x^3+5x^2+2}{x^2+4} - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2-12x+2}{x^2+4} = 5.$$

Следовательно, прямая $y = 3x+5$ является наклонной асимптотой.

Упражнения

Вычислить пределы:

173. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x^2$.

174. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{2x+1}$.

175. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\frac{1}{x+1}$.

176. $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}(x-5)$.

177. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2}$.

178. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+15}$.

179. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2}{4x+1}$.

180. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2-6x+3}{x^2-8x+1}$.

181. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2-x+42}{2x^3-x^2+5}$.

182. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x-3}{7x^2+3x-1}$.

183. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{x+2}{1-x}}$.

184. $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2\frac{8x^2+4}{x^2+2x}$.

185. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2x^2+x}{x^2+1}}$.

186. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$.

187. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$.

188. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-7x+10}$.

189. $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-16}{3x^2+11x-4}$.

190. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

191. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{9+x+2x^2}-3}$.

192. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

193. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^2-49}{2-\sqrt{x-3}}$.

194. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

195. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Вычислить пределы, используя первый замечательный предел:

196. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$.

197. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{5x}$.

198. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{2x}$.

199. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)\sin(3x)}{5x^2}$.

200. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\operatorname{tg}(4x)}$.

201. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{12x\cdot\operatorname{tg}(3x)}$.

Вычислить пределы, используя второй замечательный предел:

202. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x-1}\right)^{8x}$.

203. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{4x-1}$.

204. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{5-3x}$.

Вычислить односторонние пределы функции в точке:

205. $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{x}{x-3}$.

206. $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x}{1-x^2}$.

207. $\lim\limits_{x\to 2-0} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$.

208. $\lim\limits_{x\to 1+0} 5^{\frac{1}{x-1}}$.

209. $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2-x}}$.

Вычислить пределы:

210. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-2}{3x+4}\right)^{x}$.

211. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-2}{2x+3}\right)^{x}$.

Найти точки разрыва функций и указать их тип:

212. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$.

213. $y=\dfrac{5}{x^2-1}$.

214. $y=\begin{cases} x^2+1, & x>0,\\ x, & x<0.\end{cases}$

215. $y=\begin{cases} 2^x-1, & x\geqslant 0,\\ 2x, & x<0.\end{cases}$

216. $y=\begin{cases} 3^{x-2}-3, & x>2,\\ 5, & x=2,\\ 2x-6, & x<2.\end{cases}$

217. $y=\begin{cases} x, & x<-2,\\ -x+1, & -2\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2-1, & x>1.\end{cases}$

Найти асимптоты графика функции:

218. $y=\dfrac{3-4x}{2+5x}$.

219. $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

220. $y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$.

221. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$.

222. $y=\dfrac{(x+1)(3x-2)}{x-1}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

223. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}$.

224. $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{x+1}$.

225. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{0.5}x$.

226. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg}(x+7)$.

227. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-2x-15}$.

228. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x+4}$.

229. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$.

230. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$.

231. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-x+2}{4x^5+3x+1}$.

232. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4+5x-6}{x^3+3x-1}$.

233. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x+6}{x^3+8}$.

234. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-4x+3}$.

235. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$.

236. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{3x^2-10x-8}{2x^2-7x-4}$.

237. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{3x+1}-1}$.

238. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

239. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

240. $\lim\limits_{x\to3} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

241. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{-x^2+2x+7}}{x^2-2x}$.

242. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x^2-x}$.

Вычислить пределы, используя первый замечательный предел:

243. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sin 3x}$.

244. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}$.

245. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{3}\right)}{x}$.

246. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$.

Вычислить пределы, используя второй замечательный предел:

247. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^{x}$.

248. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$.

249. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$.

250. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$.

Вычислить односторонние пределы функции в точке:

251. $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{x}{x-3}$.

252. $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x}{1-x^2}$.

253. $\lim\limits_{x\to 2+0} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$.

254. $\lim\limits_{x\to 1-0} 5^{\frac{1}{x-1}}$.

255. $\lim\limits_{x\to 2+0} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2-x}}$.

Вычислить пределы:

256. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{2x-2}{3x+4}\right)^{x}$.

257. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x-2}{2x+3}\right)^{x}$.

Найти точки разрыва функций и указать их тип:

258. $y = \dfrac{x+1}{x^2-x}$.

259. $y = \begin{cases} x^2, & x > 3, \\ x+6 & x < 3, \\ 0, & x = 3. \end{cases}$

260. $y=\begin{cases} 3x+4, & x\leqslant -1, \\ x^2-2 & -1<x<2, \\ x, & x\geqslant 2. \end{cases}$

261. $y = \begin{cases} x+3, & x \leqslant 0, \\ 1 & 0<x\leqslant 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$

262. $y = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ x^3 & 0<x\leqslant 2, \\ x+4, & x > 2. \end{cases}$

263. $y = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ x^2-1 & -1<x\leqslant 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$

Найти асимптоты графика функции:

264. $y = \dfrac{1+4x}{1+2x}$.

265. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

266. $y = \dfrac{x^2}{2-2x}$.

267. $y = \dfrac{4x-x^3}{x^2+4}$.

Дополнительные задачи к разделу

Вычислить пределы функций:

268. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$.

269. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^2-25x-25}{2x^2-15x+25}$.

270. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$.

271. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{15x^2+2x-1}{x^2+4x+3}$.

272. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$.

273. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$.

274. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3x-1}{x+5}\right)^{1-2x}$.

275. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x-1}{x+5}\right)^{1-2x}$.

276. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(5x)}{3x}$.

277. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(2x)}$.

278. $\lim\limits_{x\to 7-0} \dfrac{5}{2x+3^{\frac{4}{x-7}}}$.

279. $\lim\limits_{x\to 7+0} \dfrac{5}{2x+3^{\frac{4}{x-7}}}$.

280. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)^2+1, & 0<x\leqslant 3,\\ -x+4, & x>3. \end{cases}$$

281. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1,\\ x^2+2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -2x, & x>2. \end{cases}$$

282. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{(x+3)^2}{x-3}$.

4. Основы дифференциального исчисления

4.1. Вычисление производной

Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Наряду с обозначением y' для производной употребляются также обозначения: $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Пример 101. Рассмотрим функцию $y = x^2$ с областью определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$ и произвольное значение аргумента x. Пусть x получает приращение Δx. В точке x функция принимает значение x^2, в точке $(x + \Delta x)$ — значение $(x + \Delta x)^2$. Приращение функции Δy имеет вид $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$.

Тогда отношение приращения функции к приращению аргумента равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

По определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Производная $y' = 2x$ является функцией от x. В каждой конкретной точке x производная — это число. Например, если $x = 3$, то $y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Процесс нахождения производной от данной функции называется ее *дифференцированием.*

Для любой функции $y(x)$ ее производная равна *скорости изменения* этой функции. В этом заключается *физический смысл* производной.

Касательной к кривой в точке M называется предельное положение секущей MP, когда точка P по кривой стремится к точке M.

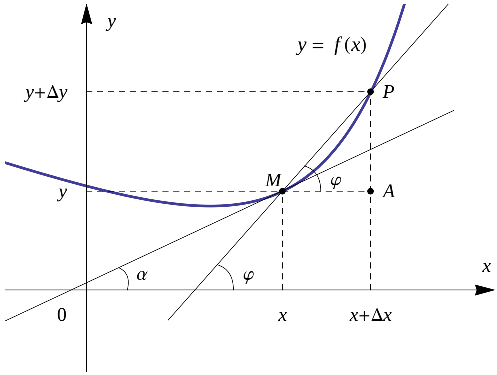


Рис. 32

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ в некоторой точке x. Перейдем от точки x к новой точке $x + \Delta x$. Расстояние AP равно приращению функции Δy, $MA = \Delta x$. Из треугольника MPA получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{PA}{MA} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т.е. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей MP к оси Ox. Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда точка P стремится к точке M и, следовательно, $\operatorname{tg} \varphi$ стремится к $\operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox в точке M.

Так как $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то при Δx, стремящемся к нулю, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $\operatorname{tg} \alpha$, или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$. Таким образом, $y' = \operatorname{tg} \alpha$.

Следовательно, значение производной функции в точке равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в данной точке. В этом состоит *геометрический смысл* производной.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид

$$\begin{array}{ll} y = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0), & \text{если } f'(x_0) \neq 0, \\ x = x_0, & \text{если } f'(x_0) = 0. \end{array}$$

Правила вычисления производной

Рассмотрим функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, имеющие производные $u' = u'(x)$ и $v' = v'(x)$.

1. Производная от постоянной величины равна нулю:

$$(C)' = 0 \qquad (C = const).$$

2. Производная алгебраической суммы двух функций равна алгебраической сумме производных слагаемых:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Замечание. Правило дифференцирования суммы двух слагаемых распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых.

3. Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Следствие. Постоянный множитель можно вынести за знак производной

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'.$$

4. Производная частного двух функций вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

5. Производная сложной функции.

Пусть дана функция $y = f(u)$, где u тоже является функцией $u = g(x)$, т. е. $y = f\left(g(x)\right)$. Производная такой функции вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Таблица производных

1. $(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$.
2. $(e^x)' = e^x$.
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
6. $(\sin x)' = \cos x$.
7. $(\cos x)' = -\sin x$.
8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
16. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
17. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

П р и м е р 102. Вычислить производную функции $y = x + \sin x$.

$$(x + \sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x.$$

П р и м е р 103. Вычислить производную функции $y = x \cdot \sin x$:

$$(x\ \sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x \cdot \cos x.$$

П р и м е р 104. Вычислить производную функции $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Пример 105. Вычислить производную функции $y = \sin^3 x$.

$$\left(\sin^3 x\right)' = \Big((\sin x)^3\Big)' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x.$$

Пример 106. Вычислить производную функции $y = \sin(x^3)$.

$$\left(\sin(x^3)\right)' = \cos(x^3) \cdot \left(x^3\right)' = 3x^2 \cdot \cos(x^3).$$

Пример 107. Дана функция $y = x^3$. Составить уравнение касательной и уравнение нормали к графику этой функции в точке $x_0 = 2$.

Уравнение касательной: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$. Вычисляем значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ при $x_0 = 2$.

Найдем значение функции: $f(x_0) = f(2) = 23 = 8$. Найдем производную: $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$; $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 22 = 12$. Подставляем найденные значения: $y = 12 \cdot (x-2)+8 = 12x-24+8 = 12x-16$.

Уравнение касательной имеет вид $12x - y - 16 = 0$.

Составим уравнение нормали. Так как $f'(x_0) = f'(2) = 12 \neq 0$, то $y = -\dfrac{1}{12} \cdot (x - 2) + 8$.

Уравнение нормали имеет вид $x + 12y - 98 = 0$.

Пример 108. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2\sin x + 5$ в точке $x_0 = \pi/2$.

$$f(x_0) = f(\pi/2) = 2\sin(\pi/2) + 5 = 2 + 5 = 7;$$

$$f'(x) = (2\sin x + 5)' = 2\cos x;$$
$$f'(x_0) = f'(\pi/2) = 2\cos(\pi/2) = 0.$$

Подставляем в уравнение касательной: $y = 0 \cdot (x - \pi/2) + 7 = 7$, т.е. касательная имеет уравнение $y = 7$.

Данная прямая оказалась горизонтальной, так как ее угловой коэффициент $k = 0$. Следовательно, нормаль расположена вертикально и имеет уравнение $x = \pi/2$.

Логарифмическое дифференцирование

При отыскании производной сложной положительной функции иногда бывает удобным следующий прием, называемый *логарифмическим дифференцированием.* Рассмотрим функцию $y = f(x) > 0$. Если найти производную от функции $\ln f(x)$ значительно проще, чем от самой функции, то поступают следующим образом:

$$(\ln y)' = (\ln f(x))',$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln f(x))',$$

$$y' = y \cdot (\ln f(x))' \text{ или } y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Логарифмическое дифференцирование особенно удобно использовать при дифференцировании сложной степенно-показательной функции

$$y = u(x)^{v(x)},$$

где $u(x) > 0$, $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции.

Имеем

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)} = v(x) \cdot \ln u(x).$$

Дифференцируя обе части равенства, получаем

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)},$$

откуда

$$y' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

На практике удобнее пользоваться следующей формулой:

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

П р и м е р 109. Найти производную функции $y = (\sin x)^{2x}$.

$$y' = 2x \cdot (\sin x)^{2x-1} \cdot \cos x + (\sin x)^{2x} \cdot \ln(\sin x) \cdot 2.$$

Понятие дифференциала функции

Дифференциалом функции называется *главная часть приращения функции*, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциал функции обозначается dy:

$$dy = y' \cdot \Delta x.$$

Рассмотрим функцию $y = x$ и найдем dy. Производная $y' = 1$, поэтому $dy = 1 \cdot \Delta x$. С другой стороны, из равенства $y = x$ следует равенство $dy = dx$, следовательно, $dx = 1 \cdot \Delta x$, или

$$dx = \Delta x,$$

таким образом, *дифференциал независимой переменной* равен *приращению этой переменной.* Формулу для дифференциала функции на этом основании можно записать в виде

$$dy = y' dx.$$

Пример 110. Дифференциал функции $y = \sin x$ равен

$$dy = y' \cdot dx = (\sin x)' \cdot dx = \cos x\, dx.$$

Производные высших порядков

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая производную $y'(x)$. Эта производная представляет собой также функцию от x.

Производная от первой производной называется *второй производной* от данной функции и обозначается символом y'':

$$y'' = (y')'.$$

Пример 111. Пусть $y = x^4$, тогда $y' = 4x^3$. Найдем вторую производную $y'' = (y')' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$.

Производная от второй производной называется *третьей производной* от данной функции и обозначается y'''.

Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка от данной функции и обозначается символом $y^{(n)}$.

Пример 112. Дана функция $y = e^{3x}$. Найдем выражение для производной n-го порядка. Последовательно вычисляя производные, получим:

$$y' = 3e^{3x},\ y'' = 3^2 e^{3x},\ y''' = 3^3 e^{3x},\ \ldots,\ y^{(n)} = 3^n e^{(3x)}.$$

Упражнения

Найти производные следующих функций:

283. $y = 5x^4 + x - 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{17}{x^5} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} - 4.$

284. $y = 3\sin x + \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} - 7 \cdot 2^x - \ln x + \dfrac{\arcsin x}{2} - \operatorname{arcctg} x.$

285. $y = \left(2x^3 - 5\right)\cos x.$

286. $y = \dfrac{x^2}{2x^2+1}.$

287. $y = \dfrac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$

288. $y = \dfrac{3x^2 - 11}{4\operatorname{ctg} x}.$

289. $y = \operatorname{tg} 3x + \cos 7x - \sqrt{5}.$

290. $y = \sqrt[5]{(4+5x)^2} + \sqrt[3]{\pi}.$

291. $y = \sin(3 - 5x) + \dfrac{1}{e}.$

292. $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^3} - 2e^3.$

293. $y = \operatorname{arctg} x^3 \cdot e^{2x+3}.$

294. $y = \ln\dfrac{3x-2}{4x+3}.$

295. $y = \dfrac{\arcsin(3x^4 - 7)}{4\ln^5 x}.$

296. $y = \operatorname{arctg}^3 x \cdot \sqrt{\ln x}.$

297. $y = \dfrac{\cos(5x)}{3x}$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{5}.$

298. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$

299. $y = (x+1)^{x^2}.$

Дана кривая $y = f(x)$. Найти тангенс угла наклона касательной к данной кривой в точке с абсциссой $x = x_0$. Написать уравнение касательной и уравнение нормали к данной кривой в точке с абсциссой $x = x_0$:

300. $f(x) = 3x^2 - x,\ x_0 = -1.$

301. $f(x) = e^x,\ x_0 = 0.$

302. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - x,\ x_0 = 1.$

Закон движения материальной точки задан функцией $x = x(t)$, где x – координата точки в момент времени t. Найти скорость точки в момент времени $t = t_0$:

303. $x(t) = 4 + 10t^2$, $t_0 = 1$.

304. $x(t) = 6 + 8t - t^2$, $t_0 = 3$.

305. $x(t) = 25e^{-2t}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$, $t_0 = 0$.

306. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \dfrac{t^5}{5} + \dfrac{2}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}t\right)$ (t – в секундах, s – в метрах). Определить ускорение движения точки в конце второй секунды.

307. Объем продукции, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\dfrac{5}{6}t^3 + \dfrac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, $0 \leqslant t \leqslant 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда через час после начала работы и за час до ее окончания.

Найти производные функций до пятого порядка включительно:

308. $y = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2$.

309. $y = \cos 5x$.

310. $y = \ln x$.

Задания для самостоятельной работы

Найти производные следующих функций:

311. $y = 4x^5 + 4\sqrt[4]{x^3} - 2x + \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} + 7$.

312. $y = \dfrac{\cos x}{3} - 2\operatorname{tg} x - e^x - \log_2 x + 7\arccos x - \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}$.

313. $y = x^2 \ln x.$

314. $y = e^x \left(x^2 + x + 1\right).$

315. $y = 5^x \,(2 \operatorname{ctg} x - 3).$

316. $y = \dfrac{7x^5 + 5}{x - 2}.$

317. $y = \dfrac{3x^4 + 2x^2 - 7}{4 \ln x}.$

318. $y = \dfrac{3 \sin x}{1 - 2 \cos x}.$

319. $y = \operatorname{tg} \dfrac{2x}{5}.$

320. $y = (1 - 3x)^4 - \sin e.$

321. $y = \dfrac{12}{x^2 + 2x + 3} + \ln \pi.$

322. $y = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x^3 - 2}}.$

323. $y = \operatorname{ctg}^3 \dfrac{x}{3}.$

324. $y = \sqrt[4]{4x + \sin 4x}.$

325. $y = \ln^4 \sin x.$

326. $y = \sin 3x^2 \cdot \cos^2 x.$

327. $y = \arcsin \sqrt{5x - 2}.$

328. $y = \sqrt[3]{x}\left(e^{3x} - 5\right).$

329. $y = \dfrac{\ln \cos x}{\cos x}.$

330. $y = \dfrac{\ln \sqrt[3]{x^4}}{\operatorname{tg} 4x}.$

331. $y = (\cos x)^{\sin x}.$

332. $y = x^{\ln x}.$

333. Дана функция $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$. Вычислить $y'(0)$, $y'(1)$, $y'(-1)$.

334. Написать уравнение касательной и уравнение нормали к кривой $y = \dfrac{x^3}{3}$ в точке $x = -1$.

335. Написать уравнение касательной и уравнение нормали к кривой $y = \dfrac{8}{4 + x^2}$ в точке $x = 2$.

336. Написать уравнение касательной и уравнение нормали к синусоиде $y = \sin x$ в точке $x = \pi$.

337. Закон движения тела $s = 2t^2 - 3t + 1$ (t – в секундах, s – в метрах). Определить скорость движения в конце пятой секунды.

338. Тело движется по закону $s = \dfrac{4t+3}{t+4}$ (t – в секундах, s – в метрах). Определить скорость и ускорение тела в конце шестой секунды.

339. Объем продукции, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425$, $0 \leqslant t \leqslant 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда и скорость ее изменения через два часа после начала работы.

Найти производную второго порядка:

340. $y = -\dfrac{22}{x+5}$.

341. $y = e^{-x^2}$.

342. $y = \operatorname{ctg} x$.

343. $y = \sin^2 x$.

344. $y = \operatorname{tg} x$.

345. $y = \sqrt{1+x^2}$.

Найти производную третьего порядка:

346. $y = \cos^2 x$.

347. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

348. $y = x \sin x$.

349. $y = x \ln x$.

350. $y = xe^{-x}$.

4.2. Применение производной

Правило Лопиталя

Т е о р е м а 7. Пусть в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, т.е. частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в точке x_0 представляет собой неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел в правой части равенства существует.

Замечание 1. Правилом Лопиталя раскрытия неопределенностей можно пользоваться и при $x \to \infty$.

Замечание 2. Если частное $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ в точке $x = x_0$ также представляет собой неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, то правило следует применить второй раз (т. е. перейти к отношению вторых производных и т. д.).

Замечание 3. В случае неопределенности вида $\{\infty - \infty\}$ следует с помощью алгебраических преобразований привести функцию к неопределенности вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ и затем воспользоваться правилом Лопиталя.

Пример 113. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x \to 1$, поэтому имеем неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. рассмотрим предел отношения производных заданных функций:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x\to 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{3}.$$

Пример 114. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Это также неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Здесь правило Лопиталя применено дважды.

Пример 115. Найти предел $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{e^x}$.

Это — неопределенность вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0.$

Пример 116. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

Это неопределенность вида $\{\infty - \infty\}$. Для того чтобы найти предел функции, приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x\,(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x\,e^x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2 + x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

Применение производной к исследованию функции

Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции

Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на интервале $(a;\, b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Теорема 8. Для того чтобы функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a;\, b)$, возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была положительна (отрицательна) на этом интервале, т. е. $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$.

Пример 117. Найдем интервалы возрастания и убывания функции $y = x^2$. Производная функции $y' = 2x < 0$ на интервале $(-\infty;\, 0)$. Следовательно, функция убывает для всех $x \in (-\infty;\, 0)$. Производная $y' = 2x > 0$ на интервале $(0;\, +\infty)$, следовательно, функция возрастает для всех $x \in (0;\, +\infty)$.

Функция имеет в точке x_0 (рис. 33) *локальный максимум* (*минимум*), если существует такой интервал $(x_0 - \delta;\, x_0 + \delta)$, что для всех x из этого интервала выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Максимум или минимум функции $y = f(x)$ называется *экстремумом* функции $y = f(x)$. По определению, экстремумы могут достигаться лишь внутри области определения.

Теорема 9 (*необходимое условие существования экстремума*). Если функция $y = f(x)$, дифференцируемая в интервале $(a;\, b)$, имеет в точке $x_0 \in (a;\, b)$ экстремум, то ее производная в этой точке, *если она существует*, равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

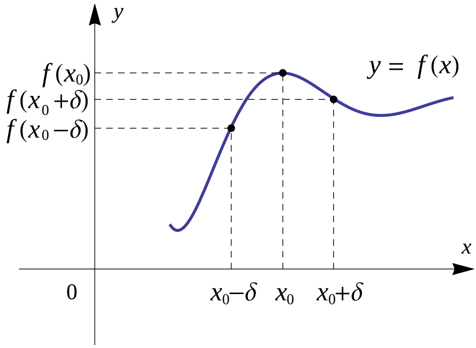


Рис. 33

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума (производная равна нулю или не существует), называются *критическими.*

Таким образом, если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка критическая. Обратное утверждение неверно. Критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Пример 118. Функция $y = x^3$ не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в этой точке в нуль.

Теорема 10 (*достаточное условие существования экстремума*). Если при переходе через критическую точку x_0 производная дифференцируемой функции меняет знак с плюса (минуса) на минус (плюс), то в точке x_0 функция имеет максимум (минимум). Если же при переходе через точку производная знака не меняет, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Алгоритм исследования функции на экстремум

1. Находим производную функции $f'(x)$.

2. Находим критические точки функции, т.е. корни уравнения $f'(x) = 0$ и точки, в которых производная не существует (критические точки принадлежат $D(y)$).

3. Вычисляем знак $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки и делаем вывод о наличии экстремумов функции.

4. Вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример 119. Найдем экстремумы функции $y = -x^2 + 4x - 5$.

Находим производную $y' = -2x + 4$. Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет, т. е. $f'(x)$ определена на всей числовой оси. Приравнивая ее к нулю, получаем $-2x + 4 = 0$, или $x = 2$. Если $x < 2$, то $y' > 0$, если $x >$, то $y' < 0$. Следовательно, точка $x = 2$ является точкой максимума функции. Вычисляем соответствующее значение функции $y_{max}(2) = -1$.

Пример 120. Найдем экстремумы функции $y = \frac{1}{x}$.

Находим производную $y' = -\frac{1}{x^2}$. Производная не существует в точке $x = 0$, но и функция не определена в точке $x = 0$. Следовательно, критических точек нет и экстремумов также нет.

Пример 121. Найдем экстремумы функции $y = \sqrt[3]{x}$. Область определения функции — вся числовая ось. Находим производную $y' = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Точек, в которых производная равна нулю, нет. Производная функции не существует в точке $x = 0$. Если $x < 0$, то $y' > 0$, если $x > 0$, то $y' > 0$. Следовательно, критическая точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции.

Пример 122. Найдем экстремумы функции $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Область определения функции — вся числовая ось. Находим производную

$$y' = \left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)' = \left((x-1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Точек, в которых производная равна нулю, нет. Производная функции не существует в точке $x = 1$. Если $x < 1$, то $y' < 0$, если $x > 1$, то $y' > 0$. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой минимума функции. Вычисляем соответствующее значение функции $y_{min}(1) = 0$.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

При решении прикладных задач важное значение имеют задачи на нахождение *наибольшего* и *наименьшего* значений (*глобального максимума* и *глобального минимума*) функции на каком-либо промежутке.

Порядок нахождения наибольшего и наименьшего значений на отрезке

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти критические точки функции, принадлежащие отрезку.

3. Вычислить значения функции в этих критических точках и на концах отрезка. Выбрать из них наибольшее $f_{наиб}$ и наименьшее $f_{наим}$.

Пример 123. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 6x^2 - 48x + 5$ на отрезке $[-3; 4]$.

Вычисляем производную $y' = 6x^2 + 12x - 48 = 6(x^2 + 2x - 4)$. Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет. Находим точки, в которых производная равна нулю, получаем $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Точка $x_1 = -4$ не принадлежит отрезку $[-3; 4]$. Вычисляем значения функции в точке $x_2 = 2$ и на концах отрезка: $y(-3) = 149$, $y(2) = -51$, $y(4) = 37$. Следовательно, $f_{наиб} = F(-3) = 149$, $f_{наим} = f(2) = -51$.

Замечание. На интервале $(a; b)$ функция достигает наибольшего или наименьшего значения только в точках локальных экстремумов.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на интервале $(a; b)$, если все точки ее графика расположены ниже любой касательной, проведенной к графику функции, и *вогнутой*, если точки ее графика расположены выше касательной.

Точка, в которой меняется направление выпуклости функции, называется точкой *перегиба.*

На рис. 34 точкой перегиба является точка $x = c$. На интервале $(a; c)$ функция выпуклая, на интервале $(c; b)$ — вогнутая.

Для дважды дифференцируемых функций выполняются следующие теоремы.

Теорема 11. Если вторая производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ *положительна* на интервале $(a; b)$, то функция является *вогнутой* на этом интервале. Если вторая производная $f''(x)$ функ-

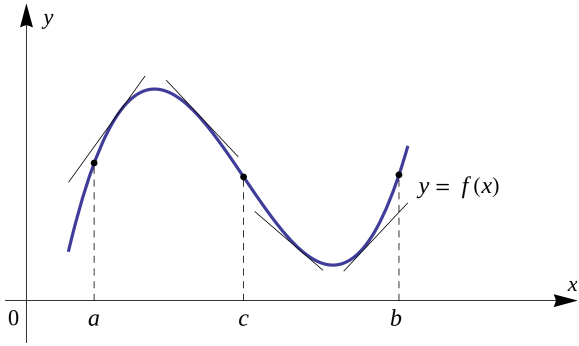


Рис. 34

ции $y = f(x)$ *отрицательна* на интервале $(a; b)$, то функция является *выпуклой* на этом интервале.

Теорема 12 (*необходимое условие существования перегиба*). Если точка x_0 является точкой перегиба данной функции, то вторая производная $f''(x)$ обращается в точке x_0 в нуль или не существует.

Теорема 13 (*достаточное условие существования перегиба*). Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ при переходе через некоторую точку $x_0 \in D(y)$ меняет свой знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба данной функции.

Порядок исследования на выпуклость (вогнутость) функции

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируемая.

1. Находим вторую производную $f''(x)$.

2. Находим точки, в которых вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует.

3. Найденные точки делят область определения второй производной на интервалы, в каждом из которых $f''(x)$ сохраняет свой знак. На интервалах, где $f''(x) < 0$, функция является выпуклой; на интервалах, где $f''(x) > 0$, — вогнутой;

4. Вычисляем значения функции в точках перегиба.

Пример 124. Функция $y = x^3$ выпукла на интервале $(\infty; 0)$ вследствие того, что $y'' = 6x < 0$ на этом интервале, и вогнута на интервале $(0; \infty)$, так как на этом интервале $y'' = 6x > 0$, следовательно, точка $(0; 0)$ является точкой перегиба.

Общая схема исследования функций и построение их графиков

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность или нечетность, периодичность.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти вертикальные асимптоты.
5. Исследовать поведение функции на бесконечности, найти горизонтальные и наклонные асимптоты.
6. Найти интервалы монотонности функции и экстремумы.
7. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
8. Построить график функции.
9. По графику функции определить область значений функции.

Пример 125. Исследовать функцию $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ и построить ее график.

1. Областью определения функции является вся числовая ось, т. е. $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Проверяем функцию на четность-нечетность

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 8(-x)^3 + 6(-x)^2 = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2,$$

$$f(-x) \neq f(x), \qquad f(-x) \neq -f(x),$$

значит, функция не является ни четной, ни нечетной. Функция непериодическая.

3. Находим точки пересечения с осью Ox, ее уравнение $y = 0$:

$$3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = 0, \qquad x^2(3x^2 - 8x + 6) = 0,$$

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 3x^2 - 8x + 6 = 0.$$

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, других точек пересечения нет.

Находим точки пересечения с осью Oy, ее уравнение $x = 0$; получаем ту же точку.

Таким образом, точка пересечения с осями координат $O(0;\, 0)$.

4. Функция определена на всей числовой оси, следовательно, точек разрыва нет, значит, нет и вертикальных асимптот.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (3x^4 - 8x^3 + 6x^2) = +\infty.$$

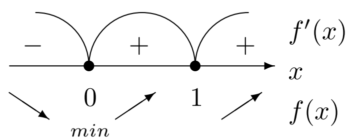
График функции горизонтальных асимптот не имеет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^4 - 8x^3 + 6x^2}{x} = \infty,$$

следовательно, наклонных асимптот у графика функции также нет.

6. Найдем интервалы монотонности функции и ее экстремумы. Вычислим $y' = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2$. Производная функции определена на всей числовой оси; $y' = 0$ в точках $x = 0$ и $x = 1$. Поскольку при $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x \in (0;\, 1)$ и при $x > 1$ $f'(x) > 0$, то $x = 0$ — точка минимума функции и $f_{min} = f(0) = 0$. В точке $x = 1$ производная функции знак не меняет, следовательно, эта точка не является точкой экстремума. На интервале $(-\infty;\, 0)$ функция убывает, на интервале $(0;\, +\infty)$ функция возрастает.

