

ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В. П. Максимов

НЕПРЕРЫВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ:

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ
В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. П. Максимов

НЕПРЕРЫВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ:

МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки магистров
«Прикладная математика и информатика»*



Пермь 2021

УДК 517.983.22: 330.4
ББК 22.162
М171

Максимов В. П.

М171 Непрерывные математические модели: множества достижимости в задачах управления с ограничениями [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. П. Максимов ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – 2,52 Мб ; 88 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/maksimov-nepreryvnye-matematicheskie-modeli.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3739-3

Настоящее издание продолжает серию учебных пособий по математическим методам и моделям в экономике для студентов экономического факультета ПГНИУ и содержит материал, охватывающий задачи управления для непрерывных моделей экономической динамики при наличии ограничений на управляющие воздействия. Постановки задач сопровождаются обсуждением их экономического смысла, кратким описанием необходимых теоретических сведений, изложением методов исследования и соответствующих алгоритмов. В центре внимания находятся оценки множеств достижимых значений целевых функционалов. Дается описание алгоритмов построения таких оценок, приводятся иллюстрирующие примеры. Предлагаются варианты задач для самостоятельного исследования. Часть материала повышенной сложности предназначена для использования при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ.

Для студентов направления подготовки магистров «Прикладная математика и информатика».

Ил. 6. Библиогр. 34 назв.

УДК 517.983.22: 330.4
ББК 22.162

*Издается по решению ученого совета экономического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: кафедра функционального анализа Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина (зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук **Е. А. Панасенко**); профессор кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, д-р физ.-мат. наук, профессор **Н. И. Калядин**

ISBN 978-5-7944-3739-3

© ПГНИУ, 2021
© Максимов В. П., 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
1. Множества достижимости для задач управления обыкновенными дифференциальными системами	5
1.1. Задачи управления с общим целевым вектор-функционалом без ограничений на управление.....	5
1.2. Множества достижимости для задач управления с полиэдральными ограничениями на управление.....	11
1.3. Верхние и нижние оценки множеств достижимости.....	13
1.3.1. Верхние оценки.....	13
1.3.2. Нижние оценки.....	14
1.3.3. Примеры.....	16
1.3.4. Реализация алгоритмов с помощью компьютерной системы Maple..	20
1.4. Задачи для самостоятельного исследования.....	47
2. Задачи управления для гибридных систем с дискретной памятью	53
2.1. Задачи управления с общим целевым вектор-функционалом без ограничений на управление.....	54
2.1.1. Описание модели.....	54
2.1.2. Постановка задачи.....	55
2.1.3. Условие разрешимости.....	56
2.2. Верхние оценки множеств достижимости.....	59
2.2.1. Введение.....	59
2.2.2. Основные конструкции.....	60
2.2.3. Иллюстрирующий пример.....	61
2.3. Нижние оценки множеств достижимости, построение программных управлений.....	63
2.3.1. Введение.....	63
2.3.2. Постановка задачи.....	63
2.3.3. Основные конструкции.....	65
2.3.4. Описание алгоритма.....	68
2.3.5. Иллюстрирующий пример.....	70
2.4. Представление решений гибридных систем с дискретной памятью.....	74
Библиографический список	84

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание продолжает серию учебных пособий по математическим методам и моделям в экономике для студентов экономического факультета ПГНИУ [7–10,20–22,30]. Основное внимание уделяется задачам управления для линейных систем управления при наличии ограничений на управляющие воздействия. Рассматривается общий случай задания целей управления с помощью конечного числа линейных целевых функционалов общего вида. Наличие ограничений на управление вызывает необходимость описания множеств значений целевых функционалов, которые достигаются с помощью допустимых управлений. Эти множества называются множествами достижимости. Точное описание множеств достижимости носит теоретический характер и не может быть реализовано алгоритмически, поэтому практический интерес представляют верхние и нижние (по включению) оценки множеств достижимости. В предлагаемом пособии дается описание алгоритмов построения таких оценок. Обсуждаются вопросы построения программных управлений, приводящих к достижимым значениям целевых функционалов. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Материал пособия дополняет основные разделы курсов «Современные математические методы в экономике» и «Непрерывные математические модели», преподаваемых в рамках магистерской программы «Анализ данных и принятие решений в экономике» направления «Прикладная математика и информатика». Часть материала (гл. 2), имеющая повышенную сложность, может быть использована при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ.

В пределах каждого подраздела используется независимая система нумерации утверждений и формул, при ссылке, выходящей за пределы текущего подраздела, дополнительно указывается номер соответствующего подраздела (например: ограничения (3) п. 1.2).

1. МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

В этом разделе описываются основные конструкции, используемые для описания и оценок множеств достижимости при исследовании задач управления относительно заданной системы целевых функционалов для случая линейных обыкновенных систем управления. Освоение материал раздела, составляющего теоретическую основу для самостоятельного исследования типовых задач, позволяет понимать постановку основных задач и алгоритмическую часть подходов к их решению в типовых ситуациях применительно к случаю, когда динамическая модель имеет вид системы линейных автономных дифференциальных уравнений.

1. 1. Задачи управления с общим линейным целевым вектор-функционалом без ограничений на управление

В классической задаче управления для дифференциальной системы

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

требуется найти управление u , переводящее систему из заданного начального состояния $x(0) = \alpha$ в заданное конечное состояние $x(T) = \beta$. Задачам управления для обыкновенных дифференциальных систем и систем с запаздыванием посвящена обширная литература. В этом пособии рассматривается более общая задача управления, в которой цель управления задается системой линейных функционалов, и общая задача достижимости целевых показателей, связанных с такой системой. В случае, когда цель управления достигается не единственным способом, естественным образом возникает задача выбора способа (управления), оптимального в смысле заданного критерия. Упомянутые задачи находят широкое применение в экономической динамике.

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad x = \text{col}\{x_1, \dots, x_n\} \quad (2)$$

рассматривается в предположении, что элементы $(n \times n)$ -матрицы коэффициентов $F(t)$ и элементы свободного члена $f(t)$ суммируемы на отрезке $[0, T]$. Любое решение такой системы принадлежит пространству $AC^n[0, T]$ – пространству абсолютно непрерывных функций $x: [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой, определенной равенством

$$\|x\|_{AC^n} = \|x(0)\| + \int_0^T \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Напомним основные сведения о представлении решений системы (2). Общее решение этой системы имеет представление (так называемая формула Коши)

$$x(t) = X(t)c + X(t) \int_0^t X^{-1}(s)f(s)ds. \quad (3)$$

Здесь $X(t) \cdot c$ – общее решение однородного уравнения, $c = \text{col}\{c_1, \dots, c_n\}$ – вектор произвольных постоянных, $X(t)$ – фундаментальная матрица, столбцы этой матрицы образуют базис пространства решений однородного уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t). \quad (4)$$

Матрицу $X(t)$ можно определить как решение матричной задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(t)X(t), \\ X(0) = E. \end{cases} \quad (5)$$

Для каждого столбца $X_i(t)$ матрицы $X(t)$ имеем

$$\begin{cases} \dot{X}_i(t) = F(t)X_i(t), \\ X_i(0) = e_i, \end{cases}$$

где e_i – i -й столбец единичной $(n \times n)$ -матрицы E .

Замечание 1. Обозначим $X^{-1}(t) = Y(t)$. Запишем тождество $Y(t)X(t) = E$, $t \in [0, T]$. Дифференцируя, получаем $(Y(t)X(t))' = Y'(t)X(t) + Y(t)X'(t) = 0$, далее $Y'(t) = -Y(t)[X'(t)X^{-1}(t)]$. Так как из $\dot{X}(t) = F(t)X(t)$ следует $F(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(t)$, то окончательно

получаем, что $Y(t)$ является решением системы $\dot{Y}(t) = -Y(t)F(t)$. Это позволяет при использовании формулы (4) обойтись без операции обращения матрицы $X(t)$.

Все задачи, предлагаемые в этом пособии для самостоятельного исследования, формулируются для автономных систем линейных дифференциальных уравнений: $F(t) = F$ – постоянная матрица. В этом случае фундаментальная матрица $X(t)$ представляет собой матричную экспоненту: $X(t) = e^{Ft}$. В системе Maple, используемой здесь для реализации алгоритмов, матричная экспонента строится в явном виде одной командой (см. краткое описание системы Maple в п. 2.1 [10]). Все остальные операции линейной алгебры, интегрирования и построения графиков также являются стандартными.

Рассмотрим общую задачу управления для системы (1)

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

$$x(0) = \alpha, \quad \ell x = \beta \in R^N. \quad (7)$$

Здесь управление $u: [0, T] \rightarrow R^r$ – вектор-функция, компоненты которой суммируемы с квадратом (обычно $r < n$), $(n \times r)$ -матрица $G(t)$ «распределяет» компоненты управления по уравнениям системы (6). В этой задаче цель управления формулируется в более общем виде, чем в классической постановке задачи об управлении по конечному состоянию: требуется найти такое управление $u(t)$, что порождаемая им траектория системы (6), удовлетворяющая начальному условию $x(0) = \alpha$, будет доставлять заданному линейному ограниченному вектор-функционалу $\ell: AC^n[0, T] \rightarrow R^N$ заданное векторное значение $\beta \in R^N: \ell x = \beta$. Напомним, что по определению ограниченность ℓ означает существование такой постоянной $M \geq 0$, что

$$\|\ell x\|_{R^N} \leq M \|x\|_{AC^n} \text{ для любого } x \in AC^n[0, T].$$

Приведем примеры конкретных целевых условий.

Примеры

1. В задаче о достижении заданного конечного состояния $x(T) = \beta$ имеем $\ell x \equiv x(T)$.

2. В задаче, где контролируется состояние системы в точках

$\tau_1, \dots, \tau_\nu \in [0, T]$, целевые условия имеют вид $\sum_{i=1}^{\nu} \Lambda_i x(\tau_i) = \beta$ с

заданными матрицами $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$. В таком случае $\ell x \equiv \sum_{i=1}^{\nu} \Lambda_i x(\tau_i)$.

3. Предельный случай предыдущих условий (число контрольных

точек бесконечно): $\int_0^T \Lambda(\tau)x(\tau)d\tau = \beta$, т.е. $\ell x \equiv \int_0^T \Lambda(\tau)x(\tau)d\tau$.

Отметим, что число компонент целевого вектор-функционала – N не связано с размерностью системы n . В реальных прикладных задачах, как правило, $N > n$.

Напомним общий вид вектор-функционала $\ell : AC^n[0, T] \rightarrow R^N$:

$$\ell x = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds, \quad (8)$$

где Ψ – постоянная $(N \times n)$ -матрица, Φ – $(N \times n)$ -матрица-функция с измеримыми и ограниченными элементами.

Задача (6), (7) сводится к задаче о разрешимости системы линейных алгебраических уравнений на основе представления общего решения системы (6) с использованием представления (8). Воспользуемся равенством (3), дающим описание всех возможных траекторий системы (6):

$$x(t) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)G(s)u(s)ds + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Уравнение для искомого управления $u(t)$ получим следующим образом. Применяя к обеим частям этого равенства вектор-функционал ℓ и приравнивая значение ℓx заданному вектору β , получаем

$$\ell x = \ell X \cdot \alpha + \ell \left[X(\cdot) \int_0^{\cdot} X^{-1}(s)G(s)u(s)ds \right] + \ell \left[X(\cdot) \int_0^{\cdot} X^{-1}(s)f(s)ds \right] = \beta. \quad (9)$$

Воспользуемся представлением

$$\ell[X(\cdot) \int_0^{\cdot} X^{-1}(s) f(s) ds] = \int_0^T [P(s) + \Phi(s)] f(s) ds,$$

где

$$P(s) = \int_s^T \Phi(\tau) \dot{X}(\tau) d\tau X^{-1}(s) = \int_s^T \Phi(\tau) F(\tau) X(\tau) d\tau X^{-1}(s).$$

Аналогично,

$$\ell[X(\cdot) \int_0^{\cdot} X^{-1}(s) G(s) u(s) ds] = \int_0^T [P(s) + \Phi(s)] G(s) u(s) ds.$$

Вводя обозначения

$$\Theta(s) = P(s) + \Phi(s), \quad M(s) = \Theta(s) G(s),$$

запишем уравнение (9) в окончательной форме

$$\int_0^T M(s) u(s) ds = \beta_1, \quad (10)$$

где

$$\beta_1 = \beta - \beta_0, \quad \beta_0 = (\Psi + \int_0^T \Phi(s) F(s) X(s) ds) \cdot \alpha + \int_0^T \Theta(s) f(s) ds. \quad (11)$$

Будем искать управление в виде

$$u(t) = M'(s) \delta, \quad \delta \in R^N, \quad (12)$$

где $(\cdot)'$ – символ транспонирования. В таком случае обратимость $(N \times N)$ -матрицы

$$W = \int_0^T M(t) M'(t) dt: \quad \det W \neq 0 \quad (13)$$

гарантирует разрешимость задачи управления (6), (7). При этом если $\delta^* = W^{-1} \beta_1$, то управление

$$u^*(t) = M'(s) \delta^*$$

решает задачу (6), (7), а соответствующая траектория

$$x^*(t) = X(t) \alpha + X(t) \int_0^t X^{-1}(s) G(s) u^*(s) ds + X(t) \int_0^t X^{-1}(s) f(s) ds$$

доставляет целевому вектор-функционалу ℓ заданное векторное

значение β .

Замечание 2. Вернемся к вопросу о форме управления (12). Воспользуемся известным фактом из теории гильбертовых пространств. Пусть H – гильбертово пространство, $P \subset H$ – его замкнутое подпространство, тогда справедливо разложение $H = P \oplus P^\perp$, где P^\perp – ортогональное дополнение к P . Если в качестве P взять $P = \mathcal{L}(M_1', \dots, M_n')$ – линейную оболочку столбцов M_1', \dots, M_n' матрицы $M'(t)$, то ясно, что любой элемент гильбертова пространства $H = L_2'[0, T]$ можно представить в виде

$$u(t) = M'(t)\delta + v(t), \quad (14)$$

где $v \in L_2'[0, T]$ – такой элемент, что $\int_0^T M(s)v(s)ds = 0$. Таким образом, формулой

$$u(t) = u^*(t) + v(t) \quad (15)$$

описывается все множество управлений, решающих задачу (6),(7), второе слагаемое в правой части (15) называют «ортогональной добавкой».

Отметим, что среди всех управлений, решающих задачу (6),(7), управление $u^*(t)$ имеет минимальную норму. Действительно,

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= (u, u) = (u^* + v, u^* + v) = (u^*, u^*) + 2(u^*, v) + (v, v), \\ \text{где } (u^*, v) &= 0, \quad \text{поэтому } \|u\|^2 = (u^*, u^*) + (v, v) = \\ &= \|u^*\|^2 + \|v\|^2 \geq \|u^*\|^2. \end{aligned}$$

Замечание 3. Описываемые в этом разделе конструкции сводят задачу управления (6),(7) к проблеме моментов (10), которая при условии (12) разрешима при любой правой части $\beta_1 \in R^N$, включающей в качестве слагаемых заданное целевое значение β и слагаемые, зависящие от начального значения α и возмущения $f(t)$ системы управления (6).

Алгоритм исследования задачи управления содержит следующие основные этапы: 1) построение фундаментальной

матрицы X , 2) построение матриц $P(s), \Theta(s), M(s)$, 3) построение матрицы W , 4) исследование матрицы W на обратимость и построение обратной матрицы в случае ее существования, 5) построение управления u^* , 6) построение траектории, на которой достигаются заданные целевые значения.

1. 2. Множества достижимости для задач управления с полиэдральными ограничениями на управление

Как было отмечено в предыдущем разделе, при отсутствии ограничений на управление и условия (13) задача управления (6),(7) разрешима при любых заданных целевых значениях β , другими словами, любые значения β являются достижимыми. Ситуация существенно меняется, если управляющие воздействия стеснены ограничениями. Мы здесь рассматриваем случай полиэдральных поточечных ограничений относительно управления u : допустимыми являются управления, удовлетворяющие системе линейных неравенств

$$\Lambda \cdot u(t) \leq \gamma, \quad t \in [0, T],$$

где заданы Λ – постоянная $(N_1 \times r)$ -матрица и $\gamma \in R^{m_1}$. Предполагается, что множество V всех решений системы неравенств $\Lambda \cdot v \leq \gamma$ непусто и ограничено.

Определение. Множество S всех таких $\beta \in R^N$, что задача управления

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = \alpha, \quad \ell x = \beta \in R^N \quad (2)$$

с ограничениями

$$\Lambda \cdot u(t) \leq \gamma, \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

разрешима, называется множеством достижимости в задаче (1)–(3).

Используя конструкции предыдущего раздела, запишем задачу (1)–(3) в виде обобщенной проблемы моментов [5]

$$\int_0^T M(s)u(s)ds = \beta_1, \quad \Lambda \cdot u(t) \leq \gamma, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

(см. (10),(11) п. 1.1).

Теперь задача состоит в описании всех значений вектора β_1 , для которых задача (4) имеет решение, т.е. найдется допустимое управление $u(t)$, доставляющее интегралу $\int_0^T M(s)u(s)ds$ значение β_1 .

Для описания множества достижимости введем в рассмотрение семейство задач линейного программирования. Зафиксируем $s \in [0, T]$, $\mu \in R^m$ и поставим задачу

$$y(s, \mu) = \mu' \cdot M(s) \cdot v \rightarrow \max, \quad v \in V. \quad (5)$$

Будем предполагать, что каждая такая задача имеет единственное решение

$$w(s, \mu) = \arg \max_{v \in V} \mu' \cdot M(s) \cdot v. \quad (6)$$

Определим множество S равенством

$$S = \{\rho \in R^N : \mu' \rho \leq \int_0^T \mu' \cdot M(t) \cdot w(t, \mu) dt \quad \forall \mu \in R^m\}. \quad (7)$$

В предположении кусочной непрерывности матрицы $M(\cdot)$ на $[0, T]$ критерий разрешимости задачи (4) дает следующая теорема.

Теорема 1 (теорема 7.1 [5]). Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (4) является принадлежность β_1 множеству S .

Возвращаясь к исходной постановке задачи управления с полиэдральными ограничениями (1)–(3), сформулируем результат о множестве достижимости в этой задаче.

Теорема 2. Вектор целевых значений β принадлежит множеству достижимости в задаче (1)–(3) тогда и только тогда, когда

$$(\beta - \beta_0) \in S, \quad (8)$$

где

$$\beta_0 = (\Psi + \int_0^T \Phi(s)F(s)X(s)ds) \cdot \alpha + \int_0^T [\Phi(s) + \int_s^T \Phi(\tau)F(\tau)X(\tau)d\tau X^{-1}(s)] f(s)ds. \quad (9)$$

Точное описание множества достижимости носит теоретический характер и требует решения всего бесконечного семейства задач линейного программирования (5). Представляющие практический интерес верхние и нижние оценки множества достижимости предлагаются в следующих разделах.

1.3. Верхние и нижние оценки множеств достижимости

1.3.1. Верхние оценки. Для получения верхних оценок множества достижимости воспользуемся конечной совокупностью задач линейного программирования. Фиксируем целое положительное число K , набор векторов $\{\mu_1, \dots, \mu_K\}, \mu_k \in R^N$ и разбиение $\{0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{\sigma-1} < \tau_\sigma = T\}$ основного промежутка $[0, T]$ точками τ_j . Каждой паре $(k, j), k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, \sigma - 1$ ставим в соответствие решение соответствующей задачи линейного программирования:

$$w_{kj} = \arg \max(\mu_k' \cdot M(\tau_j) \cdot v : v \in \mathcal{V}), k = 1, \dots, K, j = 1, \dots, \sigma - 1. \quad (1)$$

Этот набор экстремальных угловых точек используется для мажорирования интегралов $\int_0^T \mu_k' \cdot M(t) \cdot w(t, \mu_k) dt$: находятся такие неотрицательные δ_k , что для каждого k выполняется неравенство

$$\int_0^T \mu_k' \cdot M(t) \cdot w(t, \mu_k) dt \leq q_k = \int_0^T \mu_k' \cdot M(t) \cdot \sum_{j=1}^{\sigma} w_{kj} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t) dt + \delta_k.$$

По числам q_k определяется многогранник

$$\bar{S} = \{\rho \in R^N : \mu_k' \cdot \rho \leq q_k, \quad k = 1, \dots, K\},$$

дающий оценку сверху по включению для множества S : $\bar{S} \supset S$.

