ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. Ш. Кусяков

МАТЕМАТИКА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Perm University Press

Пермь 2023

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Ш. Кусяков

МАТЕМАТИКА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для иностранных студентов
всех направлений подготовки бакалавров,
изучающих дисциплину «Высшая математика»*

Пермь 2023

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
К94

Кусяков А. Ш.

К94 Математика. Введение в анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Ш. Кусяков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2023. – 1,39 Мб ; 111 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/kusyakov-matematika-vvedenie-v-analiz.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3988-5

В учебном пособии приводятся теоретические сведения, а также упражнения для самостоятельного решения по разделу «Введение в анализ» дисциплины «Математика». Содержит основные понятия теории пределов, а также дифференциального и интегрального исчислений функции одной переменной. Изложение учебного материала сопровождается большим количеством примеров с решениями. В начале каждой главы дается краткий англо-русский словарь основных математических терминов.

Пособие предназначено для иностранных студентов, обучающихся по экономическим и естественно-научным направлениям подготовки бакалавров.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национально-исследовательского университета

Рецензенты: кафедра математики и физики Пермского государственного аграрно-технологического университета (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент ***В. В. Аюпов***);

научный сотрудник ИМСС УрО РАН, канд. физ.-мат. наук ***И. И. Вертгейм***

ISBN 978-5-7944-3988-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Название «математический анализ» – это сокращенное видоизменение названия «анализ посредством бесконечно малых». Основными разделами математического анализа являются теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисления. Как отдельная дисциплина математический анализ зародился в XVII в. Первая печатная работа по дифференциальному исчислению была опубликована в 1684 г., а по интегральному исчислению – в 1686 г. Автором этих публикаций был немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц. Значительный вклад в развитие математического анализа в этот период внес также знаменитый английский механик и математик Исаак Ньютон.

Основой математического анализа является теория пределов. Именно с помощью предела принято определять такие важные понятия, как производная и определенный интеграл. Однако математики XVII и XVIII вв. не знали пределов, что порождало серьезные проблемы, связанные с обоснованием законности операций дифференцирования и интегрирования. Лишь математики начала XIX в. сумели превратить понятие предела в настоящий фундамент математического анализа. Главная заслуга в создании теории пределов принадлежит французскому математику Огюстену Луи Коши.

Данное пособие, написанное в соответствии с учебной программой по дисциплине «Математика» для студентов-иностранцев экономических и естественно-научных направлений подготовки бакалавров, охватывает следующие разделы математического анализа: теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Каждый раздел содержит необходимые теоретические сведения, типовые примеры с подробными решениями и задания для самостоятельной работы.

Пособие может быть полезно также студентам естественно-научных и гуманитарных специальностей классических университетов.

1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Ключевые слова по теме «Предел функции»

Асимптота	Asymptote
Множество значений функции	Range of functions
Непрерывная функция	Continuous function
Область определения функции	Domain of function
Переменная	Variable
Предел функции	Limit of function
Предел слева	Limit from the left
Предел справа	Limit from the right
Функция	Function
Элементарная функция	Elementary function

1.1. Понятие функции

Функцией $y = f(x)$ называется правило, по которому каждому значению величины x из множества X ставится в соответствие вполне определенное значение величины y из множества Y. Величина x называется *независимой переменной*, а величина y – *зависимой переменной*. Множество X называется *областью определения функции* и обозначается $D(y)$, а множество Y – *множеством значений* функции и обозначается $E(y)$.

Пример. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Вычислить $f(3)$.

Решение:

$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1.$

Ответ: $f(3) = 1$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости OXY, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Ниже приведены графики простейших алгебраических функций.

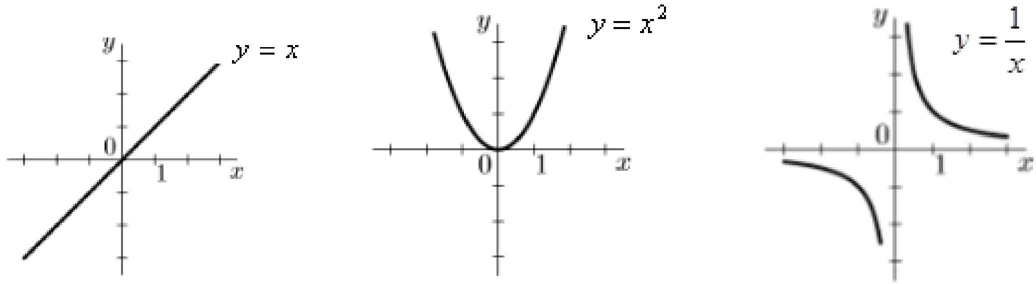

Рис. 1. Графики простейших алгебраических функций

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

1) степенная функция $y = x^{\alpha}$, где α – любое действительное число;

2) показательная функция $y = a^{x}$, где $a > 0, a \neq 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$;

4) тригонометрические функции $y = sinx, y = cosx, y = tgx,$ $y = ctgx$;

5) обратные тригонометрические функции $y = arcsinx,$ $y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx.$

Элементарными функциями называются функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и/или конечного числа образования сложной функции (суперпозиции). Например, функция $y = x^3 + sinx$ является элементарной, так как она построена из основных элементарных функций $y = x^3$ и $y = sinx$ при помощи операции сложения. Элементарной является также функция $y = sin\, x^3$, так как она построена в результате суперпозиции основных элементарных функций $y = x^3$ и $y = sinx.$

Пусть область определения функции у $= f(x)$ симметрична относительно нуля. Функция у $= f(x)$ называется четной, если для любых значений x из области определения

$$f(-x) = f(x)$$

и нечетной, если

$$f(-x) = -f(x).$$

Например, функция $y = x^2$ является четной, так как

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

а функция $y = x^3$ является нечетной, так как

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

В то же время, например, функция $y = x^2 + x^3$ является функцией общего вида, так как

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3,$$

следовательно,

$$f(-x) \neq f(x) \text{ и } f(-x) \neq -f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции – относительно начала координат.

Функция называется ограниченной на промежутке X, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$. Например, функция $y = sinx$ ограничена на всей числовой оси, так как $|sinx| \leq 1$ для любого $x \in X$.

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения подразумеваются все значения x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл.

Пример. Найти область определения функции $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$.

Решение. Выражение $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ имеет смысл при условии

$$-x^2 + 3x - 2 \geq 0.$$

Умножив обе части последнего неравенства на (-1), получим

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0.$$

Квадратный трехчлен в левой части последнего неравенства имеет корни

$$x_1 = 1, x_2 = 2.$$

Ветви соответствующей параболы направлены вверх (рис. 2).

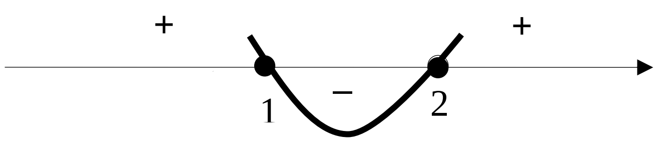

Рис. 2. Знаки функции

Следовательно, решением данного неравенства является промежуток [1; 2]. Таким образом, $D(y) = [1; 2]$.

Ответ: $D(y) = [1; 2]$.

Пример. Найти область определения функции $y = ln\frac{x-2}{3-x}$.

Решение. По определению логарифмической функции, имеем

$$\frac{x-2}{3-x} > 0.$$

Преобразуем неравенство

$$-\frac{x-2}{x-3} > 0; \quad \frac{x-2}{x-3} < 0.$$

Решаем неравенство методом интервалов (рис. 3).

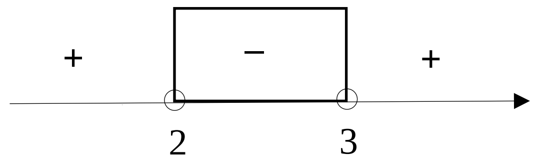

Рис. 3. Знаки функции

Следовательно, $D(y) = (2; 3)$.

Ответ: $D(y) = (2; 3)$.

Пример. Найти область определения функции $y = arcsin(x-2)$.

Решение. По определению функции $y = arcsinx$ имеем

$$-1 \leq x - 2 \leq 1 .$$

Решив данное двойное неравенство, получим

$$1 \leq x \leq 3 .$$

Следовательно, $D(y) = [1; 3]$.

Ответ: $D(y) = [1; 3]$.

Пример. Найти множество значений функции $y = 5sinx + 2$.

Решение. По определению функции $y = sinx$ имеем

$$-1 \leq sinx \leq 1.$$

Следовательно,

$$-5 \leq 5sinx \leq 5,$$

$$-5+2 \le 5sinx+2 \le 5+2,$$

$$-3 \le 5sinx+2 \le 7.$$

Таким образом,

$$-3 \le y \le 7,$$

т.е. $E(y) = [-3;\ 7]$.

Ответ: $E(y) = [-3;\ 7]$.

Пример . Найти множество значений функции $y = 2arcsinx + \pi$.

Решение. По определению обратной тригонометрической функции имеем

$$-\frac{\pi}{2} \le arcsinx \le \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$-\pi \le 2arcsinx \le \pi,$$

$$-\pi+\pi \le 2arcsinx+\pi \le \pi+\pi,$$

$$0 \le 2arcsinx+\pi \le 2\pi.$$

Таким образом,

$$0 \le y \le 2\pi.$$

т.е. $E(y) = [0;\ 2\pi]$.

Ответ: $E(y) = [0;\ 2\pi]$.

1.2. Предел функции в точке

Число A называется пределом функции в точке $x = a$, если для любого положительного ε (эпсилон) существует такое положительное $\delta = \delta(\varepsilon)$ (дельта), что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Смысл данного определения состоит в том, что для всех x, достаточно близких к a, значения функции по модулю как угодно мало отличаются от числа A.

Из определения предела, в частности, следует, что

$$\lim_{x\to a} x = a, \lim_{x\to a} k = k,$$

где $k = const$.

Для основных элементарных функций справедливо следующее равенство:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right) = f(a),$$

где a принадлежит области определения данной элементарной функции. Например,

$$\lim_{x\to 3} x^2 = \left(\lim_{x\to 3} x\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции, а k – заданная константа. Пусть для заданных функций существуют пределы при $x \to a$. Сформулируем основные правила вычисления пределов.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x).$$

2. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) пределов слагаемых

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x).$$

3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

4. Предел отношения двух функций равен отношению пределов, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Пример. Вычислить предел $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Применить теорему о частном двух функций здесь нельзя, так как предел числителя

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 6x + 5) = 0$$

и предел знаменателя

$$\lim_{x\to 1}(x^2 - 3x + 2) = 0.$$

Другими словами, имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для устранения данной неопределенности выполним следующие преобразования:

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-5}{x-2}.$$

Применив теорему о пределе частного двух функций к последнему выражению, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-5}{x-2}=\frac{1-5}{1-2}=4.$$

Ответ: 4.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. Применить теорему о частном двух функций здесь нельзя, так как предел числителя

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$$

и предел знаменателя

$$\lim_{x\to 0}x=0.$$

Другими словами, имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для устранения данной неопределенности выполним следующие преобразования:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}.$$

Найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{0+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если ее предел равен нулю:

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0.$$

Например, функция $\alpha(x)=x^2-4$ при $x\to 2$ является бесконечно малой, так как

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=2^2-4=0.$$

Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого положительного M существует положительное $\delta = \delta(M)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, верно неравенство $|f(x)| > M$. Условно это записывают так:

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty.$$

Если $\beta(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$ и принимает лишь положительные значения, то пишут

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = +\infty,$$

если лишь – отрицательные значения, то

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = -\infty.$$

Теорема. Если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, то функция $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a$ и, наоборот, если функция $\beta(x)$ является бесконечно большой величиной, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$ является бесконечно малой величиной.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

Решение. Введем обозначение

$$\alpha(x) = x^2 - 4.$$

Найдем предел

$$\lim_{x \to 2} \alpha(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0.$$

Таким образом, величина $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to 2$. Следовательно, по теореме о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами величина

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{x^2 - 4}$$

является бесконечно большой величиной, т.е.

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2 - 4} = \infty.$$

Ответ: ∞.