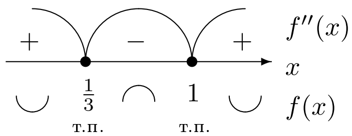


7. Найдем интервалы выпуклости функции и точки перегиба. Вычислим вторую производную функции:

$$y'' = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) =$$

$$= 36\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1).$$

Вторая производная функции $y'' = 0$ в точках $x = \dfrac{1}{3}$ и $x = 1$. Очевидно, что $y'' > 0$ на интервалах $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right)$ и $(1; +\infty)$, следовательно, на этих интервалах функция вогнута; $y'' < 0$ на интервале $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$, на этом интервале функция выпукла:



Точки $x = \dfrac{1}{3}$ и $x = 1$ являются точками перегиба. Значения функции в этих точках $y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{27}$ и $y(1) = 1$.

8. График функции приведен на рис. 35

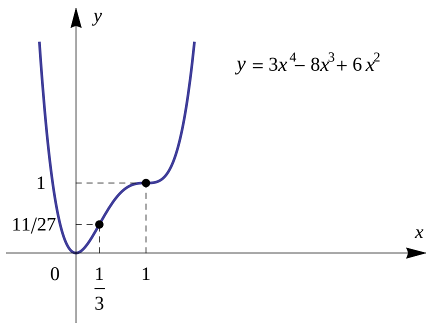


Рис. 35

9. Область значений функции: $y \in (0; +\infty)$.

П р и м е р 126. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$ и построить ее график.

1. Область определения функции: $D(y) : (\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Проверяем функцию на четность-нечетность:

$$y(-x)=\frac{(-x)^2}{2(-x-1)}=-\frac{x^2}{2(x+1)};\quad y(-x)\neq y(x),\quad y(-x)\neq -y(x).$$

Итак, функция ни четная, ни нечетная, непериодическая.

3. При подстановке значения $x=0$ получим $y(0)=\dfrac{0}{2(0-1)}=0$. Такую же точку получим, если приравняем функцию к нулю. Точка $O(0,0)$ — единственная точка пересечения с осями координат.

4. В данном случае имеем одну точку разрыва $x=1$. Вычислим пределы слева и справа от этой точки:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2(x-1)}=\infty;\qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2(x-1)}=+\infty.$$

Итак, $x=1$ — точка разрыва второго рода. Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой функции.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x-1)}=\pm\infty,$$

следовательно, горизонтальных асимптот график функции не имеет. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=kx+b$. Находим:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2(1-\frac{1}{x})}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{2(x-1)}=$$

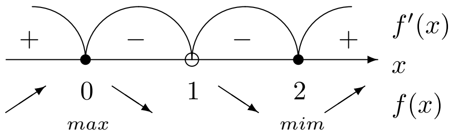
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

6. Для отыскания интервалов монотонности вычисляем первую производную функции

$$y'=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2}{2(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}.$$

Приравнивая ее к нулю, получим критические точки $x=0, x=2$ (точка $x=1$ не принадлежит области определения). Исследуем поведение производной слева и справа от найденных точек разбиения



Исследуемая функция возрастает при x, принадлежащих интервалам $(-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$, и убывает при x, принадлежащих интервалам $(0;\ 1) \cup (1;\ 2)$.

Точка $x = 0$ — точка локального максимума, $x = 2$ — локального минимума.

Найдем значения функции:

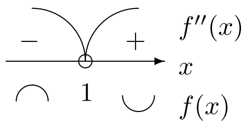
$$y_{max} = y(0) = 0,$$

$$y_{min} = y(2) = \frac{2^2}{2(2-1)} = 2.$$

7. Для отыскания интервалов выпуклости и вогнутости найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2x(x-2)(x-1)}{2(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная не определена при $x = 1$, как и сама функция, и ни при каких значениях x вторая производная не обращается в нуль. Следовательно, точек перегиба график данной функции не имеет. При $x < 1$ $f''(x) < 0$, при $x > 1$ $f''(x) > 0$, следовательно, на интервале $(-\infty;\ 1)$ график функции выпуклый, а на интервале $(1;\ +\infty)$ — вогнутый:



8. График функции приведен на рис. 36.

9. Область значений фукнции: $y \in (-\infty;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

П р и м е р 127. Исследовать функцию $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

1. Область определения функции $D(y) : (\infty;\ -1) \cup (-1;\ +\infty)$.

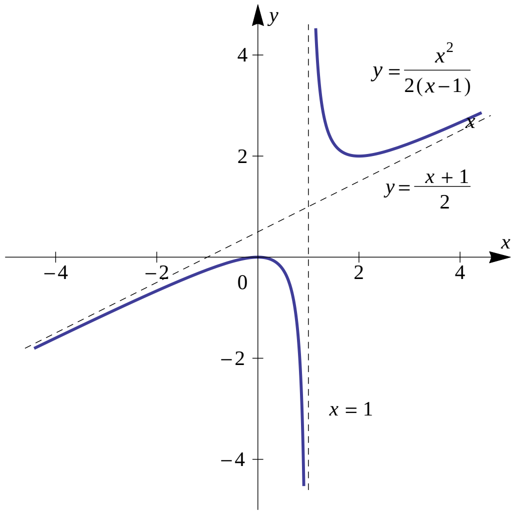


Рис. 36

2. Проверяем функцию не четность-нечетность:

$$y(-x) = \frac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2} = \frac{-(x+1)^3}{(-x+1)^2}; \quad y(-x) \neq y(x), \quad y(-x) \neq -y(x).$$

Итак, функция не является ни четной, ни нечетной. Функция непериодическая.

3. Находим точки пересечения с осями координат. При $x = 0$ получаем $y(0) = -1$. Приравняем функцию к нулю: $\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = 0$, получим $x = 1$.

Таким образом, график функции пересекает оси координат в точках $(0, -1)$ и $(1, 0)$.

4. Функция имеет разрыв в точке $x = -1$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1+0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

следовательно, прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой.

5. Исследуем поведение функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=\pm\infty.$$

График функции горизонтальных асимптот не имеет.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-1\cdot x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=-5,$$

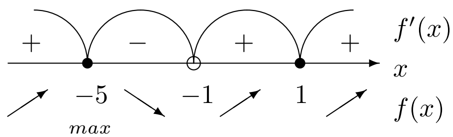
следовательно, прямая $y=x-5$ является наклонной асимптотой графика функции.

6. Найдем интервалы монотонности функции и ее экстремумы. Вычислим

$$y'=\frac{3(x-1)^2\cdot(x+1)^2-(x-1)^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x-1)^2(x+1)(3(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^4}=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}.$$

Производная функции не существует в точке $x=-1$, которая не является критической, так как не принадлежит области определения функции; $y'=0$ в точках $x=1$ и $x=-5$. Поскольку при $x\in(-5;\,-1)$ $f'(x)<0$, а при $x\in(-\infty;\,-5)\cup(-1;\,+\infty)$ $f'(x)>0$:



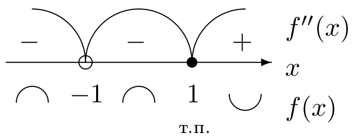
точка $x=-5$ — точка максимума функции и $f_{max}=f(-5)=-13{,}5$. В точке $x=1$ производная функции знак не меняет, следовательно, эта точка не является точкой экстремума. На интервале $(-5;\,-1)$ функция убывает, на интервалах $(-\infty;\,-5)\cup(-1;\,+\infty)$ функция возрастает.

7. Найдем интервалы выпуклости функции и точки перегиба. Вычислим

$$y'' = \frac{2(x-1)(x+5) + (x+1)^2)(x+1)^3 - 3(x-1)^2(x+5)(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= \frac{(x+1)^2(x-1)((x+1)(3x+9) - 3(x^2+4x-5))}{(x+1)^6} = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Вторая производная функции не существует в точке $x = -1$, которая не принадлежит области определения функции; $y'' = 0$ в точке $x = 1$. Очевидно, что $y'' < 0$ на интервалах $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1)$, следовательно, на этих интервалах график функции выпуклый; $y'' > 0$ на интервале $(1;\ +\infty)$, на этом интервале график функции вогнут.



Точка $x = 1$ является точкой перегиба. Значение функции в этой точке $y(1) = 0$.

8. График функции изображен на рис. 37.

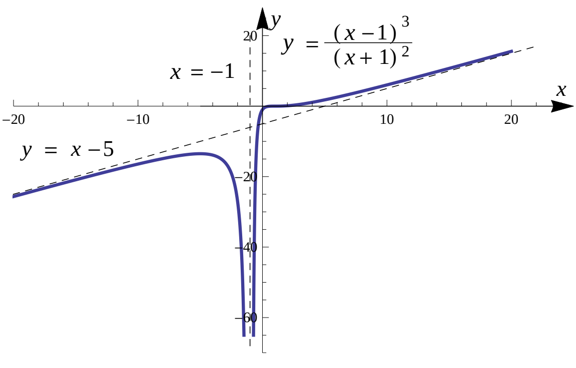


Рис. 37

9. Область значений функции $y \in (-\infty;\ +\infty)$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$, откуда следует $y(x+\Delta x) = y(x) + \Delta y$. Справедлива следующая приближенная формула:

$$dy \approx \Delta y.$$

Поэтому при достаточно малых Δx получаем формулу приближенного вычисления значения функции при помощи дифференциала:

$$y(x+\Delta x) \approx y(x) + dy.$$

Пример 128. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16{,}64}$.
Рассмотрим функцию $y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$. Необходимо вычислить значение функции $y = x^{\frac{1}{4}}$ в точке $x = 16{,}64$. Воспользуемся формулой приближенного вычисления значения функции. В качестве x возьмем число, наиболее близкое к 16,64, но такое, чтобы был известен $\sqrt[4]{x}$, при этом Δx должно быть достаточно малым. Очевидно, следует взять $x = 16$, $\Delta x = 0{,}64$. Находим $y(16) = \sqrt[4]{16} = 2$. Вычислим дифференциал функции. Используя формулу $dy = y'(x)\Delta x$ и $y'(x) = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, получаем $dy = \dfrac{\Delta x}{4\sqrt[4]{x^3}}$. Подставляя $x = 16$, получаем $dy(16) = \dfrac{0{,}64}{4\sqrt[4]{16^3}} = 0{,}02$. В соответствии с формулой $\sqrt[4]{16{,}65} \approx 2 + 0{,}02 = 2{,}02$.

Упражнения

Найти дифференциал функции:

351. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

352. $y = (e)^{x^2}$.

353. Дана функция $y = 2x^2 + 3x - 1$. Найти приращение Δy и дифференциал dy при заданных значениях $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$.

354. Дана функция $y = x^{-1}$. Найти приращение Δy и дифференциал dy при заданных значениях $x_0 = 0{,}5$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение выражения:

355. $\sqrt[6]{67{,}84}$.

356. $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Найти предел функции, используя правило Лопиталя:

357. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$

358. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$.

359. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$.

360. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

361. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

362. $y = 4x^3+3x^2-6x-5$.

363. $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

364. $y = xe^x$.

365. Дана функция $y = 3x^2 - 6x$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x \in [0;\ 3]$.

366. Дана функция $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x \in [-3;\ 2]$.

Для данных функций найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика:

367. $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$.

368. $y = e^{-x^2}$.

369. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Исследовать функции и построить их графики:

370. $y = \dfrac{x^4}{4} + x^3$.

371. $y = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$.

Задания для самостоятельной работы

Найти дифференциал функции:

372. $y = \sin^3 x$.

373. $y = \ln\cos x$.

374. Дана функция $y = x^2 + 4$. Найти приращение Δy и дифференциал dy при заданных значениях $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$.

375. Для функции $y = x^3 - x$ найти приращение Δy и дифференциал dy при заданных значениях $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение:

376. $\sqrt[5]{255{,}15}$.

377. $(1{,}98)^3$.

Найти предел функции, используя правило Лопиталя:

378. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5}{5^x}$.

379. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x^{-x}}{\ln(1+x)}$.

380. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$.

381. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$.

382. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

383. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

384. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$.

385. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

386. $y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$.

387. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

388. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

389. $y = 3\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2x$.

390. $y = x\ln^2 x$.

391. Для функции $y = x^2 - 4x + 3$ найти наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x \in [0;\ 3]$.

392. Дана функция $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10$. Найти ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $x \in [0;\ 3]$.

Для данных функций найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика:

393. $y = 2x^2 + \ln x$. **394.** $y = -x^3 + 6x^2$. **395.** $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

Исследовать функции и построить их графики:

396. $y = 2xe^{-x^2/2}$. **397.** $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

Дополнительные задачи к разделу

Найти производные заданных функций:

398. $y = 2x^6 - \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{12}{x} - 4\sqrt{x} + \pi^3$.

399. $y = x\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}}$.

400. $y = \left(3x^2 - 1\right)(3 - 4\operatorname{tg} x)$. **401.** $y = \dfrac{x^4}{\sin x}$.

402. $y = 7\ln\left(x^2 + 3\right)$. **403.** $y = -3\cos\left(x^2 - 1\right)$.

404. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} 3x \cdot \arcsin^4 x$. **405.** $y = \dfrac{\sin(5x)}{\operatorname{tg}^2 x}$.

406. $y = \dfrac{e^2 + 1}{\operatorname{arctg} 6x}$. **407.** $y = \dfrac{\sqrt{5x-7}}{\ln(3x+2)}$.

408. Дана функция $y = \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} - 3$. Найти значения производной $y'(1)$ и $y'(-1)$.

409. Для данной функции $y = \cos^2 x$ и аргумента $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$ вычислить $y'''(x_0)$.

410. Закон движения материальной точки $S = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$. Найти скорость точки в момент времени $t = 2$.

411. Дана функция $y = 3x^2 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x} + 7\sqrt{x^3} - \pi$. Найти тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке $x = 1$.

412. Функция $m(t) = 3t^2 + t + 2$ (t – в секундах, m – в граммах) описывает количество вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Найти скорость химической реакции в конце четвертой секунды.

413. Функция $g(t) = 1{,}5t^2 + 2t + 12$ (t – в днях, g – количество человек) описывает процесс распространения инфекционного заболевания. Сколько человек заболеет на третий день?

Используя правило Лопиталя, вычислить пределы:

414. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$.

415. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{e^{2x}-1}$.

416. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$.

417. Дана функция $y = \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2$. Найти:

а) промежутки монотонности функции;
б) экстремумы функции;
в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[0;\ 3]$;
г) интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;
д) точки перегиба графика функции.

418. С помощью дифференциала приближенно вычислить значение $\sqrt[3]{26{,}19}$.

5. Функции нескольких переменных

5.1. Основные понятия

Многим природным, экономическим и социальным явлениям присуща многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей привело к совершенствованию математического аппарата, в частности, к введению понятия функции нескольких переменных.

Пусть имеется n переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из некоторого множества $\mathbb{X}$ соответствует одно значение переменной величины z. Тогда говорят, что задана *функция нескольких переменных* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *независимыми переменными* или *аргументами*, z – зависимой переменной, а символ f означает *закон соответствия*. Множество $\mathbb{X}$ называется *областью определения функции*.

Пример 129. Найти область определения функции двух переменных $z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

Для данной функции область определения задается условием $1 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0$ или $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, т. е. представляет собой единичный круг с центром в начале координат.

В данной главе будем рассматривать в основном функции двух переменных, но практически все понятия и теоремы легко переносятся на случай большего числа переменных.

Функцию двух переменных будем обозначать $z = f(x, y)$. Тогда ее область определения $\mathbb{X}$ является подмножеством координатной плоскости Oxy.

Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z), аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y данным соотношением $z = f(x, y)$.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Для построения графика функции $z = f(x, y)$ полезно рассматривать функции одной переменной $z = f(x, y_0)$ и $z = f(x_0, y)$, представляющие сечения графика $z = f(x, y)$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz, т.е. плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$.

Пример 130. Построить график функции $z = x^2 + y^2$.

Сечения поверхности $z = x^2 + y^2$ плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oxz и Oyz, являются параболами. Например, при $y = h$ (плоскости, параллельные плоскости Oxz) получаем параболы $z = x^2 + h^2$. В сечении поверхности плоскостью $z = h$ (параллельной координатной плоскости Oxy) получаются окружности $x^2 + y^2 = h^2$. Графиком функции является поверхность, которая называется параболоидом (см. рис. 38).

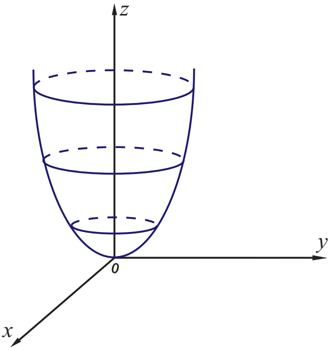


Рис. 38

Очевидно, что график функции двух переменных – более сложный объект, чем график функции одной переменной. Изображения функций трех и большего числа переменных не имеют геометрического смысла. В некоторых случаях можно получить наглядное геометрическое представление о характере изменения функции, рассматривая ее *линии уровня* (*поверхности уровня*).

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для которых данная функция сохраняет постоянное значение, т.е. уравнение линии уровня есть

$$f(x, y) = C, \quad \text{где} \quad C = const. \tag{22}$$

Если пересекать график функции $z = f(x, y)$ плоскостями $z = C$, придавая различные значения C, и проектировать линии пересечения на плоскость Oxy, можно получить систему линий уровня (рис. 39).

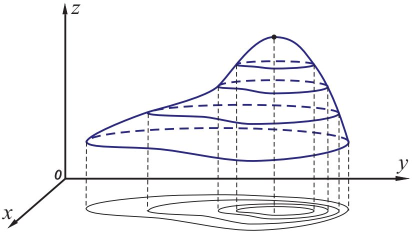


Рис. 39

П р и м е р 131. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Придавая z неотрицательные значения $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, ... (очевидно, что z не может быть отрицательным), получим уравнения линий уровня функции: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;\,0)$; $x^2 + y^2 = 1$ – окружность радиуса $R = 1$ с центром $O(0;\,0)$; $x^2+y^2 = 2$ – окружность радиуса $R = \sqrt{2}$ с центром $O(0;\,0)$ и т.д. (рис. 40).

Таким образом, линии уровня функции представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в точке $O(0;\,0)$.

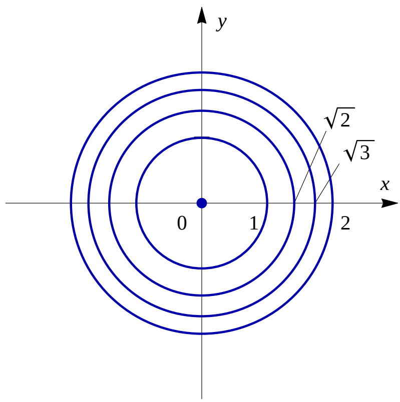


Рис. 40

Очевидно, что значение функции $z = x^2 + y^2$ растет вдоль каждого радиального направления. В пространстве $Oxyz$ геометрический образ функции представляет собой «яму» с круто растущими краями (см. рис. 38).

Поверхностью уровня функции $u = f(x,\,z,\,y)$ называется множество всех точек пространства $Oxyz$, для которых данная функция имеет одно и то же значение.

Линии и поверхности уровня постоянно встречаются в физических вопросах. Например, соединив на карте поверхности Земли точки с одинаковой средней суточной температурой или с одинаковым средним суточным давлением, получим *изотермы* и *изобары*, являющиеся важными исходными данными для прогноза погоды.

Частные производные функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x,\,y)$ в некоторой точке $(x,\,y)$. Перейдем от точки $(x,\,y)$ к новой точке $x + \Delta x,\,y$, т.е. дадим переменной x приращение Δx, оставляя переменную y неизменной. Разность

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x,\, y) - f(x, y)$$

называется *частным приращением функции* $z = f(x,\, y)$ *по переменной* x. Аналогично, если переменной y дать приращение Δy, оставляя переменную x неизменной, то разность

$$\Delta_y z = f(x,\, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется *частным приращением функции* $z = f(x,\, y)$ *по переменной* y. Если обе переменные x и y получили приращения Δx и Δy, то соответствующее приращение функции

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)$$

называется *полным приращением функции* $z = f(x,\, y)$, или просто *приращением функции.*

Аналогично определяются частные и полные приращения функции с числом переменных, большим двух.

Полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений.

Пример 132. Найти частные и полное приращения функции $z = x \cdot y$.

Частное приращение по переменной x равно

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - x \cdot y = \Delta x \cdot y;$$

частное приращение по переменной y равно

$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = x \cdot \Delta y.$$

Полное приращение равно

$$\Delta z = (x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - x \cdot y = \Delta x \cdot y + x \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Очевидно, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции $z = f(x,\, y)$ *по переменной* x называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ к приращению переменной Δx при $\Delta x \to 0$ и обозначается z'_x (или $f'_x(x,\, y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$), т.е.

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично, *частной производной функции* $z = f(x,\, y)$ *по переменной* y называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_y z$ к приращению переменной Δy при $\Delta y \to 0$ и обозначается z'_y (или $f'_y(x,\, y)$, или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$), т. е.

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)}{\Delta y}.$$

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что приращение переменной стремится к нулю.

Поскольку $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном значении переменной y, а $\Delta_y z$ – при неизменном значении переменной x, определения частных производных можно сформулировать так:
частной производной по x функции $z = f(x,\, y)$ называется обычная производная этой функции по x, вычисленная в предположении, что y – постоянная;
частной производной по y функции $z = f(x,\, y)$ называется обычная производная этой функции по y, вычисленная в предположении, что x – постоянная.

Следовательно, правила вычисления частных производных совпадают с правилами, рассмотренными для функций одной переменной.

Аналогично определяются и вычисляются частные производные функции с большим числом переменных.

Пример 133. Найти частные производные функции

$$z = x \ln y + \frac{y}{x}.$$

Частная производная по x (считаем y константой) равна

$$z'_x = (x)'_x \ln y + y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = \ln y - \frac{y}{x^2};$$

частная производная по y (считаем x константой) равна

$$z'_y = x(\ln y)'_y + \left(\frac{1}{x}\right)(y)'_y = \frac{x}{y} + \frac{1}{x}.$$

П р и м е р 134. Найти частные производные функции $z = x^y$.

При фиксированном y имеем степенную функцию от x, поэтому $z'_x = y \cdot x^{y-1}$. При фиксированном x функция является показательной относительно y и $z'_y = x^y \cdot \ln x$.

П р и м е р 135. Найти частные производные функции

$$u = x^6 - y^4 + 3z^5.$$

Поскольку функция u зависит от трех переменных, то и частных производных имеет три. При нахождении u'_x считаем постоянными переменными y и z, т.е. $u'_x = 6x^5$. Аналогично, считая константами x и z, получаем $u'_y = -4y^3$ и, считая константами x и y, получаем $u'_z = 15z^4$.

П р и м е р 136. Поток пассажиров z определяется функцией $z = \dfrac{x^2}{y}$, где x – число жителей, y – расстояние между городами. Найти частные производные и пояснить их смысл.

Производная $z'_x = \dfrac{2x}{y}$ показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей. Производная $z'_y = -\dfrac{x^2}{y^2}$ показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами.

Дифференциал функции двух переменных

Обобщая понятие дифференциала функции на случай двух независимых переменных, приходим к следующему определению.

Дифференциалом функции двух переменных называется сумма произведений частных производных этой функции на приращения соответствующих независимых переменных, т. е.

$$dz = z'_x \Delta x +'_y \Delta y.$$

Учитывая, что $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$, формулу дифференциала функции двух независимых переменных можно записать в виде

$$dz = z'_x dx + z'_y dy. \qquad (23)$$

Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y), если ее полное приращение может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

где dz – дифференциал функции, α и β – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Таким образом, дифференциал функции нескольких переменных, как и в случае одной переменной, является главной, линейной относительно приращений аргументов, частью полного приращения функции.

Для функции нескольких переменных существование частных производных является *необходимым*, но не достаточным условием дифференцируемости функции.

Достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных выражает следующая теорема.

Теорема 14. Если частные производные функции z'_x и z'_y существуют в окрестности точки (x, y) и непрерывны в самой точке (x, y), то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Производная по направлению. Градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ и пусть $\vec{l}$ – некоторый вектор с началом в точке M. Направление вектора $\vec{l}$ определяют направляющие косинусы (см. с. 51). Переместим точку $M(x, y)$ вдоль направления $\vec{l}$ в точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$, тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение

$$\Delta_l z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

которое называется *приращением функции в данном направлении* l (рис. 41).

Если $MM_1 = \Delta l$ есть величина перемещения точки M, то из прямоугольного треугольника MM_1N получаем $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta$, следовательно,

$$\Delta_l z = f(x + \Delta l \cdot \cos\alpha, y + \Delta l \cdot \cos\beta) - f(x, y).$$

Производной функции $z = f(x, y)$ *по направлению* $\bar{l}$ называется предел (если он существует) отношения приращения $\Delta_l z$ функции

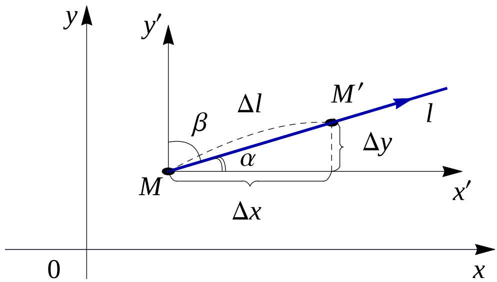


Рис. 41

$z = f(x, y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ к величине этого смещения Δl при условии, что $\Delta l \to 0$, т.е.

$$z'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l}.$$

Производная z'_l характеризует скорость изменения функции в направлении $\vec{l}$.

Если направление $\vec{l}$ совпадает с направлением оси Ox, то производная по направлению совпадает с частной производной по переменной x. Аналогично, производная по направлению оси Oy совпадает с частной производной по переменной y.

Нетрудно доказать, что

$$z'_l = z'_x \cdot \cos\alpha + z'_y \cdot \cos\beta.$$

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ производная по направлению $\vec{l}$ определяется аналогично. Соответствующая формула имеет вид

$$u'_l = u'_x \cdot \cos\alpha + u'_y \cdot \cos\beta + u'_z \cdot \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

Пример 137. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в направлении вектора $\vec{l}$, образующего угол $\alpha = 60°$ с положительным направлением оси Ox.

Найдем частные производные $z_x = 2x$, $z'_y = -2y$. Поскольку $\alpha = 60°$, угол $\beta = 90° - \alpha = 30°$, $\cos\alpha = 1/2$, $\cos\beta = \sqrt{3}/2$. Следовательно,

$$z_l = 2x \cdot \frac{1}{2} + (-2y) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \sqrt{3}y.$$

П р и м е р 138. Найти производную функции $z = 2x + 3e^{x-y}$ в направлении вектора $\vec{l} = \{3;\, 3\}$.

Градиентом функции $z = f(x,\, y)$ в точке $M(x,\, y)$ называется вектор с началом в точке M, имеющий своими координатами частные производные функции z, вычисленные в данной точке. Обозначается градиент ∇z или $\mathrm{grad} z$:

$$\mathrm{grad} z = z'_x \vec{i} + z'_y \vec{j} \qquad (\text{или } \ \mathrm{grad} z = \{z'_x;\, z'_y\}).$$

Градиент функции $\mathrm{grad} z$ – это *вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции* $z = f(x,\, y)$ в данной точке и имеющий модуль $|\mathrm{grad} z| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}$, равный *скорости наибольшего возрастания.*

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 15. Пусть задана дифференцируемая функция двух переменных $z = f(x,\, y)$, и в точке $M_0(x_0,\, y_0)$ величина градиента отлична от нуля. Тогда градиент функции в данной точке перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку.

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u = f(x,\, y,\, z)$:

$$\mathrm{grad} u = \{u'_x;\, u'_y;\, u'_z\}.$$

П р и м е р 139. Найти градиент функции $u = \dfrac{x}{y} + z^2$ в точке $M_0(2;\, 1;\, 0)$.

Находим частные производные функции

$$u'_x = \frac{1}{y}; \qquad u'_y = -\frac{x}{y^2}; \qquad u'_z = 2z.$$

Вычисляем значения частных производных в точке M_0:

$$u'_x(M_0) = \frac{1}{1} = 1; \quad u'_y(M_0) = -\frac{2}{1^2}; \quad u'_z = 2 \cdot 0 = 0.$$

Получаем $\mathrm{grad} u(M_0) = \{1;\, -2;\, 0\}$.

Частные производные высших порядков

Пусть имеется некоторая функция $z = f(x, y)$ от двух переменных x и y. Ее частные производные $z'_x = f'_x(x, y)$ и $z'_y = f'_y(x, y)$ также являются функциями двух переменных. Если они являются дифференцируемыми функциями, то их производные называются *частными производными второго порядка* (или просто *вторыми частными производными*) и обозначаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (z'_x)'_x = f''_{xx}(x, y);\\
z''_{xy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (z'_x)'_y = f''_{xy}(x, y);\\
z''_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(z'_y\right)'_y = f''_{yy}(x, y);\\
z''_{yx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(z'_y\right)'_x = f''_{yx}(x, y).
\end{aligned} \tag{24}$$

Производные z''_{xy} и x''_{yx} называются *смешанными производными*. Для смешанных производных выполняется следующая теорема.

Теорема 16. Если частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны в точке, то в этой точке производные z''_{xy} и x''_{yx} равны, т. е. результат дифференцирования не зависит от последовательности дифференцирования:

$$x''_{xy} = x''_{yx}.$$

Пример 140. Найти частные производные второго порядка функции $z = x \cdot \ln y + \dfrac{y}{x}$.

В примере 133 (с. 145) уже найдены первые частные производные $z'_x = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$ и $z'_y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$. Продолжая дифференцирование, находим

$$z''_{xx} = \frac{2y}{x^3}; \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2}; \qquad z''_{yy} = -\frac{x}{y^2}.$$

Пример 141. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^y$.

В примере 134 (с. 146) найдены первые производные $z'_x = y \cdot x^{y-1}$ и $z'_y = x^y \cdot \ln x$. Дифференцируя второй раз, находим

$$z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = yx^{y-2}\ln x; \quad z''_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

Аналогично определяются и записываются частные производные высших порядков от функций трех и большего числа переменных.

Теорема 17. Если для функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ какие-либо смешанные производные порядка $m \geqslant 2$ отличаются между собой только порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они в этой точке имеют одно и тоже значение.

Пример 142. Найти частные производные второго порядка функции $u = x^6 - y^4 + 3z^5$.