Замечание 1. Точность получаемой оценки множества S зависит от разбиения основного промежутка $[0, T]$ и «разнообразия» используемых направлений μ_k , которые вместе с матрицей $M(t)$ определяют градиент целевой функции в соответствующей задаче линейного программирования. Представляется целесообразным относительно точности оценки начинать с набора всевозможных векторов μ_k , каждая координата которых принимает одно из трех значений 0, 1, -1, при этом из набора исключается вектор с нулевыми координатами. При необходимости уточнения оценки в исходный набор добавляются полусуммы каждых двух различных векторов исходного набора, затем так же можно поступить с новым набором и т.д.

Замечание 2. В практическом смысле полученные верхние оценки могут быть использованы в отрицательном смысле: по построению, если вектор $(\beta - \beta_0)$ не принадлежит множеству \bar{S} , то целевое значение β не является достижимым с помощью допустимых управлений. В прикладных задачах этот факт помогает принять решение либо об изменении заданного целевого значения, либо об ослаблении ограничений (см. (3) п. 1.2).

1.3.2. Нижние оценки. Нижние по включению оценки множеств достижимости могут быть получены с использованием кусочно-постоянных допустимых управлений. Дадим описание соответствующих конструкций.

Используя значения w_{kj} , определенные равенством (1), построим программные управления $u(t, \mu_k)$ по правилу:

$$u(t, \mu_k) = \sum_{j=1}^{\sigma} w_{jk} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t). \quad (2)$$

По построению такие управления являются допустимыми, им соответствующую значения

$$\rho_k = \int_0^T M(t) \cdot u(t, \mu_k) dt, \quad k = 1, \dots, K \quad (3)$$

в пространстве целевых значений. Выпуклая оболочка таких точек дает внутреннюю оценку \underline{S} для множества S :

$$\underline{S} = \text{Conv}(\{\rho_1, \dots, \rho_K\}) \subset S.$$

Действительно, пусть

$$\rho = \sum_{k=1}^K \omega_k \rho_k, \quad \text{где } \omega_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^K \omega_k = 1.$$

Покажем, что управление

$$u_{\rho}(t) = \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{j=1}^{\sigma} w_{jk} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t) dt$$

является допустимым. Для любого $j \in \{1, 2, \dots, \sigma\}$ имеем

$$\Lambda \cdot w_{jk} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t) \leq \gamma$$

и

$$\omega_k \cdot \Lambda \cdot w_{jk} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t) \leq \omega_k \cdot \gamma.$$

Суммируя почленно эти неравенства, получаем

$$\sum_{k=1}^{\sigma} \omega_k \cdot \Lambda \cdot w_{jk} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t) \leq \sum_{k=1}^{\sigma} \omega_k \cdot \gamma$$

или,

$$\Lambda \cdot \sum_{k=1}^{\sigma} \omega_k w_{jk} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t) \leq \gamma \sum_{k=1}^{\sigma} \omega_k = \gamma.$$

Обратимся теперь к построению программных управлений для таких целевых значений β , что $(\beta - \beta_0) \in \underline{S}$.

По построению, каждое ρ_k является достижимым значением

для $\beta_1 = (\beta - \beta_0)$. С другой стороны, в силу выпуклости множества \underline{S} каждая точка $\rho \in \underline{S}$ представима в виде выпуклой комбинации точек $\rho_k : \rho = \sum_{k=1}^K \omega_k \rho_k$, где $\omega_k \geq 0, \sum_{k=1}^K \omega_k = 1$. Управление

$$u_\rho(t) = \sum_{k=1}^K \omega_k \sum_{j=1}^{\sigma} w_{jk} \chi_{[\tau_{j-1}, \tau_j)}(t) dt \quad (4)$$

является допустимым и доставляет интегралу $\int_0^T M(t)u(t)dt$ значение ρ .

1.3.3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу управления

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.01 \\ -0.02 & 0.7 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} u(t), \quad t \in [0, 4], \quad (5)$$

$$x(0) = 0, \quad \ell x \equiv \int_0^4 \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} x(t) dt = \beta, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u(t) \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t)), u(t) = \text{col}(u_1(t), u_2(t))$.

Для получения верхних оценок множества достижимости построим матрицу $M(t)$. Покажем, что в данном случае она имеет вид

$$M(t) = P \int_t^4 X(s) ds X^{-1}(t) G, \quad (8)$$

где $P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$ – матрица интегрального целевого вектор-функционала. С учетом начальных условий имеем представление всех решений системы (5):

$$x(t) = X(t) \int_0^t X^{-1}(s) G u(s) ds.$$

Воспользуемся этим представлением и запишем интегральный вектор-функционал в форме, зависящей только от управления $u(t)$:

$$\int_0^4 Px(t) dt = \int_0^4 PX(t) \int_0^t X^{-1}(s) G u(s) ds dt.$$

Меняя в повторном интеграле порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^4 Px(t) dt = \int_0^4 [P \int_s^4 X(t) dt X^{-1}(s) G] u(s) ds,$$

т.е. имеет место представление (8), которым можно воспользоваться.

$$\text{Фундаментальная матрица системы (5)} X(t) = \begin{pmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} X_{11}(t) &= 0.999 \exp(0.3t) + 0.001 \exp(0.7t), \\ X_{12}(t) &= -0.025 \exp(0.7t) + 0.025 \exp(0.3t), \\ X_{21}(t) &= -0.050 \exp(0.7t) + 0.050 \exp(0.3t), \\ X_{22}(t) &= 0.001 \exp(0.3t) + 0.999 \exp(0.7t). \end{aligned}$$

Здесь и ниже числовые значения приводятся с точностью до 0.001.

$$\text{Найдем обратную матрицу } X^{-1}(t) = Y(t) = \begin{pmatrix} Y_{11}(t) & Y_{12}(t) \\ Y_{21}(t) & Y_{22}(t) \end{pmatrix}:$$

$$\begin{aligned}
Y_{11}(t) &= 0.001 \exp(-0.7t) + 0.999 \exp(-0.3t), \\
Y_{12}(t) &= 0.025 \exp(-0.3t) - 0.025 \exp(-0.7t), \\
Y_{21}(t) &= 0.050 \exp(-0.3t) - 0.050 \exp(-0.7t), \\
Y_{22}(t) &= 0.999 \exp(-0.7t) + 0.001 \exp(-0.3t).
\end{aligned}$$

В результате вычислений для элементов $M_{ij}(t)$ матрицы $M(t)$ получаем

$$\begin{aligned}
M_{11}(t) &= -0.629 + 0.998 \exp(0.3t) + 5.406 \exp(-0.7t); \\
M_{12}(t) &= 0.505 + 1.437 \exp(-0.3t) + 1.178 \exp(-0.7t); \\
M_{21}(t) &= -0.658 + 1.659 \exp(-0.3t) + 2.589 \exp(-0.7t); \\
M_{22}(t) &= -0.755 + 2.390 \exp(-0.3t) + 0.564 \exp(-0.7t).
\end{aligned}$$

Далее применение алгоритма построения внешней оценки для случая $K = 16$ дает результат, представленный на рис. 1. Граница построенного многогранника выделена утолщенной линией.

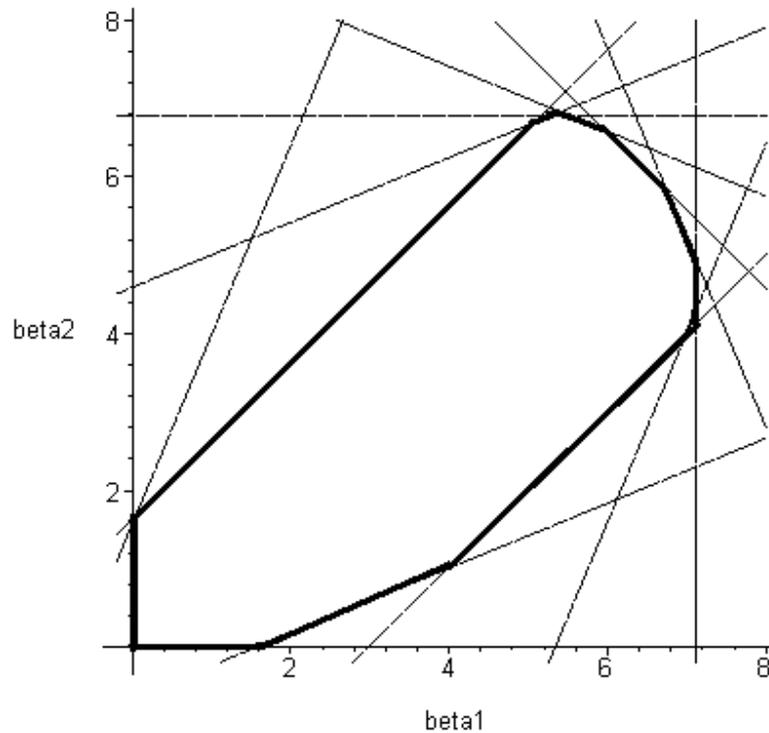


Рис. 1.

Пример 2. Получим для задачи (5)-(7) нижнюю оценку множества достижимости. Для сравнения с верхней оценкой,

полученной в Примере 1, сохраним значение $K = 16$. Следуя алгоритму, изложенному в п. 1.3.2, построим совокупность точек, достижимых на кусочно-постоянных управлениях (2), где разбиение основного промежутка $[0, 4]$ произведено равномерно с шагом 0.5. Эти точки показаны на рис. 2.

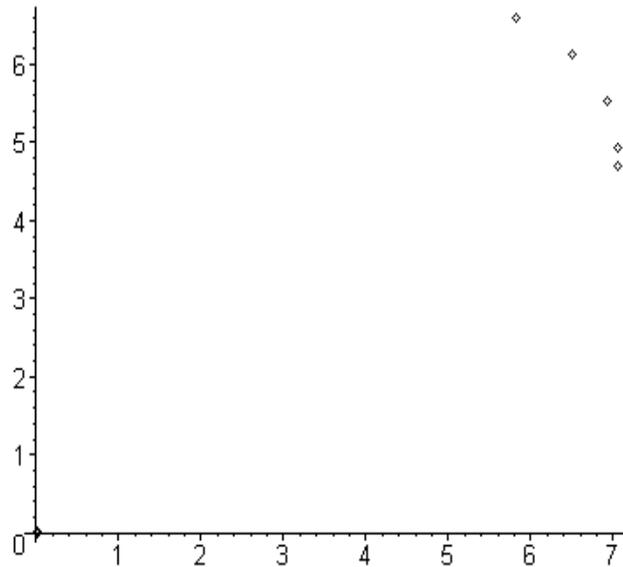


Рис. 2.

Выпуклая оболочка этих точек представлена на рис. 3.

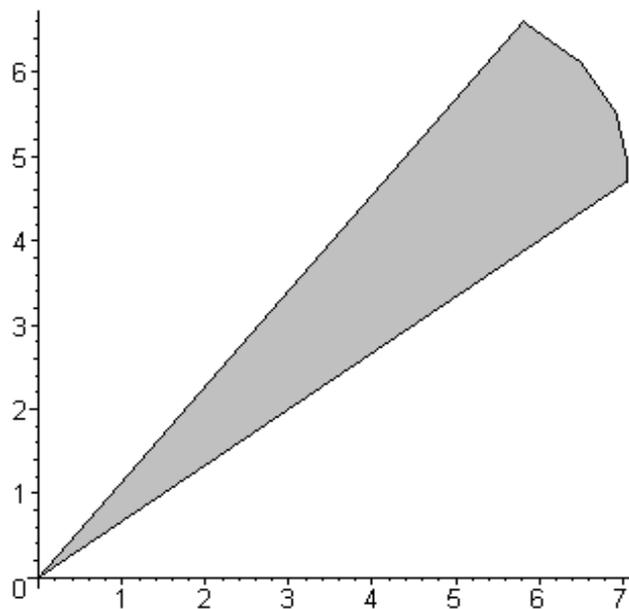


Рис. 3.

1.3.4. Реализация алгоритмов с помощью компьютерной системы Maple. Здесь приводится подробная запись алгоритмов для примеров п. 1.3.1 с краткими пошаговыми пояснениями. Краткое описание системы Maple и ссылки на учебные пособия по этой системе можно найти в [10]. Проведение самостоятельного исследования задач п. 1.4 требует некоторой модификации приведенного кода.

Пример 1

1. Загрузка используемых пакетов линейной алгебры, графики и линейного программирования:

```
> with(linalg) :
```

```
> with(plots) :
```

```
> with(simplex) ;
```

2. Ввод исходных данных:

```
> F:=array ([[0.3, -0.01], [-0.02, 0.7]]);
```

$$F := \begin{bmatrix} 0.3 & -0.01 \\ -0.02 & 0.7 \end{bmatrix}$$

```
> G:=array ([[0.2, 0.3], [0.4, 0.1]]);
```

$$G := \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$$

```
> P:=array ([[0.4, 0.6], [0.7, 0.3]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

3. Построение фундаментальной матрицы (потребуется два обозначения аргумента: t и s):

```
> Xt:=exponential(F, t) ;
```

$X_t :=$

$$\begin{aligned} & [0.9987546679 e^{(0.2995006234 t)} + 0.001245332052 e^{(0.7004993766 t)}, \\ & -0.02493773340 e^{(0.7004993766 t)} + 0.02493773340 e^{(0.2995006234 t)}] \\ & [-0.04987546680 e^{(0.7004993766 t)} + 0.04987546680 e^{(0.2995006234 t)}, \\ & 0.0012453319 e^{(0.2995006234 t)} + 0.9987546681 e^{(0.7004993766 t)}] \end{aligned}$$

> **Xs:=exponential(F, s);**

$X_s :=$

$$\begin{aligned} & [0.9987546679 e^{(0.2995006234 s)} + 0.001245332052 e^{(0.7004993766 s)}, \\ & -0.02493773340 e^{(0.7004993766 s)} + 0.02493773340 e^{(0.2995006234 s)}] \\ & [-0.04987546680 e^{(0.7004993766 s)} + 0.04987546680 e^{(0.2995006234 s)}, \\ & 0.0012453319 e^{(0.2995006234 s)} + 0.9987546681 e^{(0.7004993766 s)}] \end{aligned}$$

4. Построение обратной матрицы:

> **Yt:=exponential(F, -t);**

$Y_t :=$

$$\begin{aligned} & [0.9987546679 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.001245332052 e^{(-0.7004993766 t)}, \\ & -0.02493773340 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.02493773340 e^{(-0.2995006234 t)}] \\ & [-0.04987546680 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.04987546680 e^{(-0.2995006234 t)}, \\ & 0.0012453319 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.9987546681 e^{(-0.7004993766 t)}] \end{aligned}$$

5. Построение компонент интегрального сомножителя в представлении (8) (п.1.3.3) моментной матрицы $M(t)$:

> **Zt[1,1]:=int(Xs[1,1], s= t..4);**

$$Z_{t,1} := -3.334733185 e^{(0.2995006234 t)} - 0.00177777531 e^{(0.7004993766 t)} + 11.07890374$$

> **Zt[1,2]:=int(Xs[1,2], s= t..4);**

$$Z_{t,2} := 0.03559993661 e^{(0.7004993766 t)} - 0.08326437894 e^{(0.2995006234 t)} - 0.3107031287$$

> **Zt[2,1]:=int(Xs[2,1], s= t..4);**

$$Z_{t,1} := 0.07119987321 e^{(0.7004993766 t)} - 0.1665287579 e^{(0.2995006234 t)} - 0.6214062574$$

> **Zt[2,2]:=int(Xs[2,2], s= t..4);**

$$Z_{t,2} := -0.004158027739 e^{(0.2995006234 t)} - 1.425775242 e^{(0.7004993766 t)} + 23.50702889$$

6. Матрица интегрального сомножителя:

> **Zt:=array([[Zt[1,1], Zt[1,2]], [Zt[2,1], Zt[2,2]]]);**

$Z_t :=$

$$\begin{aligned} & [-3.334733185 e^{(0.2995006234 t)} - 0.001777777531 e^{(0.7004993766 t)} + 11.07890374 , \\ & 0.03559993661 e^{(0.7004993766 t)} - 0.08326437894 e^{(0.2995006234 t)} - 0.3107031287] \\ & [0.07119987321 e^{(0.7004993766 t)} - 0.1665287579 e^{(0.2995006234 t)} - 0.6214062574 , \\ & -0.004158027739 e^{(0.2995006234 t)} - 1.425775242 e^{(0.7004993766 t)} + 23.50702889] \end{aligned}$$

7. Вычисление моментной матрицы:

$> \mathbf{Mt} := \text{multiply}(\mathbf{P}, \mathbf{Zt}, \mathbf{Yt}, \mathbf{G}) ;$

$Mt :=$

$$\begin{aligned} & [0.2 (-1.433810529 e^{(0.2995006234 t)} + 0.04200881292 e^{(0.7004993766 t)} + 4.058717742) \\ & (0.9987546679 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.001245332052 e^{(-0.7004993766 t)}) + 0.2 \\ & (-0.8412251706 e^{(0.7004993766 t)} - 0.03580056822 e^{(0.2995006234 t)} + 13.97993608) \\ & (-0.04987546680 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.04987546680 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.4 \\ & (-1.433810529 e^{(0.2995006234 t)} + 0.04200881292 e^{(0.7004993766 t)} + 4.058717742) \\ & (-0.02493773340 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.02493773340 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.4 \\ & (-0.8412251706 e^{(0.7004993766 t)} - 0.03580056822 e^{(0.2995006234 t)} + 13.97993608) \\ & (0.0012453319 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.9987546681 e^{(-0.7004993766 t)}) , 0.3 \\ & (-1.433810529 e^{(0.2995006234 t)} + 0.04200881292 e^{(0.7004993766 t)} + 4.058717742) \\ & (0.9987546679 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.001245332052 e^{(-0.7004993766 t)}) + 0.3 \\ & (-0.8412251706 e^{(0.7004993766 t)} - 0.03580056822 e^{(0.2995006234 t)} + 13.97993608) \\ & (-0.04987546680 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.04987546680 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.1 \\ & (-1.433810529 e^{(0.2995006234 t)} + 0.04200881292 e^{(0.7004993766 t)} + 4.058717742) \\ & (-0.02493773340 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.02493773340 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.1 \\ & (-0.8412251706 e^{(0.7004993766 t)} - 0.03580056822 e^{(0.2995006234 t)} + 13.97993608) \\ & (0.0012453319 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.9987546681 e^{(-0.7004993766 t)})] \\ & [0.2 (-2.384271857 e^{(0.2995006234 t)} + 0.02011551769 e^{(0.7004993766 t)} + 7.568810741) \\ & (0.9987546679 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.001245332052 e^{(-0.7004993766 t)}) + 0.2 \\ & (-0.4028126170 e^{(0.7004993766 t)} - 0.05953247358 e^{(0.2995006234 t)} + 6.834616477) \\ & (-0.04987546680 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.04987546680 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.4 \\ & (-2.384271857 e^{(0.2995006234 t)} + 0.02011551769 e^{(0.7004993766 t)} + 7.568810741) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-0.02493773340 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.02493773340 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.4 \\
& (-0.4028126170 e^{(0.7004993766 t)} - 0.05953247358 e^{(0.2995006234 t)} + 6.834616477) \\
& (0.0012453319 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.9987546681 e^{(-0.7004993766 t)}), 0.3 \\
& (-2.384271857 e^{(0.2995006234 t)} + 0.02011551769 e^{(0.7004993766 t)} + 7.568810741) \\
& (0.9987546679 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.001245332052 e^{(-0.7004993766 t)}) + 0.3 \\
& (-0.4028126170 e^{(0.7004993766 t)} - 0.05953247358 e^{(0.2995006234 t)} + 6.834616477) \\
& (-0.04987546680 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.04987546680 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.1 \\
& (-2.384271857 e^{(0.2995006234 t)} + 0.02011551769 e^{(0.7004993766 t)} + 7.568810741) \\
& (-0.02493773340 e^{(-0.7004993766 t)} + 0.02493773340 e^{(-0.2995006234 t)}) + 0.1 \\
& (-0.4028126170 e^{(0.7004993766 t)} - 0.05953247358 e^{(0.2995006234 t)} + 6.834616477) \\
& (0.0012453319 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.9987546681 e^{(-0.7004993766 t)})]
\end{aligned}$$

8. Поэлементное упрощение моментной матрицы:

$$\begin{aligned}
& > \mathbf{MMt}[1,1] := \mathbf{simplify}(\mathbf{Mt}[1,1]); \\
& MM_{1,1} := -0.6291706387 + 0.104 \cdot 10^{-10} e^{(-0.4009987532 t)} + 0.1 \cdot 10^{-11} e^{(0.4009987532 t)} \\
& \quad + 0.9976337783 e^{(-0.2995006234 t)} + 5.406084202 e^{(-0.7004993766 t)} \\
& > \mathbf{MMt}[1,2] := \mathbf{simplify}(\mathbf{Mt}[1,2]); \\
& MM_{1,2} := -0.5052430888 - 0.374 \cdot 10^{-10} e^{(-0.4009987532 t)} - 0.1 \cdot 10^{-10} e^{(0.4009987532 t)} \\
& \quad + 1.437138226 e^{(-0.2995006234 t)} + 1.178470704 e^{(-0.7004993766 t)} \\
& > \mathbf{MMt}[2,1] := \mathbf{simplify}(\mathbf{Mt}[2,1]); \\
& MM_{2,1} := -0.6577693041 - 0.380 \cdot 10^{-10} e^{(-0.4009987532 t)} - 0.18 \cdot 10^{-10} e^{(0.4009987532 t)} \\
& \quad + 1.658957089 e^{(-0.2995006234 t)} + 2.588651650 e^{(-0.7004993766 t)} \\
& > \mathbf{MMt}[2,2] := \mathbf{simplify}(\mathbf{Mt}[2,2]); \\
& MM_{2,2} := -0.7554814109 - 0.730 \cdot 10^{-10} e^{(-0.4009987532 t)} - 0.34 \cdot 10^{-10} e^{(0.4009987532 t)} \\
& \quad + 2.389805458 e^{(-0.2995006234 t)} + 0.5642994113 e^{(-0.7004993766 t)}
\end{aligned}$$

9. Удаление пренебрежимо малых слагаемых в элементах моментной матрицы (возникающие погрешности могут быть учтены при δ -мажорировании, – см. п. 1.3.1):

$$\begin{aligned}
& > \mathbf{MMt}[1,1] := -.6291706387 + .9976337783 * \exp(- \\
& \quad .2995006234 * t) + 5.406084202 * \exp(-.7004993766 * t); \\
& MM_{1,1} := -0.6291706387 + 0.9976337783 e^{(-0.2995006234 t)} + 5.406084202 e^{(-0.7004993766 t)}
\end{aligned}$$