1.3. Предел функции на бесконечности

Число A называется *пределом функции на бесконечности,* если для любого положительного ε (эпсилон) существует положительное $M = M(\varepsilon)$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M$, верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Смысл данного определения состоит в том, что при достаточно больших по модулю значениях аргумента x значения функции по модулю как угодно мало отличаются от числа A. Правила вычисления пределов на бесконечности формулируются аналогично случаю предела функции в точке.

Исходя из определения можно показать, например, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 0\,.$$

По теореме о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами получим

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty;\ \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty;\ \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty\,.$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3 + 6x^2 + x}{x^3 + 3x + 4}$.

Решение. Применить теорему о частном двух функций здесь нельзя, так как предел числителя

$$\lim_{x\to\infty}(2x^3 + 6x^2 + x) = \infty$$

и предел знаменателя

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 + 3x + 4) = \infty,$$

т. е. имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для устранения неопределенности выполним следующие преобразования:

$$\frac{2x^3 + 6x^2 + x}{x^3 + 3x + 4} = \frac{x^3(2 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^3(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3})} = \frac{2 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}\,.$$

Вычислим предел последнего выражения, применив правила вычисления пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=2.$$

Ответ:2.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+1}$.

Решение. Применить теорему о частном двух функций здесь нельзя, так как предел числителя

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+x+1)=\infty$$

и предел знаменателя

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+2x^2+1)=\infty,$$

т.е. имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для устранения неопределенности выполним следующие преобразования:

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+1}=\frac{x^3(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}.$$

Вычислим предел последнего выражения, применив правила вычисления пределов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

Ответ: 0.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+x+1}$.

Решение. Введем обозначения:

$$\beta(x)=\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+x+1},\alpha(x)=\frac{1}{\beta(x)}=\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+1}.$$

Предел функции $\alpha(x)$ был найден в предыдущем примере

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^3+2x^2+1}=0.$$

По теореме о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\beta(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha(x)}=\infty.$$

Ответ: ∞.

1.4. Замечательные пределы

Первым замечательным пределом называется следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1.$$

Пусть $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$, т. е. $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной при $x\to 0$. Можно показать, что в этом случае справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Пример. Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\frac{sin4x}{2x}$.

Решение. Сначала преобразуем выражение под знаком предела:

$$\frac{sin4x}{2x}=2\frac{sin4x}{4x}.$$

Пусть $\alpha(x)=4x$. Очевидно, что $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(2\frac{sin4x}{4x}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{sin4x}{4x}=2\lim_{x\to 0}\frac{sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=2\cdot 1=2.$$

Ответ: 2.

Пусть $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$. Исходя из определения первого замечательного предела можно доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,\lim_{x\to 0}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}$.

Решение. Пусть $\alpha(x)=2x$. Очевидно, что $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=2\cdot 1=2.$$

Ответ: 2.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,6x}{2x}$.

Решение. Пусть $\alpha(x)=6x$. Очевидно, что $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,6x}{2x}=3\lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsin\,6x}{6x}\right)=3\lim_{x\to 0}\frac{arcsin\,\alpha(x)}{\alpha(x)}==3\cdot 1=3.$$

Ответ: 3.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{arctg\,2x}$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x}{arctg\,2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{arctg\,2x}{6x}\right)^{-1}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{6x}\right)^{-1}.$$

Пусть $\alpha(x)=2x$. Очевидно, что $\alpha(x)\to 0$ при $x\to 0$. Следовательно,

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{6x}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,2x}{2x}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,\alpha(x)}{\alpha(x)}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3.$$

Ответ: 3.

Вторым замечательным пределом называется следующий предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Пусть $\beta(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{\beta(x)}\right)^{\beta(x)}=e.$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = e^{2}.$$

Ответ: e^2.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right)^{3} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{x/3}\right)^{3} = e^{3}.$$

Ответ: e^3.

1.5. Эквивалентные бесконечно малые величины

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$. Если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными*. В этом случае пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Теорема (принцип замены эквивалентных). Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ являются бесконечно малыми величинами при $x \to a$. Если $\alpha(x)\sim\gamma(x)$, $\beta(x)\sim\delta(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}.$$

Другими словами, если отношение двух бесконечно малых величин имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых величин эквивалентной ей бесконечно малой величиной.

Пусть $\alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$, тогда справедливы следующие отношения эквивалентности:

$$sin\,\alpha(x)\sim\alpha(x), arcsin\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$$

$$tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x), arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x).$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin4x}{arcsin2x}$.

Решение. Для вычисления данного предела воспользуемся принципом замены эквивалентных

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,4x}{arcsin\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=\lim_{x\to 0}2=2.$$

Ответ: 2.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,6x}{sin\,2x}$.

Решение. Для вычисления данного предела воспользуемся принципом замены эквивалентных

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,6x}{sin\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{2}=3.$$

Ответ: 3.

1.6. Односторонние пределы. Теорема существования предела

Число A называется правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если при стремлении x к a $(x\to a)$ переменная x принимает значения большие a $(x>a)$, и при этом функция $f(x)$ стремится к A $(f(x)\to A)$. Обозначение:

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0)=A.$$

Число A называется левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если при стремлении x к a $(x\to a)$ переменная x принимает значения меньшие a $(x<a)$, и при этом функция $f(x)$ стремится к A $(f(x)\to A)$. Обозначение:

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0)=A.$$

Теорема существования предела. Функция имеет предел при $x\to a$ тогда и только тогда, когда пределы справа и слева существуют и равны между собой:

$$f(a+0)=f(a-0).$$

Пример . Найти односторонние пределы при $x\to 0$ функции

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0;\\ x+1, x\geq 0.\end{cases}$$

Решение. Найдем сначала предел при $x \to +0$. Если $x \geq 0$, тогда

$$f(x) = x + 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (x + 1) = 1.$$

Теперь найдем предел при $x \to -0$. Если $x < 0$, тогда

$$f(x) = 2^x.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} 2^x = 1.$$

Пределы справа и слева существуют и равны между собой. Следовательно, данная функция имеет предел при $x \to 0$:

$$f(+0) = f(-0) = 1.$$

Ответ: $f(+0) = f(-0) = 1$.

Пример. Найти односторонние пределы при $x \to 0$ функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0; \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем сначала предел при $x \to +0$. Если $x \geq 0$, тогда

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (x^2 + 1) = 1.$$

Теперь найдем предел при $x \to -0$. Если $x < 0$, тогда

$$f(x) = x^2 - 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (x^2 - 1) = -1.$$

Предел справа не равен пределу слева, следовательно, данная функция не имеет предела при $x \to 0$.

Ответ: $f(+0) = 1; f(-0) = -1$.

1.7. Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) функция определена в точке $x = a$;

2) в точке $x = a$ существует конечный предел функции;

3) предел функции при $x \to a$ равен значению функции в этой точке

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функция непрерывна на интервале $(a; b)$, если она непрерывна в каждой точке данного интервала. В частности, многие функции непрерывны на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$. Это линейная функция, многочлены, экспонента, синус, косинус и др.

Если хотя бы одно из условий непрерывности не выполняется, тогда точка $x = a$ называется *точкой разрыва*.

Различают *два типа точек разрыва*:

1. Разрыв первого рода – в этом случае существуют конечные односторонние пределы $f(a + 0)$ и $f(a - 0)$.

2. Разрыв второго рода – в этом случае хотя бы один из пределов $f(a + 0)$ или $f(a - 0)$ не существует или равен бесконечности.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Решение. Функция не определена в точке $x = 1$, т.е. терпит разрыв в этой точке. Найдем предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2.$$

Таким образом, в точке $x = 1$ существует предел, равный двум. Следовательно, существуют и односторонние пределы $f(1 + 0)$ и $f(1 - 0)$. Значит, точка $x = 1$ – точка разрыва первого рода.

В данном примере пределы справа и слева совпадают:

$$f(1 + 0) = f(1 - 0) = 2 .$$

Точки разрыва первого рода, в которых пределы справа и слева совпадают, называются точками устранимого разрыва (рис. 4).

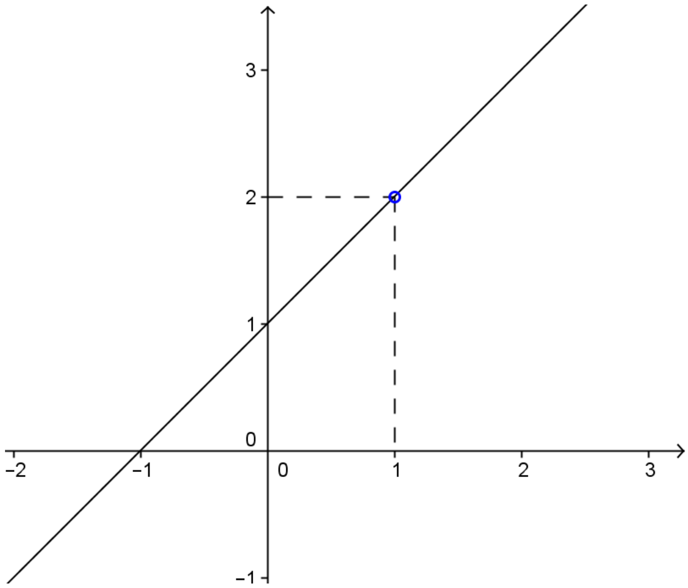

Рис. 4. Точка устранимого разрыва

Ответ: $x = 1$ – точка устранимого разрыва.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, x < 0; \\ x + 1, x \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Функции $y = x + 1$ и $y = x - 1$ являются непрерывными. Следовательно, разрыв возможен лишь в точке, где происходит смена вида функции: $x = 0$. Найдем предел при $x \to +0$.

Если $x \geq 0$, тогда $f(x) = x + 1$. Следовательно,

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (x + 1) = 1.$$

Теперь найдем предел при $x \to -0$. Если $x < 0$, тогда $f(x) = x - 1$. Следовательно,

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (x - 1) = -1.$$

В данном примере пределы справа и слева не равны, т.е.

$$f(+0) \neq f(-0).$$

Разность $\Delta = f(a + 0) - f(a - 0)$ называется скачком функции в точке $x = a$. В данном примере

$$\Delta = f(+0) - f(-0) = 1 - (-1) = 2.$$

Точки разрыва первого рода, в которых пределы справа и слева не равны, называются точками неустранимого разрыва (рис. 5).

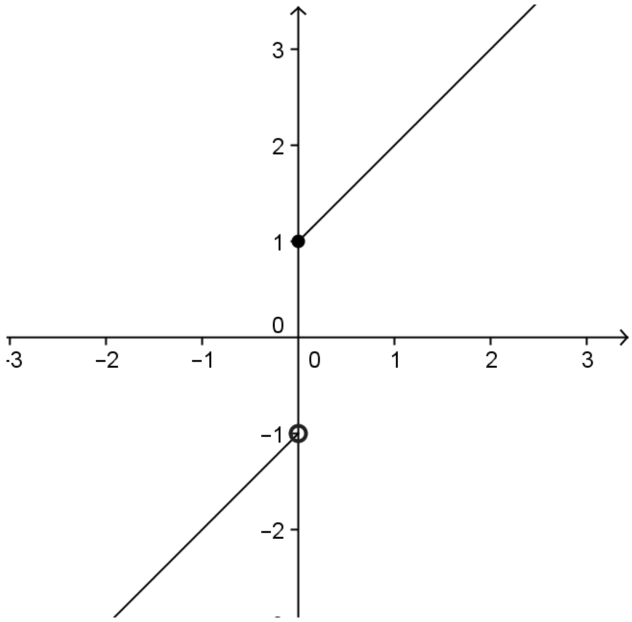

Рис. 5. Точка неустранимого разрыва

Ответ: $x = 0$ – точка неустранимого разрыва.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

Решение.

Функция не определена в точке $x = 1$. Следовательно, $x = 1$ – точка разрыва.

Введем обозначение $\alpha(x) = x - 1$. Найдем предел

$$\lim_{x\to 1} \alpha(x) = \lim_{x\to 1}(x-1) = 0,$$

Таким образом, $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to 1$. Следовательно, по теореме о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами, $f(x) = 1/\alpha(x)$ – бесконечно большая величина, т.е.

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Таким образом, $x = 1$ – точка разрыва второго рода (рис. 6). Точки разрыва второго рода называют также точками бесконечного разрыва.