Первые частные производные найдены в примере 135 (с. 146). Частные производные второго порядка находятся аналогично:

$$u''_{xx} = 30x^4; \qquad u''_{yy} = -12y^2; \qquad u''_{zz} = 60z^3,$$

а все смешанные производные в данном случае равны нулю, т. е.

$$u''_{xy} = u''_{yx} = u''_{xz} = u''_{zx} = u''_{yz} = u_{zy} = 0.$$

Продолжая дифференцировать, можно определить частные производные третьего порядка (третьи частные производные) и т. д.

Пример 143. Для функции $z = 3x^2y^5 - 2\cos x + 7\ln y$ найти частные производные четвертого порядка.

Частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6x\,y^5 + 2\sin x, \qquad z'_y = 15x^2y^4 + \frac{7}{y}.$$

Частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y^5 + 2\cos x, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 60x^2y^3 - \frac{7}{y^2},$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 30x\,y^4.$$

Частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = -2\sin x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 30y^4, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 120x\,y^3,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 180x^2y^2 + \frac{14}{y^3}.$$

Частные производные четвертого порядка:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = -2\cos x, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = 120y^3,$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = 360x\,y^2, \quad \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 360x^2y - \frac{42}{y^4}.$$

5.2. Экстремум функции нескольких переменных

Безусловный экстремум

Точка $M_0(x_0,\, y_0)$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) *функции* $z = (x,\, y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $(x,\, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0,\, y_0) \geqslant f(x,\, y)$ $(f(x_0, y_0) \leqslant f(x,\, y)$.

Значение функции $z = f(x,\, y)$ в точке локального максимума (минимума) $f(x_0,\, y_0)$ называется *максимумом* (*минимумом*) *функции.*

Максимум или минимум функции $z = f(x,\, y)$ называется *экстремумом* этой функции.

Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.

Теорема 18 (*необходимое условие экстремума*). Пусть точка $M(x_0,\, y_0)$ является точкой экстремума дифференцируемой функции $z = f(x,\, y)$. Тогда частные производные функции $f'_x(x_0,\, y_0)$ и $f'_y(x_0,\, y_0)$ в этой точке равны нулю или хотя бы одна из частных производных не существует.

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума, называются *критическими.*

Для того чтобы сформулировать достаточное условие экстремума, составим матрицу из частных производных второго порядка

$$\Delta = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,\, y) & f''_{xy}(x,\, y) \\ f''_{yx}(x,\, y) & f''_{yy}(x,\, y) \end{pmatrix}$$

и вычислим ее главные миноры в точке $M_0(x_0,\, y_0)$:

$$M_1 = |f''_{xx}(x_0,\, y_0)| = f''_{xx}(x_0,\, y_0);$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x,\,y) & f''_{xy}(x,\,y) \\ f''_{xy}(x,\,y) & f''_{yy}(x,\,y) \end{vmatrix} =$$
$$= f''_{xx}(x,\,y)\cdot f''_{yy}(x,\,y) - f''_{xy}(x,\,y)\cdot f''_{xy}(x,\,y).$$

Теорема 19 (*достаточные условия экстремума*). Пусть функция $z = f(x,\,y)$ определена в некоторой окрестности критической точки $M_0(x_0,\,y_0)$, в которой $f'_x(x_0,\,y_0) = 0$ и $f'_y(x_0,\,y_0) = 0$. Если:

1) $M_2 > 0$, то точка $M_0(x_0,\,y_0)$ является точкой экстремума, причем, если

$M_1 > 0$, то точкой локального минимума;

$M_1 < 0$, то точкой локального максимума;

2) $M_2 < 0$, то в точке $M_0(x_0,\,y_0)$ функция не имеет локального экстремума;

3) $M_2 = 0$, то невозможно сделать вывод о наличии экстремума в данной точке, требуются дополнительные исследования.

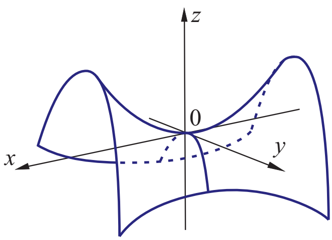


Рис. 42

Замечание. Если $M_2 < 0$, то точка $M_0(x_0,\,y_0)$ является так называемой *седловой* точкой функции $z = f(x,\,y)$, так как график функции в окрестности этой точки имеет вид «седла» (рис. 42). Такие седловые точки являются двумерными аналогами точек перегиба функций одной переменной.

Алгоритм нахождения экстремума функции нескольких переменных

1. Находим частные производные функции.

2. Приравниваем частные производные к нулю и решаем полученную систему уравнений, т.е. находим критические точки.

3. Для каждой критической точки проверяем выполнение достаточных условий существования экстремума и делаем соответствующие выводы.

Пример 144. Найти экстремумы функции

$$z = 2 \cdot \frac{x + y + x^2y + xy^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

Находим частные производные

$$\begin{aligned} z'_x =& \frac{2}{1+y^2} \cdot \frac{(1 + 2xy + y^2)(1 + x^2) - (x + y + x^2y + xy^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \\ =& \frac{2}{1+y^2} \cdot \frac{1 + y^2 - x^2 - x^2y^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 + y^2)(1 - x^2)}{(1 + y^2)(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$z'_y = \frac{2(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2}.$$

Критические точки находим из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = 0, \\ \dfrac{2(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2} = 0. \end{array} \right.$$

Получаем четыре решения: $A(1;\ 1)$, $B(1;\ -1)$, $C(-1;\ 1)$, $D(-1;\ -1)$.

Проверяем выполнение достаточного условия экстремума в каждой критической точке. Для этого находим частные производные второго порядка

$$z''_{xx} = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}, \quad z''_{yy} = \frac{4y(y^2 - 3)}{(1 + y^2)^3}, \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0$$

и составляем из них матрицу

$$\Delta = \begin{pmatrix} \dfrac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} & 0 \\ 0 & \dfrac{4y(y^2 - 3)}{(1 + y^2)^3} \end{pmatrix}.$$

1) В точке $A(1;\ 1)$ матрица имеет вид

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем главные миноры. $M_2 = (-1)^2 - 0 = 1 > 0$, следовательно, в точке A функция имеет экстремум и, поскольку $M_1 = -1 < 0$, то точка $A(1;\,1)$ – точка локального максимума функции. Вычисляем $z_{\max} = z(1;\,1) = 2$.

2) В точке $B(1;\,-1)$ матрица имеет вид

$$\Delta_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Главный минор $M_2 = (-1)\cdot 1 - 0 = -1 < 0$, следовательно, экстремума нет и точка $B(1;\,-1)$ – седловая.

3) В точке $C(-1;\,1)$ матрица имеет вид

$$\Delta_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Главный минор $M_2 = 1\cdot(-1) - 0 = -1 < 0$, следовательно, экстремума нет и точка $C(-1;\,1)$ также седловая.

4) В точке $D(-1;\,-1)$ матрица имеет вид

$$\Delta_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Главный минор $M_2 = 1^2 - 0 = 1 > 0$, следовательно, в точке D функция имеет экстремум, а так как главный минор $M_1 = 1 > 0$, то точка $D(-1;\,-1)$ – точка локального минимума функции. Вычисляем $z_{\min} = z(-1;\,-1) = -2$.

Условный экстремум

Рассмотрим функцию $z = f(x,\,y)$. Пусть аргументы x и y удовлетворяют условию $\varphi(x,\,y) = 0$. Это условие называется *уравнением связи*. Точка M_0 называется *точкой условного максимума* (*минимума*) *функции* $z = f(x,\,y)$, если существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек $(x,\,y)$ из этой окрестности, удовлетворяющих условию $\varphi(x,\,y) = 0$, выполняется неравенство $f(x_0,\,y_0) \geqslant f(x,\,y)$ $(f(x_0,\,y_0) \leqslant f(x,\,y))$.

Одним из методов нахождения условного экстремума является *метод исключения неизвестных*. Он заключается в том, что из уравнения связи одну из переменных выражают через другую, например, выражают y через x: $y = \psi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим

$$z = f(x,\,y) = f(x,\,\psi(x)),$$

т. е. функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z = f(x, y)$.

Пример 145. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

Выразим из уравнения $3x + 2y = 1$ переменную y через x, получим $y = 5{,}5 - 1{,}5x$. Подставив полученное выражение в функцию z, получим $z = 5{,}5x^2 - 33x + 60{,}5$. Эта функция имеет единственный минимум в точке $x_0 = 3$. Соответствующее значение функции $y_0 = 1$.

В рассмотренном примере уравнение связи $\varphi(x, y) = 0$ является линейным относительно переменных x и y, поэтому его легко разрешить относительно одной из них.

Если уравнение нелинейное, для нахождения условного экстремума обычно используют *метод множителей Лагранжа.* Вводится переменная λ, которая называется *множителем Лагранжа* и составляется функция трех переменных

$$L(x, y\,\lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

которая называется *функцией Лагранжа.*

Теорема 20. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, то существует такое значение λ_0, что точка (x_0, y_0, λ_0) является точкой безусловного экстремума функции $L(x, y, \lambda)$.

Таким образом, для нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ требуется найти точку безусловного экстремума функции $L(x, y, \lambda)$, что приводит нас к решению системы уравнений

$$\begin{cases} L'_x = f_x(x, y) + \lambda \cdot \varphi'_x(x, y) = 0, \\ L'_y = f_y(x, y) + \lambda \cdot \varphi'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Первые два уравнения системы можно переписать в виде

$$\mathrm{grad} f(x, y) = -\lambda \cdot \mathrm{grad}\varphi(x, y),$$

т.е. *геометрический смысл условий Лагранжа* заключается в том, что в точке условного экстремума $M_0(x_0, y_0)$ градиенты функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ коллинеарны.

Пример 146. Найти экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$, используя метод множителей Лагранжа.

Составляем функцию Лагранжа

$$L = x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot (3x + 2y - 11),$$

находим ее частные производные и приравниваем их к нулю. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3\lambda = 0, \\ 4y + 2\lambda = 0, \\ 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение: $x = 3$, $y = 1$, $\lambda = -2$, т. е. точкой условного экстремума является точка $(3;\ 1)$, как и было найдено в примере 145.

Упражнения

419. Дана функция $u = \dfrac{x^2 - 3y^2}{\sqrt{x - y}}$. Вычислить значение данной функции в точке $A(3;\ -1)$.

420. Найти область определения функций:

а) $z = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$; б) $z = \dfrac{3}{x^2 + y^2}$; в) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Найти частные производные первого порядка функции двух переменных $z = f(x,\ y)$:

421. $z = x^2y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5$.

422. $z = \dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{x}{y}$.

423. $z = \dfrac{2^y}{y} + x^2 \operatorname{tg} x + \ln(x^2 + y^2)$.

424. $z = (2 - x)^{y^2}$.

425. $z = y^3 \ln(2x + 3y)$.

426. Для функции $z = \dfrac{xy}{x - y}$ найти частные производные z'_x и z'_y в точке $A(2;\ 1)$.

Для функций $z = f(x,\ y)$ найти все частные производные второго порядка:

427. $z = 2x^2y^3 - x^3y^5 - xy + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3$.

428. $z = \sin(xy)$.

429. $z = e^{x^4 y^2}$

430. $z = \dfrac{y \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$.

431. $z = xy \ln \dfrac{x}{y}$.

432. Дана функция $z = x^2y^3 + 4x^3y^2 + 5x - 4y$. Найти все частные производные третьего порядка.

433. Найти производную функции $z = x - y$ в точке $M_0(0;\, 0)$ по направлению вектора $\vec{l} = \{2;\, 2\}$.

434. Найти производную функции $z = y^3 - x^2y + 2xy$ в точке $M_0(-1;\, 3)$ по направлению вектора $\vec{l} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$.

435. Найти производную функции $z = x + 3y$ в точке $M_0(2;\, -1)$ по направлению вектора $\vec{l}$, образующего с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = 30°$.

436. Найти градиент функции $z = f(x,\, y)$ в точке M_0, сделать рисунок.

а) $z = xy + y^2 + x,\ M_0(2;\, 1)$; б) $z = y^3 - x^2y + 2xy,\ M_0(0;\, 1)$.

437. Найти длину вектора–градиента функции $z = 2xy^2 + x$ в точке $M_0(-2;\, 1)$.

438. Для функции $z = x^2 + 3xy + 2x^2 - 4x + 3y$ найти наибольшую скорость возрастания в точке $M(1;\, -2)$.

Исследовать на экстремум функции $z = f(x;\, y)$:

439. $z = y^2 + 2xy - 4x - 2y - 3$.

440. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 1$.

441. Найти экстремум функции $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ при условии $x + y = 1$.

442. Найти условный экстремум функции $z = x^2 - 3xy + 12x$, если $2x + 3y = 6$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_o)$:

443. $z = xy + \dfrac{y}{x}$, $M_0(\dfrac{1}{2}; 2)$.

444. $z = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$, $M_0(-2; -1)$.

445. $z = \dfrac{e^x + 2}{1 + \sin y}$, $M_0(\ln 4; \dfrac{\pi}{4})$.

Найти область определения функции $z = f(x, y)$ и построить ее на плоскости xOy:

446. $z = \sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}$.

447. $z = \dfrac{x^2 + 4xy - 3}{x + y - 5}$.

448. $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{9 - y^2}$.

449. $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

450. $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$.

451. $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2}$.

Для функции $z = f(x, y)$ найти частные производные первого порядка:

452. $z = \dfrac{x^5}{y} + 7e^{2x}\cos y - 3x^2y^4 + 2x - 5y + 1$.

453. $z = \dfrac{y}{\sin y} + \sqrt{x}\ln x + \cos(2x + 2y)$.

454. $z = \sqrt{1 + y^3 - 3x^2}$.

455. $z = \sin(3x^4y^5)$.

456. $z = (1 + x^2)^y$.

Для функции $z = f(x, y)$ найти все частные производные второго порядка:

457. $z = x^4 + 4x^2y^3 - 7xy + 1.$ **458.** $z = \ln(3x^3 - 4y^3).$

459. $z = \cos(x^2y^3).$

460. Найти частную производную z''_{xy} функции $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

461. Для функции $z = x^4 + 3x^2y^2 - 2y^4$ найти все частные производные третьего порядка.

462. Найти частные производные третьего порядка z'''_{xxy} и z'''_{xyy} функции $z = 2x^5 - 4x^3y^2 - \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x}$.

463. Найти производную функции $z = \ln x - \operatorname{arctg} y$ по направлению вектора $\vec{l}$, образующего с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = 60^\circ$ в точке $M_0(2;\,1)$.

464. Найти производную функции $z = 2x^2 - 3y^2$ в точке $M_0(2;\,1)$ по направлению вектора $\vec{l}$, образующего с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha = 45^\circ$.

465. Найти производную функции $z = f(x,\,y)$ в точке $M_0(1;\,1)$ по направлению вектора $\vec{l}$:

а) $z = 2x + y,\ \vec{l} = \{3;\,4\}$; б) $z = 2x^2 + y,\ \vec{l} = \{1;\,\sqrt{3}\}$;

в) $z = 2x + 3e^{x-y},\ \vec{l} = \vec{i} + \vec{j}$.

466. Найти градиент функции $z = f(x,\,y)$ в точке $M_0(2;\,3)$:

а) $z = 2x + 3y$; б) $z = 2xy^2$; в) $z = x^2 - y$.

467. Найти длину вектора–градиента функции $z = f(x,\,y)$ в точке $M_0(2;\,1)$:

а) $z = 5x + 12y - 1$; б) $z = x^2 + y^2 + 2$.

Исследовать функции $z = f(x;\,y)$ на безусловный экстремум:

468. $z = 3x^2 + xy + 2y^2 - x - 4y.$

469. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$

470. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 6.$

471. $z = \dfrac{xy}{2} + (47 - x - y)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}\right).$

472. Исследовать на экстремум функцию $z = 8 - (x+2)^2 - (y-4)^2$ при условии $x + 3y = 0$.

473. Найти условный экстремум функции $z = xy$, если $2x+3y = 5$.

Дополнительные задачи к разделу

474. Для функции трех переменных $f(x,\, y,\, z) = \ln \dfrac{x+y}{2y-z}$ найти значение в точке $A(6;\, 2;\, -4)$.

475. Найти область определения функции $z = \dfrac{5}{\sqrt{y - x^2 + 6x}}$ и изобразить полученную область изменения переменных x и y на плоскости.

476. Для функции $z = \operatorname{arcctg}(x - y^3)$ найти частные производные первого порядка.

477. Для функции $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$ найти все частные производные второго порядка.

478. Дана функция $z = -2y^3 + 3x^2y^2 - x^3$. Найти частную производную функции $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$ в точке $M_0(1;\, 0)$.

479. Найти производную функции $z = x^2 + xy + y^2 + 2x + 2y$ по направлению вектора $\vec{l} = \{3;\, 4\}$.

480. Найти производную функции $z = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x$ по направлению вектора $\vec{l}$, образующего с осями координат одинаковые тупые углы.

481. Найти градиент и наибольшую скорость возрастания функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(-3;\, 1)$.

482. Исследовать функцию $z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2$ на экстремум.

483. Найти экстремумы функции $z = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}xy^2 - 3x^2 + y^2$.

484. Найти экстремум функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ при условии $2x - 3y = 12$.

6. Основы интегрального исчисления

6.1. Неопределенный интеграл

Рассмотрим задачу нахождения функции по ее производной. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором интервале, если на этом интервале выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 147. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой оси, так как для любого x выполняется равенство $(x^3)' = 3x^2$. Вместе с функцией $F(x) = x^3$ первообразной для функции $f(x) = 3x^3$ является и любая функция $\Phi(x) = x^3 + C$, где C — произвольная постоянная.

1. Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то всякая функция $F(x)+C$, где C — произвольное постоянное число, также является первообразной для $f(x)$.

2. Две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянную величину.

Из данных утверждений следует, что, зная одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, можно получить все ее первообразные, прибавляя к $F(x)$ всевозможные постоянные.

Множество функций $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, представляет собой *семейство первообразных* данной функции, графики которых являются параллельными линиями (рис. 43).

Семейство всех первообразных $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$. Здесь знак $\int$ называется *знаком интеграла*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, сама функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а x называется *переменной интегрирования*.

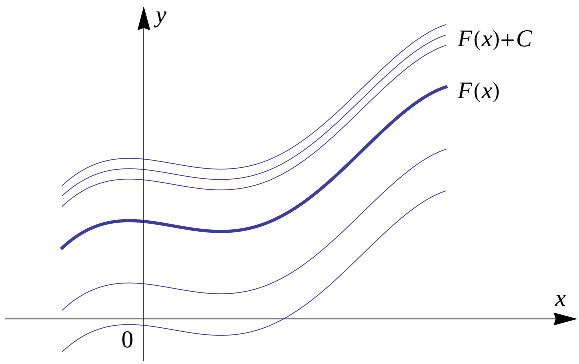


Рис. 43

Таким образом,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$, C — произвольная постоянная.

Операция нахождения первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Дифференцирование и интегрирование — это две взаимно обратные операции.

Достаточным условием интегрируемости функции на некотором интервале является непрерывность этой функции на данном интервале.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Частный случай:

$$\int dx = x + C.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx.$$

5. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx.$$

Таблица интегралов

1. $\displaystyle\int x^n\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, & n \neq -1, \\[2ex] \displaystyle\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, & n = -1. \end{cases}$

2. $\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

3. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C.$

4. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

5. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Методы интегрирования

Метод разложения (непосредственное интегрирование)

Метод разложения заключается в приведении подынтегрального выражения к табличной форме путем алгебраических преобразований и применения свойств неопределенного интеграла (вынос за скобку постоянного множителя и/или представление подынтегральной функции в виде суммы функций — разложения подынтегральной функции на слагаемые).

Пример 148.

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 1)\, dx = 5 \int x^4\, dx - 3 \int x^2\, dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C.$$

Пример 149.

$$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^2}\, dx = \int \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x} + 2 \int x^{-2}\, dx =$$

$$= x - \ln|x| - \frac{2}{x} + C.$$

П р и м е р 150.

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C.$$

П р и м е р 151.

$$\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx\,-\,\frac{1}{2}\int\cos x\,dx=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C.$$

П р и м е р 152.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\,\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\,\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C.$$

Замена переменной интегрирования

Сделаем подстановку $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $f(x)=f\left[\varphi(t)\right]$, $dx=\varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)\,dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Эта формула называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Вместо подстановки $x=\varphi(t)$ иногда удобно применять подстановку $t=\psi(x)$.

Если интеграл $\int f(x)\,dx$ является табличным

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

то интеграл $\int f(ax+b)dx$ может быть найден с помощью подстановки $t=ax+b$, т.к. $dt=d(ax+b)=a\,dx$, следовательно, $dx=\dfrac{1}{a}dt$ и

$$\int f(ax+b)dx=\int f(t)\cdot\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int f(t)dt=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Пример 153. Вычислим интеграл $\int \sqrt{x+3}\,dx$. Делаем подстановку $t = x+3$ и находим $dt = d(x+3) = (x+3)'dx = dx$. Отсюда

$$\int \sqrt{x+3}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{1/2}dt = \frac{3}{2}t^{3/2} + C = \frac{3}{2}(x+3)^{3/2} + C.$$

Пример 154. Вычислим интеграл $\int \cos(3x-5)dx$. Делаем подстановку $t = 3x-5$ и находим $dt = d(3x+5) = (3x+5)'dx = 3\,dx$, откуда $dx = \dfrac{1}{3}dt$. Данный интеграл запишется в виде

$$\int \cos(3x-5)dx = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x-5) + C.$$

Пример 155. Вычислим интеграл $\int e^{x/4}dx$. Делаем подстановку $t = \dfrac{1}{4}x$ и находим $dt = d\left(\dfrac{1}{4}x\right) = \dfrac{1}{4}dx$, откуда $dx = 4dt$. Данный интеграл запишется в виде

$$\int e^{x/4}dx = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{x/4} + C.$$

Для интегралов вида $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ и $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ в квадратном трехчлене выделяют полный квадрат и осуществляют линейную замену переменной.

Пример 156. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-3x-20}$. В квадратном трехчлене выделяем полный квадрат

$$9x^2-3x-20=9\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{20}{9}\right)=9\left(x^2-2\cdot\frac{1}{6}x+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}-\frac{20}{9}\right)=$$

$$=9\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{81}{36}\right)=9\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{9}{4}\right),$$

а затем осуществляем замену этого выражения на новую переменную $t = x - \dfrac{1}{6}$, $dt = dx$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{9x^2-3x-20} = \int \frac{dx}{9\left((x-1/6)^2-9/4\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(x-1/6)^2-9/4} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{27}\ln\left|\frac{3x-5}{3x+4}\right| + C.$$

Пример 157. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-12x-4x^2}}$.

Учитывая, что

$$16-12x-4x^2 = -4\left(x^2+3x-4\right) = 4\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-4\right) =$$

$$= -4\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right) = 4\left(\frac{25}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\right),$$

делаем замену $t = x+\frac{3}{2}$. Эта замена переменной позволяет свести искомый интеграл к табличному

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-12x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(25/4-(x+3/2)^2\right)}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{25/4-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(5/2)^2-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{t}{5/2} + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+3}{5} + C.$$

Если подынтегральная функция является произведением двух множителей, один из которых зависит от некоторой функции $\psi(x)$, а другой является производной этой функции (с точностью до постоянного множителя), то нужно применять подстановку $\psi(x) = t$.

Пример 158. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. Делаем подстановку $t = x^2+1$ и находим $dt = d\left(x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)'dx = 2x\,dx$. Данный интеграл запишется в виде

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Пример 159. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \operatorname{tg} dx$. Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, таким образом,

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Заменяем $t = \cos x$ и находим $dt = (\cos x)'dx = -\sin x\,dx$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Пример 160. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$. Делаем замену $t = \ln x$ и находим $dt = d(\ln x) = (\ln x)'dx = \dfrac{1}{x}dx$. Интеграл примет вид

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\ln^4 x}{4} + C.$$

Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — две непрерывно дифференцируемые функции. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\displaystyle\int u\,dv$ сводится к отысканию другого интеграла $\displaystyle\int v\,du$.

При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv — та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден достаточно просто.

Применение метода интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда интеграл в правой части окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл, или подобен ему.

Так, например, для интегралов вида

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,dx, \int P(x)a^{\beta x}dx, \int P(x)\sin\alpha x\,dx, \int P(x)\cos\alpha x\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, за u следует взять многочлен $P(x)$, а за dv — соответственно выражения $e^{\alpha x}$, $a^{\beta x}$, $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$.
А для интегралов вида

$$\int P(x)\ln\alpha x\,dx, \int P(x)\log_a\beta x\,dx, \int P(x)\arcsin\alpha x\,dx,$$

$$\int P(x)\arccos\alpha x\,dx, \int P(x)\operatorname{arctg}\alpha x\,dx, \int P(x)\operatorname{arcctg}\alpha x\,dx$$

за u принимают соответственно функции $\ln\alpha x$, $\log_a\beta x$, $\arcsin\alpha x$, $\arccos\alpha x$, $\operatorname{arctg}\alpha x$, $\operatorname{arcctg}\alpha x$, а за dv — выражение $P(x)\,dx$.

Пример 161. Найдем интеграл $\int x\cos x\,dx$. Введем обозначения $u = x$, $dv = \cos x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = \sin x$ и

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 162. Найдем интеграл $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Обозначим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$ и

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 163. Найдем интеграл $\int x^2e^x\,dx$. Обозначим $u = x^2$, $dv = e^x\,dx$. Тогда $du = 2x\,dx$, $v = e^x$ и

$$\int xe^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx.$$

В полученном в правой части интеграле снова введем обозначения $u = 2x$, $dv = e^x\,dx$, тогда $du = 2\,dx$, $v = e^x$ и

$$x^2e^x - \int 2xe^x\,dx = x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x\,dx\right) =$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Пример 164. Найдем интеграл $\int x^3\ln x\,dx$. Здесь $u = \ln x$, $dv = x^3\,dx$. Тогда $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^4}{4}$ и

$$\int x^3\ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Простейшей рациональной функцией является многочлен степени n, т. е. функция вида

$$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} + b_n, \tag{25}$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — действительные числа, причем $b_0 \neq 0$. Многочлен $Q_n(x)$, у которого коэффициент $b_0 = 1$, называется *приведенным*.

Действительное число a называется *корнем* многочлена $Q_n(x)$, если $Q_n(a) = 0$.

Каждый приведенный многочлен $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами единственным образом разлагается на линейные и квадратичные множители:

$$\begin{aligned} Q_n(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_{m_k})^{m_k} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{n_2} \ldots, \end{aligned} \tag{26}$$

где p_i, q_i — действительные коэффициенты, причем $p_i^2 - 4q_i < 0$, т.е. трехчлен $x^2 + p_ix + q_i$ не имеет действительных корней и, следовательно, неразложим на действительные линейные множители, а $m_1 + m_2 + \ldots + m_k + n_1 + n_2 + \ldots = n$.

Корень a_i многочлена называется *простым*, если $m_i = 1$, и *кратным*, если $m_i > 1$; число m_i называется кратностью корня a_i.

Дробно-рациональной функцией $f(x)$ называется отношение двух многочленов

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

причем предполагается, что многочлены $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ не имеют общих множителей.

Рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, т. е. $m < n$. Если же $m \geqslant n$, то рациональная дробь называется *неправильной* и в этом случае, разделив числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_n(x)},$$

где $R_{m-n}(x)$, $\tilde{P}(x)$ — некоторые многочлены, а $\dfrac{\tilde{P}(x)}{Q_n x}$ является правильной рациональной дробью.

Пример 165. Рациональная дробь $\dfrac{x^5+1}{x^2+1}$ является неправильной дробью. Разделив $P_5(x) = x^5+1$ на $Q_2(x) = x^2+1$ «столбиком», будем иметь

$$
\begin{array}{r|l}
-\; x^5 + 1 \qquad & x^2+1 \\ \cline{2-2}
x^5 + x^3 \qquad & x^3 - x \\ \cline{1-1}
-\; -x^3 + 1 & \\
x^3 - x & \\ \cline{1-1}
x + 1 &
\end{array}
$$

Следовательно,

$$\frac{x^5+1}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

причем $R_3(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ есть правильная дробь.

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные рациональные дроби следующего вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$,

II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$,

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

Правильная рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$ с действительными коэффициентами, знаменатель которой $Q_n(x)$ имеет вид (26), разлагается единственным способом на сумму простейших дробей по правилу

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} +$$
$$+ \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{B_{m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} + \dots +$$
$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \tag{27}$$
$$+ \frac{C_{n_1}x+D_{n1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2} +$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots \frac{M_{n_2}x+N_{n2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}} + \dots$$

В этом разложении A_1, A_2, …, A_{m_1}, B_1, B_2, …, B_{m2}, C_1, D_1, C_2, D_2, …, C_{n1}, D_{n1}, M_1, N_1, M_2, N_2, …, M_{n2}, N_{n2}, … – некоторые действительные постоянные, часть которых может быть равна нулю.

Для нахождения этих постоянных нужно правую часть равенства (27) привести к общему знаменателю, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях левой и правой частей полученного тождества и решить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных постоянных называется *методом неопределенных коэффициентов.* Можно определить коэффициенты и другим способом, придавая в полученном тождестве переменной x произвольные числовые значения. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

Рассмотрим интегралы от простейших дробей. Для первых двух типов имеем

$$\text{I.} \quad \int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

Эти формулы легко получить, сделав замену переменной $t = x - a$.

Для того чтобы найти интеграл от простейшей дроби III типа, выделим в числителе дроби производную знаменателя. Для этого числитель представим в виде

$$Ax + B = (2x+p) \cdot \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B.$$

Тогда

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В первом интеграле числитель является производной знаменателя, поэтому

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln(x^2+px+q)+C,$$

так как $x^2+px+q>0$ для любого значения x. Для вычисления второго интеграла выделяем в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Делаем замену переменной $t = x+\dfrac{p}{2}$, получаем $x^2+px+q = t^2+a^2$, где $a = \dfrac{\sqrt{4p-p^2}}{2}$. Отсюда следует

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Пример 166. Вычислим интеграл $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Производная знаменателя $(x^2-4x+8)' = 2x-4$, выделяя в знаменателе полный квадрат, получаем

$$(x^2-4x+8) = (x^2-4x+4)+4 = (x-2)^2+2^2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)-1+6}{x^2-4x+8}dx =$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-4x+8} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + 5\int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} =$$
$$= \frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C.$$

Рассмотрим теперь, как интегрируются простейшие дроби IV типа. Для того чтобы найти $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, где $p^2/4-q<0$, выделим в числителе производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, и разобьем интеграл на сумму двух интегралов (как в предыдущем случае):

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} +$$
$$+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}.$$

Первый интеграл в правой части равенства находится с помощью подстановки $x^2+px+q=t$, а во втором в знаменателе выделяют полный квадрат и берут его по частям, сделав линейную замену $t = x + \frac{p}{2}$.