```

> MMt [1, 2] := - .5052430888 + 1.437138226*exp (-
.2995006234*t) + 1.178470704*exp (- .7004993766*t) ;
MMt1,2 := -0.5052430888 + 1.437138226 e(-0.2995006234 t) + 1.178470704 e(-0.7004993766 t)
> MMt [2, 1] := - .6577693041 + 1.658957089*exp (-
.2995006234*t) + 2.588651650*exp (- .7004993766*t) ;
MMt2,1 := -0.6577693041 + 1.658957089 e(-0.2995006234 t) + 2.588651650 e(-0.7004993766 t)
> MMt [2, 2] := - .7554814109 + 2.389805458*exp (-
.2995006234*t) + .5642994113*exp (- .7004993766*t) ;
MMt2,2 := -0.7554814109 + 2.389805458 e(-0.2995006234 t) + 0.5642994113 e(-0.7004993766 t)

```

10. Замена аргумента в моментной матрице для использования при решении серии задач линейного программирования:

```

> Ms [1, 1] := subs (t=s, MMt [1, 1]) ;
Ms1,1 := -0.6291706387 + 0.9976337783 e(-0.2995006234 s) + 5.406084202 e(-0.7004993766 s)
>
> Ms [1, 2] := subs (t=s, MMt [1, 2]) ;
Ms1,2 := -0.5052430888 + 1.437138226 e(-0.2995006234 s) + 1.178470704 e(-0.7004993766 s)
> Ms [2, 1] := subs (t=s, MMt [2, 1]) ;
Ms2,1 := -0.6577693041 + 1.658957089 e(-0.2995006234 s) + 2.588651650 e(-0.7004993766 s)
> Ms [2, 2] := subs (t=s, MMt [2, 2]) ;
Ms2,2 := -0.7554814109 + 2.389805458 e(-0.2995006234 s) + 0.5642994113 e(-0.7004993766 s)

```

11. Количество векторов в наборе:

```

> K:=16;
K := 16

```

12. Дискретность разбиения отрезка интегрирования:

```

> H:=20;
H := 20

```

13. Длина промежутка:

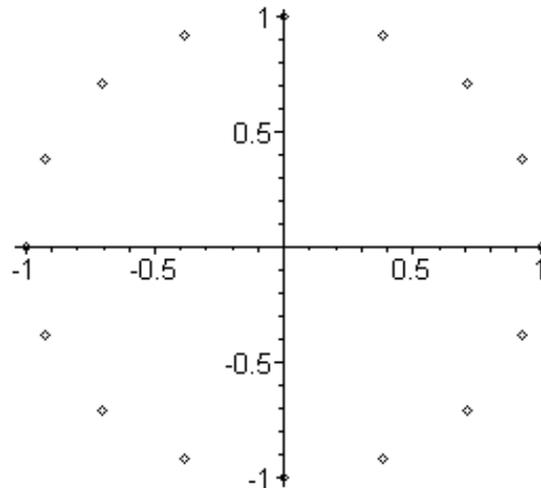
```

> T:=4.;
T := 4.

```

14. Иллюстрация набора векторов (направление из начала координат в точку на единичной окружности) :

```
>
pointplot({seq([evalf(sin((2*Pi/K)*i)),evalf(cos((2*Pi/K)
)*
i)]),i=0..K)});
```



15. Процедура решения задач линейного программирования для каждого направления и для каждого частичного промежутка. Решение каждой задачи представлено в виде набора: номер частичного промежутка при фиксированном направлении и координаты экстремальной угловой точки. Показаны только результаты для первого и последнего направлений:

```
> for i from 0 by 1 to K do for t from 0 by 1 to H do
Y[i,t]:=subs(s=T*t/H,(evalf(sin((2*Pi/K)*i))*Ms[1,1]+evalf
(cos((2*Pi/K)*i))*Ms[2,1])*u1+(evalf(sin((2*Pi/K)*i))*Ms
[1,2]+evalf(cos((2*Pi/K)*i))*Ms[2,2])*u2): cnsts :=
{u1<=1,u2<=2,2*u1+u2<=2}:
obj := Y[i,t]:
Q[i,t]:=array([t,maximize(obj,cnsts union
{u1>=0,u2>=0})]): print(Q[i,t]); end do end do :
```

[0, {u2 = 2, u1 = 0}]

[1, {u2 = 2, u1 = 0}]

[2, {u2 = 2, u1 = 0}]

[3, {u2 = 2, u1 = 0}]

- [4, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [5, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [6, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [7, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [8, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [9, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [10, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [11, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [12, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [13, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [14, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [15, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [16, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [17, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [18, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [19, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [20, { $u_2 = 0, u_1 = 0$ }]

.....

- [0, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [1, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [2, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [3, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [4, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [5, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [6, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [7, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [8, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [9, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [10, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [11, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]
- [12, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }]

[13, {u2 = 2, u1 = 0}]
[14, {u2 = 2, u1 = 0}]
[15, {u2 = 2, u1 = 0}]
[16, {u2 = 2, u1 = 0}]
[17, {u2 = 2, u1 = 0}]
[18, {u2 = 2, u1 = 0}]
[19, {u2 = 2, u1 = 0}]
[20, {u2 = 0, u1 = 0}]

16. Формирование списка всех экстремальных значений, определяющих постоянные q_k (см. δ -мажорирование в п. 1.3.1). Показаны только результаты для первого и последнего направлений:

```
> for p from 0 by 1 to K do for r from 1 by 1 to H do  
R[p,r] :=subs(Q[p,r][2],Y[p,r]); end do end do;
```

3.971813502
3.581824910
3.223820280
2.894723008
2.591794464
2.312593542
2.054941290
1.816889948
1.596695837
1.392795630
1.203785535
1.028403054
0.8655109558
0.7140832154
0.5731926646
0.4420001066
0.3197447540

```

0.2057357996
0.09934497576
0.
.....
3.971813502
3.581824910
3.223820280
2.894723008
2.591794464
2.312593542
2.054941290
1.816889948
1.596695837
1.392795630
1.203785535
1.028403054
0.8655109558
0.7140832154
0.5731926646
0.4420001066
0.3197447540
0.2057357996
0.09934497576
0.

```

17. Задание константы δ -мажорирования. В данном случае задается общая для всех k постоянная, она является результатом сравнения интегралов п. 1.3.1 с учетом специфики конкретной задачи:

```
> delta := 0.15;
```

```
delta := 0.15
```

18. Формирование списка констант q_k , определяющих многогранник верхних оценок:

```
> for i from 0 by 1 to K do
q[i] := (T/H) * sum(R[i, 'r'] + delta, 'r' = 1..H) : end do;
```

$q_0 := 6.777938694$

$q_1 := 8.375769830$

$q_2 := 8.885584272$

$q_3 := 8.463949022$

$q_4 := 7.105141864$

$q_5 := 4.932244890$

$q_6 := 2.111715602$

$q_7 := 0.6000000000$

$q_8 := 0.6000000000$

$q_9 := 0.6000000002$

$q_{10} := 0.6000000000$

$q_{11} := 0.6000000002$

$q_{12} := 0.6000000002$

$q_{13} := 0.6000000002$

$q_{14} := 1.147114193$

$q_{15} := 4.239572402$

$q_{16} := 6.777938694$

19. Формирование границ многогранника верхних оценок:

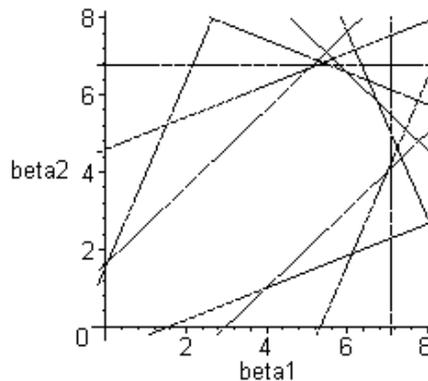
```
f := seq( evalf( sin( (2*Pi/K) * i ) ) * beta1 + evalf( cos( (2*Pi/K) * i ) ) *
) *
beta2 = q[i], i = 0..K);
```

$f := 1. \beta_2 = 6.777938694, 0.3826834325 \beta_1 + 0.9238795325 \beta_2 = 8.375769830,$
 $0.7071067810 \beta_1 + 0.7071067810 \beta_2 = 8.885584272,$
 $0.9238795325 \beta_1 + 0.3826834325 \beta_2 = 8.463949022, 1. \beta_1 = 7.105141864,$
 $0.9238795325 \beta_1 - 0.3826834325 \beta_2 = 4.932244890,$
 $0.7071067810 \beta_1 - 0.7071067810 \beta_2 = 2.111715602,$

$0.3826834325 \beta_1 - 0.9238795325 \beta_2 = 0.6000000000$, $-1. \beta_2 = 0.6000000000$,
 $-0.3826834325 \beta_1 - 0.9238795325 \beta_2 = 0.6000000002$,
 $-0.7071067810 \beta_1 - 0.7071067810 \beta_2 = 0.6000000000$,
 $-0.9238795325 \beta_1 - 0.3826834325 \beta_2 = 0.6000000002$, $-1. \beta_1 = 0.6000000002$,
 $-0.9238795325 \beta_1 + 0.3826834325 \beta_2 = 0.6000000002$,
 $-0.7071067810 \beta_1 + 0.7071067810 \beta_2 = 1.147114193$,
 $-0.3826834325 \beta_1 + 0.9238795325 \beta_2 = 4.239572402$, $1. \beta_2 = 6.777938694$

20. Многогранник верхних оценок:

```
> implicitplot([f],beta1=-0.2...8, beta2=-0.2...8,thickness=1,color=black);
```



Пример 2

В этом примере используются исходные данные, входные параметры и моментная матрица из примера 1. Пошаговые пояснения начинаются с набора векторов, используемых для построения нижних оценок множества достижимости:

```
> T:=4.;
```

$T := 4.$

```
> K:=16;
```

$K := 16$

```
> H:=20;
```

$H := 20$

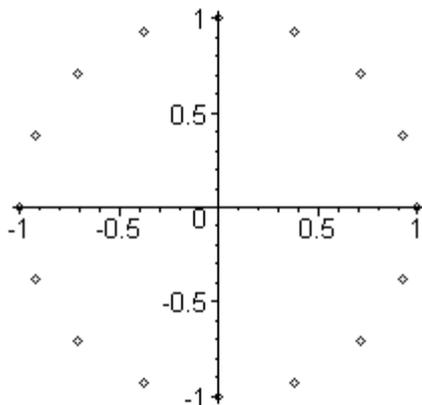
```
> MMt[1,1]:=-.6291706387+.9976337783*exp(-.2995006234*t)+5.406084202*exp(-.7004993766*t);
```

```

MMt1,1 := -0.6291706387 + 0.9976337783 e(-0.2995006234 t) + 5.406084202 e(-0.7004993766 t)
> MMt[1,2] := -0.5052430888 + 1.437138226*exp(-
.2995006234*t) + 1.178470704*exp(-.7004993766*t);
MMt1,2 := -0.5052430888 + 1.437138226 e(-0.2995006234 t) + 1.178470704 e(-0.7004993766 t)
> MMt[2,1] := -0.6577693041 + 1.658957089*exp(-
.2995006234*t) + 2.588651650*exp(-.7004993766*t);
MMt2,1 := -0.6577693041 + 1.658957089 e(-0.2995006234 t) + 2.588651650 e(-0.7004993766 t)
> MMt[2,2] := -0.7554814109 + 2.389805458*exp(-
.2995006234*t) + 0.5642994113*exp(-.7004993766*t);
MMt2,2 := -0.7554814109 + 2.389805458 e(-0.2995006234 t) + 0.5642994113 e(-0.7004993766 t)
>
> Ms[1,1] := subs(t=s,MMt[1,1]);
Ms1,1 := -0.6291706387 + 0.9976337783 e(-0.2995006234 s) + 5.406084202 e(-0.7004993766 s)
> Ms[1,2] := subs(t=s,MMt[1,2]);
Ms1,2 := -0.5052430888 + 1.437138226 e(-0.2995006234 s) + 1.178470704 e(-0.7004993766 s)
> Ms[2,1] := subs(t=s,MMt[2,1]);
Ms2,1 := -0.6577693041 + 1.658957089 e(-0.2995006234 s) + 2.588651650 e(-0.7004993766 s)
> Ms[2,2] := subs(t=s,MMt[2,2]);
Ms2,2 := -0.7554814109 + 2.389805458 e(-0.2995006234 s) + 0.5642994113 e(-0.7004993766 s)

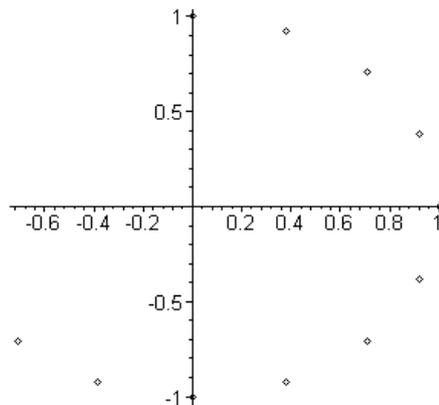
```

1. Точки на единичной окружности определяют концы векторов фиксированного набора из K векторов:



2. Для контроля порядка перехода от одного вектора к следующему можно строить выборку из полного набора. Приведен пример такой выборки:

```
>
pointplot({seq([evalf(sin((2*Pi/K)*i)),evalf(cos((2*Pi/K)
)*
i)] ,i=0..10)});
```



3. Решается набор задач линейного программирования, каждая конкретная задача определяется конкретным направлением и конкретным частичным промежутком. Результаты представлены списком экстремальных угловых точек и с указанием номера задачи (первое число – номер направления, второе – номер частичного промежутка). Показаны только результаты для начального направления и двух последних:

```
> for i from 0 by 1 to K do for t from 0 by 1 to H do
Y[i,t]:=subs(s=T*t/H,(evalf(sin((2*Pi/K)*i))*Ms[1,1]+evalf(cos((2*Pi/K)*i))*Ms[2,1])*u1+(evalf(sin((2*Pi/K)*i))*Ms[1,2]+evalf(cos((2*Pi/K)*i))*Ms[2,2])*u2): cnsts :=
{u1<=1,u2<=2,2*u1+u2<=2}:
Q[i,t]:=array([t,maximize(obj,cnsts union
{u1>=0,u2>=0})]): print(i,t,Q[i,t][2]): end do end do :
```

0, 0, {u2 = 2, u1 = 0}

0, 1, {u2 = 2, u1 = 0}

0, 2, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 3, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 4, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 5, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 6, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 7, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 8, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 9, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 10, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 11, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 12, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 13, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 14, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 15, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 16, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 17, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 18, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 19, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
0, 20, { $u_2 = 0, u_1 = 0$ }

.....
15, 0, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 1, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 2, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 3, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 4, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 5, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 6, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 7, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 8, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 9, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }
15, 10, { $u_2 = 2, u_1 = 0$ }

15, 11, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 12, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 13, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 14, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 15, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 16, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 17, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 18, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 19, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
15, 20, $\{u_2 = 0, u_1 = 0\}$
16, 0, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 1, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 2, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 3, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 4, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 5, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 6, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 7, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 8, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 9, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 10, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 11, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 12, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 13, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 14, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 15, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 16, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 17, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 18, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 19, $\{u_2 = 2, u_1 = 0\}$
16, 20, $\{u_2 = 0, u_1 = 0\}$

4. Формирование и вывод графиков кусочно-постоянных условно

оптимальных управлений, определенных на основном промежутке $[0, T]$:

```

> for i from 1 by 1 to K do for t from 1 by 1 to H do
U1[i,t]:=subs(Q[i,t][2],u1): end do end do;
> for i from 1 by 1 to K do
SU1[i]:=seq([t,U1[i,t]],t=1..H): end do:
> for i from 1 by 1 to K do for t from 1 by 1 to H do
U2[i,t]:=subs(Q[i,t][2],u2): end do end do;
> for i from 1 by 1 to K do
SU2[i]:=seq([t,U2[i,t]],t=1..H): end do:
>
> for k from 1 by 1 to K do
print(k):points1:={SU1[k]}:pointplot(points1):
points2:={SU2[k]}:pointplot(points2): end do;

> for k from 1 by 1 to K do
print(k):points1:={SU1[k]}:pointplot(points1):
points2:={SU2[k]}:pointplot(points2): end do;