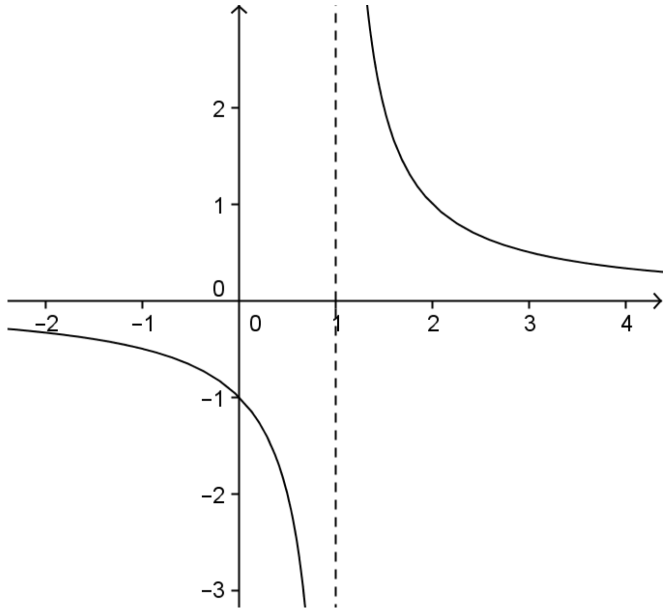

Рис. 6. Точка бесконечного разрыва

Ответ: $x = 1$ – точка разрыва второго рода.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Решение. Разложим знаменатель по корням

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Таким образом, функция не определена в точках $x = 1$ и $x = 2$.

Исследуем точку $x = 1$.

Вычислим предел

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x - 2} = -2.$$

Таким образом, в точке $x = 1$ существует предел, равный -2. Следовательно, существуют и односторонние пределы $f(1 + 0)$ и $f(1 - 0)$. Значит, точка $x = 1$ – точка разрыва первого рода. В данном примере пределы справа и слева совпадают

$$f(1 + 0) = f(1 - 0) = -2.$$

Следовательно, $x = 1$ – точка устранимого разрыва.

Исследуем точку $x = 2$.

Введем обозначение $\alpha(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$.

Найдем предел предел $\alpha(x)$:

$$\lim_{x\to 2}\alpha(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \frac{4-6+2}{4-1} = \frac{0}{3} = 0.$$

Таким образом, $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина при $x \to 2$.

Следовательно, по теореме о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами,

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2-0}\frac{1}{\alpha(x)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{\alpha(x)} = +\infty.$$

Таким образом, $x = 2$ – точка разрыва второго рода (точка бесконечного разрыва).

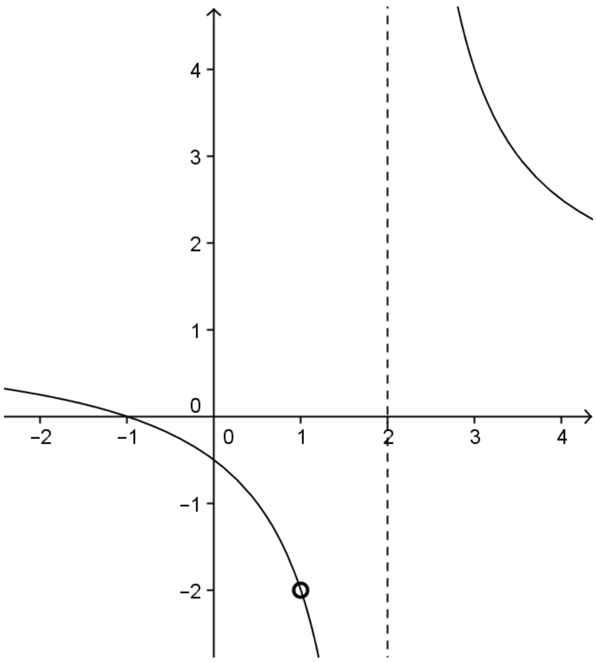

Рис. 7. Точки устранимого и бесконечного разрывов

Ответ: $x = 1$ – точка устранимого разрыва; $x = 2$ – точка бесконечного разрыва.

1.8. Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат. Различают три вида асимптот: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если предел функции $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ равен бесконечности.

Пример. Проверить, имеет ли функция $y = (x-2)^{-2}$ вертикальную асимптоту.

Решение. Вертикальную асимптоту следует искать среди точек разрыва. Функция не определена в точке $x = 2$. Проверим, является ли прямая $x = 2$ асимптотой. Вычислим предел:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty.$$

Следовательно, график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 2$.

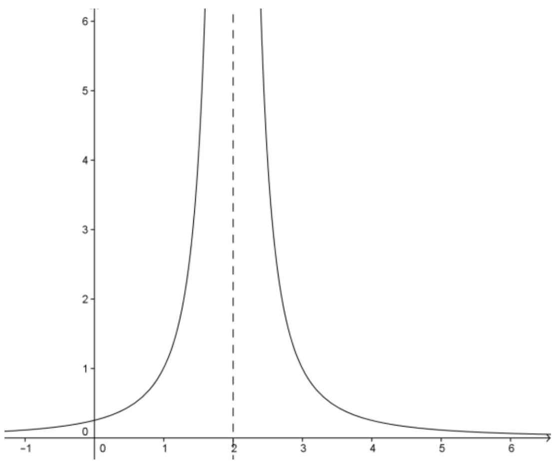

Рис. 8. Вертикальная асимптота $x = 2$

Ответ: $x = 2$ – вертикальная асимптота.

В общем случае, прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен бесконечности. Например, график функции $y = lnx$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, так как

$$\lim_{x \to +0} lnx = -\infty.$$

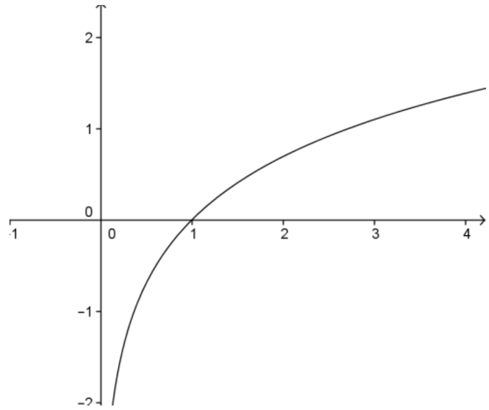

Рис. 9. График функции $y = lnx$

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции$y = f(x)$, если существует конечный предел $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

Пример. Проверить, имеет ли график функции

$$y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

горизонтальную асимптоту.

Решение. Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2.$$

Следовательно, прямая $y = 2$ является горизонтальной асимптотой.

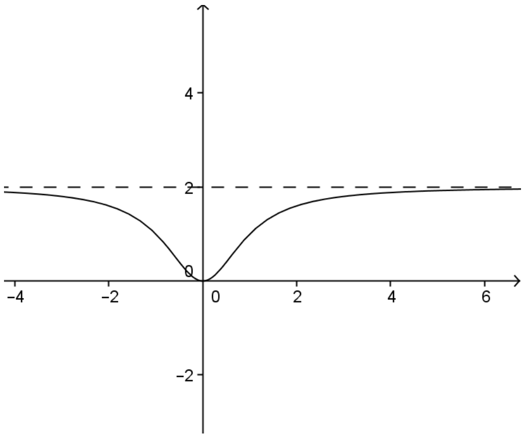

Рис. 10. Горизонтальная асимптота

Ответ: $y = 2$ – горизонтальная асимптота.

Если конечен только один из пределов $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ или $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, то функция имеет лишь правостороннюю или левостороннюю горизонтальную асимптоту соответственно.

Например, график показательной функции $y = e^x$ имеет только левосто-роннюю горизонтальную асимптоту $y = 0$, так как

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

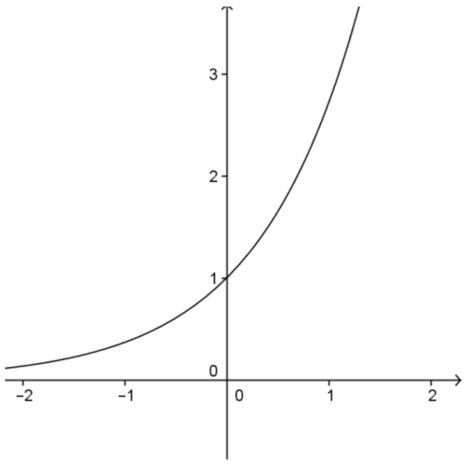

Рис. 11. График функции $y = e^x$

Возможен также случай, когда функция имеет как правостороннюю, так и левостороннюю горизонтальные асимптоты. Например, график функции $y = arctgx$ имеет правостороннюю асимптоту $y = \pi/2$ и левостороннюю асимптоту $y = -\pi/2$, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} actgx = \pi/2, \lim_{x\to-\infty} arctgx = -\pi/2.$$

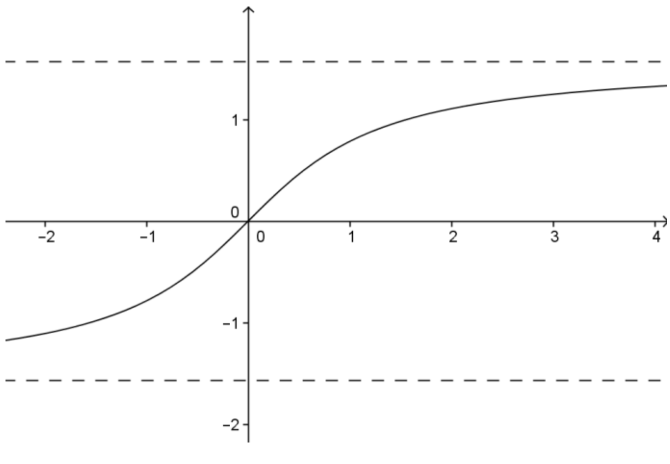

Рис. 12. График функции $y = arctgx$

Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, тогда функция не имеет горизонтальных асимптот, но может иметь наклонную асимптоту.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой*, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Решение. Функция определена при всех значениях x, поэтому ее график не имеет вертикальных асимптот (ВА). Проверим, имеет ли кривая горизонтальные асимптоты. Для этого вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \infty.$$

Следовательно, график не имеет горизонтальных асимптот.

Найдем наклонные асимптоты. Для этого вычислим пределы

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1\,;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2 - x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ является наклонной асимптотой.

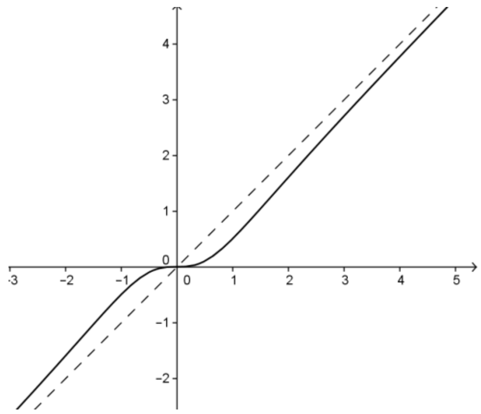

Рис. 13. Наклонная асимптота $y = x$

Ответ: $y = x$ – наклонная асимптота.

Наклонная асимптота так же, как и горизонтальная, может быть правосторонней или левосторонней.

Прямая $y = kx + b$ является правосторонней наклонной асимптотой, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b.$$

Прямая $y = kx + b$ является левосторонней наклонной асимптотой, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = b.$$

1.9. Упражнения

1. Найти область определения:

а) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; б) $y = \sqrt{-2 + 3x - x^2}$; в) $y = \sqrt{-6 + 5x - x^2}$.

2. Найти область определения:

а) $y = ln(4 - x^2)$; б) $y = ln\dfrac{2 - x}{x - 5}$; в) $y = ln\dfrac{3 - x}{2x - 4}$.

3. Найти область определения:

а) $y = \arcsin\dfrac{x - 3}{2}$; б) $y = \arcsin(2x - 5)$; в) $y = \arccos(|x| - 1)$.

4. Найти множество значений:

а) $y = 5sinx + 1$; б) $y = 2 + 7cosx$; в) $y = 4cosx + 1$.

5. Найти множество значений:

а) $y = 2arcsinx$; б) $y = arccosx + \pi$; в) $y = 4arccosx - \pi$.

6. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x^2 + 4x}$.

7. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 7x + 10}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 4x + 3}$.

8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9 + x} - 3}{x}$.

9. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2-x+4}{2x^3-x^2+1}$.

10. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x^2+x+2}{4x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+2}{x^4+2x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4-x+4}{2x^3-x^2+1}$.

11. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin6x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{4x}$.

12. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg9x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin4x}{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{arcsin5x}$.

13. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{7x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{4x}$.

14. Найти точки разрыва и указать их тип:

а) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$; б) $y=\frac{x}{x-1}$; в) $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

15. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\frac{1+3x}{2+x}$; б) $y=\frac{1+2x^2}{1+x^2}$; в) $y=\frac{3x^5}{2+x^4}$.

16. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{arctg\,(x-1)}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{arcsin(x^2-3x+2)}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{arctg(x^2-4x+3)}{arcsin\,(x-3)}$.

17. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-13x-10}$; б) $y=\frac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$; в) $y=\frac{x^2-x-6}{3x^2-8x-3}$.

18. Найти асимптоты графика функции:

а) $y=\sqrt{1+3x+3x^2}$; б) $y=\sqrt{4-2x+9x^2}$; в) $y=\sqrt{1-x+x^2}$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Ключевые слова по теме «Дифференциальное исчисление»

Дифференциал	Differential
Дифференцирование	Differentiation
Приращение	Increment
Производная	Derivative
Производная произведения	Derivative of product
Производная суммы	Derivative of sum
Производная частного	Derivative of quotient
Точка экстремума	Point of extremum
Экстремум функции	Extremum of function
Эластичность	Elasticity

2.1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и придадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$ («дельта икс»). Тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это отношение называется *относительным приращением функции* на промежутке $(x; x + \Delta x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел относительного приращения функции при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная функции имеет несколько обозначений:

- y' (обозначение Лагранжа, читается: «игрек штрих»);
- $\frac{dy}{dx}$ (обозначение Лейбница, читается: «дэ игрек по дэ икс»);
- $\dot{y}$ (обозначение Ньютона, читается: «игрек с точкой»).

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

Из определения производной следует, что производная константы равна нулю, т.е.

$$(k)' = 0,$$

где $k = const$.

2.2. Таблица производных

На основе определения производной можно составить таблицу производных основных элементарных функций (табл.1).

Таблица 1

Производные основных элементарных функций

№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$
1	x	1	5	$sinx$	$cosx$	9	$arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	x^n	nx^{n-1}	6	$cosx$	$-sinx$	10	$arccosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	e^x	e^x	7	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	11	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
4	lnx	$1/x$	8	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	12	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 0{,}25$.

Решение. Найдем производную

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Подставив числовое значение, получим

$$y'(0{,}25) = \frac{1}{2\sqrt{0{,}25}} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ: $y'(0{,}25) = 1$.

Пример. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$ при $x = 0{,}1$.

Решение. Найдем производную

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Подставив числовое значение, получим

$$y'(0{,}1) = -\frac{1}{0{,}1^2} = -\frac{1}{0{,}01} = -100.$$

Ответ: $y'(0{,}1) = -100$.

2.3. Геометрический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной в данной точке

$$y'(x_0) = k = tg\alpha.$$

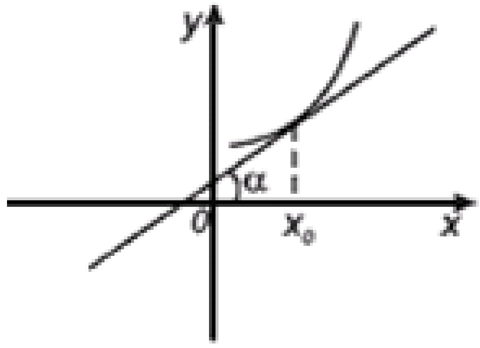

Рис. 14. Геометрический смысл производной

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение: Сначала вычислим значение функции в точке $x_0 = 2$

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

Найдем производную функции

$$f'(x) = 2x.$$

Вычислим значение производной в точке $x_0 = 2$

$$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Подставив найденные значения функции и ее производной в точке в уравнение касательной, получим

$$y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4.$$

Найдем угловой коэффициент нормали (прямой, перпендикулярной касательной) из условия перпендикулярности прямых

$$k = -\frac{1}{f'^{(2)}} = -\frac{1}{4}.$$

Запишем уравнение нормали

$$y = 4 - \frac{1}{4}(x - 2) = -0{,}25x + 4{,}5.$$

Ответ: $y = 4x - 4$; $y = -0{,}25x + 4{,}5$.

2.4. Дифференциал функции

Дифференциалом *функции* $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента Δx. Дифференциал обозначается dy и вычисляется по формуле

$$dy = y'\Delta x.$$

Найдем дифференциал функции $y = x$. Производная $y' = 1$, следовательно,

$$dy = dx = y'\Delta x = \Delta x,$$

откуда

$$dx = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменой. На этом основании формулу для дифференциала функции можно представить в виде

$$dy = y'dx,$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Пример. Найти дифференциал функции $y = x^2$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Сначала найдем дифференциал

$$dy = y'dx = 2xdx.$$

Подставив числовые значения, получим

$$dy = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2.$$

Ответ: $dy = 2$.

2.5. Правила вычисления производных

Пусть k – константа, а $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1) постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(ku)' = ku';$$

2) производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

3) производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(uv)' = u'v + v'u;$$

4) производная отношения двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Пример. Найти значение производной функции

$y = 2x^4 + 2\sqrt{x} + \dfrac{4}{x} + 1$ при $x = 1$.

Решение. Воспользуемся правилом вычисления производной суммы нескольких функций:

$$y' = 8x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}.$$

Подставив значение $x = 1$, получим

$$y'(1) = 8 \cdot 1^3 + \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{4}{1^2} = 5.$$

Ответ: $y'(1) = 5$.

Пример. Найти значение производной функции $y = 6e^x + 2x$ при $x = ln2$.

Решение:

$$y' = 6e^x + 2.$$

Подставив значение $x = ln2$, получим

$$y'(ln2) = 6e^{ln2} + 2 = 6 \cdot 2 + 2 = 14.$$

Ответ: $y'(ln2) = 14$.

Пример. Найти значение производной функции $y = 12lnx + 3x$ при $x = 3$.

Решение:

$$y' = \frac{12}{x} + 3.$$

Подставив значение $x = 3$, получим

$$y'(3) = \frac{12}{3} + 3 = 7.$$

Ответ: $y'(3) = 7$.

Пример. Найти значение производной функции $y = 12sinx + tgx$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

$$y' = 12cosx + \frac{1}{cos^2x}.$$

Подставив значение $x = \frac{\pi}{3}$, получим

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{cos^2\frac{\pi}{3}} = 6 + 4 = 10.$$

Ответ: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10$.

Пример. Найти значение производной функции

$y = 10arctgx + \sqrt{3}arcsinx$ при $x = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$y' = \frac{10}{1+x^2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставив значение $x = \frac{1}{2}$, получим

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 8 + 2 = 10\,.$$

Ответ: $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 10$.

Пример. Вычислить производную функции $y = e^x \sin x$.

Решение. Используя правило вычисления производной произведения двух функций и табличные значения производных, получим

$$y' = (e^x \sin x)' = (e^x)' sinx + e^x (sinx)' =$$

$$= e^x sinx + e^x cosx = e^x(sinx + cosx).$$

Ответ: $y' = e^x(sinx + cosx)$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Решение. Воспользуемся правилом вычисления производной отношения двух функций

$$y' = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'(x^2+1\ ) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

Пример. Вычислить производную логарифмической функции общего вида $y = log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Решение. Используя формулу перехода к новому основанию, представим логарифмическую функцию в виде

$$y = \log_a x = \frac{lnx}{lna}.$$

Найдем производную последнего выражения

$$y' = \left(\frac{lnx}{lna}\right)' = \frac{1}{lna}(lnx)' = \frac{1}{xlna}.$$

Таким образом, производная логарифмической функции общего вида вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}.$$

Например,

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{xln2}.$$

Ответ: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}.$

2.6. Производная сложной функции

Пусть $y = f(z)$ есть функция от переменной z, а переменная z, в свою очередь, является функцией $z = g(x)$ от переменной x, т.е. задана сложная функция $y = f(g(x))$.

Если $y = f(z)$ и $z = g(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции равна производной данной функции по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y'_z \cdot z'_x.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = (3x + 2)^7$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$y' = ((3x + 2)^7)' = 7(3x + 2)^6(3x + 2)' =$

$= 7(3x + 2)^6 \cdot 3 = 21(3x + 2)^6.$

Ответ: $y' = 21(3x + 2)^6$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{(3x + 2)^7}$.

Решение. Представим функцию в виде

$$y = \frac{1}{(3x+2)^7} = (3x+2)^{-7}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = ((3x+2)^{-7})' = -7(3x+2)^{-8}(3x+2)' =$$

$$= -7(3x+2)^{-8} \cdot 3 = -\frac{21}{(3x+2)^8}.$$

Ответ: $y' = -\dfrac{21}{(3x+2)^8}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = e^{4x+3}$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (e^{4x+3})' = e^{4x+3}(4x+3)' = 4e^{4x+3}.$$

Ответ: $y' = 4e^{4x+3}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \ln(6x+5)$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (\ln(6x+5))' = \frac{1}{6x+5}(6x+5)' = \frac{6}{6x+5}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{6}{6x+5}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Представим функцию в виде

$$y = sin^2 x = (sinx)^2.$$

По правилу вычисления сложной функции имеем

$$y' = ((sinx)^2)' = 2sinx \cdot (sinx)' = 2sinxcosx = sin2x.$$

Ответ: $y' = sin2x$.

Пример. Вычислить производную показательной функции общего вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Решение. Используя основное логарифмическое тождество, представим показательную функцию в виде

$$y = a^x = e^{lna^x} = e^{xlna}.$$

Применив формулу дифференцирования сложной функции, получим

$y' = (e^{xlna})' = e^{xlna} \cdot lna = e^{lna^x} \cdot lna = a^x lna.$

Таким образом, производная показательной функции общего вида вычисляется по формуле

$$(a^x)' = a^x lna.$$

Например, $(3^x)' = 3^x \cdot ln3$.

Ответ: $(a^x)' = a^x lna$.

2.7. Логарифмическая производная

Логарифмической производной T функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции (темп функции)

$$T = (lny)' = \frac{1}{y}y' = \frac{y'}{y}.$$

Из определения логарифмической производной следует

$$y' = y(lny)' = yT.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = (x+1)^{sinx}$.

Решение.Найдем логарифм функции

$$lny = ln(x+1)^{sinx} = sinx \cdot ln(x+1).$$

Найдем логарифмичекую производную

$$T = (lny)' = (sinx \cdot \ln(x+1))' = cosx \cdot \ln(x+1) + \frac{sinx}{x+1}.$$

Найдем производную

$$y' = yT = (x+1)^{sinx}\left(cosx \cdot \ln(x+1) + \frac{sinx}{x+1}\right).$$

Ответ: $y' = (x+1)^{sinx}\left(cosx \cdot \ln(x+1) + \frac{sinx}{x+1}\right)$.

2.8. Эластичность

Эластичностью E называется предел отношения относительного приращения функции Δy к относительному приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$

$$E = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} y'.$$

Эластичность можно выразить через логарифмическую производную (темп функции)

$$E = \frac{x}{y} y' = x \frac{y'}{y} = xT,$$

где $T = \frac{y'}{y}$ – темп функции.

Пример. Найти эластичность функции $y = 100 - x^2$.

Решение:

$$E = \frac{x}{100 - x^2}(-2x) = -\frac{2x^2}{100 - x^2} = \frac{2x^2}{x^2 - 100}.$$

Ответ: $E = \frac{2x^2}{x^2 - 100}$.

Пример. Найти эластичность функции $y = \sqrt{1600 - x^2}$.

Решение. Для нахождения эластичности данной функции воспользуемся формулой

$$E = xT.$$

Найдем логарифм и темп функции:

$$lny = ln\sqrt{1600 - x^2} = \frac{1}{2}\ln(1600 - x^2)\,;$$

$$T = (lny)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1600 - x^2} = -\frac{x}{1600 - x^2}.$$

Следовательно,

$$E = xT = -\frac{x^2}{1600 - x^2} = \frac{x^2}{x^2 - 1600}.$$

Ответ: $E = -\frac{x^2}{1600 - x^2}$.