Для интегрирования дробно-рациональных функций необходимо:

1) представить дробно-рациональную функцию в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби;

2) разложить знаменатель правильной рациональной дроби на линейные и квадратичные множители по формуле (26) и представить дробь в виде суммы простейших дробей по формуле (27);

3) вычислить неопределенные коэффициенты;

4) проинтегрировать полученный многочлен и простейшие дроби.

П р и м е р 167. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^5+4x^4-7x^3-21x^2+26x+5}{x^3+x^2-6x}dx.$$

Дробь является неправильной, поэтому сначала выделяем из нее целую часть:

$$\frac{x^5+4x^4-7x^3-21x^2+26x+5}{x^3+x^2-6x}=x^2+3x-4+\frac{x^2+2x+5}{x^3+x^2-6x}.$$

Затем раскладываем знаменатель правильной дроби на множители:

$$x^3+x^2-6x=x\left(x^2+x-6\right)=x(x-2)(x+3).$$

Так как каждый из множителей x, $x-2$, $x+3$ входит в знаменатель в первой степени, то данная правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{x^2+2x+5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{x^2+2x+5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)}.$$

Приравниваем числители, сгруппировав члены с одинаковыми степенями x:

$$x^2+2x+5=x^2(A+B+C)+x(A+3B-2C)+(-6A).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ A+3B-2C=2, \\ -6A=5, \end{cases}$$

решив которую, найдем $A=-5/6$, $B=13/10$, $C=8/15$. Таким образом, разложение дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x+5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{-5/6}{x}+\frac{13/10}{x-2}+\frac{8/15}{x+3}.$$

Неизвестные A, B и C в разложении можно было определить другим способом. Приравняв числители, можно придать переменной столько частных значений, сколько содержится в системе неизвестных, в данном случае — три частных значения.

Особенно удобно придавать x значения, являющиеся действительными корнями знаменателя. В нашем примере действительными корнями знаменателя являются числа 0, 2 и -3. Подставляем эти значения в обе части равенства

$$x^2 + 2x + 5 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2).$$

При $x = 0$ получаем $5 = A \cdot (-2) \cdot 3$, откуда следует $A = -5/6$; при $x = 2$ получим $2^2 + 2 \cdot 2 + 5 = B \cdot 2 \cdot (2+3)$, откуда находим $B = 13/10$; при $x = -3$ имеем $-3^2 + 2 \cdot (-3) + 5 = C \cdot (-3) \cdot (-3-2)$, откуда получаем $C = 3/15$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 21x^2 + 26x + 5}{x^3 + x^2 - 6x} dx =$$

$$= \int \left(x^2 + 3x - 4 + \frac{x^2 + 2x + 5}{x^3 + x^2 - 6x} \right) dx = \int (x^2 + 3x - 4) dx -$$

$$- \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{13}{10} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{8}{15} \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x - \frac{5}{6} \ln|x| + \frac{13}{10} \ln|x-2| + \frac{8}{15} \ln|x+3| + C.$$

П р и м е р 168. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx.$$

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, и многочлен в знаменателе разложен на множители. Множителю $(x-1)^3$ соответствует сумма трех простейших дробей

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3},$$

а множителю $(x+3)$ — простейшая дробь $\dfrac{D}{x+3}$. Следовательно,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+3},$$

откуда получаем

$$x^2+1=A(x-1)^2(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x+3)+D(x-1)^3.$$

Действительными корнями знаменателя являются числа 1 и -3. Полагая $x=1$, получим $2=4C$, т.е. $C=1/2$. При $x=-3$ получаем $10=-64D$, т.е. $D=-5/32$.

Сгруппируем коэффициенты по степеням x и сравним их:

$$\begin{aligned}x^2+1=x^3(A+D)+x^2(A+B-3D)+\\+x(-5A+2B+C+3D)+(3A-3B+3C-D).\end{aligned}$$

В левой части равенства нет члена с x^3, значит, коэффициент при x^3 равен 0, $A+D=0$, следовательно, $A=-D=5/32$. Для определения B приравняем коэффициенты при x^2. Получаем $1=A+B-3D$, откуда находим, что $B=3/8$. Следовательно,

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\frac{5/32}{x-1}+\frac{3/8}{(x-1)^2}\frac{1/2}{(x-1)^3}-\frac{5/32}{x+3},$$

и интеграл

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{(x-1^3)(x+3)}dx=\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\\+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3}-\frac{5}{32}\int\frac{dx}{x+3}=\\=\frac{5}{32}\ln|x-1|+\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{5}{32}\ln|x+3|+C.\end{aligned}$$

Пример 169. Вычислить интеграл

$$\int\frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$$

Подынтегральная рациональная дробь является правильной. Знаменатель содержит квадратичный множитель, который неразложим на линейные множители, так как $\dfrac{p^2}{4}-q=\dfrac{1^2}{4}-1=-\dfrac{3}{4}<0$. Следовательно, разложение рациональной дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Приводим выражение к общему знаменателю, приравниваем числители

$$2x^2 + x + 3 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 2) =$$
$$= x^2(A + B) + x(A + 2B + C) + (A + 2C).$$

Действительным корнем знаменателя является число (-2). При $x = -2$ получаем $9 = 3A$, откуда находим $A = 3$. Сравнивая коэффициенты при x^2 и x^0, получаем $2 = A+B$, откуда $B = 2-A = -1$; $3 = A + 2C$, откуда $C = (3 - A)/2 = 0$. Следовательно,

$$\frac{2x^2 + x + 3}{(x + 2)(x^2 + x + 1)} = \frac{3}{x + 2} - \frac{x}{x^2 + x + 1}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x + 2)(x^2 + x + 1)}dx = 3\int \frac{dx}{x + 2} - \int \frac{x\,dx}{x^2 + x + 1} =$$
$$= 3\ln|x + 2| + \int \frac{1/2(2x + 1) - 1/2}{x^2 + x + 1}dx =$$
$$= 3\ln|x + 2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x + 1/2)^2 + 3/4} =$$
$$= 3\ln|x + 2| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интегрирование некоторых видов иррациональных функций

1. Интегралы вида $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ и $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$.

Для вычисления первого интеграла в квадратном трехчлене выделяют полный квадрат и осуществляют линейную замену переменной (см. пример 156 на с. 167).

П р и м е р 170. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.

Учитывая, что $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1$, замена $t = x + 2$ позволяет свести искомый интеграл к табличному:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 + 1}\right| + C =$$
$$= \ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| + C.$$

При вычислении второго интеграла поступают так же, как при интегрировании простейшей дроби III типа. Сначала в числителе выделяют производную от квадратного трехчлена, затем разбивают интеграл на сумму двух интегралов. В первом интеграле делают замену $t = ax^2 + bx + c$, во втором выделяют полный квадрат и осуществляют линейную замену.

Пример 171. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$.

Производная квадратного трехчлена $(8 + 4x + x^2)' = 4 - 8x$. Выделяя в квадратном трехчлене полный квадрат, получаем

$$8+4x+x^2 = -(4x^2-4x-8) = -\big((2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 8\big) = \\ = -\big((2x-1)^2-9\big) = 9-(2x-1)^2.$$

Осуществляем замену $t_1 = 8+4x-4x^2$, $dt_1 = 4-8x$ и $t_2 = 2x-1$, откуда получаем $x = (t_2+1)/2$, $dx = dt_2/2$. В результате

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}} = \int \frac{-1/8(4-8x)+1/2}{\sqrt{8+4x-4x^2}}dx = \\ = -\frac{1}{8}\int \frac{4-8x}{8+4x-4x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x-1)^2}} = \\ = -\frac{1}{8}\int \frac{dt_1}{\sqrt{t_1}} + \frac{1}{4}\int \frac{dt_2}{\sqrt{9-t_2^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{t_1} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{t_2}{3} + C = \\ = -\frac{1}{4}\sqrt{8+4x-4x^2} + \frac{1}{4}\arcsin\frac{2x-1}{3} + C.$$

Рассмотрим иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций. Такое преобразование называется *рационализацией.*

Обозначим рациональную функцию буквой R.

2. Интегралы вида $\displaystyle\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{p}{q}}\right)dx$.

Рационализация осуществляется при помощи подстановки $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\dfrac{m}{n}$, …, $\dfrac{p}{q}$.

Пример 172. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Поскольку $\sqrt{x} - x^{1/2}$, а $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, то $k = 6$. Осуществляем подстановку $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{t^5\,dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + C\right) =$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right) + C.$$

3. Интегралы вида $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$ можно рационализировать подстановкой $ax + b = t^n$, а интегралы более общего вида $\displaystyle\int R\left(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}\right) x^{m-1} dx$ – подстановкой $ax^m + b = t^n$.

Пример 173. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

Заменим $x^4 + 1 = t^3$, тогда $4x^3\,dx = 3t^2\,dt$ и $x^3\,dx = \dfrac{3}{4}t^2\,dt$. Получаем

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}} = \frac{3}{4}\int \frac{t^2\,dt}{1+t} =$$

$$= \frac{3}{4}\int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4+1} + \frac{3}{4}\ln\left|\sqrt[3]{x^4+1}\right| + C.$$

Упражнения

Вычислить неопределенные интегралы:

485. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x} - 2x + 5}{x^2}\,dx.$

486. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x} + 5x - 3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

487. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$

488. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^2}\,dx.$

489. $\displaystyle\int \frac{x^2-5}{x^2+2}\,dx.$

490. $\displaystyle\int \frac{dx}{7x^2-3}.$

491. $\displaystyle\int \frac{6dx}{\sqrt{9x^2-2}}$.

Вычислить неопределенные интегралы, используя метод замены переменной:

492. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+6x^2}$.

493. $\displaystyle\int \frac{15dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

494. $\displaystyle\int \cos 3x\, dx$.

495. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2(2-7x)}$.

496. $\displaystyle\int \frac{dx}{5x+2}$.

497. $\displaystyle\int (3-2x)^4\, dx$.

498. $\displaystyle\int \sqrt[4]{(11-5x)^3}\, dx$.

499. $\displaystyle\int e^{7-2x}\, dx$.

500. $\displaystyle\int 2^{9x-1}\, dx$.

501. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$.

502. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$.

503. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-12x-9x^2}}$.

504. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

505. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2+7}\cdot x\, dx$.

506. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{3x^4-2}$.

507. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}(5x+1)\, dx$.

508. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3-\cos x}\, dx$.

509. $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^4}$.

510. $\displaystyle\int \sqrt{\sin^3(3x+2)}\cdot\cos(3x+2)\, dx$.

511. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+5)\ln^3(2x+5)}$.

512. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x}} dx$.

513. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}}$.

514. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$.

Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

515. $\int \ln(3-2x)\,dx.$ **516.** $\int (5x-2)\sin 3x\,dx.$

517. $\int (3x-2)\,e^{-7x}\,dx.$ **518.** $\int \operatorname{arctg} 8x\,dx.$

519. $\int \arcsin 3x\,dx.$ **520.** $\int (2x-3)\cos 2x\,dx.$

Вычислить неопределенные интегралы от рациональных дробей:

521. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx.$ **522.** $\int \frac{3x+13}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx.$

523. $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2-7}{(x^2+x-2)(x+3)}dx.$ **524.** $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}dx.$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить неопределенные интегралы:

525. $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^2}-\frac{7}{x^3}+5\right)dx.$ **526.** $\int \frac{\sqrt[7]{x^6}-2x^2+3}{x}\,dx.$

527. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$ **528.** $\int \frac{x^2+1}{x^4-1}\,dx.$

529. $\int \frac{2dx}{\sqrt{4x^2-3}}.$ **530.** $\int \frac{dx}{3x^2-2}.$

Вычислить неопределенные интегралы, используя метод замены переменной:

531. $\int \frac{dx}{5x^2+4}.$ **532.** $\int \frac{5dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

533. $\int e^{4-7x}\,dx.$ **534.** $\int \frac{3^x\,dx}{1+9^x}.$

535. $\int \sin \frac{2x}{3}\, dx.$

536. $\int \frac{dx}{\sin^2(1-2x)}.$

537. $\int \frac{dx}{6x+1}.$

538. $\int \sqrt{(2-x)^3}\, dx.$

539. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2+x)^3}}.$

540. $\int \frac{dx}{(3x-2)^5}.$

541. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$

542. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}.$

543. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}.$

544. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-6x-9x^2}}.$

545. $\int \operatorname{tg} \frac{x}{4}\, dx.$

546. $\int \frac{\cos x}{5+\sin x}\, dx.$

547. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+4)}dx}{3x+4}.$

548. $\int e^{7x^2} \cdot x\, dx.$

549. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\, dx.$

550. $\int \frac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x}}\, dx.$

551. $\int \sin^3(3-2x)\cos(3-2x)\ dx.$

552. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{5-4x}}.$

553. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x+1}+1}.$

554. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx.$

555. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx.$

Вычислить неопределенные интегралы, используя метод интегрирования по частям:

556. $\int \ln x\, dx.$

557. $\int xe^{2x}\, dx.$

558. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$

559. $\int x^2 \cos x\, dx.$

560. $\int x\ln(x-1)\,dx.$

561. $\int \arcsin x\,dx.$

562. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx.$

563. $\int \left(x^2+1\right)\ln x\,dx.$

564. $\int (2+3x)\,e^{\frac{x}{3}}\,dx.$

565. $\int x^2e^{3x}\,dx.$

566. $\int x\sin 2x\,dx.$

567. $\int \left(x^2+2x+3\right)\cos x\,dx.$

Вычислить неопределенные интегралы от рациональных дробей:

568. $\int \dfrac{12}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx.$

569. $\int \dfrac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx.$

570. $\int \dfrac{2x^2+2x+20}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx.$

571. $\int \dfrac{2x^4-7x^3+7x^2-8x}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx.$

572. $\int \dfrac{dx}{x^5-x^2}.$

6.2. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла

Рассмотрим задачу о нахождении площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь фигуры $aABb$ (рис. 44), ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a;\, b]$ функции $y=f(x)$ и отрезками прямых $y=0$, $x=a$, $x=b$. Эта фигура называется *криволинейной трапецией.*

Разобьем рассматриваемый отрезок $[a;\, b]$ произвольным образом точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ на n частичных отрезков и обозначим их длины $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=\overline{1,n}$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1};\, x_k]$, $k=\overline{1,n}$ выберем произвольную точку ξ_k. Произведение $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ равно площади прямоугольника, имеющего основание Δx_k и высоту $f(\xi_k)$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ приближенно равна площади криволинейной трапеции $aABb$. Эта сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.

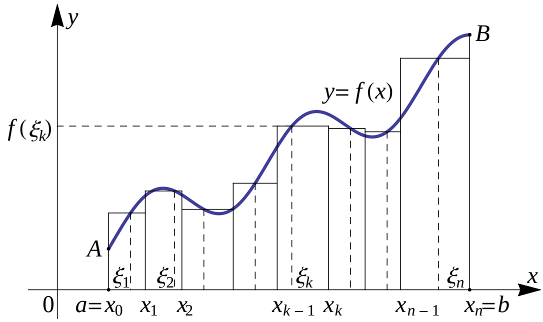


Рис. 44

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы при n, стремящемся к бесконечности, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;\, b]$ и выбора точек ξ_k, то этот предел называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k,$$

где $f(x)$ — *подынтегральная функция*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение*, числа a и b – *пределы интегрирования* (a — нижний предел, b — верхний предел).

Теорема 21. Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 22. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ и $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется *формулой Ньютона – Лейбница.* Она дает правило вычисления определенного интеграла.

Пример 174. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Свойства определенного интеграла

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a; b]$ функцию $f(x)$.

1. Определенный интеграл от функции с равными верхним и нижним пределами интегрирования равен нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int\limits_a^b k\,f(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

3. Определенный интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

Данное свойство распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

4. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

5. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

где $a \leqslant c \leqslant b$.

Пример 175. Вычислить $\int\limits_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5)dx$.

$$\int\limits_1^2 (3x^4 + 2x^2 - 5)dx = 3\int\limits_1^2 x^4dx + 2\int\limits_1^2 x^2dx - 5\int\limits_1^2 dx =$$

$$= \frac{3}{5}\,x^5\,\Big|_1^2 + \frac{2}{3}\,x^3\,\Big|_1^2 - 5x\,\Big|_1^2 = \frac{3}{5}\left(2^5 - 1\right) + \frac{2}{3}\left(2^3 - 1\right) - 5\,(2 - 1) = \frac{274}{15}.$$

Замена переменной под знаком определенного интеграла

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, функция $x = \varphi(t)$ имеет на отрезке $[\alpha; \beta]$ непрерывную производную. Пусть $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тогда формула замены переменной в определенном интеграле выглядит так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Пример 176. Вычислим интеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

Воспользуемся подстановкой $t = \ln x$, тогда $dt = \frac{1}{x}\,dx$, причем при $x = 1$, $t = 0$, а при $x = e$, $t = 1$:

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$, тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Пример 177. Вычислим интеграл $\int\limits_0^\pi x\cos x\,dx$.

Обозначим $u = x$, $dv = \cos x\,dx$, получим

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = (x\sin x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = \pi\cdot\sin\pi - 0\cdot\sin 0 - (-\cos x)\Big|_0^\pi =$$

$$= \cos\pi - \cos 0 = -2.$$

Приложения определенного интеграла

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является некоторым числом. Смысл этого числа зависит от геометрического, физического и прочего смысла функции $f(x)$.

Если переменная x является временем, а функция $y = f(x)$ — скоростью движения некоторого тела, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен длине пути, пройденного за время $x = b - a$.

Если функция $y = f(x)$ — производительность труда, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен объему продукции, выпущенной за промежуток времени $x = b - a$.

Если x — перемещение, а функция $y - f(x)$ — сила, действующая на перемещаемое тело, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен работе силы на пройденном пути.

Если $y = f(x)$ рассматривается как график некоторой функции, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции.

Пример 178. Найти путь, пройденный материальной точкой за четвертую секунду, если скорость ее прямолинейного движения $v = 3t^2 - 2t - 3$ м/с.

$$S = \int\limits_3^4 (3t^2 - 2t - 3)\,dt = (t^3 - t^2 - 3t)\Big|_3^4 = 27\,(\text{м}).$$

Пример 179. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 4$.

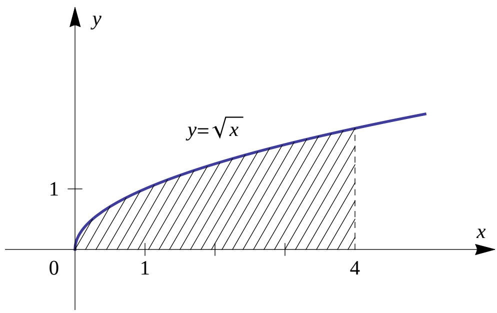


Рис. 45

$$S = \int\limits_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}\,(\text{кв. ед.}).$$

Решение задач на вычисление площадей плоских фигур упрощает следующая теорема.

Теорема 23. Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_1(x) \geqslant f_2(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключенной между графиками данных функций

$y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx.$$

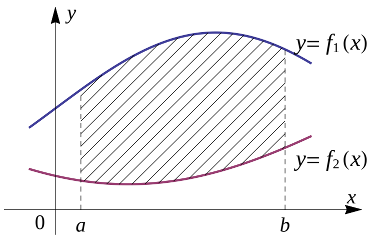
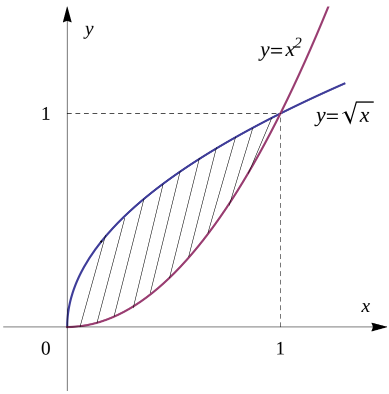


Рис. 46

П р и м е р 180. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ (рис. 47).



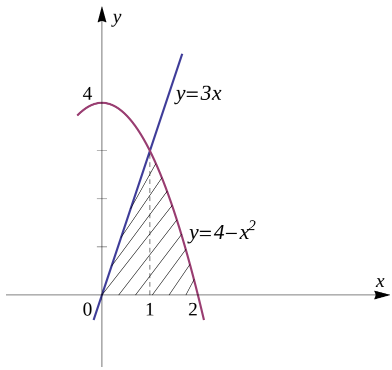


Рис. 47

Рис. 48

Найдем точки пересечения графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$. Их координаты (0; 0) и (1; 1). Следовательно,

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)\, dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\ (\text{кв.ед.}).$$

П р и м е р 181. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3x$, $y = 4 - x^2$ и осью Ox, находящейся в первой четверти координатной плоскости (рис. 48).

Графики функций $y = 3x$ и $y = 4 - x^2$ пересекаются в точке $(1; 3)$, линия $y = 3x$ пересекает ось Ox в точке $(0, 0)$, линия $y = 4 - x^2$ пересекает ось Ox в точке $(2, 0)$. Площадь криволинейной трапеции равна

$$S = \int_0^1 3x\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx = \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1 + \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = \frac{19}{6}\ (\text{кв.ед.}).$$

Упражнения

573. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}.$

574. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx.$

575. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2x^2 + 3\sqrt{x} - 1}{2x}\,dx.$

576. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}.$

577. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2}.$

578. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}.$

579. $\displaystyle\int_0^3 e^{\frac{x}{3}}\,dx.$

580. $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$

581. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx.$

582. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x + 1}.$

583. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx.$

584. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cdot \cos x\,dx.$

585. $\int\limits_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx.$

586. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}.$

587. $\int\limits_0^1 x\,e^{-x}\,dx.$

588. $\int\limits_0^{\pi/2} (1+5x)\sin x\,dx.$

589. $\int\limits_1^2 x^2\ln x\,dx.$

590. $\int\limits_{-1}^1 x\operatorname{arctg} x\,dx.$

591. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2+2$ и прямыми $x=-1$, $x=2$ и $y=0$.

592. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2-6x+5$ и осью Ox.

593. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y^2 = 9x$ и $y = 3x$.

594. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2-2x$ и $y = 4-x^2$.

595. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2$, $y = x-2$ и осью Ox.

Задания для самостоятельной работы

596. $\int\limits_1^3 x^3\,dx.$

597. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

598. $\int\limits_3^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+9}.$

599. $\int\limits_0^2 \left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)^2\,dx.$

600. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx.$

601. $\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}\,dx.$

602. $\int\limits_0^3 \sqrt{25-3x}\,dx.$

603. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2-2x+5}.$

604. $\int\limits_1^6 x\sqrt{x+3}\,dx.$

605. $\int\limits_1^2 x^2\ln x\,dx.$

606. $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx.$

607. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)\,dx.$

608. $\int\limits_0^1 x\,e^{-x}\,dx.$

609. $\int\limits_0^{1/2} \arccos x\,dx.$

610. $\int\limits_{-1}^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$

611. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=4-x^2$ и осью Ox.

612. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2-3x$ и $y=x$.

613. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-2x^2$ и $y=1-3x^2$.

614. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=2x^3$ и $y=4-2x$.

6.3. Несобственный интеграл

Определенный интеграл — это интеграл от непрерывной функции, заданной на конечном отрезке. Непрерывная функция ограничена на отрезке. Но ряд задач (в частности, задачи теории случайных величин) приводит к расширению понятия определенного интеграла на случаи бесконечных промежутков и разрывных функций. Такие интегралы называются несобственными. Различаются *несобственные интегралы первого рода* (с бесконечными пределами интегрирования) и *несобственные интегралы второго рода* (от неограниченных подынтегральных функций).

Несобственные интегралы I рода

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на произвольном отрезке $[a; b]$. Следовательно, она интегрируема на этом отрезке, т.е. существует $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для любого $b \geqslant a$.

Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом интегрирования от функции $y = f(x)$ на интервале $[a; +\infty)$ определяется равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*; если предел не существует или равен бесконечности — *расходящимся*.

Пример 182. Найти $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^x}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{e^b} - \frac{1}{e^0}\right) = 1.$$

Геометрический смысл. Величина $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, осью Oy и графиком функции $y = e^{-x}$.

По мере удаления верхнего предела интегрирования от начала координат ($b \to +\infty$) площадь криволинейной трапеции возрастает,

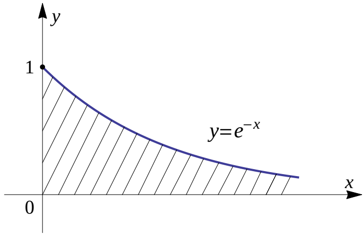


Рис. 49

но не безгранично: она стремится к единице, т.е. площадь *конечна*.

П р и м е р 183. Найти $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln|x| \Big|_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Интеграл расходится.

Аналогично несобственному интегралу с бесконечным верхним пределом интегрирования определяется *несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования*:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

и *с двумя бесконечными пределами интегрирования*:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

Замечание. Интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования сходится, если сходится каждый интеграл в правой части равенства.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx$, называемый интегралом *Эйлера – Пуассона*. Доказано, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}$, т.е. площадь под кривой $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (получившей название *кривой Гаусса*) на интервале равна единице (рис. 50).

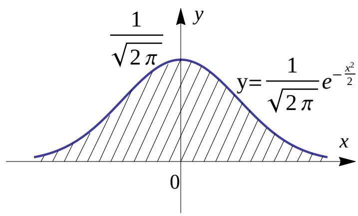


Рис. 50

Несобственные интегралы II рода

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \leqslant b$ и имеет точку разрыва при $x = a$. Тогда несобственный интеграл определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

и называется *несобственным интегралом II рода.*

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся.*

П р и м е р 184. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx.$

Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[a;\, b]$ не существует при $x = 0$, поэтому

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^1 = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{1} - \sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

Это означает, что полубесконечная фигура, ограниченная осями координат, кривой и прямой, имеет конечную площадь, равную 2 ед.^{2} (см. рис. 51).

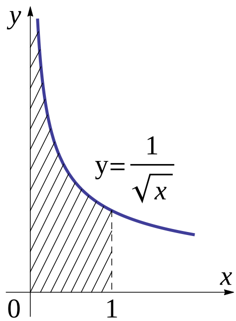


Рис. 51

Аналогично определяется несобственный интеграл, имеющий точку разрыва $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx.$$

П р и м е р 185. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$ не отпределена при $x = 4$, следовательно,

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx = \lim_{\delta\to 0} \int_0^{4-\delta} \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dx = \lim_{\delta\to 0} \arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^{4-\delta} =$$

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\arcsin\frac{4-\delta}{4}-\arcsin 0\right)=\lim_{\delta\to 0}\arcsin\left(1-\frac{\delta}{4}\right)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Если подынтегральная функция имеет разрыв в точке c, содержащейся внутри интервала $(a;\, b)$, то эта точка c разбивает отрезок интегрирования на два отрезка, и несобственный интеграл определяется так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Замечание. Несобственный интеграл II рода сходится, если сходится каждый интеграл в правой части равенства.

Упражнения

Исследовать на сходимость несобственный интеграл первого рода:

615. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx.$

616. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx.$

617. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx.$

618. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^4}.$

619. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}.$

620. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

Исследовать на сходимость несобственный интеграл второго рода:

621. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

622. $\displaystyle\int\limits_{3/4} 1\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$

623. $\displaystyle\int\limits_{-1}^0\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

624. $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{dx}{x\ln^4 x}.$

Задания для самостоятельной работы

Исследовать на сходимость несобственный интеграл первого рода:

625. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

626. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} e^{5x}\,dx$.

627. $\displaystyle\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

628. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+7}$.

629. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{16x^2-1}}$.

630. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x\,e^{-2x}\,dx$.

631. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^5}\,dx$.

632. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

633. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

634. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$.

635. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

636. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x^2\,e^{-x}\,dx$.

Исследовать на сходимость несобственный интеграл второго рода:

637. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$

638. $\displaystyle\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

Дополнительные задачи к разделу

Вычислить неопределенный интеграл:

639. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

640. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\ln^4 x}\,dx}{x}$.

641. $\displaystyle\int e^{6x+9}\,dx$.

642. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$.

643. $\displaystyle\int \frac{4x^3-2\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\,dx$.

644. $\displaystyle\int \frac{5dx}{1-6x^2}$.

645. $\displaystyle\int 6\cos(4x+7)\,dx$.

646. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{\sqrt{9-8x}}$.

647. $\displaystyle\int \sqrt{\cos^3 x}\,\sin x\,dx$.

648. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

649. $\displaystyle\int \ln(x+2)\,dx$.

Вычислить определенные интегралы:

650. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{4} \left(8+2x-x^2\right)dx$.

651. $\displaystyle\int\limits_{1}^{4} \frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}\,dx$.

652. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$.

653. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+16}}$.

654. $\displaystyle\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x+1}$.

655. $\displaystyle\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

656. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}dx$.

657. $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} (3-2x)\sin 3x\,dx$.

658. $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} x\ln x\,dx$.

Вычислить площади фигур, ограниченные данными графиками функций:

659. $y=-x^2+1$ и $y=0$.

660. $y=\sqrt{x}$ и $y=x$.

661. $y=3x-x^2$ и $y=-x$.

662. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

663. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \dfrac{2}{x}$ и прямыми $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Основные понятия

При изучении природных и общественных явлений не всегда удается непосредственно найти законы, которым подчиняются величины, характеризующие эти явления, но можно установить зависимость между этими величинами и их производными или дифференциалами.

Зависимость, связывающая независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные (или дифференциалы) различных порядков, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком данного уравнения.*

Рассмотрим несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Пример 186. Закон распада некоторых радиоактивных веществ состоит в том, что скорость распада пропорциональна количеству этого вещества. Если $x(t)$ – количество неразложившегося вещества в момент времени t, то этот закон можно записать так:

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

где $\dfrac{dx}{dt}$ – скорость распада, k – некоторая положительная постоянная, характеризующая данное вещество. Поскольку в уравнение радиоактивного распада входит производная первого порядка, оно является уравнением первого порядка.

Знак «минус» в правой части указывает на то, что x убывает со временем; знак «плюс», подразумеваемый всегда, когда знак явно не указан, означал бы, что x возрастает со временем.

Пример 187. Уравнение движения точки массы m под влиянием силы F (второй закон Ньютона) описывает уравнение второго порядка:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t,\, x,\, \frac{dt}{dx}\right).$$

Произведение массы на ускорение равно силе, которая зависит от времени, положения точки и ее скорости.

Пример 188. Уравнение распространения эпидемий

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n + m - x),$$

где $x(t)$ – число незараженных индивидов в момент времени t, n и m – число зараженных и незараженных людей в начальный момент времени соответственно, β – коэффициент пропорциональности (зависит от вида инфекции).