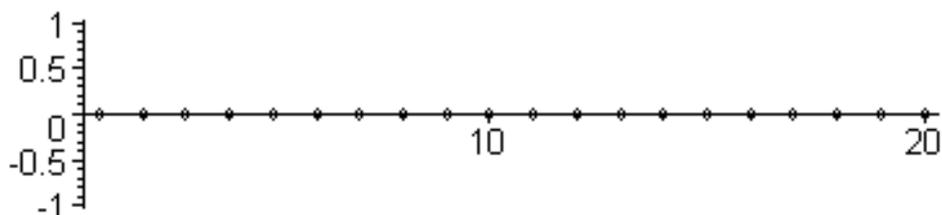
```

1

```

points1 := {[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0],
[13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]}

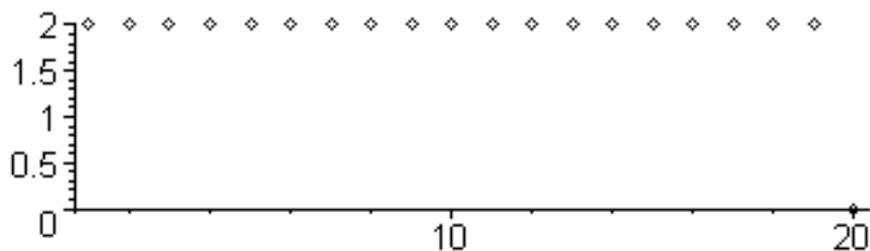
```



```

points2 := {[2, 2], [18, 2], [19, 2], [14, 2], [15, 2], [16, 2], [17, 2], [1, 2], [13, 2],
[11, 2], [12, 2], [9, 2], [10, 2], [7, 2], [8, 2], [6, 2], [5, 2], [4, 2], [3, 2], [20, 0]}
}

```

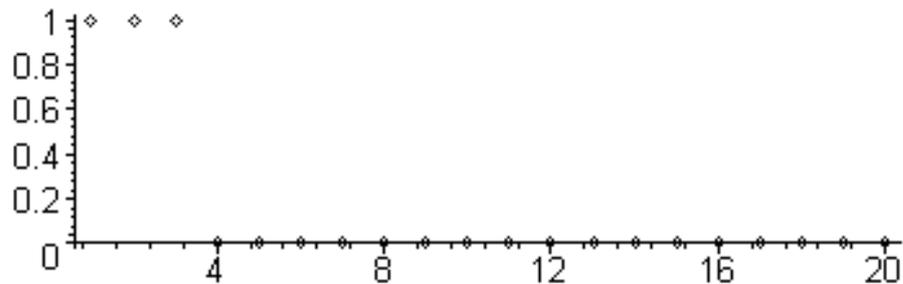


2

```

points1 := {[2, 1], [1, 1], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0],
            [20, 0], [13, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 1]}
}

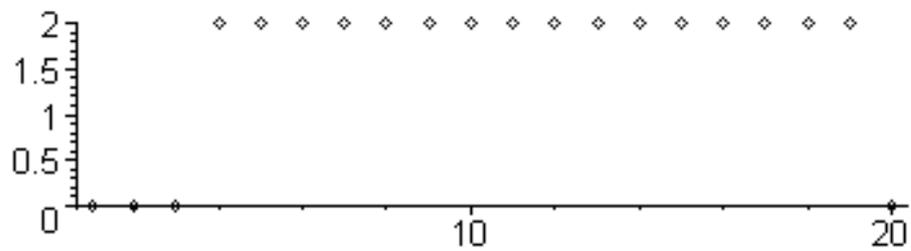
```



```

points2 := {[1, 0], [18, 2], [19, 2], [14, 2], [15, 2], [16, 2], [17, 2], [13, 2], [11, 2],
            [12, 2], [9, 2], [10, 2], [7, 2], [8, 2], [6, 2], [5, 2], [4, 2], [20, 0], [2, 0], [3, 0]}
}

```

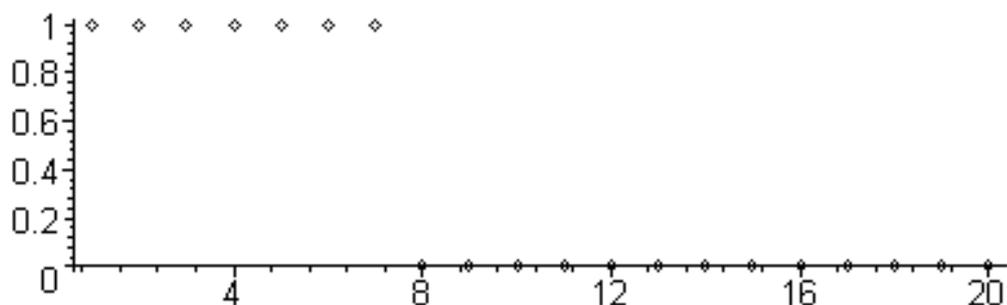


3

```

points1 := {[2, 1], [1, 1], [4, 1], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0],
            [19, 0], [20, 0], [13, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 1], [5, 1], [6, 1], [7, 1]}
}

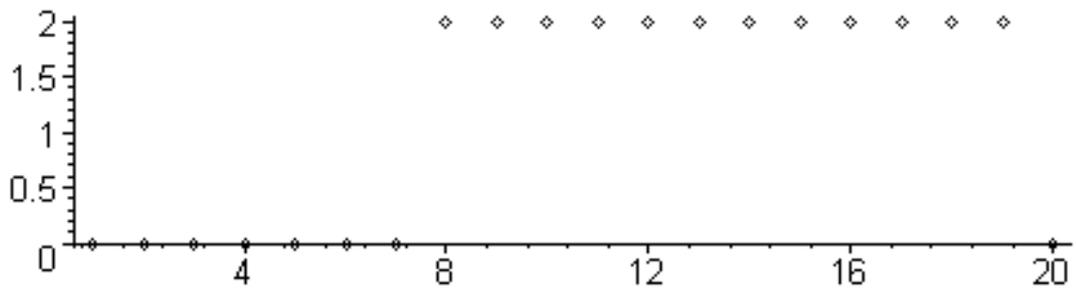
```



```

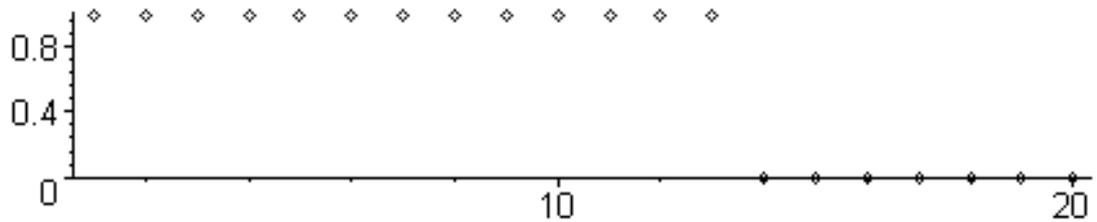
points2 := {[1, 0], [18, 2], [19, 2], [14, 2], [15, 2], [16, 2], [17, 2], [13, 2], [11, 2],
            [12, 2], [9, 2], [10, 2], [8, 2], [20, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [3, 0]}
}

```

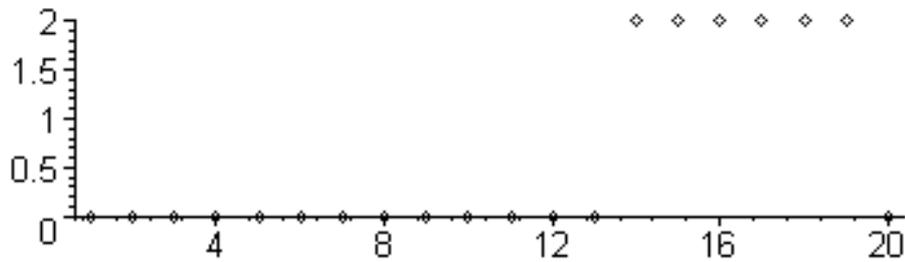


4

```
points1 := {[2, 1], [1, 1], [4, 1], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0],
            [20, 0], [3, 1], [5, 1], [6, 1], [7, 1], [8, 1], [10, 1], [11, 1], [12, 1], [13, 1], [9, 1]}
}
```

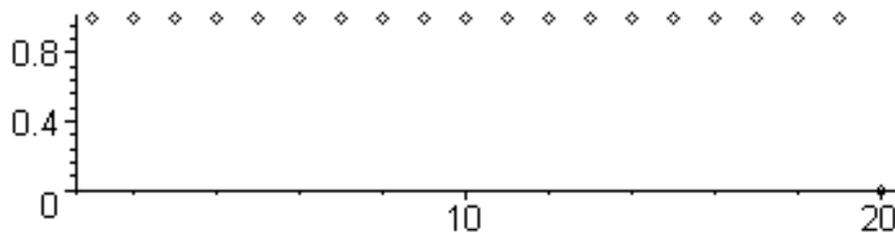


```
points2 := {[1, 0], [18, 2], [19, 2], [14, 2], [15, 2], [16, 2], [17, 2], [12, 0], [20, 0],
            [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]}
}
```

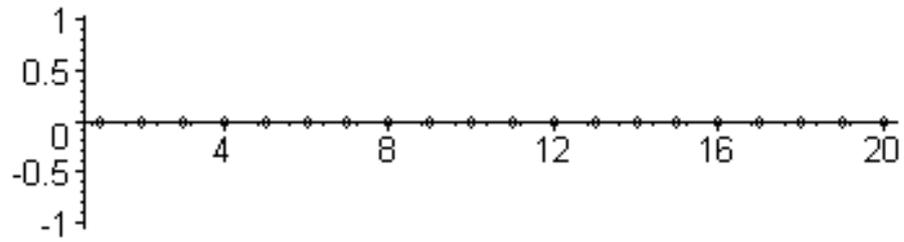


5

```
points1 := {[14, 1], [15, 1], [17, 1], [18, 1], [19, 1], [2, 1], [1, 1], [16, 1], [4, 1],
            [20, 0], [3, 1], [5, 1], [6, 1], [7, 1], [8, 1], [10, 1], [11, 1], [12, 1], [13, 1], [9, 1]}
}
```

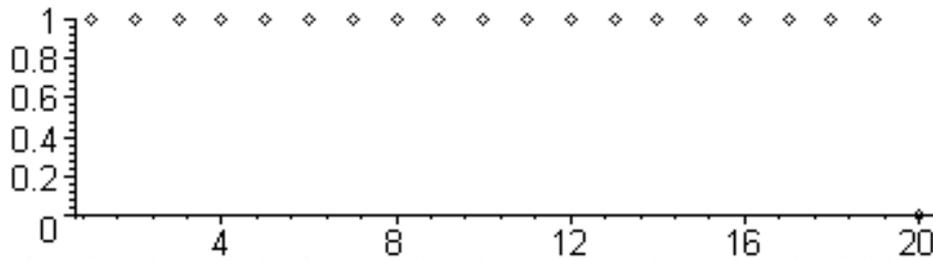


```
points2 := {[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0],
            [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]}
}
```

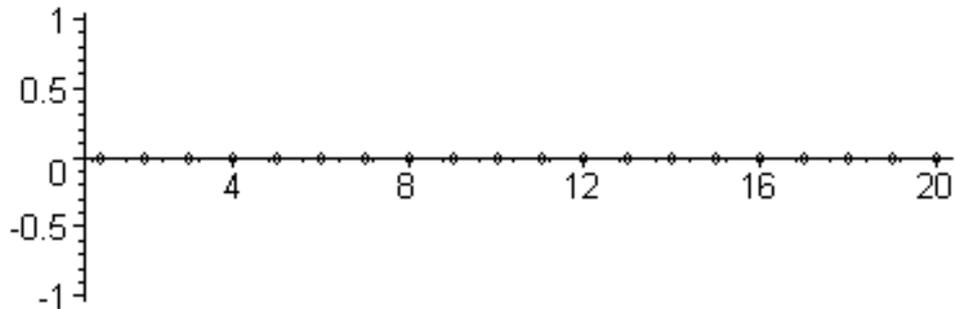


6

```
points1 := {[14, 1], [15, 1], [17, 1], [18, 1], [19, 1], [2, 1], [1, 1], [16, 1], [4, 1],
            [20, 0], [3, 1], [5, 1], [6, 1], [7, 1], [8, 1], [10, 1], [11, 1], [12, 1], [13, 1], [9, 1]}
}
```

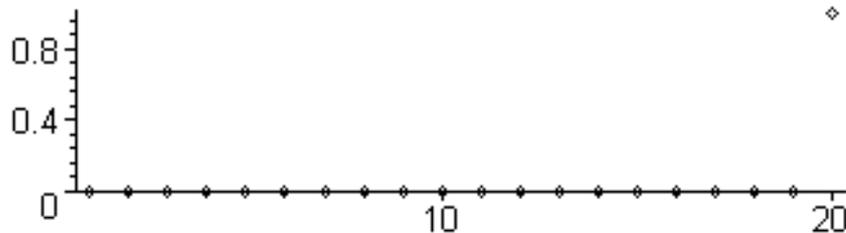


```
points2 := {[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0],
            [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]}
```

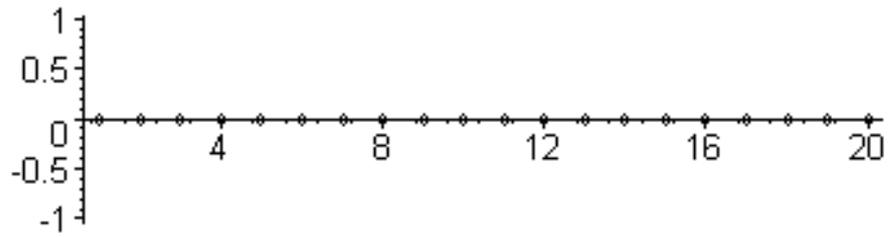


7

```
points1 := {[20, 1], [1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0],
            [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]}
```

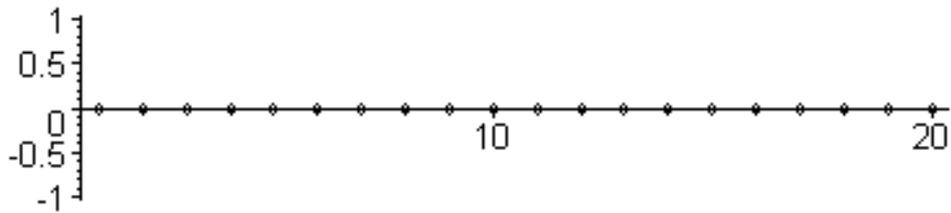