Пример. Найти эластичность функции $y = 100e^{-0,03x}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$E = xT.$$

Найдем последовательно логарифм, логарифмическую производную и эластичность данной функции:

$$lny = ln100e^{-0,03x} = ln100 + lne^{-0,03x} = ln100 - 0,03x;$$

$$T = (lny)' = -0,03;$$

$$E(y) = xT = -0,03x.$$

Ответ: $E = -0,03x$.

2.9. Экстремумы функции

Функция называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастающие и убывающие на промежутке функции называются *монотонными.*

Теорема. Если *производная* функции $y = f(x)$ *положительна* внутри некоторого промежутка X, то функция *возрастает* на этом промежутке.

Например, производная функции $y = x^3 + x + 1$ равна

$$y' = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1.$$

Очевидно, что $y' > 0$, следовательно, данная функция является возрастающей.

Теорема. Если *производная* функции $y = f(x)$ *отрицательна* внутри некоторого промежутка X, то функция *убывает* на этом промежутке.

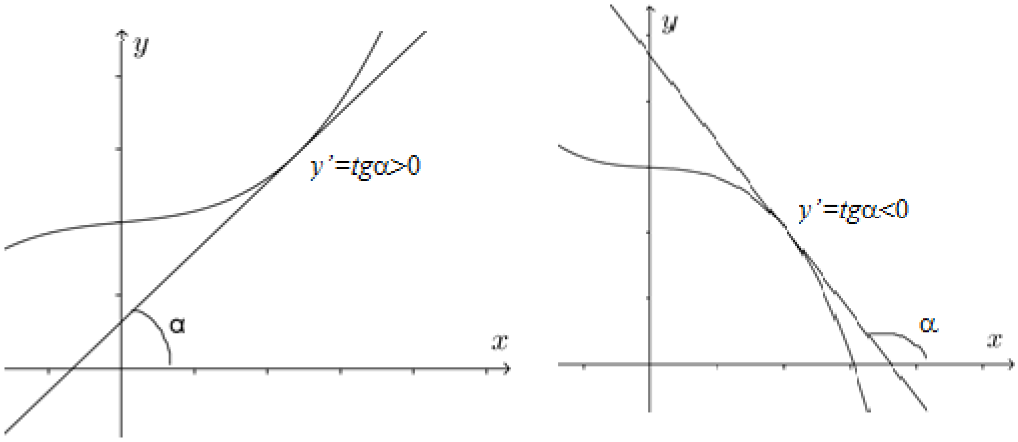

Рис. 15. Геометрическая иллюстрация условий монотонности функции

Например, производная функции $y = -x^5 - 3x + 2$ равна

$$y' = (-x^5 - 3x + 2)' = -5x^4 - 3.$$

Очевидно, что $y' < 0$, следовательно, данная функция является убывающей.

Геометрический смысл теорем: если касательная к графику функции образует с осью абсцисс острый угол, то функция возрастает, если тупой – убывает.

Точки на оси абсцисс, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, называются *точками экстремума.*

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток возрастания, а справа – промежуток убывания, то эта точка называется *точкой максимума.*

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток убывания, а справа – промежуток возрастания, то эта точка называется *точкой минимума.*

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно *максимумом и минимумом функции.* Максимум или минимум функции объединяют общим термином *экстремум функции*.

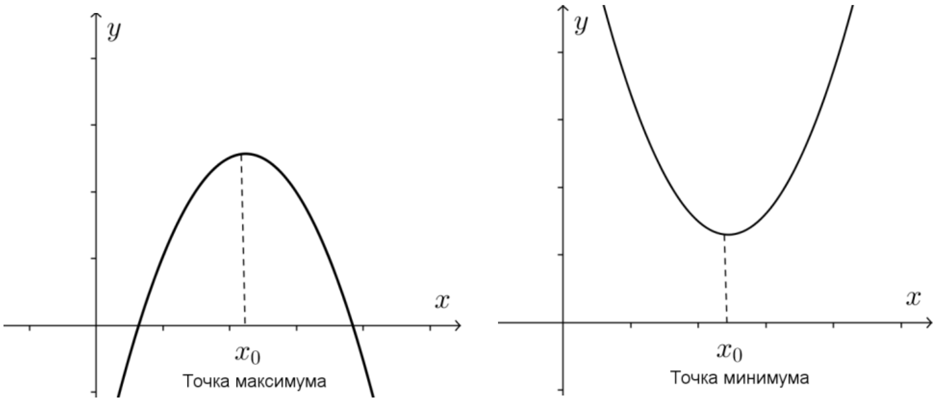

Рис. 16. Геометрическая иллюстрация экстремумов функции

Теорема (необходимые условия экстремума). В точке экстремума $x = x_0$ производная равна нулю

$$f'(x_0) = 0$$

или не существует.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими.*

Теорема (первое достаточное условие). Пусть x_0 – критическая точка. Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум, а если с минуса на плюс, то – минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Алгоритм исследования на экстремум при помощи первой производной:

1) находим производную;

2) находим критические точки;

3) исследуем знаки первой производной и находим экстремумы функции.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 10$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции

$f'(x) = (2x^3 - 6x + 10)' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x - 1)(x + 1)$.

Приравнивая производную нулю

$$6(x - 1)(x + 1) = 0,$$

найдем критические точки

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 1.$$

Экстремумы могут быть только в этих точках. Нанесем критические точки на числовую ось. Исследуем знак производной $f'(x) = 6(x-1)(x+1)$.

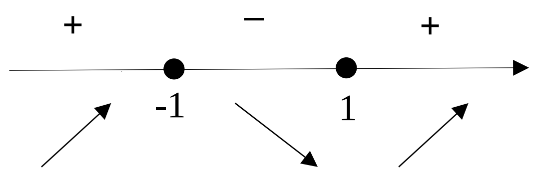

Рис. 17. Знаки производной

Найдем экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 10$:

$y_{max} = f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) + 10 = 14;$

$y_{min} = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 10 = 6.$

Ответ: $y_{max} = f(-1) = 14$; $y_{min} = f(1) = 6$.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Решение. Представим данную функцию в виде

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}.$$

Найдем производную

$$f'(x) = (x + x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0.$$

Решив уравнение, найдем критические

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 1.$$

Точка $x = 0$ не является критической, так как функция не определена в этой точке.

Нанесем критические точки и точку $x = 0$ на числовую ось. Исследуем знак производной.

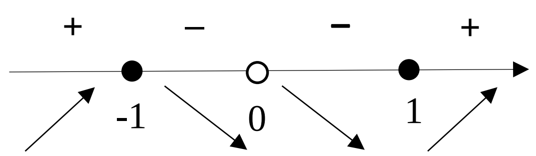

Рис. 18. Знаки производной

Таким образом, $x = -1$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем экстремумы функции $f(x) = x + 1/x$:

$$y_{max} = f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2;$$

$$y_{min} = f(1) = 1 + 1/1 = 2.$$

В данном примере оказалось, что $y_{max} < y_{min}$.

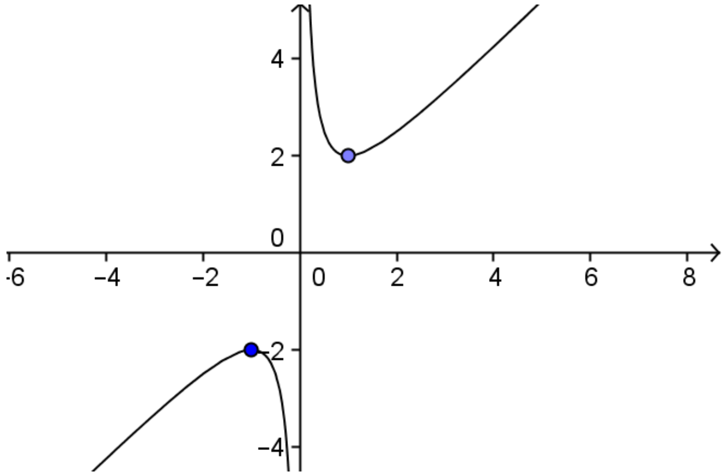

Рис. 19. График функции

Ответ: $y_{max} = f(-1) = -2$; $y_{min} = f(1) = 2$.

При формулировке второго достаточного условия используется понятие второй производной

$$y'' = (y')',$$

т.е. вторая производная функции равна производной от производной данной функции.

Теорема (второе достаточное условие). Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 и выполняются условия:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция имеет экстремум: если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – это точка минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – это точка максимума.

Алгоритм исследования на экстремум при помощи второй производной:

1) находим производную;

2) находим критические точки;

3) находим вторую производную;

4) исследуем знаки второй производной в критических точках и находим экстремумы функции.

Пример. При помощи второго достаточного условия исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3x + 10$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции

$f'(x) = (x^3 - 3x + 10) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

Приравнивая производную нулю

$$3(x-1)(x+1) = 0,$$

найдем критические точки

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = 1.$$

Найдем вторую производную данной функции

$$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

В точке $x_1 = -1$ вторая производная $f''(x) = -6 < 0$, т.е. функция имеет максимум.

В точке $x_2 = 1$ вторая производная $f''(x) = 6 > 0$, т.е. функция имеет минимум.

Вычислив значения функции в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, найдем экстремумы функции:

$$y_{max} = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 10 = 12,$$

$$y_{min} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 10 = 8.$$

Ответ: $y_{max} = f(-1) = 12$; $y_{min} = f(1) = 8$.

2.10. Выпуклость и вогнутость функций

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой на некотором промежутке X.

Функция $y = f(x)$ называется выпуклой (выпуклой вверх) на промежутке X, если график функции $y = f(x)$ расположен ниже касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка X.

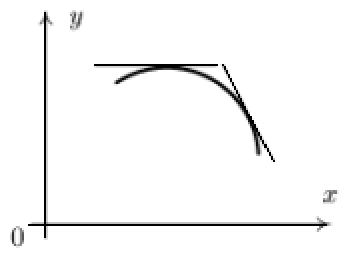

Рис. 20. Выпуклая функция

Функция $y = f(x)$ называется вогнутой (выпуклой вниз) на промежутке X, если график функции $y = f(x)$ расположен выше касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка X.

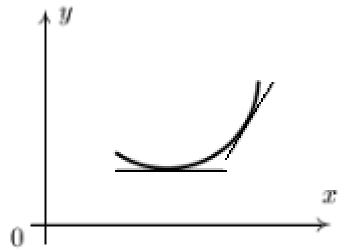

Рис. 21. Вогнутая функция

Теорема. Если вторая производная функции $y = f(x)$ внутри данного промежутка X положительна, то функция $y = f(x)$ вогнута (выпукла вниз); если же вторая производная отрицательна, то функция на данном промежутке выпукла (выпукла вверх).

Точка, в которой меняется направление выпуклости функции, называется *точкой перегиба.*

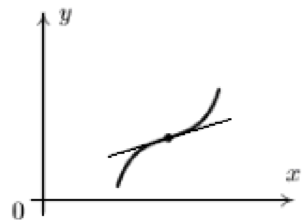

Рис. 22. Точка перегиба

Теорема (необходимое условие перегиба). В точке перегиба $x = x_0$ вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю

$$f''(x_0) = 0$$

или не существует.

Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются критическими точками второго рода.

Теорема (достаточное условие перегиба). Если вторая производная функции $y = f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Из этих теорем вытекает следующая схема исследования на выпуклость и вогнутость функций:

1) найти вторую производную;

2) найти точки, в которых вторая производная равна нулю
или не существует;

3) исследовать знаки второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод о характере выпуклости исследуемой функции.

Пример. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^3 - 3x + 1$.

Решение. Найдем вторую производную данной функции

$$y'' = ((x^3 - 3x + 1)')' = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

Приравняв вторую производную нулю $6x = 0,$ получим $x = 0$. Точка $x = 0$ – критическая точка второго рода. Эта точка разбивает область определения второй производной на два интервала: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

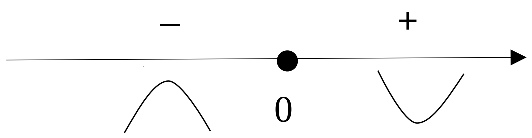

Рис. 23. Знаки второй производной

Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба.

Найдем значение функции в точке перегиба

$$y_{\text{п}} = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Ответ: $x = 0$ – точка перегиба.