Пример 189. Модель Мальтуса – одна из первых моделей, описывающих скорость изменения численности популяций:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N, \quad N(0) = N_0 > 0,$$

где $\dfrac{dN}{dt}$ – скорость изменения численности популяции $\lambda > 0$ – мальтузианский коэффициент линейного роста $N(t)$ – численность популяции в момент времени t.

Пример 190. Модель Лотки – Вольтерры. Данная модель описывает популяцию, состоящую из двух взаимодействующих видов. Первый из них, называемый *хищниками*, при отсутствии второго вымирает по закону $x' = -a_1x, \quad (a > 0)$, а второй – *жертвы* – при отсутствии хищников неограниченно размножается в соответствии с законом Мальтуса $y' = a_2y$. Взаимодействие двух этих видов моделируется так. Жертвы вымирают со скоростью, равной числу встреч хищников и жертв, которое в данной модели предполагается пропорциональным численности обеих популяций, т. е. равной b_2xy $(b_2 > 0)$. Поэтому $y' = a_2y - b_2xy$. Хищники же размножаются со скоростью, пропорциональной числу съеденных жертв: $x' = -a_1x + b_1xy \quad (b_1 > 0)$.

Система уравнений

$$\begin{cases} x' = -a_1x + b_1xy, \\ y' = a_2y - b_2xy, \end{cases}$$

описывающая такую популяцию *хищник – жертва*, называется системой (или моделью) Лотки — Вольтерры (рис. 52).

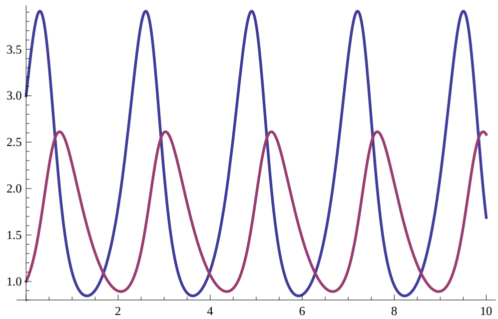


Рис. 52

7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$F(x,\, y(x),\, y'(x)) = 0$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением *первого порядка*. Его также можно представить в виде разрешенного относительно производной:

$$y' = f(x,\, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x,\, y).$$

Решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется решение $y = \varphi(x,\, C)$, содержащее одну произвольную постоянную C.

Всякое решение, получающееся из общего решения при конкретных значениях произвольной постоянной, называется *частным решением.*

Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши.*

Если переменные x и y рассматривать как декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости Oxy, то решение уравнения $y = \varphi(x,\, C)$ является семейством интегральных кривых.

Согласно геометрическому смыслу производной в точке x_0, значение $y'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику решения в этой точке, т. е. дифференциальное уравнение устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Простейшим дифференциальным уравнением первого порядка является уравнение вида

$$y' = f(x).$$

Чтобы его решить, нужно представить производную y' как отношение дифференциалов dy/dx, домножить обе части уравнения на dx и проинтегрировать обе части получившегося уравнения:

$$y = \int f(x)\, dx + C.$$

Как видно, это уравнение имеет бесконечное количество решений, отличающихся друг от друга на постоянную C.

Возможность выделить из общего решения частное дает начальное условие: при $x = x_0$, $y = y_0$, т.е. из всех интегральных кривых мы выбираем ту, которая проходит через точку с координатами $(x_0;\, y_0)$.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x,\, y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функцию $f(x,\, y)$ можно представить в виде произведений функций, зависящих только от одной переменной x или y, т. е. уравнение можно привести к виду

$$f_1(x)\, dx = f_2(y)\, dy,$$

которое называется *уравнением с разделенными переменными.*

Чтобы найти решение этого уравнения, интегрируем обе его части:

$$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + C.$$

Пример 191. Решить уравнение $x\,dx + y\,dy = 0$.

Приведем уравнение к уравнению с разделенными переменными, перенеся слагаемое, содержащее dx в правую часть:

$$y\,dy = -x\,dx.$$

Интегрируя обе части этого уравнения

$$\int y\,dy = -\int x\,dx,$$

получаем

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Графиком общего решения (интегральными кривыми) является семейство окружностей с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = 2C = C_1^2.$$

Пример 192. Решить уравнение $xy' = y^2 + 1$.

Представим производную y' как отношение дифференциалов $\dfrac{dy}{dx}$

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 + 1.$$

Умножим обе части уравнения на dx

$$x\,dy = (y^2 + 1)\,dx.$$

Приведем полученное уравнение к уравнению с разделенными переменными, разделив обе части уравнения на $x(y^2 + 1)$:

$$\frac{dy}{(y^2 + 1)} = \frac{dx}{x},$$

а затем проинтегрируем его:

$$\int \frac{dy}{(y^2 + 1)} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\operatorname{arctg} y = \ln x + C,$$

$$y = tg(\ln x + C).$$

П р и м е р 193. Решить задачу Коши (найти частное решение) $(1 + y^2)dx - xy\,dy = 0$, $y(2) = 1$.

Разделяя переменные

$$(1 + y^2)dx = xy\,dy,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{y}{1 + y^2}dy$$

и интегрируя обе части уравнения

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y}{1 + y^2}dy,$$

получим

$$\ln|x| = \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) + \ln C,$$

откуда

$$x = C\sqrt{1 + y^2}.$$

Используя начальное условие $2 = C\sqrt{1 + 1^2}$, находим $C = \sqrt{2}$. Окончательно будем иметь $x = \sqrt{2(1 + y^2)}$.

Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = f(x) \qquad \left(\text{или } \frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = f(x)\right), \qquad (28)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.* Это уравнение линейно относительно неизвестной функции и ее производной.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *линейным однородным.* В таком уравнении переменные легко разделяются:

$$\frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y,$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx.$$

После интегрирования получим

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + \ln C,$$

откуда

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{29}$$

П р и м е р 194. Решить уравнение $y' + 2\,x\,y = 0$.

Согласно полученной формуле, $y = C\,e^{-\int 2x\,dx} = C\,e^{-x^2}$.

Если в линейном уравнении (28) правая часть $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным.* Такие уравнения можно решить *методом вариации произвольной постоянной.*

За основу берем общее решение однородного уравнения (29), но C полагаем не постоянной величиной, а неизвестной функцией $C(x)$. Тогда решение принимает вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{30}$$

Для определения функции $C(x)$ подставляем это решение в исходное дифференциальное уравнение (28), получаем

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\cdot p(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)\,dx} = f(x).$$

Таким образом,

$$C'(x) = f(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}.$$

Интегрируя полученное выражение, получаем

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C_1.$$

Подставляем найденное $C(x)$ в решение линейного однородного уравнения (30), получаем

$$y = \left(\int f(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C_1\right) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}.$$

П р и м е р 195. Решить уравнение $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

Сначала найдем решение соответствующего однородного уравнения $y' - \dfrac{2y}{x+1} = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x+1}dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x+1}dx,$$

$$\ln y = 2\ln|x+1| + \ln C,$$

$$y = C \cdot (x+1)^2.$$

Представим, что $C = C(x)$, тогда

$$y = C(x) \cdot (x+1)^2.$$

Подставим это выражение в исходное уравнение:

$$C'(x) \cdot (x+1)^2 + 2C(x) \cdot (x+1) - \frac{2C(x) \cdot (x+1)^2}{x+1} = (x+1)^3,$$

откуда получаем

$$C'(x) \cdot (x+1)^2 = (x+1)^3 \qquad \text{или} \qquad C'(x) = x+1.$$

Интегрируя обе части уравнения, находим

$$C(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + C_1.$$

Окончательно получаем

$$y = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C_1\right) \cdot (x+1)^2.$$

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения также может быть применен *метод Бернулли*, согласно которому решение уравнения ищется в виде произведения двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$:

$$y = u \cdot v.$$

Находим производную от функции $y = u \cdot v$:

$$y' = u \cdot v' + v \cdot u'.$$

Подставляем в уравнение:

$$u \cdot v' + v \cdot u' + p(x) \cdot u \cdot v = f(x).$$

Группируем слагаемые, содержащие множитель u, получаем

$$u\left(v' + p(x) \cdot v\right) + v \cdot u' = f(x).$$

Функцию v выберем таким образом, чтобы выражение в скобках было равным нулю, т.е.

$$v' + p(x) \cdot v = 0.$$

Достаточно найти одно частное решение v:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v,$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)\,dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)\,dx,$$

$$\ln v = -\int p(x)\,dx,$$

откуда

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Подставив найденное значение v, приходим к уравнению

$$u' \cdot e^{-\int p(x)\,dx} = f(x),$$

или

$$u' = f(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx},$$

откуда находим

$$u = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C.$$

Окончательно получаем

$$y = u \cdot v = \left(\int f(x) e^{\int p(x)\,dx} dx + C\right) \cdot e^{-\int p(x)\,dx}.$$

П р и м е р 196. Найти решение задачи Коши для уравнения $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ при начальном условии $y(1) = 0$.

Используя подстановку $y = u \cdot v$, получим

$$u\left(v' - \frac{v}{x}\right) + v \cdot u' = x^2.$$

Полагаем

$$v' - \frac{v}{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим $\ln|v| = \ln|x|$, или $v = x$.

Уравнение для нахождения u имеет вид

$$xu' = x^2 \qquad \text{или} \qquad u' = x.$$

Поэтому $du = x\,dx$, следовательно, $u = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Общее решение имеет вид

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot x,$$

откуда, используя начальное условие $y(1) = 0$, определяем $C = -\dfrac{1}{2}$.

В результате получим

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot x.$$

Упражнения

Решить дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной:

664. $y' = 3x^2 + 2x + 1$.

665. $y' = e^x + 3$, $y(0) = 2$.

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

666. $\left(x^2+x\right)y' = 2y+1.$

667. $2y'\sqrt{x} = y,\ y(4) = 1.$

668. $x^2y' + y^2 = 0,\ y(-1) = 1.$

669. $\sqrt{y^2+1}dx - xydy = 0.$

670. $xy' = y^2 + 1.$

671. $(x+xy)dy + (y-xy)dx = 0.$

672. $4(x^2y + y)dy + dx = 0.$

673. $y\,dx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$

Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

674. $y' - \dfrac{y}{x} = x.$

675. $y' - y = e^x.$

676. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^3 x},\ y(0) = 0.$

677. $y' + y\cos x = \sin 2x.$

678. $y' = \dfrac{y + x^3}{x}.$

679. $(1+x^2)dy - (1+x^2)^2dx = 2xy\,dx.$

Задания для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной:

680. $y' = e^x + 20x^3.$

681. $y' = \sin x + 6x.$

682. $y' = 2x + 1,\ y(0) = 3.$

683. $y' = \cos x - \dfrac{2}{\pi},\ y(\pi) = 0.$

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

684. $6y^2\,dy - 3x^2\,dx = 0.$

685. $xyy' = 1 - x^2.$

686. $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x,\ y(\pi/4) = 1/2.$

687. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0,\ y(0) = 1.$

688. $y - xy' + 1 + x^2y',\ y(1) = 2.$

Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

689. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$.

690. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$.

691. $x\,dy - y\,dx - x^3 \cos x\,dx = 0$.

692. $xy' + y = \ln x + 1$.

693. $y' = 2xy - x^3 + x$.

694. $\cos x\,dy + y \sin x\,dx = dx$, $y(0) = 1$.

695. $y' - \dfrac{3y}{x} = x$.

696. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$.

697. $(2x+1)y' + y = x$.

698. $xy' = y + x^2 \cos x$.

7.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет следующий общий вид:

$$F(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x),\, \ldots,\, y^{(n)}(x)) = 0.$$

В частных случаях в уравнение могут не входить x, y и ее некоторые производные, порядок которых ниже, чем n.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется его решение $y = \varphi(x,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n)$, содержащее n независимых произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Независимость произвольных постоянных означает, что ни одну из них нельзя выразить через другие и тем самым уменьшить их число.

Общим интегралом дифференциального уравнения n-го порядка называется его общее решение, которое выражено в виде неявной функции:

$$\Phi(x,\, y,\, C_1,\, C_2,\, \ldots,\, C_n) = 0.$$

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение, в котором произвольным постоянным приданы конкретные числовые значения. Для *задачи с начальными условиями* или *задачи Коши* необходимо задать n дополнительных условий в некоторой точке x_0: $(y(x_0),\, y'(x_0),\, \ldots,\, y^{(n-1)}(x_0))$.

Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка возможно только в некоторых частных случаях.

Дифференциальные уравнения, допускающие понижения порядка

Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Уравнения n-го порядка, зависящие только от производной n-го порядка и переменной x:

$$y^{(n)} = f(x),$$

решаются последовательным интегрированием, т. е. последовательным понижением порядка уравнения до тех пор, пока не будет найдена функция $y(x)$.

Пример 197. Решить уравнение $y'' = 6x$.

Поскольку $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, то исходное уравнение можно записать в виде $\dfrac{dy'}{dx} = 6x$, откуда получим $dy' = x\,dx$. Интегрируя обе части уравнения, получаем $y' = 3x^2 + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Поскольку $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то полученное уравнение можно записать в виде $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + C_1$, откуда получим $dy = \bigl(3x^2 + C_1\bigr)$. Интегрируя обе части уравнения, окончательно получаем $y = x^3 + C_1x + C_2$, где C_2 – произвольная постоянная.

Пример 198. Найти частное решение уравнения $y''' = e^{2x}$, с заданными начальными условиями $y(0) = \dfrac{9}{8}$, $y'(0) = \dfrac{1}{4}$, $y''(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Данное уравнение третьего порядка, поэтому необходимо три раза проинтегрировать его. Понижаем до второго порядка:

$$y'' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1.$$

В первом интеграле появилась константа C_1. В уравнениях рассматриваемого типа целесообразно сразу же применять заданные начальные условия. Используем условие $y''(0) = -\dfrac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^0 + C_1 = \frac{1}{2} + C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1.$$

Таким образом, $y'' = \dfrac{1}{2}e^{2x} - 1$. На следующем шаге получим

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right) dx = \frac{1}{4}e^{2x} - x + C_2.$$

Постоянную C_2 находим из условия $y'(0) = \dfrac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - 0 + C_2, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

Таким образом, $y' = \dfrac{1}{4}e^{2x} - x$. На последнем шаге получим

$$y = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} - x\right) dx = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + C_3.$$

Для нахождения C_3 используем последнее условие $y(0) = \dfrac{9}{8}$:

$$\frac{9}{8} = \frac{1}{8} - 0 + C_3, \quad \Rightarrow \quad C_3 = 1.$$

Ответ: частное решение $y = \dfrac{1}{8}e^{2x} - \dfrac{x^2}{2} + 1$.

Уравнения, не содержащие искомой функции

Порядок уравнений вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, в которые не входит искомая функция $y(x)$, можно понизить, если взять за новую неизвестную функцию $z(x)$ низшую из производных данного уравнения, т. е. $z = y^{(k)}$. Получится новое уравнение

$$F(x, z', \ldots, z^{(n-k)}) - 0.$$

Таким образом, порядок уравнения понижается на k единиц.

Пример 199. Решить уравнение $xy'' + y' = 0$.

Данное уравнение не содержит функции y. Полагаем $z = y'$, тогда $z' = y''$, и исходное уравнение сводится к уравнению первого порядка

$$xz' + z = 0,$$

откуда следует

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части уравнения, приходим к решению $z = \dfrac{C_1}{x}$. Поскольку $z = y'$, получаем уравнение

$$y' = \frac{C_1}{x}, \quad \text{или} \quad dy = \frac{C_1 dx}{x},$$

решая которое, окончательно получаем $y = C_1 \ln x + C_2$.

Уравнения, не содержащие независимой переменной

В уравнениях вида $F(y, y', y'', \ldots, t^{(n)}) = 0$, в которые не входит независимая переменная x, порядок можно понизить на одну единицу, если положить $y' = p(y)$. В полученном уравнении новой неизвестной функцией будет $p(y)$, а y будет новой независимой переменной. Значения производных y'', y''', ... выразим по формулам (используя правила дифференцирования сложной функции) $y'' = p'p$, $y''' = p''p^2 + (p')^2 p$, ... через p и получим

$$F(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Пример 200. Решить задачу Коши $2y(y')^3 + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.

Данное уравнение $2y(y')^3 + y'' = 0$ не содержит x, поэтому полагаем $y' = p$, $y'' = p'p$, где $p = p(y)$. Исходное уравнение принимает вид

$$2yp^3 + p'p = 0.$$

Получили уравнение первого порядка. В нашем случае это уравнение с разделяющимися переменными, его общий интеграл равен $y^2 = \dfrac{1}{p} + C_1$, т. е. $y^2 = \dfrac{1}{y'} + C_1$. Используя начальное условие $y'(0) = -3$, находим $C_1 = \dfrac{1}{3}$. Подставляем в уравнение и выражаем производную y':

$$y' = \frac{3}{3y^2 - 1}.$$

Таким образом, получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\left(y^2 - \frac{1}{3}\right) dy = dx,$$

интегрируя которое, получаем

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y}{3} = x + C_2.$$

Используя начальное условие $y(0) = 0$, находим $C_2 = 0$. Окончательно получаем решение $y^3 - y = 3x$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и всех ее производных:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_0(x)$, $a_1(x)$, …, $a_n(x)$ – некоторые функции. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, в противном случае — *линейным неоднородным*.

Однородные уравнения обладают следующими свойствами:

1. Если y_1 является решением линейного однородного уравнения, то Cy_1, где C – произвольная постоянная, тоже является решением того же уравнения.

2. Если y_1 и y_2 являются решениями линейного однородного уравнения, то и их сумма $y = y_1 + y_2$ тоже будет являться решением того же уравнения.

Замечание. Если y_1, y_2, …, y_k являются решениями линейного однородного уравнения, то их линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k$ с произвольными постоянными коэффициентами C_1, C_2, …, C_k является решением того же линейного однородного уравнения.

Таким образом, знание частных решений линейного однородного уравнения дает возможность строить решение, зависящее от произвольных постоянных. Зная n частных решений y_1, y_2, …, y_n линейного однородного уравнения n-го порядка, мы получаем решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

зависящее от n произвольных постоянных, т. е. от такого количества постоянных, какое должно содержать общее решение дифференциального уравнения n-го порядка.

Решения y_1, y_2, ..., y_n должны удовлетворять дополнительным условиям для того, чтобы путем выбора произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n можно было бы удовлетворить произвольно заданным начальным условиям

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = b_n.$$

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются *линейно зависимыми*, если существуют постоянные α_1, α_2, ..., α_n (не все равные нулю), такие, что справедливо тождество

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0.$$

Если это тождество выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_0 = 0$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются *линейно независимыми.*

Решение $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ является *общим решением линейного однородного дифференциального уравнения*, если частные решения y_1, y_2, ..., y_n – линейно независимы.

Таким образом, задача интегрирования линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка сводится к нахождению его n линейно независимых частных решений.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{31}$$

где a_1, a_2, ..., a_n – константы, называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами.

Частное решение этого уравнения может быть найдено в виде $y = e^{kx}$. Подставляя его в уравнение, получаем

$$a_0k^ne^{kx} + a_1k^{n-1}e^{kx} + \ldots + a_{n-1}ke^{kx} + a_ne^{kx} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на e^{kx} и получим *характеристическое уравнение*

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \tag{32}$$

определяющее те значения k, при которых $y = e^{kx}$ будет решением исходного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n-го порядка. Правая часть уравнения представляет собой многочлен n-го порядка (25), который можно разложить на линейные и квадратичные множители по формуле (26). Каждый линейный множитель имеет простой или кратный вещественный корень, а квадратичные множители вещественных корней не имеют. Каждый из квадратичных множителей имеет *комплексные корни.*

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = \alpha + \beta i,$$

где α и β – действительные числа, а i – *мнимая единица*, которая удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Числа α и β называются соответственно *действительной* (*вещественной*) и *мнимой частями* комплексного числа $z = \alpha + \beta i$. Комплексное число вида $\alpha + 0 \cdot i$ равно действительному числу α. Комплексное число $\bar{z} = \alpha - \beta i$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = \alpha + \beta i$.

Таким образом, характеристическое уравнение имеет n корней. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – корни характеристического уравнения. Возможны следующие случаи:

1. Корни характеристического уравнения (32) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *вещественные и различные.* Тогда линейно независимые частные решения уравнения (31) имеют вид

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x},$$

и общим решением однородного уравнения (31) будет

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

2. Корни характеристического уравнения (32) $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *вещественные, но среди них есть кратные.* Пусть, например, $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = \alpha$, т. е. корень α является s-кратным корнем уравнения, а остальные $(n-s)$ корней различные. Линейно независимые частные решения уравнения (31) имеют вид

$$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = x e^{\alpha x},\ y_3 = x^2 \alpha x,\ \ldots,\ y_s = x^{s-1} e^{\alpha x},$$

$$y_{s+1} = e^{k_{s+1} x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x},$$

и общим решением однородного уравнения (31) будет

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + \ldots + C_s x^{s-1} e^{\alpha x} + C_{s+1} e^{k_{s+1} x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

3. Среди корней характеристического уравнения (32) есть *комплексные*. Пусть, для определенности, $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $k_3 = e^{k_3 x}$, …, $k_n = e^{k_n x}$, а остальные корни k_3, …, k_n вещественные. Так как коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уравнения (31) вещественные, то комплексные корни уравнения (32) могут быть только попарно сопряженными. Линейно независимые частные решения уравнения в этом случае будут иметь вид
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ y_3 = e^{k_3 x},\ \ldots,\ y_n = e^{k_n x},$$
и общим решением однородного уравнения (31) будет
$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + C_3 e^{k_3 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$
4. Если комплексные корни являются кратными, то частные решения для каждого из пары сопряженных корней записываются в соответствии с пунктом 2.

П р и м е р 201. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 2 = 0$. Решая его, находим корни $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Они вещественные и различные, следовательно, частные решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$, а общее решение данного уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

П р и м е р 202. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$. Решая его, находим корни $k_1 = k_2 = 1$. Они вещественные и совпадают, т. е. корень $k = 1$ имеет кратность равную двум. Следовательно, частные решения запишутся в виде $y_1 = e^x$ и $y_2 = x \cdot e^x$, а общее решение $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

П р и м е р 203. Решить уравнение $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Составляем характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 13 = 0$. Дискриминант $D = (-6)^2 - 4 \cdot 13 = -16 < 0$, следовательно, характеристическое уравнение не имеет действительных корней. Заменяем -1 на квадрат мнимой единицы i^2, получаем, что дискриминант равен $D = -16 = 16 \cdot i^2$, и корни уравнения равны
$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$
Получаем $\alpha = 3$, $\beta = 2$. Следовательно, частные решения дифференциального уравнения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$.

П р и м е р 204. Решить уравнение $y''' + y' = 0$.

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^3 + k = 0,$$

$$k(k^2 + 1) = 0,$$

$$k_1 = 0 \text{ или } k^2 + 1 = 0, \quad k^2 = -1 = i^2,$$

$$k_1 = 0 \text{ или } k_{2,3} = \pm i.$$

Получили один действительный корень $k_1 = 0$ и два сопряженных комплексных корня $k_{2,3} = \pm i = 0 \pm 1 \cdot i$, для которых $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Частные решения запишутся в виде

$$y_1 = e^0 = 1, \quad y_2 = e^0 \cos x = \cos x \quad y_3 = e^0 \sin x = \sin x,$$

а общим решением будет $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{33}$$

где $f(x) \neq 0$.

Теорема 24. Общим решением неоднородного дифференциального уравнения (33) является сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{\text{оо}}$ и частного решения исходного уравнения $y_{\text{чн}}$, т. е.

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Нахождение общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения осуществляется по правилам, рассмотренным ранее. Таким образом, задача интегрирования неоднородного уравнения сводится к нахождению частного решения неоднородного уравнения. В общем случае интегрирование уравнения может быть осуществлено методом вариации произвольных постоянных, однако в некоторых случаях частное решение можно найти методом подбора по виду правой части.

Частное решение неоднородного уравнения можно подобрать только для уравнений, правая часть которых имеет специальный вид, а именно,

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены.

Частные случаи для различных значений коэффициентов α и β представлены в таблице.

№	Значения α и β $(z = \alpha \pm \beta i)$	Вид правой части $f(x)$	Вид частного решения $y_{\text{чн}}$
1	$\alpha = \beta = 0$ $(z = 0)$	$P_n(x)$	$x^s \cdot \tilde{P}_n(x)$
2	$\alpha \neq 0,\ \beta = 0$ $(z = \alpha)$	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s \cdot \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
3	$\alpha = 0,\ \beta \neq 0$ $(z = \pm\beta i)$	$P_n(x)\cos(\beta x)+$ $+Q_m(x)\sin(\beta x)$	$x^s \cdot \big(\tilde{P}_t(x)\cos(\beta x)+$ $+\tilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)\big)$
4	$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ $(z = \alpha \pm \beta i)$	$e^{\alpha x}\,(P_n(x)\cos(\beta x)+$ $+Q_m(x)\sin(\beta x))$	$x^s \cdot e^{\alpha x}\,\big(\tilde{P}_t(x)\cos(\beta x)+$ $+\tilde{Q}_t(x)\sin(\beta x)\big)$

Здесь $\tilde{P}_n(x)$, $\tilde{P}_t(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$, – ***полные*** многочлены соответствующих степеней с *неопределенными* коэффициентами (содержащие все степени переменной), s равно показателю кратности корня $z = \alpha \pm \beta$ в характеристическом уравнении (если z не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$), t равно наибольшему из чисел n и m.

П р и м е р 205. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = 8x^3$.

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y = 0$. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4 = 0, \Rightarrow (k-2)(k+2) = 0, \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = -2.$$

Получены различные действительные корни, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{oo}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Теперь нужно найти какое-либо частное решение $y_{\text{чн}}$ исходного неоднородного уравнения. Используем метод *неопределенных коэффициентов.* Правая часть $f(x) = 8x^3$ представляет собой многочлен третьего порядка (см. пункт 1 из таблицы), число $z = 0$ не является корнем характеристического уравнения ($s = 0$), следовательно, частное решение ищем в виде многочлена третьей степени:

$$y_{\text{чн}} = x^0 \left(\tilde{P}_3(x)\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

где A, B, C и D – пока еще неизвестные коэффициенты. Так как $y_{\text{чн}}$ – решение исходного уравнения, то при подстановке этого решения в уравнение должно получаться тождество. Таким образом, значения коэффициентов A, B, C и D должны удовлетворять равенству

$$y''_{\text{чн}} - 4y_{\text{чн}} = 8x^3.$$

Найдем первую и вторую производную от частного решения:

$$y'_{\text{чн}} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^3 + 2Bx + C,$$

$$y''_{\text{чн}} = (3Ax^3 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$$

и поставим $y_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное неоднородное уравнение:

$$6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 8x^3.$$

Упростим выражение в левой части равенства и, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, составим систему линейных уравнений и найдем ее решение:

$$x^3(-4A) + x^2(-4B) + x(6A - 4C) + (2B - 4D) = 8x^3,$$

$$\begin{cases} -4A = 8, \\ -4B = 0, \\ 6A - 4C = 0, \\ 2B - 4D = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2, \\ B = 0, \\ C = -3, \\ D = 0. \end{cases}$$

Подставляем найденные значения A, B, C и D в формулу для частного решения $y_{\text{чн}}$, получаем частное решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{чн}} = -2x^3 - 3x$$

и общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x.$$

Пример 206. Решить уравнение $y'' - 3y' = 6x + 1$.

Найдем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 3k = 0$ имеет два различных действительных корня $k_1 = 0$ и $k_2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Правая часть уравнения $f(x) = 6x + 1$ является многочленом первой степени, число $z = 0$ *является* корнем характеристического уравнения кратности 1, следовательно, $s = 1$ и частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^1 \left(\tilde{P}_1(x)\right) = x^1 \left(Ax + B\right) = Ax^2 + Bx.$$

Найдем значения коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем $y'_{\text{чн}} = 2Ax + B$, $y''_{\text{чн}} = 2A$. Подставляем найденные производные в исходное уравнение, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x и получаем систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{cases} -6A = 6, \\ 2A - 3B = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $A = B = -1$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y_{\text{чн}} = -x^2 - x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 + C_2 e^{3x} - x^2 - x.$$

Пример 207. Решить уравнение $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет два различных действительных корня $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения. В данном примере правая часть $f(x) = 2e^{3x}$ (см. пункт 2 таблицы), т. е. перед множителем e^{3x} многочлен нулевой степени и коэффициент $\alpha = 3$. Поскольку число $z = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$, и частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^0 \left(\tilde{P}_0(x)\right) e^{3x} = x^0 \cdot Ae^{3x} = Ae^{3x}.$$

Найдем значение коэффициента A. Дифференцируя частное решение, получаем $y'_{\text{чн}} = 3Ae^{3x}$, $y''_{\text{чн}} = 9Ae^{3x}$. Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, получаем равенство

$$9Ae^{3x} - 3 \cdot 3Ae^{3} + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}.$$

Упрощая выражение, получаем $A = 1$, т. е. искомое частное решение

$$y_{\text{чн}} = e^{3x}.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + e^{3x}.$$

Пример 208. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 6e^{x}$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 = 0$ (т. е. значение $k = 1$ является корнем кратности 2). Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1e^{x} + C_2xe^{x}.$$

Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения. В правой части $f(x) = 6e^{x}$, т. е. многочлен нулевой степени $P_0(x) = 6$, умноженный на экспоненту и коэффициент в степени $\alpha = 1$. Поскольку значение $z = 1$ совпадает с двумя одинаковыми корнями характеристического уравнения, то $s = 2$. Частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^2 \left(\tilde{P}_0(x)\right) e^{x} = x^2 \cdot Ae^{x} = Ax^2e^{x}.$$

Найдем значение коэффициента A. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = 2Axe^x + Ax^2e^x = e^x(2Ax + Ax^2),$$

$$y''_{\text{чн}} = e^x(2Ax + Ax^2) + e^x(2A + 2Ax) = e^x(2A + 4Ax + Ax^2).$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, получаем равенство

$$e^x(2A + 4Ax + Ax^2) - 2e^x(2Ax + Ax^2) - Ax^2e^x = 6e^x.$$

Упрощаем выражение, получаем $A = 3$, т. е. искомое частное решение

$$y_{\text{чн}} = 3x^2e^x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1e^x + C_2xe^x + 3x^2e^x.$$

Пример 209. Решить уравнение $y'' + y' = 4xe^x$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + y' = 0$. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 = 0$ и $k_2 = -1$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Найдем частное решение неоднородного дифференциального уравнения. В данном примере $f(x) = 4xe^x$, т. е. многочлен первой степени $P_1(x) = 4x$, умноженный на экспоненту и коэффициент в степени $\alpha = 1$. Поскольку число $z = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$. Частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^0\left(\tilde{P}_1(x)\right)e^x = x^0\,(Ax + B)\,e^x = (Ax + B)\,e^x.$$

Найдем значение коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем $y'_{\text{чн}} = (Ax + A + B)\,e^x$, $y''_{\text{чн}} = (Ax + 2A + B)\,e^x$. Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, получаем

$$(Ax + 2A + B)\,e^x + (Ax + A + B)\,e^x = 4xe^x.$$

Разделим обе части уравнения на e^x и упростим выражение в правой части:

$$2Ax + 3A + 2B = 4x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 4, \\ 3A + 2B = 0, \end{cases}$$

решением которой будет $A = 2$ и $B = -3$.