```
points2 := {[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0],
            [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]}
```

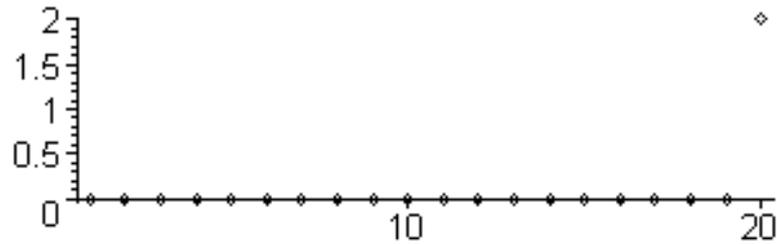


8

$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

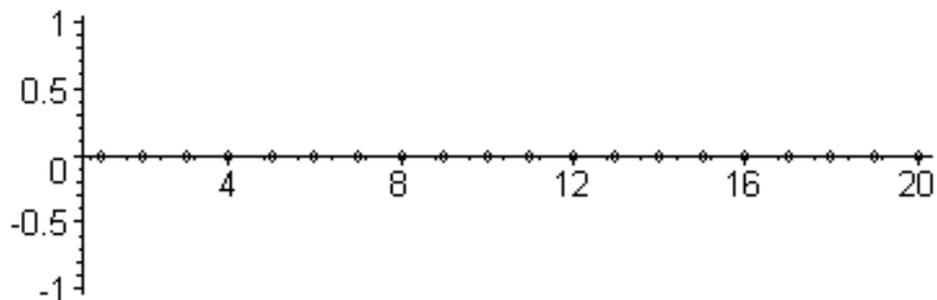


$points2 := \{[1, 0], [20, 2], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

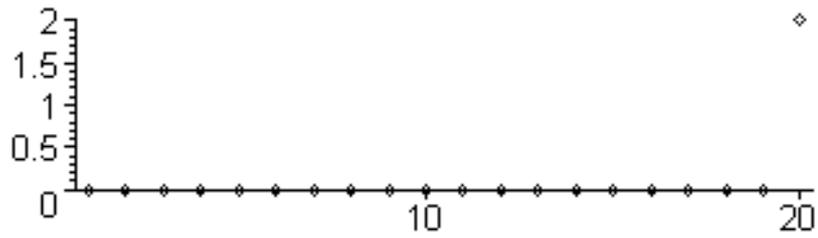


9

$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

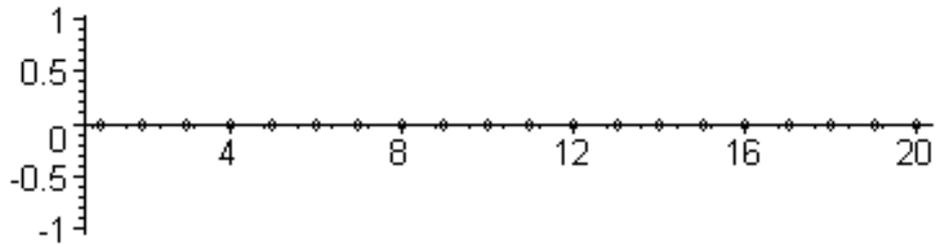


$points2 := \{[1, 0], [20, 2], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

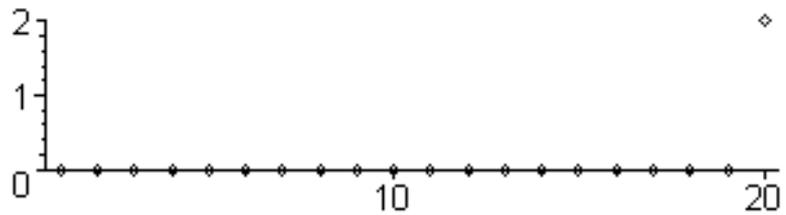


10

$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

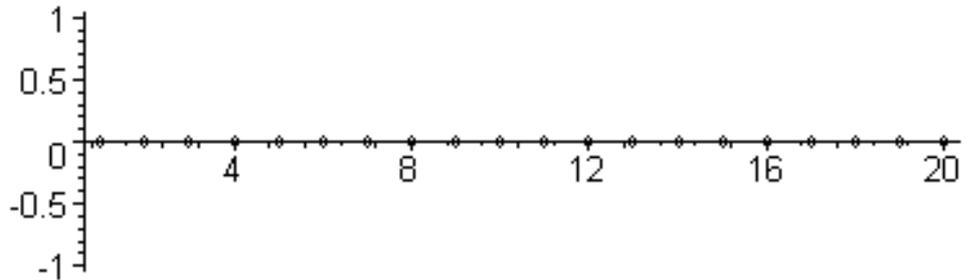


$points2 := \{[1, 0], [20, 2], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

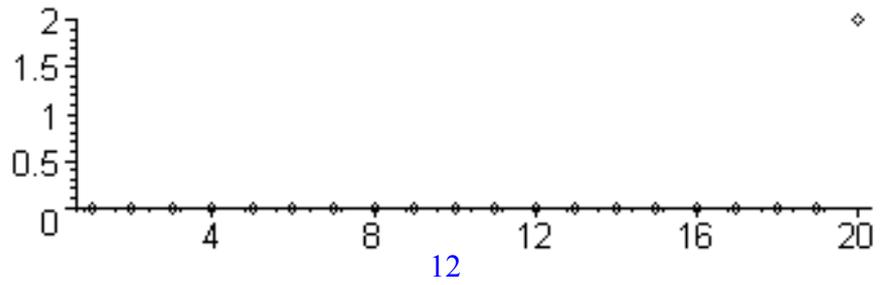


11

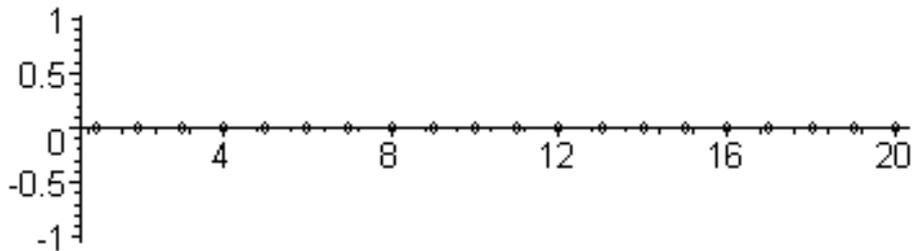
$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$



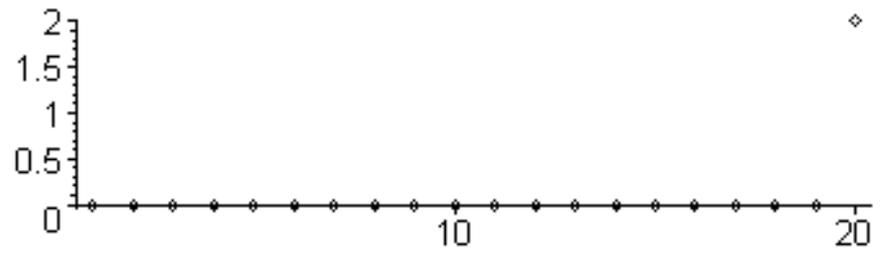
$points2 := \{[1, 0], [20, 2], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$



$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

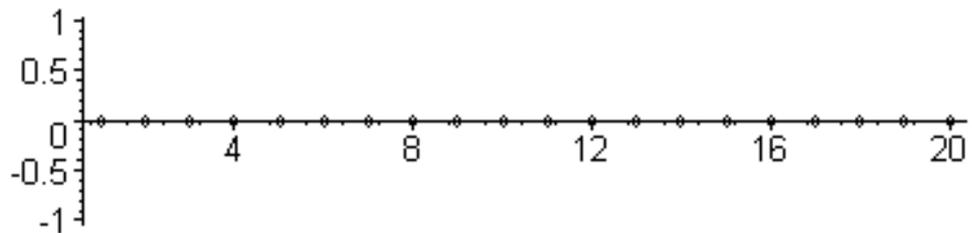


$points2 := \{[1, 0], [20, 2], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

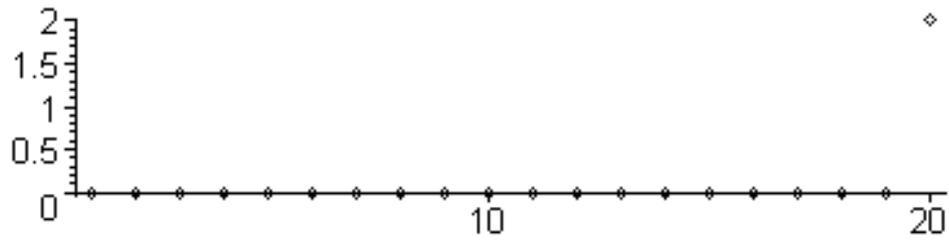


13

$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

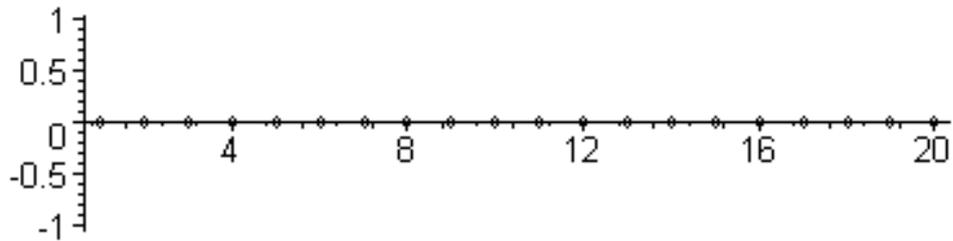


$points2 := \{[1, 0], [20, 2], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

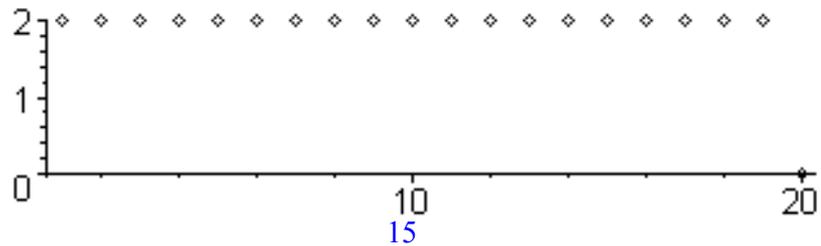


14

$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

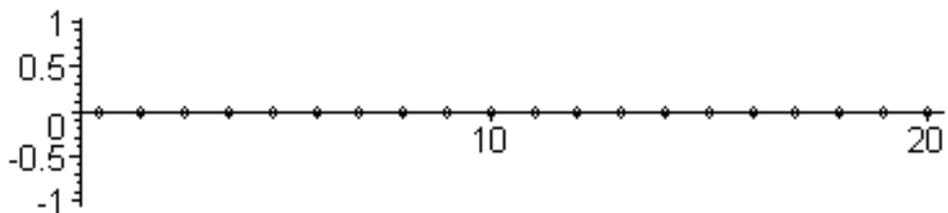


$points2 := \{[2, 2], [18, 2], [19, 2], [14, 2], [15, 2], [16, 2], [17, 2], [1, 2], [13, 2], [11, 2], [12, 2], [9, 2], [10, 2], [7, 2], [8, 2], [6, 2], [5, 2], [4, 2], [3, 2], [20, 0]\}$

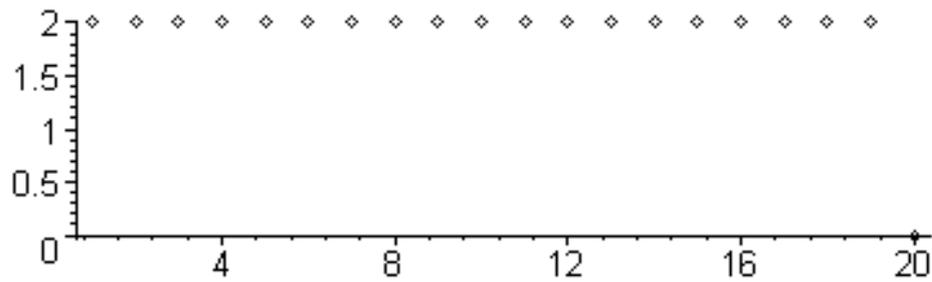


15

$points1 := \{[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0], [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]\}$

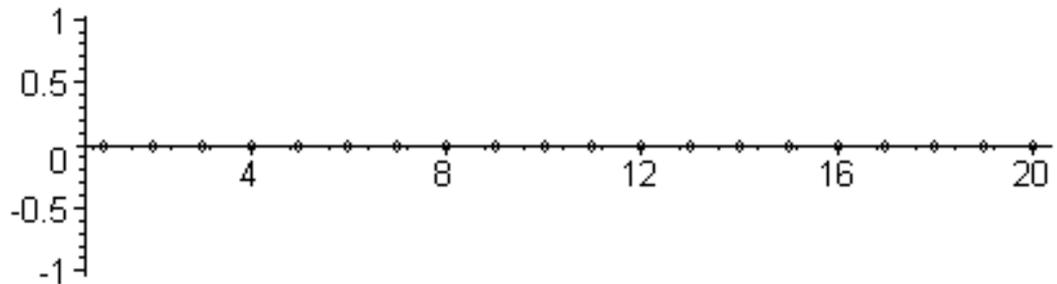


$points2 := \{[2, 2], [18, 2], [19, 2], [14, 2], [15, 2], [16, 2], [17, 2], [1, 2], [13, 2], [11, 2], [12, 2], [9, 2], [10, 2], [7, 2], [8, 2], [6, 2], [5, 2], [4, 2], [3, 2], [20, 0]\}$

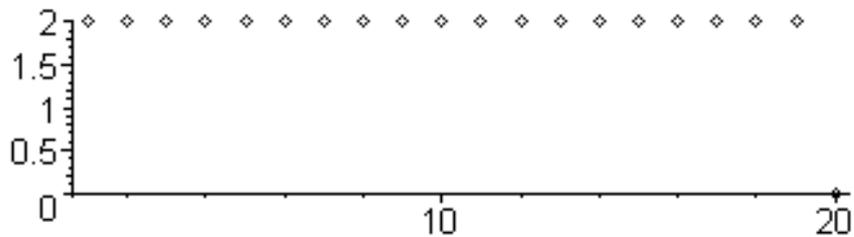


16

```
points1 := {[1, 0], [12, 0], [14, 0], [15, 0], [16, 0], [17, 0], [18, 0], [19, 0], [20, 0],
            [13, 0], [2, 0], [4, 0], [5, 0], [6, 0], [7, 0], [8, 0], [9, 0], [10, 0], [11, 0], [3, 0]}
```



```
points2 := {[2, 2], [18, 2], [19, 2], [14, 2], [15, 2], [16, 2], [17, 2], [1, 2], [13, 2],
            [11, 2], [12, 2], [9, 2], [10, 2], [7, 2], [8, 2], [6, 2], [5, 2], [4, 2], [3, 2], [20, 0]}
}
```



5. Компоненты интегранта целевого вектор-функционала:

```
> M1s := Ms [1, 1] * u1 + Ms [1, 2] * u2 ;
```

```
M1s :=
```

$$\begin{aligned} & (-0.6291706387 + 0.9976337783 e^{(-0.2995006234 s)} + 5.406084202 e^{(-0.7004993766 s)}) u1 \\ & + (-0.5052430888 + 1.437138226 e^{(-0.2995006234 s)} + 1.178470704 e^{(-0.7004993766 s)}) u2 \end{aligned}$$

```
> M2s := Ms [2, 1] * u1 + Ms [2, 2] * u2 ;
```

$M2s :=$

$$\begin{aligned} & (-0.6577693041 + 1.658957089 e^{(-0.2995006234 s)} + 2.588651650 e^{(-0.7004993766 s)}) u1 + \\ & (-0.7554814109 + 2.389805458 e^{(-0.2995006234 s)} + 0.5642994113 e^{(-0.7004993766 s)}) u2 \end{aligned}$$

6. Значения компонент интегранта на экстремальных управлениях для каждой компоненты на частичных промежутках:

```
> for i from 1 by 1 to K do for t from 1 by 1 to H do  
MM1s[i,t]:=subs(Q[i,t][2],M1s): end do end do;
```

```
> MM1s[4,10];
```

$$-0.6291706387 + 0.9976337783 e^{(-0.2995006234 s)} + 5.406084202 e^{(-0.7004993766 s)}$$

```
> for i from 1 by 1 to K do for t from 1 by 1 to H do  
MM2s[i,t]:=subs(Q[i,t][2],M2s): end do end do:
```

```
> for i from 1 by 1 to K do for t from 1 by 1 to H do  
end do end do:
```

```
> MM2s[4,10];
```

$$-0.6577693041 + 1.658957089 e^{(-0.2995006234 s)} + 2.588651650 e^{(-0.7004993766 s)}$$

7. Интегрирование по времени на каждом частичном промежутке для каждого направления и каждой компоненты:

```
> for i from 1 by 1 to K do for t from 1 by 1 to H do  
m1[i,t]:=int(MM1s[i,t],s=(t-1)*(T/H)..t*(T/H)):end do  
end do:
```

```
> for i from 1 by 1 to K do for t from 1 by 1 to H do  
m2[i,t]:=int(MM2s[i,t],s=(t-1)*(T/H)..t*(T/H)):end do  
end do:
```

8. Интегрирование по времени на всем промежутке для каждого направления и каждой компоненты:

```
> for i from 1 by 1 to K do  
mm1[i]:=sum(m1[i,'t'],'t'=1..H) end do;
```

$$mm1_1 := 5.811702137$$

$$mm1_2 := 6.503546392$$

$$mm1_3 := 6.919806610$$

$$mm1_4 := 7.061737771$$

```
mm15 := 7.051476372
mm16 := 7.051476372
mm17 := 0.006658946467
mm18 := 0.007402277516
mm19 := 0.007402277516
mm110 := 0.007402277516
mm111 := 0.007402277516
mm112 := 0.007402277516
mm113 := 0.007402277516
mm114 := 5.811702137
mm115 := 5.811702137
mm116 := 5.811702137
```

```
>
> for i from 1 by 1 to K do
mm2[i] := sum(m2[i, 't'], 't'=1..H) end do;
mm21 := 6.602035901
mm22 := 6.115382707
mm23 := 5.530473583
mm24 := 4.930423530
mm25 := 4.702125026
mm26 := 4.702125026
mm27 := 0.005367277633
mm28 := 0.009821562746
mm29 := 0.009821562746
mm210 := 0.009821562746
mm211 := 0.009821562746
mm212 := 0.009821562746
mm213 := 0.009821562746
```

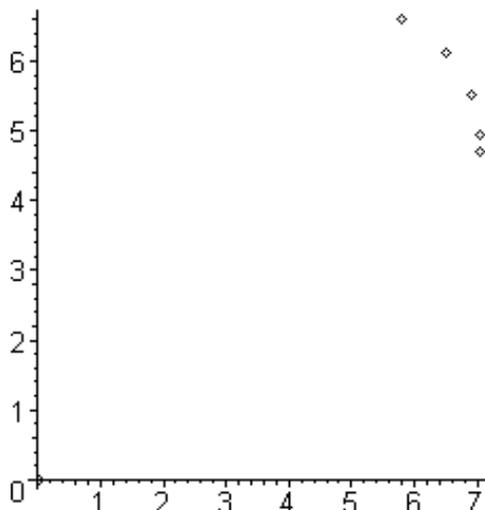
```
mm214 := 6.602035901
```

```
mm215 := 6.602035901
```

```
mm216 := 6.602035901
```

9. Точки в пространстве целевых значений, достижимые на условно экстремальных управлениях:

```
> pointplot({seq([mm1[i], mm2[i]], i=1..K)});
```



10. Построение выпуклой оболочки точек, достижимых на условно экстремальных управлениях:

```
>
```

```
pointplot({seq([mm1[i], mm2[i]], i=1..K)}); with(plottools)
```

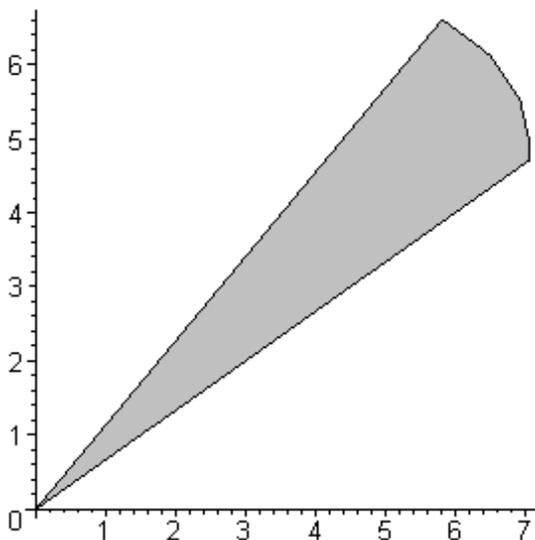
```
:
```

```
l := polygon([ seq([mm1[i], mm2[i]], i=1..K) ], color=grey,  
thickness=1);
```