2.11. Построение графиков алгебраических функций

При исследовании алгебраических функций и построения их графиков можно рекомендовать следующую схему:

1) найти область определения;

2) исследовать функцию на четность-нечетность;

3) найти асимптоты (вертикальные, горизонтальные и наклонные);

4) найти интервалы монотонности и экстремумы;

5) найти интервалы выпуклости и точки перегиба;

6) найти дополнительные точки, уточняющие график и построить график.

Пример. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 + 20}{x - 4}$.

Решение:

1. $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$

2. Функция общего вида.

3. Найдем асимптоты. Вычислим предел в точке разрыва $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = \infty.$$

Таким образом, прямая $x = 4$ является вертикальной асимптотой (ВА).

Проверим, имеет ли график данной функции горизонтальные асимптоты (ГА). Для этого вычислим предел

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = \infty.$$

Следовательно, график данной функции не имеет горизонтальных асимптот.

Исследуем кривую на наличие наклонных асимптот (НА):

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 + 20}{x - 4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 20}{x(x - 4)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 20}{x^2 - 4x} = 1\,;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 20}{x - 4} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 20 - x^2 + 4x}{x - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x + 20}{x - 4} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ – наклонная асимптота графика функции.

4. Найдем производную

$$y' = \left(\frac{x^2+20}{x-4}\right)' = \frac{2x(x-4)-x^2-20}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}\,.$$

Приравняв производную нулю

$$y' = 0,$$

получим уравнение

$$x^2-8x-20=0.$$

Корни этого уравнения $x=-2$ и $x=10$.

Таким образом, имеем две критические точки $x=-2$ и $x=10$. Точка $x=4$ не является критической, так как не входит в область определения функции.

Исследуем знак производной. Для этого представим производную в виде:

$$y' = \frac{(x+2)(x-10)}{(x-4)^2}.$$

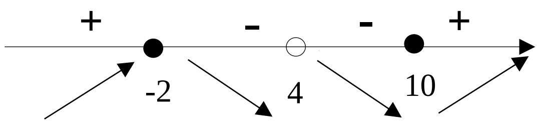

Рис. 24. Знаки производной функции

Таким образом $x=-2$ – точка максимума, $x=10$ – точка минимума. Найдем экстремумы функции.

$$y_{max} = y(-2) = \frac{(-2)^2+20}{-2-4} = -4;$$

$$y_{min} = y(10) = \frac{10^2+20}{10-4} = 20;$$

4) Найдем вторую производную

$$y'' = \left(\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}\right)' = \frac{2(x-4)((x-4)^2-x^2+8x+20))}{(x-4)^4} = \frac{72}{(x-4)^3}.$$

Вторая производная не равна нулю. Точка $x=4$ не входит в область определения функции. Следовательно, точек перегиба нет.

Исследуем знак второй производной.

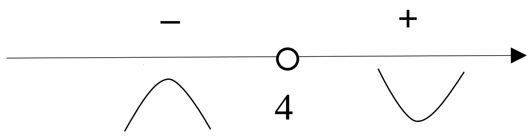

Рис. 25. Знаки второй производной

Таким образом, $y'' < 0$ при $x < 4$ и $y'' > 0$ при $x > 4$. Следовательно, на интервале $(-\infty; 4)$ функция выпукла, а на интервале $(4; +\infty)$ – вогнута.

6. В качестве дополнительной характерной точки выберем точку пересечения графика функции с осью ординат $x = 0, y(0) = -5$. Построим график функции.

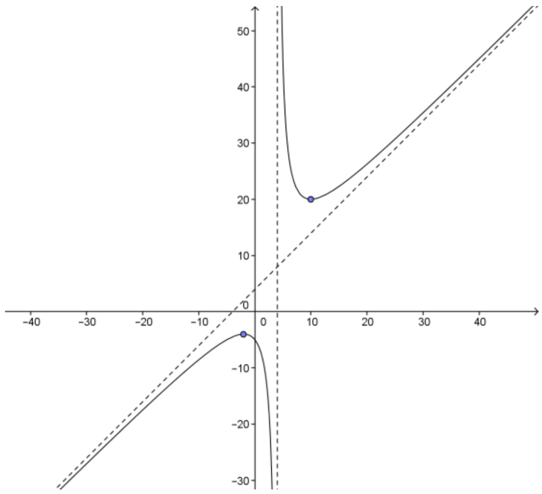

Рис. 26. График функции

2.12. Правило Лопиталя

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a, причем $g'(x) \neq 0$. Если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

либо

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Другими словами, предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших величин равен пределу отношения их производных (правило Лопиталя).

Пример. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

Таким образом, $(e^x-1)\sim x$.

Ответ: 1.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)\frac{0}{0}$. Применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(x+1))'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(x+1)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1.$$

Таким образом, $\ln(x+1)\sim x$.

Ответ: 1.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x-1+e^x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x-1+e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(xe^x-1+e^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Правило Лопиталя справедливо не только тогда, когда x стремится к некоторому конечному числу, но и при $x\to\infty$.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{lnx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(\sqrt{x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Ответ: 0.

2.13. Производные высших порядков

Пусть дана функция $y=f(x)$. Производная этой функции y' также является функцией. Вторая производная функции определяется следующим образом:

$$y''=(y')',$$

т.е. равна производной от производной y'. Аналогично второй производной определяются третья и все последующие производные функции:

$$y'''=(y'')', y^{(4)}=(y''')', \dots, y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Здесь n – порядок производной. Отметим, что для обозначения порядка производных выше третьего вместо штрихов используют число, заключенное в круглые скобки.

Пример. Найти производную третьего порядка от функции

$$y=x^3+x^2+x+1.$$

Решение:

$$y'=3x^2+2x+1, y''=6x+2, y'''=6.$$

Ответ: 6.

Пример. Найти производную четвертого порядка от функции $y=sinx$.

Решение:

$$y'=cosx, y''=-sinx, y'''=-cosx, y^{(4)}=sinx.$$

Ответ: $sinx$.

Пример. Найти производную четвертого порядка от функции $y = cosx$.

Решение.

$$y' = -sinx, y'' = -cosx, y''' = sinx, y^{(4)} = cosx.$$

Ответ: $cosx$.

Пример. Найти производную $n -$ го порядка от функции $y = e^x$.

Решение:

$$y' = e^x, y'' = e^x, \dots \; y^{(n)} = e^x.$$

Ответ: e^x.

2.14. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ – многочлен $P(x)$ степени n:

$$P(x) \; = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Требуется преобразовать этот многочлен в многочлен относительно разности $(x - x_0)$, где x_0 – заданное число, т.е. представить многочлен в виде

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n.$$

Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, \dots, A_n$:

- продифференцируем n раз последнее равенство,
- подставим в исходную функцию и в выражения производных значение $x = x_0$,
- выразим искомые коэффициенты через найденные значения исходной функции и производных в заданной точке $x = x_0$.

В результате получим

$A_0 = P(x_0)$,

$A_1 = P'(x_0)/1!$,

$A_2 = P''(x_0)/2!$,

……………………………….

$A_n = P^{(n)}(x_0)/n!$.

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ (читается «эн факториал»).

Подставив найденные значения коэффициентов в исходное выражение для многочлена относительно разности $x - x_0$, получим

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Полученная формула называется формулой Тейлора для многочлена $P(x)$ степени n.

Пример. Разложить многочлен $P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$ по степеням $x + 1$.

Решение:

$x_0 = -1;$

$P(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3, P(-1) = 10;$

$P'(x) = -12x^2 + 6x - 2, P'(-1) = -20;$

$P''(x) = -24x + 6, P''(-1) = 30;$

$P'''(x) = -24, P'''(-1) = -24.$

Таким образом,

$$P(x) = 10 - 20(x + 1) + \frac{30}{2!}(x + 1)^2 + \frac{-24}{3!}(x + 1)^3 =$$
$$= 10 - 20(x + 1) + 15(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3$$

Ответ: $10 - 20(x + 1) + 15(x + 1)^2 - 4(x + 1)^3$.

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до $(n + 1)$ –го порядка включительно, то для любого x из этой окрестности справедлива *формула Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R(x).$$

Последний член $R(x)$ в этой формуле называется остаточным членом формулы Тейлора. Он представляет собой погрешность приближенного равенства

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Существует несколько форм представления остаточного члена ряда Тейлора. Наибольшее распространение получило представление остаточного члена в форме Лагранжа

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Здесь

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0< \theta < 1.$$

Пример. При помощи формулы Тейлора представить приближенно функцию $y = 1/(x+1)$ в виде кубического многочлена относительно разности $(x-1)$.

Решение. По условиям задачи $x_0 = 1$. Вычислим последовательно значения функции и ее производных до третьего порядка включительно:

$$y = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1},\ y(1) = \frac{1}{2};$$

$$y' = ((x+1)^{-1})' = -1/(x+1)^2,\ y'(1) = -\frac{1}{4};$$

$$y'' = (-(x+1)^{-2})' = 2/(x+1)^3,\ y''(1) = \frac{1}{4};$$

$$y''' = (2(x+1)^{-3})' = -6/(x+1)^4,\ y'''(1) = -\frac{3}{8}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{x+1} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3.$$

Ответ: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3$.

Если принять в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то получим формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R(x).$$

Остаточный член в формуле Маклорена, записанный в форме Лагранжа, имеет вид

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}x^{n+1}.$$

Здесь $c = \theta x$, $0< \theta < 1$.

При помощи формулы Маклорена можно получить следующие приближенные формулы:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!};$$

$$cosx \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$sinx \approx x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Пример. При помощи формулы Маклорена вычислить приближенно значение $e^{-0,6}$, ограничившись первыми четырьмя членами разложения.

Решение:

$$e^{-0,6} \approx 1 - 0,6 + \frac{(-0,6)^2}{2!} + \frac{(-0,6)^3}{3!} = 1 - 0,6 + 0,18 - 0,036 = 0,544.$$

Оценим погрешность полученного решения в предположении, что функция задана на отрезке [-1;0]. Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R(x) = \frac{e^c}{4!}x^4.$$

Учитывая, что $-1 \leq x \leq 0$, получим

$$R(x) = \frac{e^c}{4!}x^4 < \frac{e^0}{4!}(-1)^4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0,041(6).$$

Ответ: $0,544$.

2.15. Производная неявной функции

До сих пор мы рассматривали функции, заданные в *явном* виде, т.е. в виде $y = f(x)$. Рассмотрим функции, заданные неявным образом:

$$F(x,y) = 0.$$

Примером функции, заданной неявным образом, может служить уравнение окружности радиусом R

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

Для нахождения производной y' неявной функции надо:

• продифференцировать обе части уравнения по переменной x, рассматривая y как функцию от x;

• решить полученное уравнение относительно y'.

Пример. Найти значение производной в точке (3;4) окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 - 5^2 = 0.$$

Решение. Продифференцируем обе части уравнения окружности по переменной x, рассматривая y как функцию от x:

$$(x^2 + y^2 - 5^2)' = 0';$$

$$2x + 2yy' = 0.$$

Решим полученное уравнение относительно y':

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Подставив заданные значения x и y в полученную формулу, получим

$$y'(3) = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: -3/4.

Пример. Найти значение производной неявной функции

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$$

в точке (1; 1).

Решение. Продифференцируем обе части уравнения по переменной x, рассматривая y как функцию от x:

$$(x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5)' = 0',$$

$$3x^2 - (4xy^2 + 4x^2yy') + 5 + y' = 0.$$

Подставив заданные значения $x = 1$ и $y = 1$ в полученное уравнение, получим

$$3 - 4 - 4y'(1) + 5 + y'(1) = 0.$$

Решив последнее уравнение, найдем

$$y'(1) = \frac{4}{3}.$$

Ответ: 4/3.

Пример. Найти значение производной неявной функции

$$ysinx = \cos{(x - y)}$$

в точке $(\pi/2;\ \pi/3)$.

Решение. Продифференцируем обе части уравнения:

$$(y sinx)' = (\cos(x-y))',$$

$$y' sinx + y(sinx)' = -\sin(x-y)\,(x-y)',$$

$$y' sinx + y cosx = -\sin(x-y)\,(1-y').$$

Подставив заданные значения $x = \pi/2$ и $y = \pi/3$ в полученное уравнение, получим

$$y'\,(\pi/2)\cdot 1 + y\cdot 0 = -\frac{1}{2}(1 - y'(\pi/2)),$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

$$2y'(\pi/2) = -1 + y'(\pi/2);$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Ответ: -1.