Частное неоднородное решение имеет вид

$$y_{\text{чн}} = (2x - 3)\, e^x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 + C_2 e^{-x} + (2x - 3)\, e^x.$$

Пример 210. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 5\cos(2x)$.

Для однородного уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$ характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет пару сопряженных комплексных корней $k_{1,\,2} = 2 \pm 3i$. Следовательно, $\alpha = 2$, $\beta = 3$ и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{2x} \cos(3x) + C_2 e^{2x} \sin(3x).$$

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = 5\cos(2x)$ (см. пункт 3 таблицы). Многочлены перед косинусом $P_0(x) = 5$ и перед синусом $Q_0(x) = 0$ нулевой степени, следовательно, $t = 0$, коэффициент $\beta = 2$. Поскольку значение $z = 2$ не является корнем характеристического уравнения, то $s = 0$. Частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^0 \left(\tilde{P}_0(x)\cos(2x) + \tilde{Q}_0(x)\sin(2x)\right) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Найдем значения коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x),$$

$$y''_{\text{чн}} = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, после преобразований получаем равенство

$$(9A - 8B)\cos(2x) + (8A + 9B)\sin(2x) = 5\cos(2x).$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos(2x)$ и $\sin(2x)$ в левой и правой частях равенства, получаем систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{cases} 9A - 8B = 5, \\ 8A + 9B = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $A = \dfrac{9}{29}$, $B = -\dfrac{8}{29}$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y_{\text{чн}} = \frac{9}{29}\cos(2x) - \frac{8}{29}\sin(2x).$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x) + \frac{9}{29}\cos(2x) - \frac{8}{29}\sin(2x).$$

Пример 11. Решить уравнение $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y''+3y'+2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2+3k+2 = 0$ имеет два различных действительных корня $k_1 = -1$ и $k_2 = -2$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Правая часть $f(x) = x\sin x$, т. е. многочлен, умножаемый на косинус, нулевого порядка ($P_0(x) = 0$), а многочлен, умножаемый на синус, первого порядка ($Q_1(x) = x$), следовательно, $t = 1$. Поскольку значение коэффициента в аргументе синуса $\beta = 1$, и пара чисел $z = \pm i$ не является корнями характеристического уравнения, то $s = 0$. Частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^0\left(\tilde{P}_1(x)\cos x + \tilde{Q}_1(x)\sin x\right) = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x.$$

Найдем значения коэффициентов A, B, C и D. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = (A + Cx + D)\cos x + (-Ax - B + C)\sin x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (-Ax - B + 2C)\cos x + (-2A - Cx - D)\sin x.$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение:

$$((A + 3C)x + (3A + B + 2C + 3D))\cos x +$$
$$+ ((-3A + C)x + (-2A - 3B + 3C + D))\sin x = x\sin x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в множителях при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства и получаем систему уравнений для определенияA, B, C и D:

$$\begin{cases} A + 3C = 0, \\ 3A + B + 2C + 3D = 0, \\ -3A + C = 1, \\ -2A - 3B + 3C + D = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $A = -\dfrac{3}{10}$, $B = \dfrac{17}{50}$, $C = \dfrac{1}{10}$, $D = \dfrac{3}{25}$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y_{\text{чн}} = \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x.$$

П р и м е р 211. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y''-6y'+9y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2-6k+9 = 0$ имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 = 3$ (т.е. значение $k = 3$ является корнем кратности 2). Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}.$$

В неоднородном уравнении правая часть $f(x) = 25e^x \sin x$ (см. пункт 4 таблицы), т. е. $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 25$ – многочлены нулевой степени, следовательно $t = 0$. Поскольку значения $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, и пара чисел $z = 1 \pm i$ не является корнями характеристического уравнения, то $s = 0$. Частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^0 \cdot e^x \left(\tilde{P}_0(x)\cos x + \tilde{Q}_0(x)\sin x\right) = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Найдем значения коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = e^x\left((A+B)\cos x + (-A+B)\sin x\right),$$

$$y''_{\text{чн}} = e^x\left(2B\cos x - 2B\sin x\right).$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение:

$$(3A - 4B)\cos x + (4A + 3B)\sin x = 25\sin x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства и получаем систему уравнений для определения AC и B:

$$\begin{cases} 3A - 4B = 0, \\ 4A + 3B = 25. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $A = 4$, $B = 3$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y_{\text{чн}} = e^x\left(4\cos x + 3\sin x\right).$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + e^x\left(4\cos x + 3\sin x\right).$$

Пример 212. Решить задачу Коши $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения $y'' + y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет пару сопряженных комплексных корней $k_{1,\,2} = \pm\, i$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = 2\cos x$, т. е. $\beta = 1$. Поскольку пара чисел $z = \pm i$ является корнями характеристического уравнения, то $s = 1$. Частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = x^1\left(\tilde{P}_0(x)\cos x + \tilde{Q}_0(x)\sin x\right) = Ax\cos x + Bx\sin x.$$

Найдем значения коэффициентов A и B. Дифференцируя частное решение, получаем

$$y'_{\text{чн}} = (A + xB)\cos x + (-Ax + B)\sin x,$$

$$y''_{\text{чн}} = (-Ax + 2B)\cos x + (-A - Bx)\sin x.$$

Подставляем $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное уравнение, после преобразований получаем равенство

$$2B\cos x - 2A\sin x = 2\cos x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в левой и правой частях равенства и получаем $A = 0$, $B = 1$, т. е. искомое частное решение имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x\sin x.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x.$$

Для нахождения значений C_1 и C_2 находим

$$y'_{\text{он}} = -C_1\sin x + C_2\cos x + \sin x + x\cos x.$$

Используя начальные условия $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, получаем систему

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + 0\cdot\sin 0 = 2, \\ -C_1\sin 0 + C_2\cos 0 + \sin 0 + 0\cdot\cos 0 = 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $C_1 = 2$ и $C_2 = 0$. Частное решение исходного неоднородного уравнения, соответствующее заданным начальным условиям, имеет вид

$$y = 2\cos x + x\sin x.$$

Замечание. Если правая часть неоднородного уравнения является суммой нескольких функций, т. е.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x),$$

то частное решение неоднородного уравнения равно сумме соответствующих частных решений

$$y_{\text{чн}} = y_{\text{чн}_1} + y_{\text{чн}_2} + \ldots + y_{\text{чн}_k}.$$

Пример 213. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 5e^{2x} + 11e^{-x}$.
Общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{оо}} = C_1e^{-x}\cos(2x) + C_2e^{-x}\sin(2x).$$

Для $f_1(x) = 5e^{2x}$ частное неоднородное решение будем находить в виде

$$y_{\text{чн}_1} = Ae^{2x},$$

а для $f_2(x) = 11e^{-x}$ – в виде

$$y_{\text{чн}_2} = Be^{-x}.$$

В итоге общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения

$$y_{\text{он}} = C_1 e^{-x}\cos(2x) + C_2 e^{-x}\sin(2x) + e^{2x} + \frac{11}{8}e^{-x}.$$

Пример 214. Найти частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 4y = \sin(2x) + 1$, соответствующее заданным начальным условиям $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y = \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}$.

Упражнения

Решить дифференциальные уравнения, используя понижение порядка:

699. $y''' = e^{2x}$.

700. $y'' = 2x\ln x$.

701. $y'' = 4\cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

702. $y''' = \frac{6}{x^3}$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$.

703. $x\,(y'' + 1) + y' = 0$.

704. $xy'' = (1 + 2x^2)y'$.

705. $yy'' + (y')^2 = 0$.

706. $y'' = 2yy'$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения:

707. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

708. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

709. $y'' + 4y' = 0.$ **710.** $y'' + 2y' + 5y = 0.$

711. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$

712. $y''' - y' = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1.$

Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

713. $y'' + 6y' + 5y = 25x^2 - 2.$ **714.** $y'' + y' = 2x + 1.$

715. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}.$ **716.** $y'' - y = 12x^2e^x.$

717. $y'' - 6y' + 13y = 39.$

718. $y'' + 4y = 8x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

719. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

720. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

721. $y'' + y = 2\cos x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

722. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x.$

Задания для самостоятельной работы

Решить дифференциальные уравнения, используя понижение порядка:

723. $y'' = \dfrac{1}{1 + x^2}.$ **724.** $y'' = 2x\ln x.$

725. $y^{(4)} = \cos^2 x,\ y(0) = \dfrac{1}{32},\ y''(0) = \dfrac{1}{8},\ y'''(0) = 0.$

726. $y''' = x\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2.$

727. $y''' = xe^{-x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(2) = 2.$

728. $xy'' + y' = 0.$ **729.** $xy'' = y' + x^2.$

730. $y'' = (y')^2$. **731.** $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения:

732. $y'' - 6y' + 9y = 0$. **733.** $y'' + 9y = 0$.

734. $y'' - 4y' + 8y = 0$. **735.** $y'' - 4y = 0$.

736. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

737. $y^{\mathrm{IV}} - y'' = 0$.

Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

738. $y'' + y' - 2y = 6x^2$. **739.** $y'' + 3y' = 9x$.

740. $4y'' - y = x^3 - 24x$. **741.** $y''+4y'+5y = 5x^2-32x+5$.

742. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$. **743.** $y'' + y' - 6y = 15e^{2x}$.

744. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. **745.** $y'' - 4y' = 32xe^{4x}$

746. $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$. **747.** $2y'' + 2y' + 5y = 50\cos 2x$.

748. $y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

7.3. Системы линейных дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} y_1' = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

называется *нормальной системой* n *дифференциальных уравнений первого порядка* с неизвестными функциями $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$. Число уравнений, входящих в систему, называется ее *порядком*.

Если правые части системы $F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = \overline{1, n})$ – линейные функции относительно y_1, y_2, ..., y_n с постоянными коэффициентами, то система называется *линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* и имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x). \end{array} \right.$$

Если все функции $f_i(x) = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Решением системы дифференциальных уравнений называется совокупность функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, ..., $y = y_n(x)$, при подстановке которых вместе с их производными в систему, каждое уравнение системы обращается в тождество.

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка состоит в нахождении решения системы уравнений $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, ..., $y = y_n(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$.

Общим решением системы назвается совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, где C_1, C_2, ..., C_n – произвольные постоянные.

Частным решением системы называется решение, полученное из общего при некоторых частных значениях произвольных постоянных.

Одним из методов решения системы дифференциальных уравнений первого порядка является *метод исключения*, который заключается в сведении решения системы к решению одного дифференциального уравнения n-го порядка.

Рассмотрим на примерах решение систем второго порядка.

Пример 215. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = y - 5z, \\ z' = y - z. \end{array} \right.$$

Найдем решение данной системы методом исключения. Для этого из первого уравнения системы выразим функцию z:

$$z = \frac{1}{5}\left(y - y'\right).$$

Продифференцируем обе части равенства:

$$z' = \frac{1}{5}\left(y' - y''\right).$$

Подставим найденные z и z' во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{5}\left(y' - y''\right) = y - \frac{1}{5}\left(y - y'\right).$$

После преобразований получим одно линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 4y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$. Его корнями будет пара сопряженных комплексных чисел $k_{1,2} = \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

От найденной функции находим производную

$$y'_{\text{общ}} = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)$$

и подставляем найденное общее решение y_0 и его производную y'_0 в выражение для функции z:

$$z_{\text{общ}} = \frac{1}{5}\left(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \left(-2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x)\right)\right)$$

или

$$z_{\text{общ}} = \left(\frac{1}{5}C_1 - \frac{2}{5}C_2\right)\cos(2x) + \left(\frac{2}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2\right)\sin(2x).$$

Общее решение системы уравнений имеет вид

$$\begin{cases} y_{\text{общ}} = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x), \\ z_{\text{общ}} = \left(\dfrac{1}{5}C_1 - \dfrac{2}{5}C_2\right)\cos(2x) + \left(\dfrac{2}{5}C_1 + \dfrac{1}{5}C_2\right)\sin(2x). \end{cases}$$

Пример 216. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -2y + 4z, \\ z' = -y + 3z \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 3$, $z(0) = 0$.

Сначала находим общее решение системы. Из первого уравнения выражаем функцию z:

$$z = \frac{1}{4}(y' + 2y),$$

дифференцируем ее:

$$z' = \frac{1}{4}(y'' + 2y')$$

и, подставляя z и z' во второе уравнение системы, получаем уравнение второго порядка:

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Решением уравнения будет функция

$$y_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Находим производную от функции y_0:

$$y'_{\text{общ}} = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$$

и подставляем y_0 и y'_0 в выражение для функции z:

$$z_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-x}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}, \\ z_{\text{общ}} = C_1 e^{2x} + \dfrac{1}{4} C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Подставляя начальные условия в общее решение, найдем частное решение системы:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 = 3, \\ C_1 e^0 + \dfrac{1}{4} C_2 e^0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + \dfrac{1}{4} C_2 = 0. \end{cases}$$

Поставляя найденные значения $C_1 = -1$ и $C_2 = 4$ в общее решение, получаем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} y_{\text{ч}} = -e^{2x} + 4e^{-x}, \\ z_{\text{ч}} = -e^{2x} + e^{-x}. \end{cases}$$

Упражнения

Найти общее решение однородных систем уравнений:

749. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -y + z. \end{cases}$

750. $\begin{cases} y' = -7y + z, \\ z' = -2y - 5z. \end{cases}$

751. $\begin{cases} y' = 3y + 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

Найти общее решение однородных систем уравнений:

752. $\begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 3y + z. \end{cases}$

753. $\begin{cases} y' = y + 3z, \\ z' = y - z. \end{cases}$

Дополнительные задачи к разделу

Решить дифференциальные уравнения:

754. $(1 + e^x)y' = ye^x$

755. $y' + y + y^2 = 0.$

756. $x \sin y\, y' = 2(\cos y)^3.$

757. $xy' + y = 4x^3 + 3x^2,\ y(1) = 2.$

758. $x^2 + xy' = y,\ y(1) = 0.$

759. $y'x \ln x - y = 2x^2 \ln^2 x.$

760. $y''(x+2)^5 = 1,\ y(-1) = \dfrac{1}{12},\ y'(-1) = -\dfrac{1}{4}.$

761. $y'' = x \cdot e^x,\ y(0) = y'(0) = 0.$

762. $xy'' = y'.$

763. $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}.$

764. $y'' = (y')^2 - (y')^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

765. $y'' - 3y' + 2y = -7\cos x - \sin x,\ y(0) = 2, y'(0) = 7.$

766. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}.$

767. $y'' + 8y' + 17y = e^x(60 \cos x + 5 \sin x).$

Найти общее решение однородных систем уравнений:

768. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + z. \end{cases}$

769. $\begin{cases} y' = -y + 8z, \\ z' = y + z. \end{cases}$

Ответы

Раздел 1

1. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} -8 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$. **6.** $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **7.** $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$. **9.** $AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 18 & -21 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 8 & -19 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}$. **10.** $AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$. **11.** $AB = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 26 \\ 3 & 46 & -35 \\ 11 & 17 & 26 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 43 & -11 & -9 \\ 17 & 28 & 6 \\ 29 & 33 & 9 \end{pmatrix}$. **12.** $AB = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ -9 & 15 & 0 \\ 27 & -13 & 4 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$. **13.** $AB = \begin{pmatrix} 8 & 24 & -6 & 0 \\ -10 & 61 & 26 & 17 \end{pmatrix}$, BA не имеет смысл. **14.** $AB = \begin{pmatrix} -13 & 26 \\ -23 & 11 \\ -19 & 9 \end{pmatrix}$, BA не имеет смысл. **15.** $AB = (14)$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. **16.** $AB = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 24 \\ 6 & -9 & 18 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$, $BA = (5)$. **17.** $AB = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 9 \\ -14 & 6 & -20 \end{pmatrix}$, BA не имеет смысл. **18.** $\begin{pmatrix} 49 & 76 \\ 57 & 68 \end{pmatrix}$. **19.** $\begin{pmatrix} 56 & 30 \\ 43 & -5 \end{pmatrix}$. **20.** -2. **21.** 46. **22.** 10. **23.** 1. **24.** 49. **25.** 50. **26.** -11. **27.** 0. **28.** 0. **29.** -80. **30.** 2520. **31.** $A_{12} = -52$, $A_{44} = 70$. **32.** -54. **33.** 43. **34.** -624. **35.** $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. **36.** $A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **37.** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 11$. **38.** $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

39. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 5$. **40.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -5 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$. **41.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. **42.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. **43.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$. **44.** $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$. **45.** $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **46.** $A+B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 10 & -1 \end{pmatrix}$. **47.** $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$. **48.** $AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$. **49.** $AB = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 17 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$. **50.** $AB = BA = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & -8 \end{pmatrix}$. **51.** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -20 & -12 & -8 \\ -9 & -15 & -9 & -6 \\ 21 & 35 & 21 & 14 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 9 \\ -14 & 6 & -20 \\ -18 & 13 & -31 \end{pmatrix}$. **52.** $AB = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 8 \\ -9 & 21 & -3 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -12 & 5 & -11 \\ 26 & 22 & 2 \\ 25 & 19 & -4 \end{pmatrix}$. **53.** $AB = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ 10 & 15 & 43 \\ -22 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, BA не имеет смысл. **54.** $\begin{pmatrix} 7 & 62 \\ -163 & -127 \end{pmatrix}$. **55.** 2. **56.** 18. **57.** 14. **58.** -19. **59.** 0. **60.** -9. **61.** 8. **62.** 1. **63.** $A_{22} = -134$, $A_{31} = 1$. **64.** -240. **65.** 513. **66.** -390. **67.** 100. **68.** $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ -7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$. **69.** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 25$. **70.** $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. **71.** $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$. **72.** $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. **73.** $x = 5, y = 3$. **74.** $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 2$. **75.** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. **76.** $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$. **77.** $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -4$. **78.** $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 2$. **79.** $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. **80.** $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$. **81.** Система неопределенная. $x_1 = -4 + \frac{19}{5}u$, $x_2 = 1 - \frac{6}{5}u$, $x_3 = 2 + \frac{1}{5}u, x_4 = u$. **82.** Система несовместна. **83.** $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = 2$. **84.** $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -4$. **85.** $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5$. **86.** Система несовместна. **87.** Система неопределенная. $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{u}{2} + \frac{v}{2}, x_2 = u, x_3 = 3 - 4v, x_4 = 0, x_5 = v$. **88.** Система неопределенная. $x_1 = -4, x_2 = 1 - u, x_3 = 6 - 2u, x_4 = u$. **89.** $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -2$. **90.** а) $\begin{pmatrix} -4 & 11 & 3 \\ 15 & -11 & -10 \\ 10 & -12 & -13 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 34 & -45 & -25 \\ 40 & -52 & -18 \\ 3 & 25 & 12 \end{pmatrix}$. **91.** $\begin{pmatrix} 10 & -7 & 21 & 17 \\ 23 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$. **92.** $\begin{pmatrix} -9 & 20 \\ -21 & 19 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$. **93.** $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. **94.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. **95.** 16. **96.** 497. **97.** а) $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; б) обратной не существует; в) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -9 & 6 & 12 \\ -7 & 5 & 11 \end{pmatrix}$. **98.** $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$. **99.** $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. **100.** $x_1 = \frac{25}{6}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{13}{6}$. **101.** $x_1 = 7$, $x - 2 = -8$, $x_3 = -5$, $x_4 = 6$. **102.** Система неопределенная. $x_1 = \frac{9}{4} - 2u - \frac{5}{4}v$, $x_2 = u$, $x_3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}v$, $x_4 = -\frac{1}{2}v$, $x_5 = v$.

Раздел 2

103. $\{1;\ -3;\ 5\}$. **104.** $\{-2;\ 0;\ -5\}$. **105.** а) $\overrightarrow{AB} = \{-8;\ 5;\ -6\}$, $\overrightarrow{BA} = \{8;\ -5;\ 6\}$; б) $5\sqrt{5}$. **106.** а) $\{1;\ -1;\ 6\}$; б) $\{5;\ -3;\ 6\}$; в) $\{-12;\ 7;\ -12\}$. **107.** Векторы коллинеарны, направлены в противоположные стороны; вектор $\vec{a}$ в два раза длиннее вектора $\vec{b}$. **108.** $\alpha = 4$, $\beta = -1$. **109.** 229. **110.** -58. **111.** $45°$. **112.** а) не ортогональны; б) ортогональны. **113.** 102 кв. ед. **114.** $\{-6;\ 0;\ -12\}$. **115.** а) $2\sqrt{65}$; б) $\sqrt{65}$. **116.** 130. **117.** Векторы не компланарны; образуют правую тройку. **118.** б) 7,5; в) 7,5. **119.** $\{-2;\ 3;\ 0\}$. **120.** $\{0;\ -3;\ -6\}$. **121.** а) $\sqrt{13}$; б) 15; в) $2\sqrt{41}$. **122.** а) $3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$; б) $-\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$; в) $-5\vec{i} - 10\vec{j} + 25\vec{k}$. **123.** а) неколлинеарны; б) коллинеарны. **124.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$; $\vec{c} \cdot \vec{b} = 3$. **125.** а) $\arccos\frac{14}{15}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{20}}$. **126.** $\arccos\frac{6}{7}$. **127.** 4. **128.** $-18\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$. **130.**

а) не коллинеарны; б) $9\sqrt{10}$; в) $\dfrac{9\sqrt{10}}{2}$; г) 24; д) 4. **131.** $3\sqrt{5}$. **132.** 98. **133.** $C(1;\ 11)$. **134.** $(1;\ 4)$. **135.** A и C. **136.** а) $x+2y+8=0$, $\vec{n}=\{1;\ 2\}$, $\vec{q}=\{-2;\ 1\}$; б) $y=-\dfrac{x}{2}-4$, $k=-\dfrac{1}{2}$, $b=4$; в) $\dfrac{x}{-8}+$ $+\dfrac{y}{-4}=1$, $A(-8;\ 0)$, $B(0;\ -4)$. **137.** $3x-2y-7=0$. **138.** $4/5$. **139.** 45°. **140.** $(1;\ 2)$. **141.** а) $2x-y+9=0$; б) $x+2y-8=0$. **142.** 2,8; 0; 1,4. **143.** а) AB: $4x+3y+7=0$, AC: $12x-5y+119=0$, BC: $4x-3y+1=0$; б) 35; в) $\arccos\left(\dfrac{33}{65}\right)$; г) $4x+3y+175=0$; д) $3x+4y-7=0$, $d=\dfrac{48}{5}$; е) $20x-27y-7=0$; ж) $\left(-\dfrac{31}{23};\ \dfrac{17}{23}\right)$. **144.** 13. **145.** 20. **146.** $(-1;\ 2)$. **147.** $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{-5}=1$; точка A лежит на прямой, точка B – нет. **148.** 7. **149.** $x+9y+25=0$. **150.** $4x-7y+26=0$. **151.** $x+y=0$. **152.** AC: $x-3y+2=0$; BE: $5x-y-4=0$; BD: $3x+y-12=0$. **153.** Вершины: $(3;\ -1)$, $(3;\ 3)$, $(-9/5;\ 3/5)$; углы: 45°, $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **154.** а) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; в) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$; г) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$; д) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=$ $=1$; е) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1$. **155.** а) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$; б) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$; в) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$; г) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$; д) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$. **156.** а) $y^2=6x$; б) $y^2=-x$; в) $x^2=\dfrac{1}{2}y$; г) $x^2=-4y$. **157.** а) Окружность с центром в точке $(2;\ -3)$, радиусом 4; б) Эллипс с центом в точке $(10;\ -2)$, $a=5$, $b=2$; в) Гипербола с центом в точке $(4;\ -3)$, $a=2$, $b=1$; г) Сопряженная гипербола с центром в точке $(5;\ 3)$, $a=1$, $b=3$; д) Парабола с вершиной в точке $(-4;\ 4)$, симметричная относительно прямой, параллельной оси Ox; е) Парабола с вершиной в точке $(-3;\ 2)$, симметричная относительно прямой, параллельной оси Oy. **158.** $(x+1)^2+(y-4)^2=36$. **159.** а) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$; б) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{39}=1$. **160.** а) $x^2=-12y$; б) $y^2=-28$. **161.** $2a=12$, $2b=8$, $F_1(-2\sqrt{5};\ 0)$, $F_2(2\sqrt{5};\ 0)$. **162.** $\dfrac{(x-2)^2}{9}-\dfrac{(y+3)^2}{16}=1$. **163.** $y^2=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$. **164.** Да. **165.** 1. **166.** $\{-1;\ 4;\ 10\}$. **167.** $\sqrt{4062}$. **168.** -26. **169.** 26. **170.** Левая. **171.** а) AB: $3x-4y-30=0$, $k_{AB}=\dfrac{3}{4}$, $|AB|=10$,

BC: $x+2y-10=0$, $k_{BC}=-\dfrac{1}{2}$, $|BC|=8\sqrt{5}$, AC: $7x+4y+10=0$, $k_{AC}=-\dfrac{7}{4}$, $|AC|=2\sqrt{65}$; б) $\angle A=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{65}}$, $\angle B=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\angle C=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{13}}$; в) AH_1: $2x-y-10=0$, BH_2: $4-7y-40=0$, CH_3: $4x+3y-56=0$; г) $|AH_1|=4\sqrt{5}$, $|BH_2|=\dfrac{80}{\sqrt{65}}$, $CH_3=16$; д) $M_1(2;\,4)$, $M_2(-2;\,1)$, $M_3(6;\,-3)$; е) AM_1: $x-2=0$, BM_2: $x+{}$ $+12y-10=0$, CM_3: $11x+12y-30=0$; ж) $\left(\dfrac{30}{7};\,-\dfrac{30}{7}\right)$. **172.** а) окружность $(x-1)^2+(y+3)^2=4$; б) эллипс $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{1}=1$, $c=2\sqrt{2}$; в) парабола $(x-3)^2=-2(y+2)$; г) сопряженная гипербола $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{2}=-1$, $c=\sqrt{6}$.

Раздел 3

173. 0. **174.** 0. **175.** $-\infty$. **176.** $-\dfrac{\pi}{2}$. **177.** 0. **178.** ∞. **179.** $\dfrac{3}{4}$. **180.** 4. **181.** 0. **182.** ∞. **183.** $\dfrac{1}{e}$. **184.** 3. **185.** $\sqrt{2}$. **186.** ∞. **187.** $\dfrac{1}{2}$. **188.** $\dfrac{2}{3}$. **189.** $\dfrac{8}{13}$. **190.** $\dfrac{1}{4}$. **191.** 6. **192.** $\dfrac{2}{3}$. **193.** -56. **194.** $\dfrac{1}{2}$. **195.** -1. **196.** 5. **197.** $\dfrac{1}{10}$. **198.** $\dfrac{3}{2}$. **199.** $\dfrac{6}{5}$. **200.** $\dfrac{3}{4}$. **201.** ∞. **202.** e^4. **203.** $\dfrac{1}{e^4}$. **204.** e^3. **205.** $+\infty$. **206.** $-\infty$. **207.** $-\dfrac{\pi}{2}$. **208.** $+\infty$. **209.** 0. **210.** 0. **211.** $+\infty$. **212.** В точке $x=0$ бесконечный разрыв. **213.** В точках $x=-1$ и $x=1$ бесконечные разрывы. **214.** В точке $x=0$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 1. **215.** Функция непрерывна. **216.** В точке $x=2$ конечный устранимый разрыв. **217.** В точке $x=-2$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 5. **218.** Вертикальная асимптота $x=-0.4$, горизонтальная асимптота $y=-0.8$. **219.** Горизонтальная асимптота $y=-1$. **220.** Вертикальная асимптота $x=-1$, горизонтальная асимптота $y=0$. **221.** Вертикальная асимптота $x=0$, наклонная асимптота $y=x-3$. **222.** Вертикальная асимптота $x=1$, наклонная асимптота $y=3x+4$. **223.** 0. **224.** 0. **225.** $-\infty$. **226.** π. **227.** 0. **228.** ∞. **229.** $\dfrac{2}{3}$. **230.** 2. **231.** 0. **232.** ∞.

233. $\frac{1}{4}$. **234.** $\frac{1}{2}$. **235.** $\frac{1}{3}$. **236.** $\frac{14}{9}$. **237.** $\frac{2}{3}$. **238.** 4. **239.** $-\frac{1}{2}$. **240.** $\frac{1}{6}$. **241.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **242.** -1. **243.** $\frac{1}{3}$. **244.** $\frac{1}{4}$. **245.** $\frac{1}{3}$. **246.** $\frac{3}{7}$. **247.** e^{10}. **248.** $e^{-\frac{2}{3}}$. **249.** $e^{-\frac{1}{3}}$. **250.** $e^{-\frac{15}{2}}$. **251.** $-\infty$. **252.** $+\infty$. **253.** $\frac{\pi}{2}$. **254.** 0. **255.** $+\infty$. **256.** $+\infty$. **257.** 0. **258.** В точках $x = 0$ и $x = 1$ бесконечный разрыв. **259.** В точке $x = 3$ устранимый разрыв. **260.** В точке $x = -1$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен -2. **261.** В точке $x_1 = 0$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен -2; в точке $x_2 = 2$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 1. **262.** В точке $x = 2$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен -2. **263.** В точке $x = 2$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 1. **264.** Вертикальная асимптота $x = -0.5$, горизонтальная асимптота $y = 2$. **265.** Вертикальная асимптота $x = 1$, наклонная асимптота $y = x$. **266.** Вертикальная асимптота $x = 1$, наклонная асимптота $y = -0.5x - 0.5$. **267.** Наклонная асимптота $y = -x$. **268.** $-\frac{3}{4}$. **269.** 2. **270.** ∞. **271.** $\frac{21}{5}$. **272.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}$. **273.** $\frac{1}{e^{15}}$. **274.** 0. **275.** ∞. **276.** $\frac{5}{3}$. **277.** $\frac{7}{2}$. **278.** $\frac{5}{14}$. **279.** 0. **280.** В точке $x_1 = 0$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 1; в точке $x_2 = 3$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен -16. **281.** В точке $x_1 = 1$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен 3; в точке $x_2 = 2$ конечный неустранимый разрыв, скачок функции равен -8. **282.** Вертикальная асимптота $x = 3$, наклонная асимптота $y = x + 9$.