```
plots[display](l);
```

```
l := POLYGONS([[5.811702137, 6.602035901], [6.503546392, 6.115382707],  
[6.919806610, 5.530473583], [7.061737771, 4.930423530],  
[7.051476372, 4.702125026], [7.051476372, 4.702125026],  
[0.006658946467, 0.005367277633], [0.007402277516, 0.009821562746],  
[0.007402277516, 0.009821562746], [0.007402277516, 0.009821562746],
```

[0.007402277516, 0.009821562746], [0.007402277516, 0.009821562746],
 [0.007402277516, 0.009821562746], [5.811702137, 6.602035901],
 [5.811702137, 6.602035901], [5.811702137, 6.602035901]],
 COLOUR(RGB, 0.75294118, 0.75294118, 0.75294118), THICKNESS(1))



1.4. Задачи для самостоятельного исследования

Ниже предлагаются варианты задач управления с полиэдральными ограничениями на управление. В каждом варианте требуется построить верхние и нижние оценки множества достижимости. Все исходные данные приводятся в ранее принятых обозначениях. Размерность задачи позволяет дать графическую интерпретацию результатов подобно тому, как это сделано в п. 1.3.3.

Вариант 1

$$T = 4, F = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.01 \\ -0.01 & 0.8 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4-2t \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

$$T = 5, F = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.02 \\ -0.02 & 0.3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0.5 \\ t \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+2t \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

$$T = 6, F = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.01 \\ -0.03 & 0.4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0.5t \\ 0.2t \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ t+1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

$$T = 7, F = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.03 \\ -0.02 & 0.3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0.1t \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \Phi(t) = \begin{pmatrix} t & 2t \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5

$$T = 8, F = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.02 \\ -0.03 & 0.5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 1 + 0.1\sin(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 2t \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

$$T = 6, F = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.01 \\ -0.02 & 0.5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 1 - 0.1t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \Phi(t) = \begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ -0.5 \\ 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

$$T = 7, F = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.05 \\ -0.01 & 0.2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1t \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

$$T = 8, F = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.02 \\ -0.04 & 0.6 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0.2t \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & t \\ 3 & -t \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.8 \\ 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9

$$T = 9, F = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.01 \\ -0.02 & 0.4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2t \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \Phi(t) = \begin{pmatrix} t+1 & t \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.8 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10

$$T = 10, F = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.02 \\ -0.01 & 0.3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0.2t \\ 0.5t \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 11

$$T = 9, F = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.02 \\ -0.02 & 0.5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} 0.2t \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 7 \\ 0.5 \\ 6 \\ -0.4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 12

$$T = 8, \quad F = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.03 \\ -0.02 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0.1t \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ t & t \end{pmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \\ -0.1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНОЙ ПАМЯТЬЮ

Актуальные прикладные задачи, возникающие в различных сферах приложений, включая задачи анализа, синтеза и управления для реальных технических и социально-экономических систем, постоянно предлагают все новые и новые виды математических моделей с обыкновенными производными. К ним относятся динамические модели, содержащие одновременно фазовые переменные и уравнения как с непрерывным, так и с дискретным временем (такие модели и соответствующие системы часто называют гибридными). Интерес исследователей к различным классам гибридных моделей постоянно возрастает в течение последних 15 лет. В этом разделе ограничимся упоминанием известных работ российских и зарубежных авторов: А.С. Бортаковского, В.М. Марченко, С.А. Минюка, О.Н. Поддубной, В.Ф. Чистякова, А.А. Щегловой, G. Agranowich, J. Boid, M. DelaSen, S. Hara, A. Ichikawa, P. Kabamba, H. Katayama, D. Sworder. Список этих работ можно найти, например, в [13].

В этом разделе исследуется общая линейная задача управления, в которой динамика системы управления описывается совокупностью уравнений, связывающих фазовые переменные, одна часть которых зависит от непрерывного времени, вторая – от дискретного времени. Рассматриваемая система характеризуется дискретной памятью, сосредоточенной в заданных моментах времени. Целевые функционалы задаются в общей форме, охватывающей широко распространенные конкретные виды функционалов. Формулируются условия разрешимости задачи без ограничений на управление. Для задачи с ограничениями на управляющие воздействия предлагаются конструкции и алгоритмы построения внешних и внутренних полиэдральных оценок для множества достижимых значений целевых функционалов.

2.1. Задачи управления с общим целевым вектор-функционалом без ограничений на управление

2.1.1. Описание модели. Рассмотрим экономико-математическую модель взаимодействия производственной подсистемы (см. [11]), описываемой уравнением

$$\dot{x}(t) = \sum_{i: t_i < t} A_i(t)x(t_i) + \sum_{i: t_i < t} B_i(t)z(t_i) + \int_0^t F(t,s)u(s)ds + f(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

и финансовой подсистемы, описываемой уравнением

$$z(t_i) = \sum_{j < i} D_j x(t_j) + \sum_{j < i} H_j z(t_j) + \int_0^{t_i} G_i(s)v(s)ds + g(t_i), \quad i = 1, \dots, \mu. \quad (2)$$

Для определенности будем считать, что в (1) $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ – показатели функционирования многопродуктовой производственной системы, которые изменяются в непрерывном времени $t \in [0, T]$. На скорость их изменения влияют отчисления на производственное накопление в фиксированные моменты времени $t_i, i = 0, \dots, \mu, t_i > t_{i-1}, t_0 = 0, t_\mu = T$, с заданной эффективностью их использования, характеризуемой соответствующими коэффициентами – элементами матрицы $A_i(t)$. Кроме того, используются инвестиции $z(t_i), z = \text{col}(z_1, \dots, z_\nu)$, динамика которых определяется уравнением (2). Интегральное слагаемое в уравнении (1) моделирует прямое управляющее воздействие на динамику показателей $x(t)$ с применением распределенного управления $u(t), u: [0, T] \rightarrow R^{r_1}$, эффективность использования которого описывается ядром $F(t, s)$. В правую часть уравнения (2) входят предшествующие значения инвестиций: $z(t_j), j < i$ предыдущие производственные накопления $x(t_j), j < i$ и управляющее воздействие $v(t), v: [0, T] \rightarrow R^{r_2}$, – плотность финансового потока. При этом интегральное слагаемое характеризует накопленные к текущему моменту времени финансовые ресурсы. Эффективность использования упомянутых факторов характеризуется соответствующими матричными

коэффициентами (H_j, D_j, G_i) . Функции $f(t)$ и $g(t_i)$ можно интерпретировать как внешние воздействия на систему различной природы, например, непредвиденные потери или возможные погрешности моделирования. Отметим, что специфический характер запаздывания компоненты $x(\cdot)$ с непрерывным временем (кусочно-постоянный аргумент) распространен в динамических моделях макроэкономики [23].

2.1.2. Постановка задачи. Начальное состояние системы (1)–(2) считается заданным:

$$x(0) = \alpha, \quad z(0) = \delta. \quad (3)$$

Для задания цели управления будем использовать определенный на компонентах $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$ вектор-функционал ℓ :

$$\ell(x, z) = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s) \dot{x}(s) ds + \sum_{i=0}^{\mu} \Gamma_i z(t_i). \quad (4)$$

Здесь постоянные $(N \times n)$ -матрица Ψ и $(N \times \nu)$ -матрицы $\Gamma_i, i = 1, \dots, \mu$ и $(N \times n)$ -матрица $\Phi(s)$ с измеримыми и ограниченными элементами считаются заданными. Общая форма (4) вектор-функционала ℓ со значениями в R^N позволяет охватить разнообразные конкретные случаи целевых условий, возникающих в прикладных задачах.

С помощью вектор-функционала ℓ цель управления системой (1) – (2) задается равенством

$$\ell(x, z) = \beta, \quad \beta \in R^N, \quad (5)$$

где β – заданный вектор целевых значений.

Приведем несколько иллюстрирующих примеров.

1. Если целью управления является достижение заданных значений в конечный момент времени по обеим векторным компонентам: $x(T) = \beta^1, z(T) = \beta^2$, где $\beta^1 \in R^n, \beta^2 \in R^\nu$ – заданные значения, то в (4) имеем

$$\Psi = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(s) = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ E_\nu \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \neq \mu,$$

где E_n – единичная $(n \times n)$ -матрица.

2. В случае, когда целевыми значениями являются интегральные показатели компоненты x и суммарные показатели компоненты z :
 $\int_0^T x(t) dt = \beta^1$, $\sum_{i=0}^{\mu} z(t_i) = \beta^2$, соответствующие матрицы в представлении целевого вектор-функционала имеют вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} T \cdot E_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(s) = \begin{pmatrix} (T-s) \cdot E_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 \\ E_\nu \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, \mu.$$

3. Пусть целевые условия заданы в виде

$$\int_0^T e^{-\lambda_1 t} \cdot F_1 \cdot x(t) dt + \sum_{i=0}^{\mu} e^{-\lambda_2 t_i} \cdot F_2 \cdot z(t_i) = \beta,$$

где $\beta \in R^N$, F_1 и F_2 – заданные матрицы размерности $N \times n$ и $N \times \nu$ соответственно. Тогда

$$\Psi = \frac{1}{\lambda_1} [1 - e^{-\lambda_1 T}] \cdot F_1, \quad \Phi(s) = \frac{1}{\lambda_1} [e^{-\lambda_1 s} - e^{-\lambda_1 T}] \cdot F_1,$$

$$\Gamma_i = e^{-\lambda_2 t_i} \cdot F_2, \quad i = 0, 1, \dots, \mu.$$

2.1.3. Условие разрешимости. Воспользуемся представлением решений непрерывной и дискретной подсистем (см. [16, 29]). Для дискретной подсистемы (2) имеем (см. [2]):

$$z(t_i) = Z(t_i) \cdot \delta + \sum_{j=1}^i C_2(i, j) \left\{ \sum_{k < j} D_k x(t_k) + \int_0^{t_j} G_j(s) v(s) ds + g(t_j) \right\}, \quad i = 1, \dots, \mu, \quad (6)$$

где $Z(\cdot)$ – фундаментальная матрица однородной подсистемы (2), $C_2(\cdot, \cdot)$ – матрица Коши подсистемы с дискретным временем. Подставим правую часть этого равенства в подсистему с непрерывным временем (1):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i:t_i < t} A_i(t)x(t_i) + \sum_{i:t_i < t} B_i(t)[Z(t_i) \cdot \delta + \sum_{j=1}^i C_2(i, j) \{ \sum_{k < j} D_k x(t_k) + \\ & + \int_0^{t_j} G_j(s)v(s) ds + g(t_j) \}] + \int_0^t F(t, s)u(s) ds + f(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) не содержит компоненты $z(\cdot)$ с дискретным временем и представляет собой специальный случай функционально-дифференциальной системы управления относительно компоненты $x(\cdot)$ с непрерывным временем. Запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (\mathcal{T}x)(t) + \left[\int_0^t F(t, s)u(s) ds + \sum_{i:t_i < t} B_i(t) \sum_{j=1}^i C_2(i, j) \int_0^{t_j} G_j(s)v(s) ds \right] + \\ & + \left[\sum_{i:t_i < t} B_i(t)(Z(t_i) \cdot \delta + g(t_i)) + f(t) \right], \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (8)$$

где оператор \mathcal{T} определен равенством

$$(\mathcal{T}x)(t) = \sum_{i:t_i < t} A_i(t)x(t_i) + \sum_{i:t_i < t} B_i(t) \left[\sum_{j=1}^i C_2(i, j) \sum_{k < j} D_k x(t_k) \right].$$

Меняя порядок суммирования во втором слагаемом правой части и приводя подобные, для оператора \mathcal{T} можно получить представление

$$(\mathcal{T}x)(t) = \sum_{i:t_i < t} \mathcal{A}_i(t)x(t_i).$$

Используя фундаментальную матрицу $X(\cdot)$ и матрицу Коши $C(\cdot, \cdot)$ функционально-дифференциального оператора

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - (\mathcal{T}x)(t),$$

запишем решение системы в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C(t, s) \int_0^s [F(s, \tau)u(\tau) + F_1(s, \tau)v(\tau)] d\tau ds + q(t), \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

где ядро $F_1(s, \tau)$ и функция $q(t)$ определяются в результате элементарных преобразований. Представления (9) и (6) позволяют записать целевые условия (5) в терминах управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$:

$$\int_0^T M(s) \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \beta_1, \quad \beta_1 \in R^N, \quad (10)$$

где $M(s)$ – моментная матрица размерности $N \times (r_1 + r_2)$. Обозначим через $w(t) = \text{col}(u(t), v(t)) \in R^{r_1+r_2}$ вектор управляющих воздействий.

Таким образом, задача управления (1),(2),(3),(5) сводится к проблеме моментов

$$\int_0^T M(s)w(s) ds = \beta_1, \quad \beta_1 \in R^N. \quad (11)$$

Так же, как в разделе 1.1, будем искать управление в виде

$$w(t) = M'(s)\delta, \quad \delta \in R^N. \quad (12)$$

В таком случае обратимость $(N \times N)$ -матрицы

$$W = \int_0^T M(t)M'(t) dt: \\ \det W \neq 0 \quad (13)$$

гарантирует разрешимость задачи управления (6), (7). При этом если $\delta^* = W^{-1}\beta_1$, то управление

$$w^*(t) = M'(s)\delta^*$$

решает задачу (1),(2),(3),(5), при этом $w^*(t) = \text{col}(u^*(t), v^*(t))$: первые r_1 компонент этого управления определяют компоненты управления $u^*(t)$, входящего в непрерывную подсистему, вторые r_2 компонент определяют компоненты управления $v^*(t)$, входящего в дискретную подсистему.

Траектория системы (1),(2), приводящая к заданным целевым значениям (5), определяется равенством

$$x^*(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C(t,s) \int_0^s [F(s,\tau)u^*(\tau) + \\ + F_1(s,\tau)v^*(\tau)] d\tau ds + q(t), \quad t \in [0, T],$$

(см. (9)) для компоненты с непрерывным временем, и равенством

$$z^*(t_i) = Z(t_i) \cdot \delta + \sum_{j=1}^i C_2(i, j) \left\{ \sum_{k < j} D_k x^*(t_k) + \int_0^{t_j} G_j(s) v^*(s) ds + g(t_j) \right\}, \quad i = 1, \dots, \mu,$$

(см. (6)) для компоненты с дискретным временем.

2.2. Верхние оценки множеств достижимости

2.2.1. Введение. В прикладных задачах управления при заданных (предписанных) значениях целевых показателей ключевую роль играют ограничения на управляющие воздействия. От жесткости этих ограничений зависит разрешимость задачи, т.е. существование такого допустимого управления, реализация которого приводит к траектории, на которой достигаются целевые значения. Описание множества целевых значений, для которых задача управления оказывается разрешимой, является одной из центральных проблем во многих разделах теории управления (см., например, [4,18,26–28]), включая вопросы структуры множества достижимости для различных классов ограничений на управление [19,33], их асимптотических [3] и статистических характеристик [34]. При этом, как правило, достижимость понимается по отношению к значениям координат фазового вектора. В задачах управления для экономических систем весьма распространено задание показателей в более широком смысле: в качестве целевых показателей используются, например, линейные комбинации значений фазовых переменных в заданные моменты времени, интегральные характеристики траектории и др.

В этом разделе для задания целевых показателей используются линейные функционалы общего вида, охватывающие упомянутые случаи и их естественные обобщения. Динамика системы управления описывается совокупностью дифференциальных уравнений с запаздыванием и разностных уравнений с дискретным аргументом. Такое описание оказывается актуальным для процессов экономической динамики, сочетающих взаимодействие переменных,

имеющих различный характер изменения – непрерывный (непрерывное производство) и дискретный (финансирование). Излагаемые результаты основаны на использовании положений общей теории функционально-дифференциальных уравнений [1] в части условий разрешимости и представления решений, а также на результатах недавних работ [29,31,32,11,12].

2.2.2. Основные конструкции. В задаче (1),(2),(3),(5), рассматриваемой в предыдущем разделе, условие (13) гарантирует ее разрешимость при любых целевых значениях β . Ситуация существенно меняется при наличии ограничений на управление. Рассмотрим случай, когда управление $w(t) = \text{col}(u(t), v(t))$ стеснено полиэдральными ограничениями

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \leq \gamma, \quad \gamma \in R^{N_1}, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где Λ – заданная матрица размерности $N_1 \times (r_1 + r_2)$. Будем предполагать, что множество $\mathcal{V} \subset R^{r_1+r_2}$ решений системы линейных неравенств $\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \gamma$ непусто и ограничено. В этом случае требуется дать описание множества целевых значений β , достижимых с помощью допустимых управлений, удовлетворяющих неравенствам (1).

Следуя теореме 7.1 [5, с. 269] и теореме 1 [29], определим для каждого $\mu \in R^N$ функцию

$$y(t, \mu) = \max(\mu' \cdot M(t) \cdot w : w \in \mathcal{V}) . \quad (2)$$

Зафиксируем для каждого $t \in [0, T]$ и каждого $\mu \in R^N$ совокупность точек $\{\nu_1(t, \mu), \dots, \nu_k(t, \mu)\}$ множества \mathcal{V} , доставляющих значение $y(t, \lambda)$ функционалу $w \rightarrow \mu' \cdot M(t) \cdot w$, и обозначим

$$w(t, \mu) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \nu_j(t, \mu)$$

В таком случае множество S достижимых значений вектора $\beta_1 \in R^N$ состоит из тех и только тех точек $\rho \in R^N$, для которых неравенство

$$\mu' \cdot \rho \leq \int_0^T \mu M(t) w(t, \mu) dt \quad (3)$$

выполняется для всех $\mu \in R^N$.

Исходя из соотношений (2),(3), можно дать следующее описание алгоритма построения внешней оценки множества S :

1. Построение элементов матрицы $M(t)$ на основе соотношений (6),(9) п. 2.1.