2.16. Производная функции, заданной параметрически

В параметрической форме функция задается двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Здесь t – параметр. Получим формулу для нахождения производной функции y по переменной x:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Здесь нижний индекс показывает переменную, по которой выполняется дифференцирование.

Пример. Найти производную y'_x при $t = 2$ от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1. \end{cases}$$

Решение. Используем формулу

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

В данном случае:

$$y'_t = (\mathrm{t}^3 - 3\mathrm{t} + 1)'_t = 3t^2 - 3,$$

$$x'_t = (t^3 + 3t + 1)'_t = 3t^2 + 3.$$

Подставляем найденные производные в формулу производной

$$y'_x = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}.$$

Следовательно,

$$y'_x(2) = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: 3/5.

Пример. Найти производную y'_x при $t = \pi/4$ от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 3\mathrm{sin}t. \end{cases}$$

Решение. Используем формулу

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

В данном случае:

$$y'_t = (3sint)'_t = 3cost,$$

$$x'_t = (4cos\mathrm{t})'_t = -4sint.$$

Подставив найденные производные в формулу производной, получим

$$y'_x = \frac{3cost}{-4sint} = -\frac{3}{4}ctgt.$$

Следовательно,

$$y'_x(\pi/4) = -\frac{3}{4}ctg\frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: -3/4.

2.17. Упражнения

1. Найти значения производных при данном x:

а) $y = 3x^2 - 2x + \frac{4}{x}$, $x = 2$;

б) $y = \frac{8}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + 2, x = 4$;

в) $y = 2e^x + 3x, x = ln2$.

2. Найти значения производных при данном x:

а) $y = 6lnx - x^2, x = 2$;

б) $y = 3sinx + 2tgx, x = \pi/3$;

в) $y = 5arctgx + \sqrt{3}\, arcsinx, x = 1/2$.

3. Найти производные следующих функций:

а) $y = (2x - 1)(x + 1)$;

б) $y = (x^2 + 1)(e^x - 1)$;

в) $y = (\ln x + 2)(\sin x + 2)$.

4. Найти производные следующих функций:

а) $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$;

б) $y = \frac{e^x}{x + 1}$;

в) $y = \frac{lnx}{sinx + 1}$.

5. Найти производные следующих функций:

а) $y = (3x + 1)^2 + \frac{1}{x + 3}$;

б) $y = e^{6x} - \ln(x + 6)$;

в) $y = \sin(9x) + arctg(x + 9)$.

6. Найти производные степенно-показательных функций:

а) $y = x^{2x+1}$;

б) $y = x^{sinx}$;

в) $y = (2x + 1)^{sinx}$.

7. Найти эластичность функций:

а) $y = 300 - x^2$;

б) $y = \sqrt{3600 - x^2}$;

в) $y = 500e^{-0,02x}$.

8. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = x^3 - 3x + 4$;

б) $y = x^3 - 9\mathrm{x}^2 + 15x + 6$;

в) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

9. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$;

б) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$;

в) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 1, [1; 3]$;

б) $y = 2x^3 - 6x, [-2; 2]$;

в) $y = 2x^3 + 2x - 1, [0; 2]$.

11. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

а) $y = x^3 - 6\mathrm{x}^2 + 9x + 1$;

б) $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$;

в) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

12. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

а) $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2$;

б) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x$;

в) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

13. Вычислить предел, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{\ln(1+x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$.

14. Разложить многочлен $P(x)$по степеням $x-a$:

а) $P(x)=1-2x+3x^2-4x^3,\ a=1$;

б) $P(x)=2-x+x^2-2x^3, a=2$;

в) $P(x)=2+x+2x^2+x^3,\ a=-2$.

15. При помощи формулы Маклорена найти приближенное значение функции $f(x)$ в данной точке, ограничившись первыми тремя членами разложения:

а) $f(x)=e^x, x=-0{,}2$;

б) $f(x)=cosx, x=0{,}1$;

в) $f(x)=sinx, x=0{,}2$.

16. Найти значение производной неявной функции в точке $(x_0;\ y_0)$:

а) $x^3+x^2y+y^2=0, (1;-1)$;

б) $arctgy-y-x+1=0, (\pi/4.; 1)$;

в) $e^x-e^y-y+x=0,\ (0;0)$.

17. Найти производную y'_x при данном значении t от функции, заданной параметрически:

а) $\begin{cases}x=t-sint,\\ y=1-cost;\end{cases}$

$t=\pi/2$;

б) $\begin{cases}x=cos^2 t,\\ y=tg^2t;\end{cases}$

$t=\pi/4$;

в) $\begin{cases}x=\sqrt{2t-t^2},\\ y=arcsin(t-1);\end{cases}$

$t=0$.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Ключевые слова по теме «Интегральное исчисление»

Интеграл	Integral
Интегральная сумма	Integral sum
Интегрирование	Integration
Интегрирование по частям	Integration by parts
Криволинейная трапеция	Curvilinear trapezoid
Неопределённый интеграл	Indefinite integral
Несобственный интеграл	Improper integral
Определенный интеграл	Definite integral
Переменная интегрирования	Integration variable
Подынтегральная функция	Integrand function

3.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$, так как

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Нетрудно убедиться, что функции $\frac{x^3}{3} + 1$, $\frac{x^3}{3} + 5$ и вообще $\frac{x^3}{3} + C$, где C – некоторое произвольное число, также являются первообразными для функции $f(x) = x^2$. Действительно, по определению первообразной имеем

$$\left(\frac{x^3}{3}+1\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3}+5\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3}+C\right)' = x^2.$$

Таким образом, для заданной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно.

Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Можно показать, что выражение вида $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, описывает *все первообразные* функции $f(x)$.

Совокупность функций $F(x)+C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Таким образом, по определению, имеем

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием* этой функции.

Из определения неопределенного интеграла, в частности, следует, что неопределенный интеграл от постоянной величины k представляет собой линейную функцию

$$\int kdx = kx + C,$$

где $k = const$. Действительно,

$$\left(\int kdx\right)' = (kx + C)' = k.$$

Например,

$$\int 5dx = 5x + C.$$

3.2. Таблица интегралов

На основе формул, по которым вычислялись производные элементарных функций, можно получить таблицу неопределенных интегралов.

Таблица 2

Таблица неопределенных интегралов

№	$f(x)$	$\int f(x)dx$	№	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	1	$x + C$	6	e^x	$e^x + C$
2	$x^n\ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	7	$sinx$	$-cosx + C$
3	$1/x$	$\ln\|x\| + C$	8	$cosx$	$sinx + C$
4	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$arctgx + C$	9	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$
5	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx + C$	10	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x}dx$.

Решение:

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $2\sqrt{x} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

3.3. Правила интегрирования

Сформулируем правила нахождения неопределенных интегралов:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

где k – некоторое заданное число.

2. Интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Пример. Найти интеграл $\int (6x^2 + 1)dx$.

Решение:

$$\int (6x^2 + 1)dx = 6\int x^2dx + \int dx = 6\frac{x^3}{3} + x = 2x^3 + x + C.$$

Ответ: $2x^3 + x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}\right)dx$.

Решение:

$$\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}\right)dx = 3\int x^{-2}dx + 4\int \frac{dx}{x} = 3 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4\ln|x| =$$

$$= -\frac{3}{x} + 4\ln|x| + C.$$

Ответ: $-\frac{3}{x} + 4\ln|x| + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$

Решение:

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}(x+1) + C.$$

Ответ: $2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \left(\frac{3}{x^2+1} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx.$

Решение:

$$\int \left(\frac{3}{x^2+1} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 3arctgx + 2arcsinx + C.$$

Ответ: $3arctgx + 2arcsinx + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \left(cosx + \frac{2}{cos^2x}\right) dx.$

Решение:

$$\int \left(cosx + \frac{2}{cos^2x}\right) dx = sinx + 2tgx + C.$$

Ответ: $sinx + 2tgx + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx.$

Решение:

$$\int \frac{x^2-1}{x+1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} dx = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - x + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx.$

Решение:

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx = \int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= 3\int x^2dx - 2\int xdx + \int \frac{dx}{x} = x^3 - x^2 + \ln|x| + C.$$

Ответ: $x^3 - x^2 + \ln|x| + C$.

Пример. Найти интеграл $\int tg^2x\,dx$.

Решение:

$$\int tg^2x\,dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Ответ: $tgx - x + C$.

3.4. Метод замены переменной

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – заданная непрерывная функция, x – переменная интегрирования. Положим $x = \varphi(t)$, где t – новая переменная, а $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется формулой *замены переменной* в неопределенном интеграле. Введем обозначение

$$g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

С учетом данного обозначения формула замены переменной принимает вид

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt.$$

Здесь $g(t)$ – более «удобная» для интегрирования функция, чем функция $f(x)$. После интегрирования по переменной t следует вернуться к исходной переменной x при помощи обратной подстановки $t = \psi(x)$, где $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ – обратная функция.

Пример. Найти интеграл $\int 12(2x+1)^5\,dx$.

Решение. Введем новую переменную

$t = 2x + 1$.

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt = \frac{dt}{2}.$$

Найдем интеграл

$$\int 12(2x+1)^5\, dx = 12\int t^5 \frac{dt}{2} =$$

$$= 6\int t^5 dt = 6\frac{t^6}{6} = t^6 = (2x+1)^6 + C.$$

Ответ: $(2x+1)^6 + C$.

Пример. Найти интеграл $\int 3\sqrt{2x-4}\, dx$.

Решение. Введем новую переменную

$t = 2x - 4$.

Выразим из последнего равенства переменную x через новую переменную t

$$x = \frac{t+4}{2} = \frac{t}{2} + 2.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \frac{1}{2}dt,$$

следовательно,

$$\int 3\sqrt{2x-4} = 3\int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} = (2x-4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ответ: $(2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{2dx}{2x+1}$.

Решение. Введем новую переменную $t = 2x + 1$.

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt = \frac{dt}{2}.$$

Найдем интеграл

$$\int \frac{2dx}{2x+1} = 2\int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|2x+1| + C.$$

Ответ: $\ln|2x+1| + C$.

Пример. Найти интеграл $\int 2e^{2x+1}dx$

Решение. Введем новую переменную $t = 2x + 1$.

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt\,.$$

Найдем интеграл

$$\int 2e^{2x+1}dx = 2\int e^t \frac{dt}{2} = e^t = e^{2x+1} + C.$$

Ответ: $e^{2x+1} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int 2\cos(2x+1)\,dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = 2x + 1$.

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt.$$

Найдем интеграл

$$\int 2\cos(2x+1)dx = 2\int cost\frac{dt}{2} = sint = \sin(2x+1) + C.$$

Ответ: $\sin(2x+1) + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, где a – некоторое число.

Решение. Преобразуем функцию под знаком интеграла

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}.$$

Введем новую переменную

$$t = \frac{x}{a}.$$

Выразим x через t

$$x = at.$$

Найдем дифференциал

$$dx = adt.$$

Найдем интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{a} arctgt = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, где a – некоторое число ($a > 0$).

Решение. Преобразуем функцию под знаком интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Введем новую переменную

$$t = \frac{x}{a}.$$

Выразим x через t

$$x = at.$$

Найдем дифференциал

$dx = adt.$

Найдем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{adt}{\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = arcsint = arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Ответ: $arcsin\frac{x}{a} + C.$

Пример. Найти интеграл $\int a^x dx$, где a^x – показательная функция.

Решение. Воспользуемся формулой

$a^x = e^{lna^x} = e^{xlna}.$

Введем новую переменную

$t = xlna.$

Выразим x через t

$$x = \frac{t}{lna}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{lna} \cdot t\right)' dt = \frac{1}{lna} \cdot dt = \frac{dt}{lna}.$$

Найдем интеграл

$$\int a^x dx = \int e^{xlna} dx = \frac{1}{lna}\int e^t dt = \frac{1}{lna} e^t =$$

$$= \frac{1}{lna} e^{xlna} = \frac{1}{lna} e^{lna^x} = \frac{a^x}{lna} + C.$$

Таким образом,

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C.$$

Например,

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{ln2} + C.$$

Ответ: $\frac{a^x}{lna} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-6}\,dx$.