Раздел 4

283. $y' = 20x^3 - x^{-2/3} + 1 + 85x^{-6} - x^{-3/2}$. **284.** $y' = 3\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}\sin^2 x} - 7 \cdot 2^x \ln 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2}$. **285.** $y' = 6x^2 \cos x - \left(2x^3 - 5\right)\sin x$. **286.** $y' = \frac{2x}{\left(2x^2+1\right)^2}$. **287.** $y' = \frac{-\sin x(1 + \ln^2 3)}{3^x}$. **288.** $y' = \frac{12x^4 \ln x - 3x^4 + 7}{4x\ln^2 x}$. **289.** $y' = \frac{3}{\cos^2 3x} - 7\sin 7x$. **290.** $y' = \frac{2}{\sqrt[5]{(4+5x)^3}}$. **291.** $y' = -5\cos(3 - 5x)$. **292.** $y' = \frac{6x}{\left(1-x^2\right)^4}$.

293. $y' = x^2 e^{2x+3}(2x+3)$. **294.** $y' = \dfrac{17}{(3x-2)(4x+3)}$. **295.** $y' =$ $= \dfrac{\frac{48x^3}{\sqrt{1-(3x^4-7)^2}}\ln^5 x - \arcsin(3x^4-7)\frac{20\ln^4 x}{x}}{16\ln^{10} x}$. **296.** $y' = \dfrac{3\,\mathrm{arctg}^2\, x\sqrt{\ln x}}{1+x^2} +$ $+ \dfrac{\mathrm{arctg}^3\, x}{2x\sqrt{\ln x}}$. **297.** $y'\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{25}{3\pi^2}$. **298.** $y' = \mathrm{tg}\, x(\sin x)^{\mathrm{tg}\, x-1}\cdot\cos x +$ $+(\sin x)^{\mathrm{tg}\, x}\cdot\ln(\sin)\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **299.** $y' = x^2(x+1)^{x^2-1} + (x+1)^{x^2}\ln(x+1)\times$ $\times 2x$. **300.** -7; касательная: $7x+y+3=0$; нормаль: $x-7y+29=0$. **301.** 1; касательная: $x-y+1=0$; нормаль: $x+y-1=0$. **302.** $-\dfrac{1}{2}$; касательная: $2x+4y+1=0$; нормаль: $8x-4y-11=0$. **303.** 20. **304.** 2. **305.** $\dfrac{75\sqrt{2}}{2}$. **306.** $32-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{64}$ м/c^2. **307.** 112,5 ед./ч; 82,5 ед./ч. **308.** $y' = 4x^3+12x^2+6x$, $y'' = 12x^2+24x+6$, $y''' = 48x+$ $+24$, $y^{(4)} = 48$, $y^{(5)} = 0$. **309.** $y' = -5\sin 5x$, $y'' = -25\cos 5x$, $y''' =$ $= 125\sin 5x$, $y^{(4)} = 625\cos 5x$, $y^{(5)} = -3125\sin 5x$. **310.** $y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' =$ $= -\dfrac{1}{x^2}$, $y''' = \dfrac{2}{x^3}$, $y^{(4)} = -\dfrac{6}{x^4}$, $y^{(5)} = \dfrac{24}{x^5}$. **311.** $y' = 20x^4+3x^{-1/4}-$ $-2-6x^{-2}+\dfrac{1}{5}x^{-6/5}$. **312.** $y' = -\dfrac{\sin x}{3}-\dfrac{2}{\cos^2 x}-e^x-\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{7}{\sqrt{1-x^2}}-$ $-\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. **313.** $y' = 2x\ln x + x$. **314.** $y' = e^x\left(x^2+3x+2\right)$. **315.** $y' = 5^x\left((2\,\mathrm{ctg}\, x-3)\ln 5-\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)$. **316.** $y' = \dfrac{28x^5-70x^4-5}{(x-2)^2}$. **317.** $y' = \dfrac{4x\left(3x^2+1\right)\ln x-\left(3x^4+2x^2-7\right)\cdot\frac{1}{x}}{4\ln^2 x}$. **318.** $y' = \dfrac{3(\cos x-6)}{(1-2\cos x)^2}$. **319.** $y' = \dfrac{2}{5\cos^2\frac{2x}{5}}$. **320.** $y' = -12(1-3x)^3$. **321.** $y' = -\dfrac{24(x+1)}{(x^2+2x+3)^2}$.

322. $y' = \dfrac{-6x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2)^4}}$. **323.** $y' = -\dfrac{\mathrm{ctg}^2\frac{x}{3}}{\sin^2\frac{x}{3}}$. **324.** $y' = \dfrac{1+\cos 4x}{\sqrt[4]{(4x+\sin 4x)^3}}$. **325.** $y' = 4\ln^3\sin x\,\mathrm{ctg}\, x$. **326.** $y' = 6x\cos 3x^2\cdot\cos^2 x-\sin 3x^2\sin 2x$. **327.** $y' = \dfrac{5}{2\sqrt{(3-5x)(5x-2)}}$. **328.** $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(e^{3x}-5)+\sqrt[3]{x}\cdot 3e^{3x}$.

329. $y' = \dfrac{-\sin x + \ln\cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$. **330.** $y' = \dfrac{\dfrac{4\operatorname{tg}4x}{3x} - \dfrac{4\ln\sqrt[3]{x^4}}{\cos^2 4x}}{\operatorname{tg}^2 4x}$.
331. $y' = \sin x \cdot (\cos x)^{\sin x - 1} + (\cos x)^{\sin x} \cdot \ln(\cos x) \cdot \cos x$. **332.** $y' = \ln x \cdot x^{\ln x - 1} + x^{\ln x} \cdot \ln x$. **333.** $y'(0) = 4$, $y'(1) = 1$, $y'(-1) = 9$.
334. $3x - 3y + 2 = 0$; $3x + 3y + 4 = 0$. **335.** $x + 2y - 4 = 0$; $2x - y - 3 = 0$. **336.** $x + y - \pi = 0$; $x - y - \pi = 0$. **337.** 17 м/с.
338. 0,13 м/с; 0,026 м/с^2. **339.** 43 ед./ч; -22 ед./ч^2. **340.** $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}$. **341.** $y'' = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right)$. **342.** $y'' = \dfrac{2\operatorname{ctg}x}{\sin^2 x}$. **343.** $y'' = 2\cos 2x$. **344.** $y'' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **345.** $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **346.** $y''' = -4\sin 2x$. **347.** $y''' = -\dfrac{24}{x^5}$. **348.** $y''' = -(x\cos x + 3\sin x)$. **349.** $y''' = -\dfrac{1}{x^2}$. **350.** $y''' = e^{-x}(3 - x)$. **351.** $dy = -\dfrac{2dx}{x^3}$. **352.** $dy = 2x(e)^{x^2}dx$. **353.** $\Delta y = 1{,}12$; $dy = 1{,}1$. **354.** $\Delta y = -\dfrac{1}{3}$; $dy = -0{,}4$.
355. 2,02. **356.** 1,9938. **357.** -4. **358.** 0. **359.** $\dfrac{9}{50}$. **360.** 0,5. **361.** $\dfrac{1}{3}$.
362. Функция возрастает при $x \in (-\infty; -1) \cup (0{,}5; +\infty)$, убывает при $x \in (-1; 0{,}5)$; $y_{max}(-1) = 0$; $y_{min}(0{,}5) = -6{,}75$. **363.** Функция возрастает на всей числовой оси. **364.** Функция убывает при $x \in (-\infty; -1)$, возрастает при $x \in (-1; \infty)$; $y_{min}(-1) = -1/e$. **365.** $y_{\text{наим}}(1) = -3$; $y_{\text{наиб}}(3) = 9$. **366.** $y_{\text{наим}}(\pm 1) = 2$; $y_{\text{наиб}}(-3) = 66$.
367. График функции выпуклый при $x \in (-\infty;\ 0{,}5)$, вогнутый при $x \in (0{,}5;\ +\infty)$; точка перегиба $(0{,}5;\ 14{,}5)$. **368.** График функция выпуклый при $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, вогнутый при $x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right)$; точки перегиба $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$. **369.** График функции выпуклый при $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{3}\right) \cup \left(0;\ \sqrt{3}\right)$, вогнутый при $x \in \left(-\sqrt{3};\ 0\right) \cup \left(\sqrt{3};\ +\infty\right)$; точки перегиба $(-\sqrt{3};\ -\sqrt{3}/2)$, $(0;\ 0)$, $(\sqrt{3};\ \sqrt{3}/2)$.

370. $\mathbb{D}(y) = \mathbb{R}$. Функция общего вида. Точки пересечения с осями координат $(0;\,0)$ и $(-4;,0)$. Асимптот нет. Функция убывает при $x \in (-\infty; -3)$, возрастает при $x \in (-3; +\infty)$; $y_{min}(-3) = -6{,}75$. График функции выпуклый при $x \in (-2; 0)$, вогнутый при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. Точки перегиба: $(-2; -4)$ и $(0; 0)$. $\mathbb{E}(y) = (-6{,}75; +\infty)$. График на рис. 53. **371.** $\mathbb{D}(y) = (-\infty; -2) \cup$

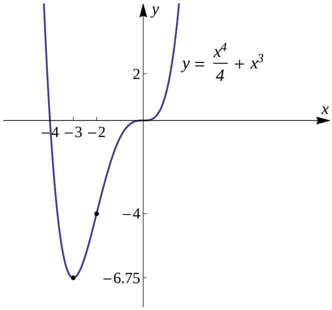


Рис. 53

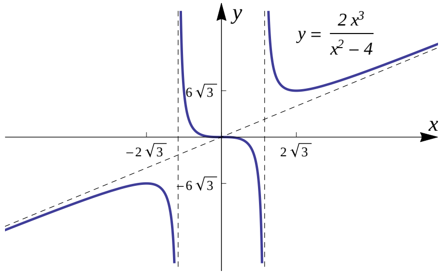


Рис. 54

$\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ = \infty)$. Функция нечетная. Точка пересечения с осями координат $(0;\ 0)$. Асимптоты: $x = -2$, $x = 2$ и $y = 2x$. Функция убывает при $x \in (-2\sqrt{3};\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ 2\sqrt{3})$, возрастает при $x \in (-\infty;\ -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{;\ +\infty})$; $y_{min}(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$, $y_{max}(-2\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$. График выпуклый при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ 2)$, вогнутый при $x \in (-2;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$. Точка перегиба: $(0;\ 0)$. $\mathbb{E}(y) = (-\infty;\ +\infty)$. График на рис. 54. **372.** $dy = 3\sin^2 x \cos x dx$. **373.** $dy = -\operatorname{tg} x dx$. **374.** $\Delta y = 0,41$; $dy = 0{,}4$. **375.** $\Delta y = 0{,}231$; $dy = 0{,}2$. **376.** 3,03. **377.** 7,76. **378.** 0. **379.** 2. **380.** $\frac{1}{2}$. **381.** 1. **382.** $\frac{1}{2}$. **383.** 0. **384.** 1. **385.** $-\frac{1}{3}$. **386.** Функция возрастает при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ 2)$, убывает при $x \in (-2;\ 0) \cup (2;\ +\infty)$; $y_{max}(\pm 2) = 5$, $y_{min}(0) = 1$. **387.** Функция возрастает при $x \in (-\infty;\ 4)$, убывает при $x \in (4;\ +\infty)$; $y_{max}(4) = 1$. **388.** Функция возрастает при $x \in (-\infty;\ 0)$, убывает при $x \in (0;\ +\infty)$; $y_{max}(0) = 1$. **389.** Функция возрастает при $x \in (-1;\ 0)$, убывает при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$; $y_{max}(0) = 1$. **390.** Функция возрастает при

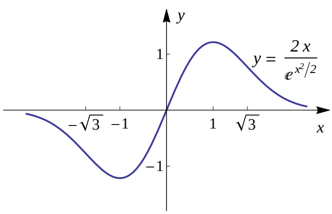


Рис. 55

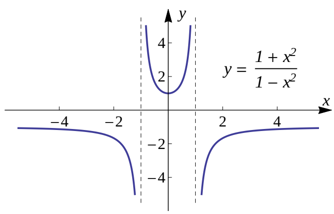


Рис. 56

$x \in \left(0;\ \dfrac{1}{e^2}\right) \cup (1;\ +\infty)$, убывает при $x \in \left(\dfrac{1}{e^2};\ 1\right)$; $y_{max}\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$, $y_{min}(1) = 0$. **391.** $y_{\text{наим}}(2) = -1$; $y_{\text{наиб}}(0) = 3$. **392.** $y_{\text{наим}}(2) = -10$; $y_{\text{наиб}}(0) = 10$. **393.** Функция выпукла при $x \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$, вогнута при $x \in \left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$; точка перегиба $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{2}\right)$. **394.** Функция вогнута при $x \in (-\infty;\ 2)$, выпукла при $x \in (2;\ +\infty)$; точка перегиба $(2;\ 16)$. **395.** Функция вогнута при $x \in \big(-\sqrt{2};\ 0\big) \cup \big(\sqrt{2};\ +\infty\big)$, выпукла при $x \in \big(-\infty;\ -\sqrt{2}\big) \cup \big(0;\ \sqrt{2}\big)$; точки перегиба $\left(-\sqrt{2};\ -\dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\sqrt{2};\ \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)$. **396.** $\mathbb{D}(y) = \mathbb{R}$. Функция нечетная. Точка пересечения с осями координат $(0;\ 0)$. Горизонтальная асимптота $y = 0$. Функция убывает при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$, возрастает при $x \in (-1;\ 1)$; $y_{min}(-1) = -\dfrac{2}{\sqrt{e}}$, $y_{max}(1) = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$. График функции выпуклый при $x \in (-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (0;\ \sqrt{3})$, вогнутый при $x \in (\sqrt{3};\ 0) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$. Точки перегиба: $(-\sqrt{3};\ -2\sqrt{3}e^{-3/2})$, $(\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}e^{-3/2})$. $\mathbb{E}(y) = \left[-\dfrac{2}{\sqrt{e}};\ \dfrac{2}{\sqrt{e}}\right]$. График на рис. 55. **397.** $\mathbb{D}(y) = (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Функция четная. Точка пересечения с осями координат $(0;\ 1)$. Асимптоты: $x = -1$, $x = 1$ и $y = -1$. Функция убывает при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0)$, возрастает при $x \in (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$, $y_{min}(0) = 1$. Функция выпукла при $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$, вогнута при $x \in (-1;\ 1)$. Точек перегиба нет. $\mathbb{E}(y) = (-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$. График на рис. 56. **398.** $y' = 12x^5 + \dfrac{12}{x^5} - \dfrac{12}{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. **399.** $y' = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^5}}$. **400.** $y' = 6x\,(3 - 4\operatorname{tg} x) - \big(3x^2 - 1\big)\,\dfrac{4}{\cos^4 x}$. **401.** $y' = \dfrac{4x^3 \sin x - x^4 \cos x}{\sin^2 x}$. **402.** $y' = \dfrac{14x}{x^2 + 3}$. **403.** $y' = 6x \sin(x^2 - 1)$. **404.** $y' = -\dfrac{3 \arcsin^4 x}{2 \sin^2 3x} + \dfrac{2 \operatorname{ctg} 3x \arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

405. $y' = \dfrac{5 \cos 5x \operatorname{tg}^2 x + \sin 5x \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}}{\operatorname{tg}^4 x}$. **406.** $y' = \dfrac{-6(e^2 + 1)}{\operatorname{arctg}^2 6x(1 + 36x^2)}$.

407. $y' = \dfrac{\dfrac{5\ln(3x+2)}{2\sqrt{5x-7}} - \dfrac{3\sqrt{5x-7}}{3x+2}}{\ln^2(3x+2)}$ **408.** $y'(1) = -16$, $y'(-1) = -8$. **409.** $y'''(\pi/3) = 2\sqrt{3}$. **410.** $v(2) = 22$. **411.** $\operatorname{tg}\alpha = 37/2$. **412.** 25

г/с. **413.** 11 человек. **414.** ∞. **415.** 0. **416.** -1. **417.** а) Функция убывает при $x \in (0;\,2)$, возрастает при $x \in (-\infty;\,0) \cup (2;\,+\infty)$; б) $y_{max}(0) = 2$, $y_{min}(2) = 4/3$; в) $y_{\text{наим}}(2) = 4/3$, $y_{\text{наиб}} = y(0) = y(3) = 2$; г) график функции выпуклый при $x \in (-\infty;\,1)$, вогнутый при $x \in (1, +\infty)$; д) $(1; 5/3)$. **418.** 2,99.

Раздел 5

419. 3. **421.** $z'_x = 2xy - 4\sqrt{y}$, $z'_y = x^2 - 2\dfrac{x}{\sqrt{y}} - 12y$. **422.** $z'_x = \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{y}$, $z'_y = -\dfrac{2x^2}{y^3} + \dfrac{x}{y^2}$. **423.** $z'_x = 2x\operatorname{tg} x + x^2\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $z'_y = \dfrac{2^y \ln 2 \cdot y - 2^y}{y^2} + \dfrac{2y}{x^2+y^2}$. **424.** $z'_x = -y^2 \cdot (2-x)^{y^2-1}$, $z'_y = \ln(2-x) \times 2y \cdot (2-x)^{y^2}$. **425.** $z'_x = y^3\dfrac{2}{2x+3y}$, $z'_y = 3y^2\ln(2x+3y) + y^3\dfrac{3}{2x+3y}$. **426.** В точке $A(2;\,1)$ $z'_x = -1$, $z'_y = 4$. **427.** $z''_{xx} = 4y^3 - 6xy^5 + 1$, $z''_{yy} = 12x^2y - 20x^3y^3$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 12xy^2 - 15x^2y^4 - 1$. **428.** $z''_{xx} = -y^2\sin(xy)$, $x''_{yy} = -x^2\sin(xy)$, $z''_{xy} = x''_{yx} = \cos(xy) - yx\sin(xy)$. **429.** $z''_{xx} = 16x^6y^4e^{x^4y^2} + 12x^2y^2e^{x^4y^2}$, $z''_{yy} = 2x^4e^{x^4y^2} + 4y^2x^8e^{x^4y^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 8x^3ye^{x^4y^2} + 8y^3x^7e^{x^4y^2}$. **430.** $z''_{xx} = \dfrac{10y\sin 2y}{9\sqrt[3]{x^8}}$, $z''_{yy} = \dfrac{4\cos 2y - 4y\sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -\dfrac{2\sin 2y + 4y\cos 2y}{3\sqrt[3]{x^5}}$. **431.** $z''_{xx} = \dfrac{y}{x}$, $z''_{yy} = -\dfrac{x}{y}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \ln\dfrac{x}{y}$. **432.** $z'''_{xxx} = 24y^2$, $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx} = 6y^2 + 48xy$, $z'''_{xyy} = z'''_{yxy} = z'''_{yyx} = 12xy + 24x^2$, $z'''_{yyy} = 6x^2$. **433.** 0. **434.** $-\dfrac{132}{5}$. **435.** $\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$. **436.** а) $2\vec{i} + 4\vec{j}$; б) $2\vec{i} - 3\vec{j}$. **437.** $\sqrt{73}$. **438.** $\sqrt{52}$. **439.** Экстремума нет; точка $(-1;\,2)$ – критическая. **440.** $z_{min}(2;\,1) = -27$, $z_{max}(-2;\,-1) = 29$; критические точки $(1;\,2)$ и $(-1;\,-2)$. **441.** $z_{max}\left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{2}$. **442.** $z_{min}\left(-1;\,\dfrac{8}{3}\right) = -3$. **443.** 5. **444.** 3. **445.** $\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. **446.** $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2$ (рис. 57). **447.** $x+y-5 \neq 0$ (рис. 58). **448.** $4-x^2 \geqslant 0$ и $9-y^2 \geqslant 0$ (рис. 59). **449.** $16-x^2-y^2 \geqslant 0$ (рис. 60). **450.** $x^2+y^2-5 > 0$ (рис. 61). **451.** $4-x^2 \geqslant 0$ (рис. 62). **452.** $z'_x = \dfrac{5x^4}{y} + 14e^{2x}\cos y - 6xy^4 + 2$, $z'_y = -\dfrac{x^5}{y^2} - 7e^{2x}\sin y - 12x^2y^3 - 5$.

453. $z'_x = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} - 2\sin(2x+2y)$, $z'_y = \dfrac{\sin y - y\cos y}{\sin^2 y} - 2\sin(2x+2y)$. **454.** $z'_x = -\dfrac{3x}{\sqrt{1+y^3-3x^2}}$, $z'_y = \dfrac{3y^2}{2\sqrt{1+y^3-3x^2}}$. **455.** $z'_x = 12x^3 \times$ $\times \cos(3x^4y^5)$, $z'_y = 15y^4\cos(3x^4y^5)$. **456.** $z'_x = 2xy(1+x^2)^{y-1}$, $z'_y =$ $= (1+x^2)^y \ln(1+x^2)$. **457.** $z''_{xx} = 12x^2 + 8y^3$, $z''_{yy} = 24x^2y$, $z''_{xy} =$ $= z''_{yx} = 24xy^2 - 7$. **458.** $z''_{xx} = \dfrac{-27x^4 - 72xy^3}{(3x^3-4y^3)^2}$, $z''_{yy} = \dfrac{-72x^3y - 48y^4}{(3x^3-4y^3)^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{108x^2y^2}{(3x^3-4y^3)^2}$. **459.** $z''_{xx} = -2\sin(x^2y^3) - 4x^2\cos(x^2y^3)$, $z''_{yy} = -6y\sin(x^2y^3) - 9x^4\cos(x^2y^3)$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -6xy^2\cos(x^2y^3)$. **460.** $z''_{xy} = 0$. **461.** $z'''_{xxx} = 24x$, $z'''_{xxy} = z'''_{xyx} = z'''_{yxx} = 12y$, $z'''_{xyy} =$ $= z'''_{yxy} = z'''_{yyx} = 12y$, $z'''_{yyy} = -48y$. **462.** $z'_x = 10x^4 - 12x^2y^2 - \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y}{x^2}$, $z'_{xx} = 40x^3 - 24xy^2 - \dfrac{2}{y} + \dfrac{2y}{x^3}$, $z'''_{xxy} = -48x\,y + \dfrac{2}{y^2} + \dfrac{2}{x^3}$; $z''_{xy} = -24x^2y +$ $+ \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}$, $z'''_{xyy} = -24x^2 - \dfrac{4x}{y^3}$. **463.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$. **464.** $\sqrt{2}$. **465.** а) 2; б) $2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{2}$. **466.** а) $2\vec{i} + 3\vec{j}$; б) $18\vec{i} + 24\vec{j}$; в) $4\vec{i} - \vec{j}$. **467.** а) 13; б) $2\sqrt{5}$.

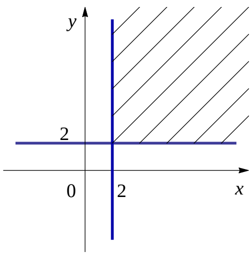


Рис. 57

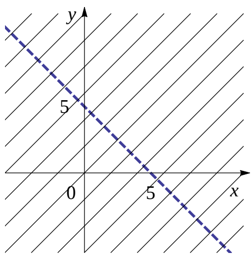


Рис. 58

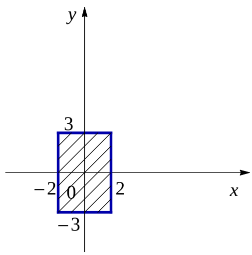


Рис. 59

468. $z_{min}(0;\,1) = -2$. **469.** $z_{min}(5;\,6) = -86$; точка $(1;\,-6)$ – критическая. **470.** $z_{min}(1;\,0{,}5) = 5$; точка $(0;\,0)$ – критическая. **471.** $z_{max}(21;\,20) = 282$. **472.** $z_{max}(-3;\,1) = -2$. **473.** $z_{max}\left(\dfrac{5}{4};\,\dfrac{5}{6}\right) =$ $= \dfrac{25}{24}$. **474.** 0. **475.** $y - x^2 + 6x > 0$; область на рис. 63. **476.**

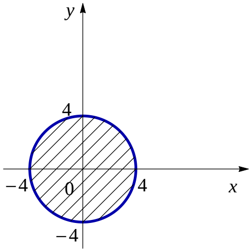


Рис. 60

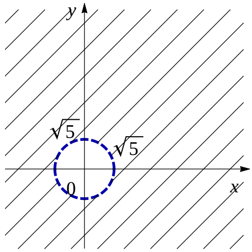


Рис. 61

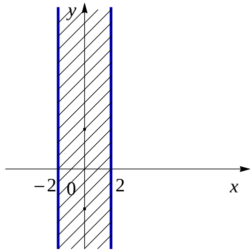


Рис. 62

$z'_x = \dfrac{-1}{1+(x-y^3)^2}$, $z'_y = \dfrac{3y^2}{1+(x-y^3)^2}$. **477.** $z''_{xx} = e^x \ln y - \dfrac{\sin y}{x^2}$, $z''_{yy} = -\dfrac{e^x}{y^2} - \sin y \ln x$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{e^x}{y} + \dfrac{\cos y}{x}$. **478.** $\left.\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\right|_{(1;\,0)} = 12$. **479.** $\dfrac{10x+11y+14}{5}$. **480.** $-\sqrt{2}\cdot(2x+2y+1)$. **481.** $-\dfrac{3}{5}\vec{i}+\dfrac{1}{5}\vec{j}$; $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$. **482.** $z_{max}(1;\,-1) = 6$. **483.** $z_{min}(6;\,0) = -36$; точка $(0;\,0)$ – критическая. **484.** $z_{min}\left(\dfrac{24}{7};\,-\dfrac{12}{7}\right) = \dfrac{48}{7}$.

Раздел 6

485. $\dfrac{4}{3\sqrt[4]{x^3}} - 2\ln x - \dfrac{5}{x} + C$. **486.** $\dfrac{15\sqrt[15]{x^8}}{8} + \dfrac{15\sqrt[3]{x^4}}{4} - 9\sqrt[3]{x} + C$. **487.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| - \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$. **488.** $-x - \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| +$

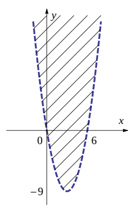


Рис. 63

$+C$. **489.** $x-\dfrac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$. **490.** $\dfrac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3/7}}{x+\sqrt{3/7}}\right|+C$. **491.** $2\ln\left|x+\sqrt{x^2-\dfrac{2}{9}}\right|+C$. **492.** $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{6}x+C$. **493.** $3\arcsin 5x+C$.
494. $\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$. **495.** $-\dfrac{1}{7}\operatorname{tg}(2-7x)+C$. **496.** $\dfrac{1}{5}\ln|5x+2|+C$.
497. $-\dfrac{1}{10}(3-2x)^5+C$. **498.** $-\dfrac{4}{35}\sqrt[4]{(11-5x)^7}+C$. **499.** $-\dfrac{1}{2}e^{7-2x}+$ $+C$. **500.** $\dfrac{2^{9x-1}}{9\ln 2}+C$. **501.** $\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{5}+C$. **502.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|+C$.
503. $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x+2}{3}+C$. **504.** $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$. **505.** $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+7)^4}+C$. **506.** $\dfrac{1}{12}\ln\left|3x^4-2\right|+C$. **507.** $\dfrac{1}{5}\ln|\sin(5x+1)|+C$.
508. $\ln|3-\cos x|+C$. **509.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)+C$. **510.** $\dfrac{2}{15}\sqrt{\sin^5(3x+2)}+$ $+C$. **511.** $-\dfrac{1}{4\ln^2(2x+5)}+C$. **512.** $\dfrac{2}{7}\sqrt{(1+x)^7}-\dfrac{6}{5}\sqrt{(1+x)^5}+$ $+2\sqrt{(1+x)^3}-2\sqrt{1+x}+C$. **513.** $2\sqrt{x+3}-2\ln\left|1+\sqrt{x+3}\right|+C$. **514.** $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **515.** $x\ln(3-2x)-\dfrac{3}{2}\ln|3-2x|-x+C$. **516.** $-\dfrac{1}{3}(5x-2)\cos 3x+\dfrac{5}{9}\sin 3x+C$. **517.** $-\dfrac{1}{7}(3x-2)e^{-7x}-\dfrac{3}{49}e^{-7x}+C$.
518. $x\operatorname{arctg}8x-\dfrac{1}{16}\ln\left|1+64x^2\right|+C$. **519.** $x\arcsin 3x+\dfrac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}+$ $+C$. **520.** $\dfrac{1}{2}(2x-3)\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$. **521.** $-\ln|x+1|+6\ln|x+3|-$ $-2\ln|x+5|+C$. **522.** $2\ln|x-1|-\ln\left|x^2+2x+5\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+C$.
523. $x^2+\ln|x-1|+\ln|x+2|+5\ln|x+3|+C$. **524.** $\dfrac{1}{2(x-1)^2}+$ $+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$. **525.** $-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{7}{2x^2}+5x+C$. **526.** $\dfrac{7\sqrt[7]{x^6}}{6}-$ $-x^2+3\ln x+C$. **527.** $\arcsin x-\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C$. **528.** $\operatorname{arctg}x+x+$ $+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$. **529.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-\dfrac{3}{4}}\right|+C$. **530.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{2}}\right|+$ $+C$. **531.** $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}x}{2}+C$. **532.** $\dfrac{5}{3}\arcsin\dfrac{3x}{2}+C$. **533.** $-\dfrac{1}{7}e^{4-7x}+$ C. **534.** $\dfrac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg}(3^x)+C$. **535.** $-\dfrac{3}{2}\cos\dfrac{2x}{3}+C$. **536.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}(1-2x)+$

$+C$. **537.** $\frac{1}{6}\ln|6x+1|+C$. **538.** $-\frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5}+C$. **539.** $-\frac{2}{\sqrt{2+x}}+C$. **540.** $-\frac{1}{12\,(3x-2)^4}+C$. **541.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$. **542.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$. **543.** $\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+3}\right|+C$. **544.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{\sqrt{2}}+C$. **545.** $-4\ln\left|\cos\frac{x}{4}\right|+C$. **546.** $\ln|5+\sin x|+C$. **547.** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{\ln^4(3x+4)}+C$. **548.** $\frac{1}{14}e^{7x^2}+C$. **549.** $\ln\left|\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right|+C$. **550.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 4x}+$ $+C$. **551.** $-\frac{1}{8}\sin^4(3-2x)+C$. **552.** $-\frac{5}{8}\sqrt{5-4x}+\frac{1}{24}\sqrt{(5-4x)^3}+$ $+C$. **553.** $\frac{1}{6}\sqrt{(2x+1)^3}-\frac{1}{4}(2x+1)+C$. **554.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-$ $6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **555.** $4\sqrt[4]{x}+6\sqrt[6]{x}+24\sqrt[12]{x}+24\ln|\sqrt[12]{x}-1|+C$. **556.** $x\ln x-x+C$. **557.** $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$. **558.** $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **559.** $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$. **560.** $\frac{x^2}{2}\ln(x-1)-$ $-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$. **561.** $x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. **562.** $-2x^2e^{-\frac{x}{2}}-8xe^{-\frac{x}{2}}-16e^{-\frac{x}{2}}+C$. **563.** $\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-x+C$. **564.** $3\,(2+3x)\,e^{\frac{x}{3}}-27e^{\frac{x}{3}}+C$. **565.** $\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$. **566.** $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **567.** $\left(x^2+2x+3\right)\sin x+(2x+2)\cos x-$ $-2\sin x+C$. **568.** $\ln|x+1|+3\ln|x-3|-4\ln|x-2|+C$. **569.** $2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$. **570.** $3\ln|x-1|-$ $-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-2\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **571.** $x^hm+x+2\ln|x+1|+$ $+4\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$. **572.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **573.** $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **574.** $\frac{21}{8}$. **575.** $\frac{21}{2}-\ln 2$. **576.** $-\frac{\ln 5}{12}$. **577.** $\frac{1}{4}$. **578.** 2. **579.** $3e-3$. **580.** $\ln\frac{4}{3}$. **581.** $\frac{98}{3}$. **582.** $\frac{\pi}{4}$. **583.** $\frac{1}{3}$. **584.** $\frac{1}{3}$. **585.** $\frac{272}{15}$. **586.** $\frac{1}{6}$. **587.** $\frac{e-2}{e}$. **588.** 6. **589.** $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$. **590.** $\frac{\pi}{2}-1$. **591.** 9 кв. ед. **592.** $10\frac{2}{3}$ кв.ед. **593.** $\frac{1}{2}$ кв.ед.