2. Задание конечного набора μ_1, \dots, μ_K векторов, определяющих при каждом $t \in [0, T]$ вместе с матрицей $M(t)$ градиент целевой функции в задаче (2).
3. Построение многогранника, определяемого системой линейных неравенств

$$\mu'_j \rho \leq \mu'_j \int_0^T M(t) w(t, \mu_j) dt, \quad j = 1, \dots, K.$$

2.2.3. Иллюстрирующий пример. Приведем иллюстрирующий пример. В качестве конкретной системы (1)-(2) рассмотрим гибридную систему

$$\dot{x}(t) = 0.5 \sum_{i < t} x(i) + 0.3 \sum_{i < t} z(i) + \int_0^t u(s) ds, \quad t \in [0, 4], \quad (4)$$

$$z(i) = 0.4 \sum_{j < i} x(j) + 0.2 \sum_{j < i} z(j) + \int_0^i v(s) ds, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (5)$$

Считая нулевым начальное состояние этой системы:

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad (6)$$

зададим целевой вектор-функционал равенствами

$$\int_0^4 x(t) dt = \beta^1, \quad z(4) = \beta^2. \quad (7)$$

Управления u и v стеснены следующими ограничениями:

$$\begin{aligned} 0 \leq u(t) \leq 1; \quad 0 \leq v(t) \leq 1; \quad u(t) + v(t) \leq 1; \\ v(t) \leq u(t) + 1; \quad u(t) \leq v(t) + 1; \quad t \in [0, 4]. \end{aligned} \quad (8)$$

В этом примере верхняя по включению оценка для множества достижимых значений показателей β^1, β^2 представлена на рис. 4.

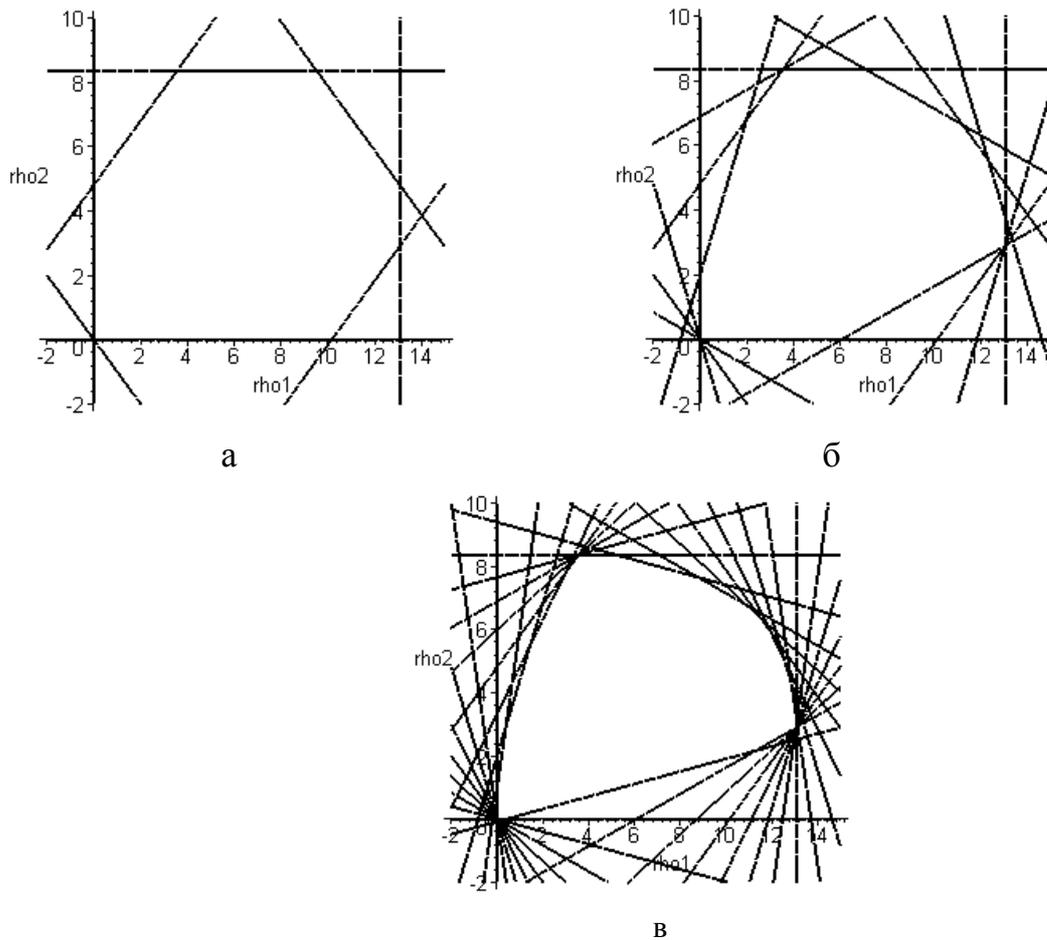


Рис. 4. Внешняя оценка множества достижимости для различных случаев общего числа (K) направлений градиента: а – $K=8$, б – $K=16$, в – $K=32$.

2.3. Нижние оценки множеств достижимости, построение программных управлений

2.3.1. Введение. В этом разделе продолжается исследование задач управления для непрерывно-дискретных (гибридных) динамических моделей с последействием и полиэдральными ограничениями на управление, существенно используя результаты предыдущего раздела. На основе полученного описания множества достижимых значений целевых функционалов предлагаются конструкции и алгоритмы построения управляющих воздействий, позволяющих достигать заданных значений целевых показателей, если они принадлежат множеству достижимости. Следует отметить, что в подавляющем большинстве работ достижимость понимается по отношению к значениям координат фазового вектора в конечный момент времени. Для задач управления моделями экономических систем характерно более широкое понимание целей управления, при котором эти цели задаются с помощью конечной системы целевых показателей, в число которых входят не только локальные, сосредоточенные в отдельных точках, но и интегральные характеристики поведения системы на всем промежутке управления в целом. Для систем с непрерывным временем и кусочно-постоянным запаздывающим аргументом, определяющим дискретную составляющую памяти входящих в уравнения операторов, подробное обсуждение макроэкономических моделей можно найти в работе [23] и цитированных в ней источниках.

2.3.2. Постановка задачи. Напомним кратко данное в предыдущем разделе описание рассматриваемой экономико-математической модели взаимодействия производственной подсистемы, описываемой уравнением

$$\dot{x}(t) = \sum_{i: t_i < t} A_i(t)x(t_i) + \sum_{i: t_i < t} B_i(t)z(t_i) + \int_0^t F(t,s)u(s)ds + f(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

и финансовой подсистемы, описываемой уравнением

$$z(t_i) = \sum_{j < i} D_{ij} x(t_j) + \sum_{j < i} H_{ij} z(t_j) + \int_0^{t_i} G_i(s) v(s) ds + g(t_i), i = 1, \dots, \mu. \quad (2)$$

Здесь фазовая переменная $x \in R^n$ зависит от непрерывного времени $t \in [0, T]$, а фазовая переменная $z \in R^\nu$ – от дискретного времени $t_i, i = 0, 1, \dots, \mu, t_i > t_{i-1}, t_0 = 0, t_\mu = T$. Конкретный характер взаимодействия определяется заданными матричными коэффициентами $A_j(t), B_j(t), D_{ij}, H_{ij}$. Управления $u(t), u: [0, T] \rightarrow R^{r_1}$ и $v(t), v: [0, T] \rightarrow R^{r_2}$ реализуются с помощью интегральных операторов с ядрами $F(t, s)$ и $G_i(s)$ соответственно. Функции $f(t)$ и $g(t_i)$ интерпретируются как внешние воздействия на систему, например, непредвиденные потери или возможные погрешности моделирования.

Начальное состояние системы (1)–(2) считается заданным:

$$x(0) = \alpha, \quad z(0) = \delta. \quad (3)$$

Цель управления задается с помощью определенного на компонентах $x(\cdot)$ и $z(\cdot)$ вектор-функционала ℓ :

$$\ell(x, z) = \Psi x(0) + \int_0^T \Phi(s) \dot{x}(s) ds + \sum_{i=0}^{\mu} \Gamma_i z(t_i) \quad (4)$$

и представляет собой совокупность N равенств

$$\ell(x, z) = \beta, \quad \beta \in R^N, \quad (5)$$

где β – вектор заданных целевых значений. Постоянные $(N \times n)$ -матрица Ψ , $(N \times \nu)$ -матрицы $\Gamma_i, i = 1, \dots, \mu$ и $(N \times n)$ -матрица $\Phi(s)$ с измеримыми и ограниченными элементами считаются заданными. Общая форма (4) вектор-функционала ℓ со значениями в R^N позволяет охватить разнообразные конкретные случаи целевых условий, возникающих в прикладных задачах. Соответствующие примеры приведены в предыдущем разделе.

Задача достижения целей (5) решается в предположении, что управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ стеснены ограничениями

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \leq \gamma, \quad \gamma \in R^{N_1}, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

где Λ – заданная матрица размерности $N_1 \times (r_1 + r_2)$, предполагается, что множество $\mathcal{V} \subset R^{r_1+r_2}$ решений системы линейных неравенств $\Lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \gamma$ непусто и ограничено.

Цель этого раздела – предложить для задачи (1)–(6) конструкции и алгоритмы построения управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, приводящих к выполнению целевых условий для достижимых значений показателей β .

2.3.3. Основные конструкции. Определим основные пространства для траекторий и управлений. Пусть $L^n[0, T]$ – пространство суммируемых функций $y: [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|y\|_{L^n} = \int_0^T \|y(s)\| ds$ ($\|\cdot\|$ – норма в R^n), $L_2[0, T]$ – гильбертово пространство функций $u: [0, T] \rightarrow R^r$ с нормой, порожденной скалярным произведением $(u, v) = \int_0^T u'(s)v(s)ds$, $AC^n[0, T]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x: [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_{AC^n} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{L^n}$. Зафиксируем множество $J = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T$, и обозначим через $FD^\nu(J)$ пространство функций $z: J \rightarrow R^\nu$ с нормой $\|z\| = \sum_{i=0}^\mu |z(t_i)|$.

Для дальнейших построений этого раздела используется представление общего решения системы (1)–(2) в операторной форме [3,32]:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Fu \\ Gv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ – фундаментальная матрица, $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ – оператор Коши, $z = \text{col}(z(t_1), \dots, z(t_\mu))$, $(Fu)(t) = \int_0^t F(t, s)u(s)ds$,

$Gv = \text{col}(\int_0^{t_1} G_1(s)v(s)ds, \dots, \int_0^{t_\mu} G_\mu(s)v(s)ds)$, компоненты оператора Коши $C_{11} : L^n[0, T] \rightarrow AC^n[0, T]$, $C_{12} : R^{\mu\nu} \rightarrow AC^n[0, T]$, $C_{21} : AC^n[0, T] \rightarrow R^{\mu\nu}$, $C_{22} : R^{\mu\nu} \rightarrow R^{\mu\nu}$ являются ограниченными операторами. Предполагается, что операторы $F : L_2^{r_1}[0, T] \rightarrow L^n[0, T]$, $G : L_2^{r_2}[0, T] \rightarrow R^{\mu\nu}$ также являются ограниченными операторами.

Все построения, связанные с получением представления моментной матрицы $M(t)$ основаны на использовании оператора Коши. Для рассматриваемого класса систем этот оператор строится в явном виде [32]. Подробный вывод выражений для элементов оператора Коши приведен ниже в разделе 2.4.

Обозначим далее

$$\beta_1 = \ell Y \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \ell C \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \beta - \beta_1 - \beta_2. \quad (8)$$

Объединим компоненты $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ в общий вектор управлений $w(\cdot) = \text{col}(u(\cdot), v(\cdot)) \in L_2^r[0, T] = L_2^{r_1+r_2}[0, T]$.

Как показано в предыдущем разделе, целевые условия (5) приводятся к виду

$$\int_0^T M(s)w(s)dt = \tilde{\beta}, \quad (9)$$

где $M(s)$ – моментная $(N \times (r_1 + r_2))$ -матрица с элементами из $L_2^1[0, T]$. В терминах этой матрицы дается описание множества достижимых целевых значений в задаче (1)–(6).

Приведем для этой матрицы определяющие соотношения, воспользовавшись представлением общего решения (7). Используя представление (4) целевого вектор-функционала ℓ , представление (7) и обозначения (8), получаем

$$\ell(x, z) = \beta_1 + \ell C \begin{pmatrix} Fu \\ Gv \end{pmatrix} + \beta_2 = \int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} (C_{11}Fu)(s) ds + \sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i (C_{12}Fu)_i +$$

$$+ \int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} (C_{12} Gv)(s) ds + \sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i (C_{22} Gv)_i,$$

где для $\mu\nu$ -мерного вектор столбца a через $(a)_i$ обозначен i -й ν -мерный вектор-столбец. Отсюда следует, что в блочном представлении моментной матрицы $M(s) = (M_1(s), M_2(s))$ блоки M_1 и M_2 определяются равенствами

$$\int_0^T M_1(s)u(s)ds = \int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} (C_{11} Fu)(s) ds + \sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i (C_{21} Fu)_i \quad (10)$$

и

$$\int_0^T M_2(s)v(s)ds = \int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} (C_{12} Gv)(s) ds + \sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i (C_{22} Gv)_i \quad (11)$$

после выполнения всех операций в правых частях и приведения подобных под знаками интегралов. Проведем в качестве примера соответствующие преобразования для равенства (10). Для этого в случае первого слагаемого воспользуемся представлением оператора C_{11} и его свойствами [31,32]. Имеем

$$(C_{11} Fu)(t) = \int_0^t C_{11}(t,s) \int_0^s F(s,\tau)u(\tau) d\tau ds,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt} (C_{11} Fu)(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} C_{11}(t,s) \int_0^s F(s,\tau)u(\tau) d\tau ds + \int_0^t F(t,s)u(s) ds = \\ &= \int_0^t \left\{ \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} C_{11}(t,\tau) F(\tau,s) d\tau + F(t,s) \right\} u(s) ds. \end{aligned}$$

Обозначая через $\theta(t,s)$ выражение в фигурных скобках, получаем окончательно для первого слагаемого в (10) :

$$\int_0^T \Phi(s) \frac{d}{ds} (C_{11} Fu)(s) ds = \int_0^T \left\{ \int_s^T \Phi(\tau) \theta(\tau,s) d\tau \right\} u(s) ds. \quad (12)$$

Проводя аналогичные преобразования, для второго слагаемого в (10) получаем

$$\sum_{i=1}^{\mu} \Gamma_i (C_{21} F u)_i = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \Gamma_i C_{21}^{ij} \chi_{[0, t_j]}(s) \int_s^{t_j} F(\tau, s) d\tau \right\} u(s) ds, \quad (13)$$

где C_{21}^{ij} – элементы матричного представления оператора C_{21} , $\chi_{[0, t_j]}(s)$ – характеристическая функция отрезка $[0, t_j]$. Таким образом, из (12), (13) следует представление

$$M_1(s) = \int_s^T \Phi(\tau) \theta(\tau, s) d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \Gamma_i C_{21}^{ij} \chi_{[0, t_j]}(s) \int_s^{t_j} F(\tau, s) d\tau.$$

Напомним обозначения, используемые для описания множества достижимых значений целевых показателей. Для каждого $\mu \in R^N$ вводится функция

$$y(t, \mu) = \max(\mu' \cdot M(t) \cdot w : w \in \mathcal{V}). \quad (14)$$

Далее для каждого $t \in [0, T]$ и каждого μ фиксируется совокупность точек $\{\nu_1(t, \mu), \dots, \nu_k(t, \mu)\}$ множества \mathcal{V} , доставляющих значение $y(t, \mu)$ функционалу $w \rightarrow \mu' \cdot M(t) \cdot w$, и вводится функция

$$w(t, \mu) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \nu_j(t, \mu). \quad (15)$$

В таком случае множество S достижимых значений вектора $\tilde{\beta} \in R^N$ состоит из тех и только тех точек $\rho \in R^N$, для которых неравенство

$$\mu' \rho \leq \int_0^T \mu' M(t) w(t, \mu) dt \quad (16)$$

выполняется для всех $\mu \in R^N$.

2.3.4. Описание алгоритма. Дадим описание алгоритма построения программных управлений $u(t)$ и $v(t)$ с использованием построенной матрицы $M(t)$.

1. Задание конечного набора μ_1, \dots, μ_K векторов, определяющих при каждом $t \in [0, T]$ вместе с матрицей $M(t)$ градиент $\mu' \cdot M(t)$ целевой функции в задаче (14).

2. Задание разбиения основного промежутка $[0, T]$ точками τ_i : $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\sigma = T$.

3. Для фиксированного μ_k последовательно в точках τ_i решается задача

$$y(\tau_i, \mu_k) = \max(\mu_k' \cdot M(\tau_i) \cdot w : w \in \mathcal{V}), \quad i = 0, 1, \dots, \sigma - 1.$$

4. На каждом промежутке $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \dots, \sigma$ значение w_{ik} условно оптимального (оптимального по направлению μ_k) кусочно-постоянного управления определяется равенством

$$w_{ik} = \arg \max(\mu_k' \cdot M(\tau_i) \cdot w : w \in \mathcal{V}), \quad i = 0, 1, \dots, \sigma - 1.$$

В случае неоднозначности операции $\arg \max$ (экстремальное значение функционала достигается на грани многогранника) используется конструкция (15).

5. На основном промежутке $[0, T]$ k -е условно оптимальное управление w_k определяется равенством

$$w_k(t) = \sum_{i=1}^{\sigma} w_{ik} \chi_{[\tau_{i-1}, \tau_i)}(t), \quad t \in [0, T].$$

6. Для каждого k вычисляется

$$\rho_k = \int_0^T M(s) w_k(s) dt, \quad k = 1, \dots, K.$$

По построению, каждое ρ_k является достижимым значением для $\tilde{\beta}$, оно достигается на построенном в п. 5 кусочно-постоянном управлении $w_k(t)$.

7. Совокупность точек $\rho_k \in R^N$, $k = 1, \dots, K$ определяет выпуклый многогранник. Любая точка ρ_0 этого многогранника может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации точек ρ_k :

$$\rho_0 = \sum_{k=1}^K \omega_k \rho_k, \quad \omega_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^K \omega_k = 1.$$

8. Управление $w_0(t)$, под действием которого достигается целевое значение ρ_0 , определяется равенством

$$w_0(t) = \sum_{k=1}^K \omega_k w_k(t), \quad t \in [0, T].$$

Первые r_1 компонент этого $(r_1 + r_2)$ -мерного управления определяют компоненты управления $u(t)$, остальные – компоненты управления $v(t)$.

2.3.5. Иллюстрирующий пример. Построим программные управления для системы (4)–(5) предыдущего раздела:

$$\dot{x}(t) = 0.5 \sum_{i < t} x(i) + 0.3 \sum_{i < t} z(i) + \int_0^t u(s) ds, \quad t \in [0, 4], \quad (17)$$

$$z(i) = 0.4 \sum_{j < i} x(j) + 0.2 \sum_{j < i} z(j) + \int_0^i v(s) ds, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (18)$$

с нулевым начальным состоянием

$$x(0) = 0, \quad z(0) = 0 \quad (19)$$

и целевыми условиями

$$\int_0^4 x(t) dt = 10, \quad z(4) = 6. \quad (20)$$

Управления u и v стеснены следующими ограничениями:

$$0 \leq u(t) \leq 1; \quad 0 \leq v(t) \leq 1; \quad u(t) + v(t) \leq 1; \quad t \in [0, 4]. \quad (21)$$

Приведем представления компонент оператора Коши для системы (17) – (18):

$$\begin{aligned} (C_{11}f)(t) = & \int_0^t [0.5 \chi_1(s) + 0.62 \chi_2(s) + 1.994 \chi_3(s)] ds \cdot \int_0^1 f(s) ds + \\ & + \int_0^t [0.5 \chi_2(s) + 0.87 \chi_3(s)] ds \cdot \int_0^2 f(s) ds + \\ & + \int_0^t [0.5 \chi_3(s)] ds \cdot \int_0^3 f(s) ds + \int_0^t f(s) ds, \end{aligned}$$

$$(C_{12}g)(t) = \int_0^t [0.3 \chi_1(s) + 0.36 \chi_2(s) + 1.134 \chi_3(s)] ds \cdot g(1) + \\ + \int_0^t [0.3 \chi_2(s) + 0.51 \chi_3(s)] ds \cdot g(2) + \int_0^t [0.3 \chi_3(s)] ds \cdot g(3),$$

$$C_{21}f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.4 \int_0^1 f(s) \\ 0.88 \int_0^1 f(s) ds + 0.4 \int_0^2 f(s) ds \\ 2.4 \int_0^1 f(s) ds + 1.08 \int_0^2 f(s) ds + 0.4 \int_0^3 f(s) ds + \end{pmatrix},$$

$$C_{22}g = \begin{pmatrix} g(1) \\ 0.2 g(1) + 1. g(2) \\ 0.48 g(1) + 0.2 g(2) + 1. g(2) \\ 1.368 g(1) + 0.6 g(2) + 0.2 g(3) + 1. g(4) \end{pmatrix},$$

где $\chi_i(s)$ – характеристическая функция отрезка $[0, i]$.

В рассматриваемом случае для нахождения элементов матрицы $M(t)$ следует выполнить замену $f(s) = \int_0^s u(\tau) d\tau$, $g(i) = \int_0^i v(s) ds$ и подставить выражения для компонент решения (x, z) в компоненты заданного в этом примере целевого вектор-функционала (20). Действуя так, приходим к следующим выражениям:

$$\int_0^4 x(t) dt = 4.487 \int_0^1 u(s) ds + 1.435 \int_0^2 u(s) ds + 0.25 \int_0^3 u(s) ds + \\ + 0.5 \int_0^4 (4-s)^2 u(s) ds + 2.637 \int_0^1 v(s) ds + 0.855 \int_0^2 v(s) ds + 0.15 \int_0^3 v(s) ds,$$

$$\begin{aligned}
z(4) = & 2.4 \int_0^1 (1-s)u(s)ds + 1.08 \int_0^2 (2-s)u(s)ds + 0.4 \int_0^3 (3-s)u(s)ds + \\
& + 0.4 \int_0^3 (3-s)u(s)ds + 1.368 \int_0^1 v(s)ds + 0.6 \int_0^2 v(s)ds + \\
& + 0.2 \int_0^3 v(s)ds + 1. \int_0^4 v(s)ds .
\end{aligned}$$

Таким образом, для элементов $M_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2$, матрицы $M(t)$ имеем:

$$M_{11}(s) = 4.487 \chi_1(s) + 1.435 \chi_2(s) + 0.25 \chi_3(s) + 0.5(4-s)^2,$$

$$M_{12}(s) = 2.638 \chi_1(s) + 0.855 \chi_2(s) + 0.5 \chi_3(s),$$

$$M_{21}(s) = 2.4 \chi_1(s) + 1.08 \chi_2(s) + 0.4 \chi_3(s),$$

$$M_{22}(s) = 1.368 \chi_1(s) + 0.6 \chi_2(s) + 0.2 \chi_3(s) + 1.$$

Далее с помощью описанного выше алгоритма для $K = 16$ и $\sigma = 20$ находятся достижимые значения компонент целевого вектор-функционала (см. рис. 5). При этом черным цветом выделены три точки, образующие треугольник, содержащий заданный вектор целевых значений (точка с координатами (10, 6)), и указаны номера соответствующих направлений градиента при поиске условно оптимальных управлений.

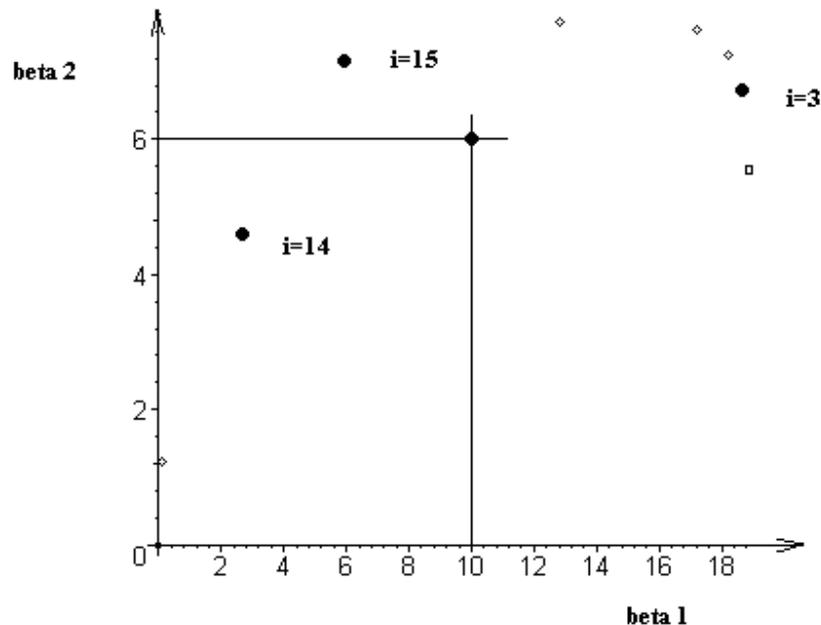


Рис. 5. Достижимые и заданные значения целевых показателей

Выделенным точкам соответствуют следующие управления:

$$u_3(s) = \chi_3(s), \quad v_3(s) = (1 - \chi_3(s)), \quad s \in [0, 4]$$

(здесь и ниже индекс компонент управления соответствует номеру направления оптимизации);

$$u_{14}(s) = 0, \quad v_{14}(s) = (1 - \chi_1(s)), \quad s \in [0, 4];$$

$$u_{15}(s) = 0, \quad v_{15}(s) = 1, \quad s \in [0, 4].$$

Для нахождения искомого управления следует найти коэффициенты выпуклой линейной комбинации вершин упомянутого треугольника для внутренней точки (10, 6). Приведем координаты вершин треугольника с точностью до 0.001: (18.607, 6.760), (2.653, 4.634), (5.847, 7.168). Упомянутые коэффициенты выпуклой линейной комбинации определяются равенствами: $\omega_1 = 0.424$, $\omega_2 = 0.393$, $\omega_3 = 0.183$. Таким образом, поставленная задача решается управлением $w_0(s) = col(u_0(s), v_0(s))$,

где

$$u_0(s) = 0.424u_3(s) + 0.393u_{14}(s) + 0.183u_{15}(s),$$

$$v_0(s) = 0.424v_3(s) + 0.393v_{14}(s) + 0.183v_{15}(s).$$

Графики компонент этого управления представлены на рис. 6, где более тонкая линия соответствует компоненте $u_0(s)$.