594. 9 кв.ед. **595.** 9 кв.ед. **596.** 20. **597.** $\frac{\pi}{6}$. **598.** $\frac{\pi}{36}$. **599.** $\frac{2}{3}$. **600.** $\frac{1}{2}$. **601.** $\frac{16}{3}$. **602.** $\frac{122}{9}$. **603.** $\frac{\pi}{8}$. **604.** $\frac{232}{5}$. **605.** $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$. **606.** 4π. **607.** $2\ln 2 - 1$. **608.** $1 - \frac{2}{e}$. **609.** $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. **610.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **611.** $10\frac{2}{3}$ кв.ед. **612.** $10\frac{2}{3}$ кв.ед. **613.** $\frac{4}{3}$ кв.ед. **614.** $\frac{21}{2}$ кв.ед. **615.** Сходится, равен $-\frac{1}{2}$. **616.** Сходится, равен $\frac{\pi^2}{8}$. **617.** Сходится, равен $\frac{1}{2}$. **618.** Сходится, равен $-\frac{\pi}{4}$. **619.** Сходится, равен $\frac{\pi}{4}$. **620.** Расходится. **621.** Сходиться, равен $\frac{\pi}{2}$. **622.** Сходится, равен $-\frac{5}{16}$. **623.** Расходится. **624.** Сходится, равен $\frac{1}{3}$. **625.** Сходится, равен π. **626.** Сходится, равен $-\frac{1}{5}$. **627.** Расходится. **628.** Сходится, равен $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{11+6\sqrt{2}}{7}$. **629.** Расходится. **630.** Сходится, равен $\frac{1}{4}$. **631.** $\frac{5}{4}$. **632.** Сходится, равен $\frac{\pi}{4}$. **633.** Сходится, равен π. **634.** Сходится, равен $-\frac{\pi^2}{8}$. **635.** Расходится. **636.** Сходится, равен 2. **637.** Расходится. **638.** Сходится, равен $-\frac{5}{16}$. **639.** $\sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{2}} + C$. **640.** $\frac{3}{7}\sqrt[3]{\ln^7 x} + C$. **641.** $\frac{1}{6}e^{6x+9} + C$. **642.** $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$. **643.** $\frac{4}{3}x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \ln|x| + C$. **644.** $-\frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}x - 1}{\sqrt{6}x + 1} \right| + C$. **645.** $\frac{3}{2}\sin(4x+7) + C$. **646.** $-\frac{3}{4}\sqrt{9-8x} + C$. **647.** $-\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C$. **648.** $\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x+7}\right| + C$. **649.** $x\ln(x+2) - x + 2\ln|x+2| + C$. **650.** 36. **651.** $10{,}5 - \ln 2$. **652.** $-\frac{1}{12}\ln 5$. **653.** $\frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4)$. **654.** $\frac{\pi}{4}$. **655.** 2. **656.** $\frac{1}{4}(e^2 - 3)$. **657.** $1 + \frac{1}{3}\cos(6) - \frac{2}{9}\sin(6)$. **658.** $\frac{e^2+1}{4}$. **659.** $\frac{4}{3}$ кв.ед. **660.** $\frac{1}{6}$ кв.ед. **661.** $10\frac{2}{3}$ кв.ед. **662.** 4,5. **663.** $2 + 2\ln 3$.

Раздел 7

664. $y = x^3+x^2+x+C$. **665.** $y = e^x+3x+1$. **666.** $\frac{1}{2}\ln(2y+1) = \ln x - \ln(x+1) + \ln C$ или $2y+1 = \frac{Cx}{x+1}$. **667.** $\ln y = \sqrt{x}+C$ – общее решение, $\ln y = \sqrt{x}-2$ – частное решение. **668.** $\frac{1}{y} = -\frac{1}{x}+C$ – общее решение, $y=-x$ – частное решение. **669.** $\sqrt{y^2+1} = \ln x + C$. **670.** $\operatorname{arctg} y = \ln x + C$. **671.** $\ln y + y = x - \ln x + C$. **672.** $2y^2 = -\operatorname{arctg} x + C$. **673.** $2\sqrt{y} - \ln y = -2\sqrt{x}+C$. **674.** $y = x(x+C)$. **675.** $y = e^x(x+C)$. **676.** $y = \frac{C+\operatorname{tg} x}{\cos x}$ – общее решение, $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$ – частное решение. **677.** $y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$. **678.** $y = x(\frac{x^2}{2}+C)$. **679.** $y = (x+C)(1+x^2)$. **680.** $y = e^x + 5x^4 + C$. **681.** $y = -\cos x + 3x^2 + C$. **682.** $y = x^2+x+3$. **683.** $y = \sin x - \frac{2x}{\pi} + 2$. **684.** $2y^3 = x^3 + C$. **685.** $\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$. **686.** $\sqrt{2y+1} = 2\sin x$. **687.** $\ln y = \ln(x+1) - x$. **688.** $y = \frac{3x+1}{x+1}$. **689.** $y = \frac{x^6+C}{6x^2}$. **690.** $y = \frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$. **691.** $y = x(x\sin x + \cos x + C)$. **692.** $y = \ln x + \frac{C}{x}$. **693.** $y = \frac{x^2}{2} + Ce^{x^2}$. **694.** $y = \sin x + C\cos x$ – общее решение, $y = \sin x + \cos x$ – частное решение. **695.** $y = Cx^3 - x^2$. **696.** $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$. **697.** $y = \frac{x-1}{3} - \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$. **698.** $y = x(\sin x + C)$. **699.** $y = \frac{e^{2x}}{8} + C_1x^2 + C_2x + C_3$. **700.** $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{5x^3}{18} + C_1x + C_2$. **701.** $y = 1 - \cos 2x$. **702.** $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$. **703.** $y = C_1 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C_2$. **704.** $y = C_1e^{x^2} + C_2$. **705.** $y^2 = -C_1x + C_2$. **706.** $y = \frac{1}{1-x}$. **707.** $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. **708.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$. **709.** $y = C_1 + C_2e^{-4x}$. **710.** $y = C_1e^{-x}\cos 2x + C_2e^{-x}\sin 2x$. **711.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x}\cos(3x) + C_3e^{2x}\sin(3x)$. **712.** $y = e^{-x}+2$. **713.** $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{-x} + 5x^2 - 12x + 12$. **714.** $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - x$. **715.** $y = C_1e^x + C_2e^{3x} - 3e^{2x}$. **716.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (2x^3 - 3x^2 + 3x)e^x$. **717.** $y = C_1e^{3x}\cos 2x + C_2e^{3x}\sin 2x + 3$. **718.** $y = \sin 2x + 2x$. **719.** $y = e^x$. **720.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{5}{6}\cos 3x -$

$-\frac{1}{6}\sin 3x$. **721.** $y = 2\cos x + x\sin x$. **722.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$. **723.** $y = C_1x + x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2$. **724.** $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{5}{18}x^3 + C_1x + C_2$. **725.** $y = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{32}\cos 2x$. **726.** $y = x\cos x - 3\sin x + x^2 + 2x$. **727.** $y = -(x+3)e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 + 3$. **728.** $y = C_1\ln x + C_2$. **729.** $y = \frac{x^3}{3} + C_1x^2 + C_2$. **730.** $e^{-y} = = C_1x + C_2$. **731.** $y^3 + C_1y + C_2 = 3x$. **732.** $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$. **733.** $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$. **734.** $y = C_1e^{2x}\cos 2x + C_2e^{2x}\sin 2x$. **735.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$. **736.** $y = e^x$. **737.** $y = C_1 + C_2x + + C_3e^x + C_4e^{-x}$. **738.** $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 3x^2 - 3x - 4{,}5$. **739.** $y = C_1 + C_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$. **740.** $y = C_1e^{x/2} + C_2e^{-x/2} - x^3$. **741.** $y = = C_1e^{-2x}\cos x + C_2e^{-2x}\sin x + x^2 - 8x + 7$. **742.** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + + x^2e^{-x}$. **743.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}$. **744.** $y = C_1e^x + C_2xe^x + + e^2x$. **745.** $y = C_1 + C_2e^{4x} + (4x^2 - 2x)e^{4x}$. **746.** $y = C_1e^{-x}\cos 3x + + C_2e^{-x}\sin 3x + \frac{1}{13}\cos 2x - \frac{3}{26}\sin 2x$. **747.** $y = C_1e^{-x/2}\cos\frac{3}{2}x + + C_2e^{-x/2}\sin\frac{3}{2}x - 6\cos 2x + 8\sin 2x$. **748.** $y = \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$. **749.** $y = C_1 + C_2e^{2x}, z = C_1 - C_2e^{2x}$. **750.** $y = C_1e^{-6x}\cos x + + C_2e^{-6x}\sin x,\ z = (C_1 + C_2)e^{-6x}\cos x - (C_1 - C_2)e^{-6x}\sin x$. **751.** $y = C_1e^x + C_2e^{6x}, z = -C_1e^x + \frac{3}{2}C_2e^{6x}$. **752.** $y = C_1e^x\cos 3x + + C_2e^x\sin 3x,\ z = C_1e^x\cos 3x - C_2e^x\sin 3x$. **753.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, $z = \frac{1}{3}C_1e^{2x} - C_2e^{-2x}$. **754.** $y = C(1+e^x)$. **755.** $\ln\left|\frac{y}{1+y}\right| = -2x + C$. **756.** $\frac{1}{2(\cos y)^2} = 2\ln x + C$. **757.** $y_{\text{общ}} = \frac{x^4 + x^3 + C_1}{x}$, $y_{\text{част}} = x^3 + x^2$. **758.** $y = x - x^2$. **759.** $y = \ln x(x^2 + C)$. **760.** $y = \frac{1}{12(x+2)^3}$. **761.** $y = (x-2)e^x + x + 2$. **762.** $y = C_1x^2 + C_2$. **763.** $\ln(y + \sqrt{y^2 + C_1}) = 2x + + C_2$. **764.** $y - \frac{1}{2}\ln y = x + 1$. **765.** $y_{\text{общ}} = C_1e^x + C_2e^{2x} - \cos x + 2\sin x$, $y_{\text{част}} = e^x + 2e^{2x} - \cos x + 2\sin x$. **766.** $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$. **767.** $y = C_1e^{-4x}\cos x + C_2e^{-4x}\sin x + e^x(2\cos x + \sin x)$. **768.** $y = = C_1e^{3x} + C_2e^{-x},\ z = -2C_1e^{3x} + 2C_2e^{-x}$. **769.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$, $z = \frac{1}{2}C_1e^{3x} - \frac{1}{4}C_2e^{-3x}$.

Приложение I

Основные формулы и соотношения

Разложение на множители

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2,$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3,$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3,$$

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Арифметический корень и его свойства

Если $a \geqslant 0$, то $\sqrt[n]{a} = x$ означает:
1) $x \geqslant 0$;
2) $x^n = a$.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}, \quad \sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot m}} = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a}, \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Степень с рациональным показателем

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{множителей}}, \quad a^1 = a, \quad a^0 = 1\,(a \neq 0),$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\,(a \geqslant 0), \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}\,(a > 0).$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}, \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x,$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Квадратное уравнение и его корни

Квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант.

- Если $D > 0$, уравнение имеет два различных вещественных корня
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$
- Если $D = 0$, уравнение имеет один вещественный корень
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
- Если $D < 0$, уравнение вещественных корней не имеет.

В случае если коэффициент b — четное число,

$$ax^2 + 2kx + c = 0;$$

$$D_1 = k^2 - ac, \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Логарифмы и их основные свойства

Запись $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$; здесь $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$.

Частные случаи: $\lg b$ — сокращенная запись для $\log_{10} b$ — десятичный логарифм; $\ln x$ — сокращенная запись для $\log_e x$ — натуральный логарифм, $e \approx 2{,}7182818284590\ldots$; $ln\, e = 1$, $ln 1 = 0$.

Основные преобразования:

$$\log_a x_1 \cdot x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2,$$

$$\log_a b^p = p \cdot \log_a b,$$

Тригонометрические формулы

1. Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

2. Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

3. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

4. Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов:

Функция	Аргумент						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Приложение II

Свойства и графики элементарных функций

Степенная функция $y = x^\alpha$

Здесь α — любое действительное число. В общем случае степенная функция определена при $x > 0$; она монотонно возрастает, если $\alpha > 0$, и монотонно убывает, если $\alpha < 0$.

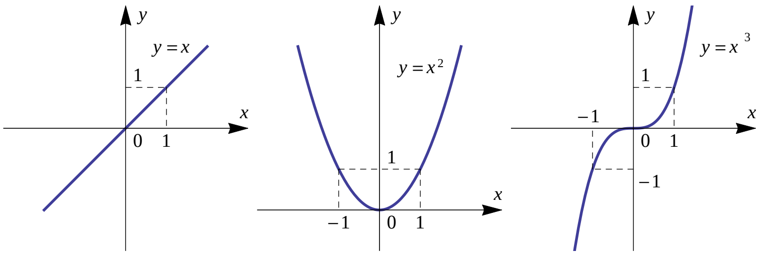


Рис. 64

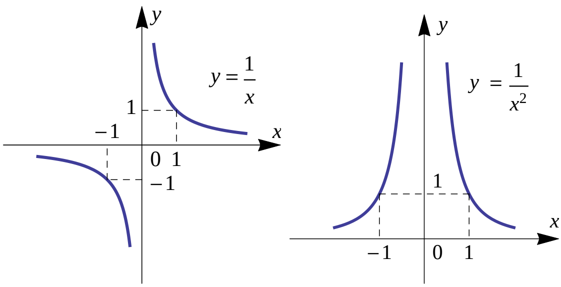


Рис. 65

Частные случаи

1. Если α — целое положительное число, то функция $y = x^\alpha$ определена на всей вещественной оси $-\infty < x < +\infty$. Графики степенной функции при $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ изображены на рис. 64.

2. Если α — целое отрицательное число, то функция x^α определена при всех значениях x, кроме $x = 0$ (рис. 65).

3. Если $\alpha = \frac{p}{q} > 0$ — рациональное число, где q — нечетное, то функция x^α определена на всей вещественной оси , а при четном q функция x^α определена для $x \geqslant 0$. Например, функции $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ и $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, представленные на рис. 66.

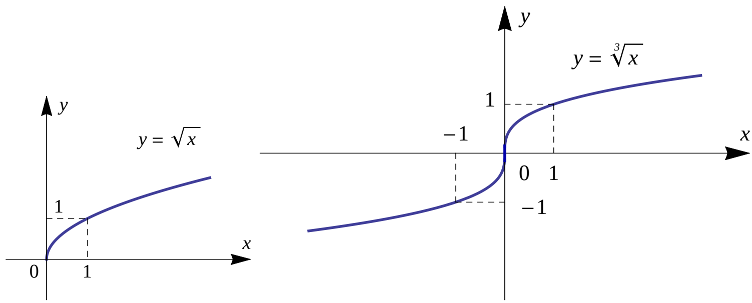


Рис. 66

Показательная функция $y = \alpha^x$ ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$)

Область определения — вся числовая прямая $\mathbb{R}$. Число α называется основанием степени. При $\alpha > 1$ показательная функция монотонно возрастает, а при $0 < \alpha < 1$ — монотонно убывает (рис. 67).

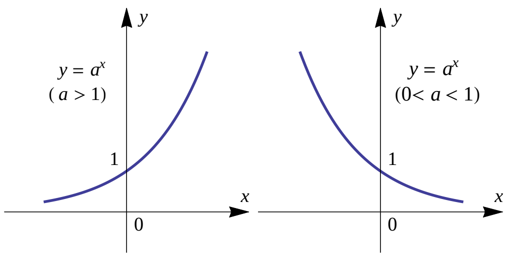


Рис. 67

Логарифмическая функция $y = \log_\alpha x$ $(\alpha > 0, \alpha \neq 1)$

Число α называется *основанием* логарифмической функции. Функция определена для всех $x > 0$. При $\alpha > 1$ логарифмическая функция монотонно возрастает, а при $0 < \alpha < 1$ монотонно убывает (рис. 68).

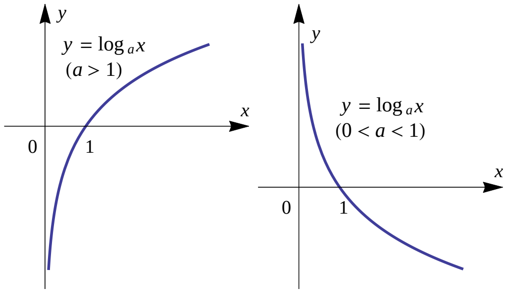


Рис. 68

Логарифмическая функция $y = \log_\alpha x$ является обратной функцией для показательной функции $y = \alpha^x$. Логарифмическую функцию с основанием $\alpha = e$ обозначают $\ln x$ и называют *натуральным логарифмом*, а логарифмическую функцию с основанием $\alpha = 10$ обозначают $\lg x$ и называют *десятичным логарифмом*.

Тригонометрические функции

1. Функция синус $y = \sin x$

Функция определена для всех x, она периодическая с периодом равным $T = 2\pi$. График синуса называют *синусоидой* (рис. 69).

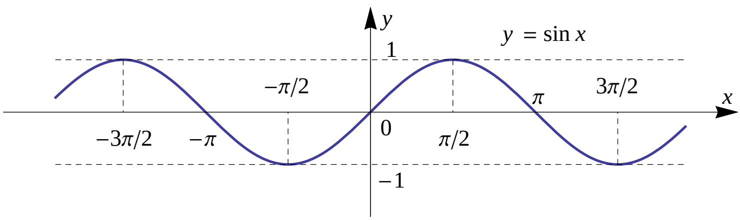


Рис. 69

2. Функция косинус $y = \cos x$

Функция определена для всех x, ее период $T = 2\pi$. График косинуса изображен на рис. 70. График функции $y = \cos x$ получается из графика $y = \sin x$ смещением его вдоль оси Ox влево на отрезок $\frac{\pi}{2}$.

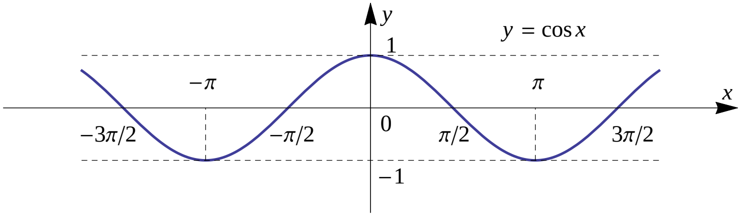


Рис. 70

3. Функция тангенс $y = \operatorname{tg} x$

Функция определена всюду, кроме точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Она периодическая с периодом $T = \pi$. Ее график изображен на рис. 71.

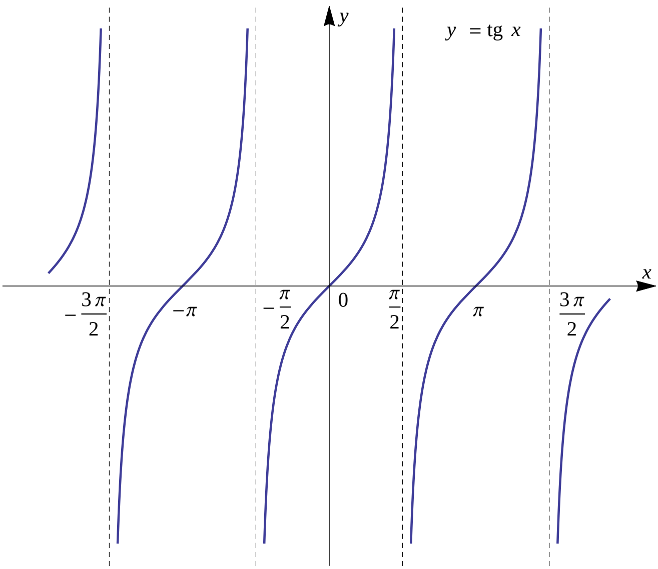


Рис. 71

4. Функция котангенс $y = \operatorname{ctg} x$

Функция определена всюду, кроме точек $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Функция периодическая, $T = \pi$ (рис. 72).

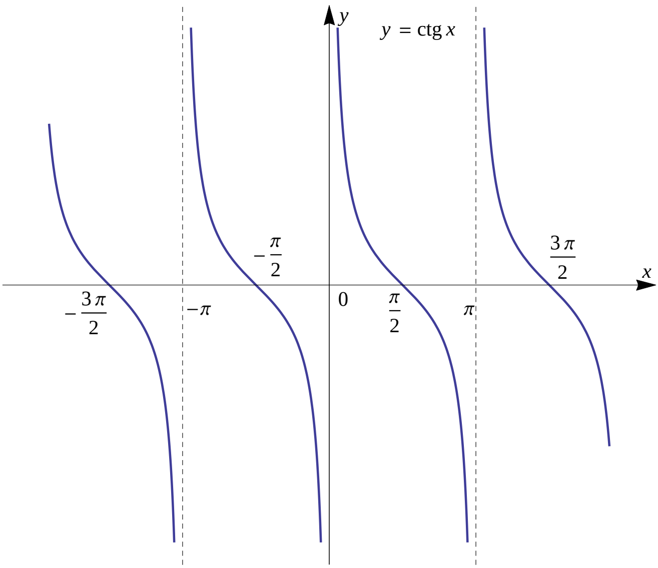


Рис. 72

Обратные тригонометрические функции

1. Функция арксинус $y = \arcsin x$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Значит, она имеет обратную функцию $x = \arcsin y$, которая определена на отрезке $[-1; 1]$, а область ее значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 73.

2. Функция арккосинус $y = \arccos x$

Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$. На этом отрезке функция $y = \cos x$ монотонно убывает, так что она имеет обратную функцию $x = \arccos y$, которая определена на отрезке $[-1; 1]$, а ее значения принадлежат отрезку $[0; \pi]$. График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 74.

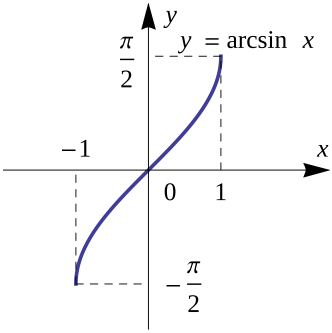


Рис. 73

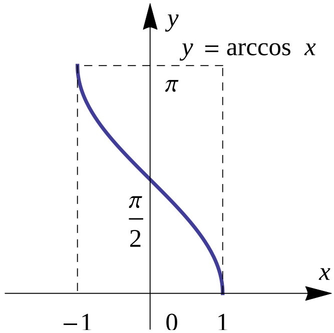


Рис. 74

3. Функция арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. При этих значениях x функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастающая и ее значения изменяются $(-\infty;\ +\infty)$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет обратную, которая обозначается $x = \operatorname{arctg} y$. Она определена на всей числовой оси, а область ее значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 75.

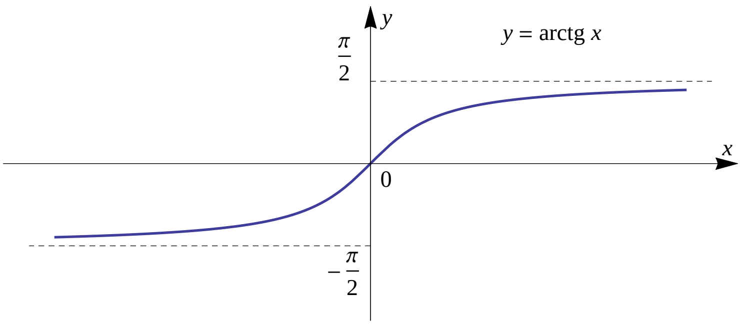


Рис. 75

4. Функция арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на интервале $(0;\ \pi)$. При этих значениях x функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает, а ее значения изменяются $(-\infty;\ +\infty)$. Поэтому она имеет обратную, которая обозначается $x = \operatorname{arcctg} y$. Эта функция определена на всей числовой оси, а ее значения принадлежат интервалу $(0;\ \pi)$. График функции

$y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 76.

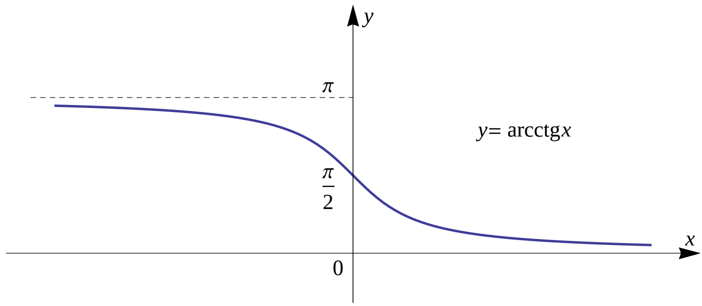


Рис. 76

Гиперболические функции

1. Гиперболический синус $\boldsymbol{y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$

Функция определена на всей числовой оси и является нечетной, т. е. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$. Функция принимает значения $(-\infty;\ +\infty)$. График функции представлен на рис. 77.

2. Гиперболический косинус $\boldsymbol{y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$

Функция определена на всей числовой оси и является четной, т. е. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. Функция принимает значения $(1;\ +\infty)$. График функции представлен на рис. 78.

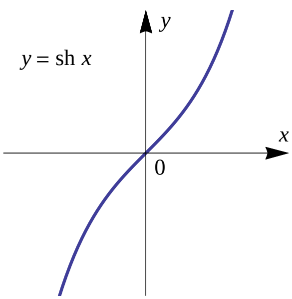


Рис. 77

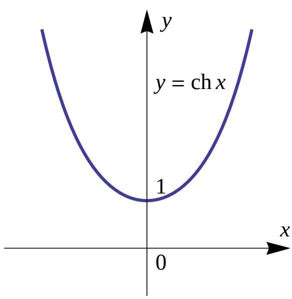


Рис. 78

3. Гиперболический тангенс $\boldsymbol{y = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}$

Функция определена на всей числовой оси и является нечетной. Функция принимает значения $(-1;\ 1)$, т. е. $|\operatorname{th} x| < 1$. График функции представлен на рис. 79.

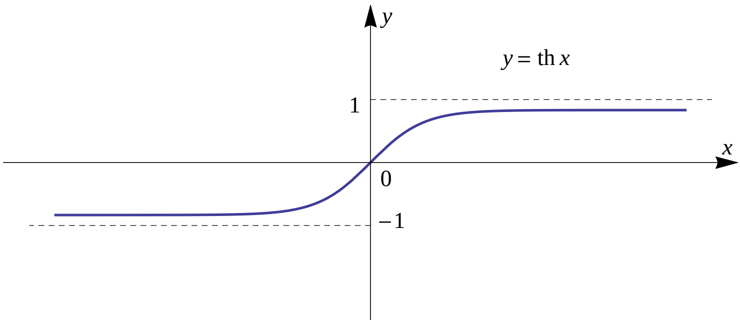


Рис. 79

4. Гиперболический котангенс $\boldsymbol{y = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$

Функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x = 0$, и является нечетной, т. е. $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$. Функция принимает значения $(-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$, т. е. $|\operatorname{cth} x| > 1$. График функции представлен на рис. 80.

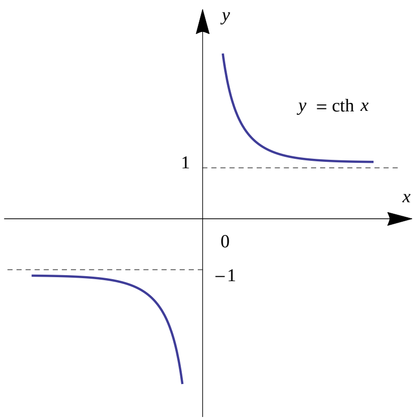


Рис. 80

Библиографический список

1. *Баврин И. И.* Математика: Учебник и практикум. М.: Юрайт, 2017.

2. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2015.

3. *Кудрявцев В. И., Демидович Б. П.* Краткий курс высшей математики. М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2004.

4. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие / ред. А. П. Рябушко. Минск: Вышейшая школа, 1991.

6. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Шикин Е. В., Заляпин В. И.* Вся высшая математика. Т. 1, 2. М.: Едиториал УРСС, 2003.

7. *Гусев В. А., Мордкович А. Г.* Математика: справ. материалы. М.: Просвещение, 1990.

Учебное издание

Ощепкова Наталья Владимировна,
Старостина Лариса Сергеевна

МАТЕМАТИКА
Сборник практических задач

Учебное пособие

Редактор *М. А. Шемякина*
Корректор *Н. А. Антонова*
Техническая подготовка материалов: *Н. В. Ощепкова*

Объем данных 2 Мб
Подписано к использованию 31.08.2018

Размещено в открытом доступе
в электронной мультимедийной библиотеке
ELiS: https://elis.psu.ru

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15