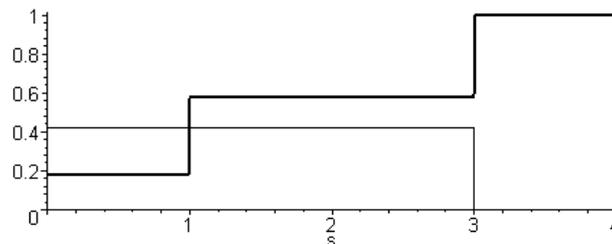


Рис. 6. Графики компонент построенного программного управления

2.4. Представление решений гибридных систем с дискретной памятью

В этом разделе дается явное представление для фундаментальной матрицы Y и оператора Коши C гибридной системы (1)–(2) п. 2.1.1 (см. [32]). Это представление не зависит от слагаемых, содержащих управление, поэтому всюду ниже мы их опускаем (другими словами, рассматриваем случай $u(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0$). Напомним, что получаемое представление лежит в основе сведения задачи об описании множеств достижимости к обобщенной проблеме моментов и дает возможность использовать в явном виде моментную матрицу. Основная идея построений состоит в получении линейной алгебраической системы относительно вектора

$$(\mathbf{x}, z) = \text{col}(x(t_1), \dots, x(t_\mu), z(t_1), \dots, z(t_\mu)).$$

Обращение матрицы этой системы приводит к упомянутому представлению.

Вывод основных соотношений содержит приводимые ниже шаги. Для каждого из них дается подробное описание.

1. Интегрируем от 0 до t_i обе части уравнения (1) :

$$x(t_i) = x(0) + \sum_{j=0}^{\mu} \int_0^{t_j} A_j(s) \chi_j(s) ds x(t_j) + \\ + \sum_{j=0}^{\mu} \int_0^{t_j} B_j(s) \chi_j(s) ds z(t_j) + \int_0^{t_i} f(s) ds.$$

Напомним, что через $\chi_j(s)$ обозначена характеристическая функция отрезка $(t_j, T]$.

2. Вводим следующие обозначения :

$$x_i = x(t_i), z_i = z(t_i), \phi_i = \int_0^{t_i} f(s) ds, \psi_i = g(t_i), i = 1, \dots, \mu; \\ A_{ij} = \int_0^{t_j} A_j(s) \chi_j(s) ds, \text{ если } j < i, A_{ij} = 0 \text{ в противном случае};$$

$$\mathcal{B}_{ij} = \int_0^{t_j} B_j(s) \chi_j(s) ds, \text{ если } j < i, \mathcal{B}_{ij} = 0 \text{ в противном случае};$$

$$\mathcal{D}_{ij} = D_{ij}, \text{ если } j < i, \mathcal{D}_{ij} = 0 \text{ в противном случае};$$

$$\mathcal{H}_{ij} = H_{ij}, \text{ если } j < i, \mathcal{H}_{ij} = 0 \text{ в противном случае.}$$

3. В этих обозначениях рассматриваемую систему можно записать в виде

$$x_i = x(0) + A_{10}x(0) + \sum_{j=1}^{\mu} A_{ij}x_j + B_{10}z(0) + \sum_{j=1}^{\mu} B_{ij}z_j + \phi_i, i = 1, \dots, \mu, \quad (1)$$

$$z_i = D_{10}x(0) + \sum_{j=1}^{\mu} D_{ij}x_j + H_{10}z(0) + \sum_{j=1}^{\mu} H_{ij}z_j + \psi_i, i = 1, \dots, \mu, \quad (2)$$

ИЛИ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{\mu} \\ z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n + A_{10} & B_{10} \\ \dots & \dots \\ E_n + A_{\mu 0} & B_{\mu 0} \\ D_{10} & H_{10} \\ \dots & \dots \\ D_{\mu 0} & H_{\mu 0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1\mu} & B_{11} & \cdots & B_{1\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{\mu 1} & \cdots & A_{\mu\mu} & B_{\mu 1} & \cdots & B_{\mu\mu} \\ D_{11} & \cdots & D_{1\mu} & H_{11} & \cdots & H_{1\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{\mu 1} & \cdots & D_{\mu\mu} & H_{\mu 1} & \cdots & H_{\mu\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_\mu \\ z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_\mu \\ \psi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_\mu \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где E_n – единичная $(n \times n)$ -матрица.

4. Используя естественную блочную форму составных матриц, записываем (3) в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E + A_0 & B_0 \\ D_0 & H_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ D & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

5. Вводим обозначения для блочных матриц:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} E + A_0 & B_0 \\ D_0 & H_0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ D & H \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (5)$$

Заметим, что обратимость матрицы $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ вытекает из ее структуры, определяемой конструкцией всех ее элементов. Более того, такую же структуру имеет и обратная матрица \mathbf{Q} . Для иллюстрации этого замечания приведем пример для случая $n = 2, \nu = 1, \mu = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \square & \square & 1 & 0 & 0 & 0 & \square & 0 & 0 \\ \square & \square & 0 & 1 & 0 & 0 & \square & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 1 & 0 & \square & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 & 1 & \square & \square & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \square & \square & 0 & 0 & 0 & 0 & \square & 1 & 0 \\ \square & \square & \square & \square & 0 & 0 & \square & \square & 1 \end{pmatrix},$$

где символом \square обозначены числовые значения элементов, все единичные и нулевые элементы представлены непосредственно.

6. Решая систему (4) относительно $\text{col}(\mathbf{x}, z)$, получаем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{QP} \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Следует заметить, что первое слагаемое в правой части описывает зависимость решения от начального состояния системы, а второе – от внешнего воздействия.

Мы используем представление (6) для окончательной формы записи решения системы (1)–(2). Для этого обозначим через \mathbf{Y} произведение \mathbf{QP} и запишем \mathbf{Y} и \mathbf{Q} в блочной форме:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11} & \mathbf{Y}_{12} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{Y}_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{x} = Y_{11}x(0) + Y_{12}z(0) + Q_{11}\phi + Q_{12}\psi, \quad (8)$$

$$z = Y_{21}x(0) + Y_{22}z(0) + Q_{21}\phi + Q_{22}\psi, \quad (9)$$

и

$$x_j = Y_{11}^j x(0) + Y_{12}^j z(0) + Q_{11}^j \phi + Q_{12}^j \psi, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (10)$$

$$z_j = Y_{21}^j x(0) + Y_{22}^j z(0) + Q_{21}^j \phi + Q_{22}^j \psi, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad (11)$$

где Y_{k1}^j – j -я группа n -мерных строк матриц $Y_{k,1}$, $k = 1, 2$; Y_{k2}^j – j -я группа ν -мерных строк матриц $Y_{k,2}$, $k = 1, 2$. Матрицы Q_{ki}^j , $k, i = 1, 2$ определяются совершенно аналогично.

7. Заметим, что равенства (9) и (11) дают полное описание для компоненты z решения. Что касается компоненты x , напомним, что $x_j = x(t_j)$, $j = 1, \dots, \mu$, и необходимо получить представление для $x(t)$. Чтобы сделать это, вернемся к уравнению (1) и вычислим $x(t)$ как $x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s) ds$. При этом $\dot{x}(s)$ следует заменить правой частью уравнения (1) с учетом (10) и (11). Для лаконичности записи воспользуемся следующими обозначениями:

$$A_j(t) = \int_0^t A_j(s) \chi_j(s) ds; \quad B_j(t) = \int_0^t B_j(s) \chi_j(s) ds; \quad \phi(t) = \int_0^t f(s) ds. \quad (12)$$

Таким образом получаем

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0) + A_0(t)x(0) + \sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) [Y_{11}^j x(0) + Y_{12}^j z(0)] + \\ & + \sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) [Q_{11}^j \phi + Q_{12}^j \psi] + \\ & + B_0 z(0) + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) [Y_{21}^j x(0) + Y_{22}^j z(0)] + \\ & + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) [Q_{21}^j \phi + Q_{22}^j \psi] + \phi(t), \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} x(t) = & \left[E_n + A_0(t) + \sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Y_{11}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Y_{21}^j \right] x(0) + \\ & + \left[B_0(t) + \sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Y_{12}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Y_{22}^j \right] z(0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Q_{11}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Q_{21}^j \right] \phi + \phi(t) \\
& + \left[\sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Q_{12}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Q_{22}^j \right] \psi.
\end{aligned}$$

Для компоненты $z = \text{col}(z_1, \dots, z_{\mu})$ мы можем записать (11) в виде

$$z = Y_{21}x(0) + Y_{22}z(0) + Q_{21}\phi + Q_{22}\psi.$$

8. Таким образом, для всех компонент фундаментальной матрицы и оператора Коши получаем следующие представления:

$$Y_{11} = E_n + A_0(t) + \sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Y_{11}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Y_{21}^j; \quad (13)$$

$$Y_{12} = B_0(t) + \sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Y_{12}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Y_{22}^j; \quad (14)$$

$$Y_{21} = Y_{21}; \quad Y_{22} = Y_{22}; \quad (15)$$

$$(C_{11}f)(t) = \left[\sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Q_{11}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Q_{21}^j \right] \phi + \int_0^t f(s) ds, \quad (16)$$

где $\phi = \text{col}(\int_0^{t_1} f(s) ds, \dots, \int_0^{t_{\mu}} f(s) ds)$.

Приведем последнее представление в более подробной форме:

$$(C_{11}f)(t) =$$

$$\int_0^t \left\{ E_n + \sum_{k=1}^{\mu} \left[\int_s^t \sum_{j=1}^{\mu} (A_j(\tau) Q_{11}^{jk} + B_j(\tau) Q_{21}^{jk}) \chi_{(t_j, T]}(\tau) d\tau \right] \chi_{[0, t_k]}(s) \right\} f(s) ds,$$

где Q_{11}^{jk} – k -я группа n -мерных столбцов матрицы Q_{11}^j , Q_{21}^{jk} – k -я группа n -мерных столбцов матрицы Q_{21}^j . Выражение в фигурных скобках – матрица Коши $C_{11}(t, s)$.

Далее запишем

$$(C_{12} \mathbf{g})(t) = \left[\sum_{j=1}^{\mu} A_j(t) Q_{12}^j + \sum_{j=1}^{\mu} B_j(t) Q_{22}^j \right] \psi,$$

где $\psi = \text{col}(g(t_1), \dots, g(t_\mu))$, или, в более подробной форме,

$$(C_{12} \mathbf{g})(t) = \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^{\mu} \left[\sum_{j=1}^{\mu} (A_j(s) Q_{12}^{jk} + B_j(s) Q_{22}^{jk}) \chi_{(t_j, T]}(s) \right] g(t_j) \right\} ds,$$

где Q_{12}^{jk} – k -я группа ν -мерных столбцов матрицы Q_{12}^j , Q_{22}^{jk} – k -я группа ν -мерных столбцов матрицы Q_{22}^j .

Наконец, получаем

$$C_{21} f = Q_{21} \text{col} \left(\int_0^{t_1} f(s) ds, \dots, \int_0^{t_\mu} f(s) ds \right), C_{22} \mathbf{g} = Q_{22} \text{col}(g(t_1), \dots, g(t_\mu)).$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & 0.5x(0) + 0.5 \sin(t) \chi_{(1,4]}(t)x(1) + 0.1 \exp(-0.1t) \chi_{(2,4]}(t)x(2) + \\ & + 0.1t^2 \chi_{(3,4]}(t)x(3) + 0.3tz(0) + 0.2 \chi_{(1,4]}(t)z(1) + 0.1 t^2 \chi_{(2,4]}(t)z(2) + \\ & + 0.15 \chi_{(3,4]}(t)z(3) + f(t), \quad t \in [0, 4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(i) = & 0.4x(0) + 0.5 \chi_{(1,4]}(i)x(1) + 0.4 \chi_{(2,4]}(i)x(2) + \\ & + 0.3 \chi_{(3,4]}(i)x(3) + 0.2tz(0) + 0.2 \chi_{(1,4]}(i)z(1) \\ & + 0.3 \chi_{(2,4]}(i)z(2) + 0.15 \chi_{(3,4]}(i)z(3) + g(i), \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

В этом случае имеем $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.708073418 & 0 & 0 & 0 \\ 0.994996248 & 0.259181779 & 0 & 0 \\ 0.826821810 & 0.329679954 & 2.133333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.400000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.600000000 & 0.899999999 & 0 & 0 \\ 0.800000000 & 2.133333333 & 0.600000000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2),$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.708073418 & 1 & 0 & 0 \\ 1.628515977 & 0.259181779 & 1 & 0 \\ 6.161031126 & 1.122601083 & 2.133333333 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.500000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.933229367 & 0.400000000 & 0 & 0 \\ 1.795075907 & 0.637754534 & 0.300000000 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.400000000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.883672712 & 0.899999999 & 0 & 0 \\ 3.495707100 & 4.233333332 & 0.600000000 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.200000000 & 1 & 0 & 0 \\ 0.420000000 & 0.300000000 & 1 & 0 \\ 0.853101814 & 0.690000000 & 0.400000000 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (C_{11}f)(t) = & \int_0^t \{1 + \int_s^t [0.5 \sin(\tau) \chi_{(1,4]}(\tau) + (0.050000000\tau^2 + \\ & + 0.0708073418 \exp(-0.1\tau)) \chi_{(2,4]}(\tau) + (0.139984405 + \\ & + 0.162851598\tau^2) \chi_{(3,4]}(\tau)] \chi_{[0,1]}(s) + [0.1 \exp(-0.1\tau) \chi_{(2,4]}(\tau) + \\ & + (0.060000000 + 0.025918178\tau^2) \chi_{(3,4]}(\tau)] \chi_{[0,2]}(s) + \\ & + [0.1\tau^2 \chi_{(3,4]}(\tau)] \chi_{[0,3]}(s)\} d\tau f(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C_{12}g)(t) = & \int_0^t \{[0.2 \chi_{(1,4]}(s) + (0.040000000 \exp(-0.1s) + \\ & + 0.020000000 s^2) \chi_{(2,4]}(s) + \\ & + (0.630000000 + 0.088367271 s^2) \chi_{(3,4]}(s)] g(1) + \\ & + [0.100000000 s^2 \chi_{(2,4]}(s) + \end{aligned}$$

$$+ (0.045000000 + 0.089999999 s^2) \chi_{(3,4]}(s) g(2) + \\ + [0.150000000 \chi_{(3,4]}(s) g(3) \} ds,$$

$$C_{21} f =$$

$$= \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0.5 \int_0^1 f(s) ds \\ 0.933229367 \int_0^1 f(s) ds + 0.4 \int_0^2 f(s) ds \\ 1.795075907 \int_0^1 f(s) ds + 0.637754534 \int_0^2 f(s) ds + 0.300000000 \int_0^3 f(s) ds \end{array} \right),$$

$$C_{22} g = \left(\begin{array}{c} g(1) \\ 0.2 g(1) + 1g(2) \\ 0.420000000 g(1) + 0.3 g(2) + 1g(3) \\ 0.853101814 g(1) + 0.690000000 g(2) + 0.4 g(3) + 1g(4) \end{array} \right).$$

Все числовые значения приведены с точностью до девятого знака после запятой.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Изд-во Института компьютерных исследований, 2002. 384 с.

2. *Андреанов Д.Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1993. № 5. С. 3–16.

3. *Гусев М.С., Осипов И.О.* Асимптотическое поведение множеств достижимости на малых временных промежутках // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. №3. С. 86-99.

4. *Костоусова Е.К.* О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // Труды института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 195-210.

5. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.

6. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т.13. № 4. С. 601–606.

7. *Максимов В.П.* Теория оптимального управления: вводный курс лекций / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2004.

8. *Максимов В.П.* Теория оптимального управления: вводный курс лекций. / В.П. Максимов; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – 2-е изд., доп. – Пермь, 2018. – 84 с., ил.

9. *Максимов В.П.* Современные математические методы в экономике. Задачи управления и краевые задачи для линейных систем: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2019. 152 с.

10. *Максимов В.П.* Непрерывные математические модели: компьютерный практикум по исследованию задач достижимости и управления: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2019. 124 с.

11. *Максимов В.П.* Достижимые значения целевых функционалов в задачах экономической динамики // Прикладная математика и вопросы управления. 2019. № 4. С. 124–135.
12. *Максимов В.П.* О построении программных управлений в задаче о достижимых значениях целевых функционалов для динамических моделей экономики с дискретной памятью // Прикладная математика и вопросы управления. 2020. № 3. С. 89–104.
13. *Максимов В.П.* Непрерывно-дискретные динамические модели // Уфимский математический журнал. 2021. Т.13. № 3. С. 97–106.
14. *Максимов В.П., Симонов П.М.* Теория оптимального управления. Ч. 2: Элементы теории линейных операторов и операторных уравнений / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2010.
15. *Максимов В.П., Симонов П.М.* Теория оптимального управления: задачи и упражнения: учеб.-метод. материалы / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2012.
16. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Перм. ун-та. Сер.: Экономика. 2011. №2. С. 13–23.
17. *Марченко В.А., Зачкевич З.* Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1775–1786.
18. *Никольский М.С.* Оценивание множества достижимости сверху по включению для некоторых нелинейных систем управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. №3. С. 163–170.
19. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Структура множества достижимости для машины Дуббинса со строго односторонним поворотом // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. №3. С. 171–187.
20. *Симонов П.М.* Теория оптимального управления: Ч.1. Элементы функционального анализа. Элементы теории меры и интеграла Лебега. Гильбертовы пространства / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009.

21. *Симонов П.М.* Экономико-математическое моделирование: учеб. пособие: в 2 ч. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009.
22. *Симонов П.М.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование микро- и макроэкономических процессов и систем: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2010.
23. *Симонов П.М.* Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики // Вестник Перм. ун-та. Сер.: Экономика. 2014. №1. С. 14–27.
24. *Agranovich G. A.* Observability criteria of linear discrete-continuous systems // Functional Differential Equations. 2009. V. 16, № 1. P. 35–51.
25. *De la Sen M.* On the controller synthesis for linear hybrid systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2001. V. 18, P. 503–529.
26. *Digo G.B., Digo N.B.* Approximation of domains of serviceability and attainability of control system on the basic of the inductive approach // Reliability: Theory & Applications. 2011. V. 6. No. 21. P. 41-46.
27. *Gurman V.I., Trushkova E.A.* Estimates for attainability sets of control systems // Differential Equations. 2009. V. 45. No. 11. P. 1636-1644.
28. *Kurzanski A.B., Varaiya P.* On ellipsoidal techniques for reachability analysis // Optimization methods and software. 2002. V. 17. P. 177-203.
29. *Maksimov V.P.* On the l -attainability sets of continuous discrete functional differential systems // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 32. P. 310-313.
30. *Maksimov V.P.* Continuous mathematical models / Perm State University. Perm, 2015. 147 p.
31. *Maksimov V.P.* The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2019. V. 29. No. 1. P. 40-51.

32. *Maksimov V.P.* On a class of linear continuous-discrete systems with discrete memory // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2020. V. 30. No. 3. P. 385-395.

33. *Polyak B.T.* Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Series A. Mathematical Analysis. Watam Press. 2004. V. 11. No. 2-3. P. 255-267.

34. *Rodina L. I.* Estimation of statistical characteristics of attainability sets of controllable systems // Russian Math. (Iz. VUZ). 2013. V. 57. No. 11. P. 17–27.

Учебное издание

Максимов Владимир Петрович

**Непрерывные математические модели:
множества достижимости в задачах управления
с ограничениями**

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*

Корректор *А. В. Цветкова*

Компьютерная верстка: *В. П. Максимов*

Объем данных 2,52 Мб

Подписано к использованию 15.12.2021

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15