Решение. Введем новую переменную

$t = \sqrt{x-6}$.

Выразим из последнего равенства переменную x через новую переменную t

$x = t^2 + 6$.

Найдем дифференциал

$dx = 2tdt$,

следовательно,

$$\int x\sqrt{x-6}\,dx = \int (t^2+6)t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 + 6t^2)dt =$$

$$2\left(\frac{t^5}{5} + 2t^3\right) = \frac{2}{5}t^5 + 4t^3 = \frac{2}{5}(x-6)^{5/2} + 4(x-6)^{3/2} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{5}(x-6)^{5/2} + 4(x-6)^{3/2} + C$.

В некоторых случаях, для упрощения подынтегрального выражения, вместо прямой подстановки $x = \varphi(t)$ удобнее применять обратную подстановку $t = \psi(x)$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Решение. Введем новую переменную

$t = x^2 + 4$.

В отличие от рассмотренных выше примеров в данном случае нет необходимости строить явное выражение для функции $x = \varphi(t)$.

Найдем дифференциал

$dt = 2xdx$.

Исходное подынтегральное выражение содержит в числителе произведение xdx. Выразив xdx через dt, получим

$$xdx = \frac{dt}{2},$$

следовательно,

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$.

Использование обратной подстановки $t = \psi(x)$ оправдывается, если в составе подынтегрального выражения $f(x)dx$ содержится множитель $\psi'(x)dx$, дающий дифференциал новой переменной dt. В предыдущем примере подстановка $t = x^2 + 4$ себя оправдала, так как подынтегральное выражение данного интеграла содержало множитель $xdx = \frac{dt}{2}$.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{3\,ln^2\,xdx}{x}$.

Решение. Введем новую переменную

$$t = lnx.$$

Найдем дифференциал

$$dt = \frac{1}{x}dx,$$

следовательно,

$$\int \frac{3\ln^2 xdx}{x} = 3\int t^2dt = 3\cdot\frac{t^3}{3} + C = t^3 + C = \ln^3 x + C.$$

Ответ: $\ln^3 x + C$.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos xdx$.

Решение. Введем новую переменную

$$t = sinx.$$

Найдем дифференциал

$$dt = cosxdx.$$

Исходное подынтегральное выражение содержит множитель $cosxdx$, следовательно,

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4} + C\,.$$

Ответ: $\frac{\sin^4 x}{4}$.

3.5. Интегрирование по частям

Пусть *u(x)* и *v(x)* – дифференцируемые функции. Для получения формулы интегрирования по частям воспользуемся формулой дифференцирования произведения функций

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Перепишем эту формулу следующим образом:

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Проинтегрировав обе части, получим формулу *интегрирования по частям*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пример. Вычислить интеграл $I = \int lnxdx$

Решение. Пусть $u = lnx$, $dv = dx$, тогда

$$I = \int lnxdx = lnx \cdot x - \int xd(lnx) = lnx \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = lnx \cdot x - x + C.$$

Ответ: $lnx \cdot x - x + C$ю

Пример. Вычислить интеграл $I = \int arctgxdx$.

Решение. Пусть $u = arctgx$, $dv = dx$. Тогда

$$I = \int arctgxdx = arctgx \cdot x - \int x \cdot darctgx = arctgx \cdot x - \int \frac{x}{x^2+1} dx.$$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся методом замены переменной.

Введем новую переменную

$$t = x^2 + 1.$$

Найдем дифференциал

$$dt = 2xdx.$$

Исходное подынтегральное выражение содержит в числителе произведение xdx. Выразив xdx через dt, получим

$$xdx = \frac{dt}{2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln\,(x^2+1).$$

.

Таким образом,

$$\int arctgxdx = arctgx \cdot x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Ответ: $arctgx \cdot x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int xe^x dx$.

Решение. Пусть $u = x, dv = e^x dx$.

Проинтегрировав обе части последнего равенства

$$\int dv = \int e^x dx,$$

найдем выражение для функции v

$$v = e^x.$$

Очевидно, что при построении функции v нет необходимости писать общее решение, содержащее произвольную постоянную C.

Таким образом, имеем

$$I = \int xe^x dx = \int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + C.$$

Ответ: $e^x(x-1) + C$.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int xcosxdx$.

Решение. Пусть $u = x, dv = cosxdx$.

Проинтегрировав обе части последнего равенства

$$\int dv = \int cosxdx,$$

найдем выражение для функции v

$$v = sinx.$$

Таким образом, имеем

$$I = \int xcosxdx = \int xdsinx = xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + C.$$

Ответ: $xsinx + cosx + C$.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int lnx \cdot xdx$.

Решение. Пусть $u = lnx, dv = xdx$.

Проинтегрировав обе части последнего равенства

$$\int dv = \int xdx,$$

найдем выражение для функции v

$$v = \frac{x^2}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$I = \int lnxd(x^2/2\,) \ = lnx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} dlnx = lnx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2} dx =$$

$$= lnx \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ответ: $lnx \cdot \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} + C.$

3.6. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называется отношение двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, т.е. выражение вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя; в противном случае дробь называется *неправильной*. Например,

$\dfrac{3x+1}{x^2+1}$ – правильная дробь,

$\dfrac{x^3 - 3x + 4}{x - 2}$ – неправильная дробь,

$\dfrac{x^2 + x + 3}{x^2 + x + 1}$ – неправильная дробь.

Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Например,

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2} = \frac{(x^2 - 3x + 2) + 2}{x - 2} = \frac{(x - 1)(x - 2) + 2}{x - 2} = x - 1 + \frac{2}{x - 2}.$$

Пусть знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби $R(x)$ представляет собой многочлен степени n. Рассмотрим частный случай, когда $Q(x)$ имеет n попарно различных действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда многочлен $Q(x)$ может быть представлен в виде

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Например, знаменатель дроби

$$R(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

представляет собой многочлен второго порядка

$$Q(x) = x^2 - 1,$$

который имеет два различных действительных корня

$$x_1 = -1, x_2 = 1,$$

и может быть представлен в виде

$$Q(x) = (x + 1)(x - 1).$$

В курсе высшей алгебры доказано, что в случае, когда знаменатель правильной рациональной дроби имеет n попарно различных действительных корней, ее (дробь) можно представить в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

Здесь $A_1, A_2, \ldots A_n$– коэффициенты, подлежащие определению. Для нахождения коэффициентов $A_1, A_2, \ldots A_n$ сначала обе части последнего тождества приводят к целому виду, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате получается система линейных уравнений относительно $A_1, A_2, \dots A_n$. Этот метод называется методом сравнения коэффициентов.

Пример. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{x^2 - 1}$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь, которую можно представить в виде

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-1}$$

Умножив обе части последнего равенства на выражение $(x+1)(x-1)$, получим

$$1 = A_1(x-1) + A_2(x+1).$$

Из последнего равенства, после преобразований и группировки слагаемых по степеням x, найдем

$$1 + 0 \cdot x = (A_2 - A_1) + (A_1 + A_2)x.$$

В левой части последнего равенства стоит константа, т.е. многочлен нулевой степени, следовательно,

$$\begin{cases} A_2 - A_2 = 1, \\ A_1 + A_2 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}.$$

Подставив найденные значения A_1 и A_2 в разложение подынтегральной функции, найдем

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x+1)}\right).$$

Таким образом,

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}(\ln|x-1| + \ln|x+1|) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

Отметим, что последний пример – это частный случай интеграла

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| .$$

В некоторых случаях для нахождения коэффициентов $A_1, A_2, \dots A_n$ вместо метода сравнения коэффициентов можно использовать метод частных значений. Проиллюстрируем применение этого метода на данном примере. Выпишем еще раз равенство, полученное после приведения исходного тождества к целому виду

$$1=A_1(x-1)+A_2(x+1).$$

Зададим в последнем равенстве значение x, так чтобы второе слагаемое в правой части обратилось в ноль. Очевидно, что

$$x=-1.$$

В результате получим

$$1=A_1(-1-1)+A_2(-1+1), A_1=-\frac{1}{2}.$$

Теперь зададим значение x так, чтобы первое слагаемое в правой части обратилось в ноль. Очевидно, что

$$x=1.$$

В результате получим

$$1=A_1(1-1)+A_2(1+1), A_2=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, подставляя в равенство подходящим образом подобранные значения переменной x, мы получаем более простую, по сравнению с методом сравнения коэффициентов, систему уравнений относительно коэффициентов A_1 и A_2.

Рассмотрим случай, когда знаменатель $Q(x)$ рациональной дроби может иметь не только простые, но и кратные действительные корни. Например, знаменатель дроби

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-4)^3}$$

имеет простой корень $x = 1$ и корень третьей кратности $x = 4$.

Пусть знаменатель $Q(x)$ рациональной дроби содержит множитель $(x - x_0)^k$. В курсе высшей алгебры доказано, что каждому такому множителю в разложении рациональной дроби соответствует сумма из k простых дробей

$$\frac{B_1}{x - x_0} + \frac{B_2}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x - x_0)^k},$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – коэффициенты, подлежащие определению. Для нахождения неопределенных коэффициентов можно использовать как метод сравнения коэффициентов, так и метод частных значений.

Пример. Найти интеграл $\quad I = \int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь, которую можно представить в виде

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Умножив обе части последнего равенства на выражение $(x-1)(x+1)^2$, получим

$$x = A_1(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1).$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов воспользуемся методом частных значений. Подберем в последнем равенстве значение x, так чтобы второе и третье слагаемые в правой части обратились в ноль. Очевидно, что $x = 1$. Подставив значение $x = 1$ в последнее равенство, получим

$$1 = A_1(1+1)^2, A_1 = \frac{1}{4}.$$

Теперь зададим значение x так, чтобы первое и второе слагаемые в правой части обратилось в ноль. Очевидно, что $x = -1$. Подставив значение $x = -1$, получим

$$-1 = B_2(-1-1), B_2 = \frac{1}{2}.$$

Подставим найденные значения коэффициентов A_1 и B_2 в исходное равенство

$$x = \frac{(x+1)^2}{4} + B_1(x-1)(x+1) + \frac{(x-1)}{2}.$$

Для нахождения оставшегося коэффициента B_1 можно выбрать любое числовое значение x за исключением, разумеется, значений $x = \pm 1$. Подставим в последнее равенство, например, значение $x = 3$. В результате получим

$$3 = 4 + 8B_1 + 1, B_1 = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно, разложение рациональной дроби в данном случае имеет вид

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

Таким образом,

$$I = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right) dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

Рассмотрим случай, когда знаменатель $Q(x)$ рациональной дроби $R(x)$ содержит множители вида

$$(x^2 + px + q)^m,$$

где m – натуральное число, p, q – заданные действительные числа. Предполагается, что дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в скобках, удовлетворяет условию

$$p^2 - 4q < 0.$$

Например, знаменатель дроби

$$\frac{x^3 + 1}{(x-1)(x-3)^4(x^2 + x + 1)^2}$$

содержит простой корень $x = 1$, корень $x = 3$ четвертой кратности и множитель $(x^2 + x + 1)$ второй кратности с отрицательным дискриминантом $D = -3$. Из школьного курса алгебры известно, что в случае, когда дискриминант меньше нуля, квадратный трехчлен не имеет действительных корней и, следовательно, его нельзя представить в виде

$$(x-x_1)(x-x_2).$$

Отсюда следует, что приведенные выше методы разложения рациональных дробей в данном случае неприменимы. В курсе высшей алгебры доказано, что каждому множителю $(x^2+px+q)^m$ знаменателя $Q(x)$ в разложении рациональной дроби $R(x)$ соответствует сумма из m слагаемых

$$\frac{E_1x+F_1}{x^2+px+q}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{E_mx+F_m}{(x^2+px+q)^m},$$

где $E_1, E_2, \dots E_m, F_1, F_2, \dots F_m$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Для нахождения неопределенных коэффициентов можно использовать как метод сравнения коэффициентов, так и метод частных значений.

Пример. Найти интеграл $\quad I=\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)}.$

Решение. Подынтегральная функция представляет собой рациональную дробь, которую можно представить в виде

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{E_1x+F_1}{x^2+1}.$$

Умножив обе части тождества на выражение $(x+1)(x^2+1)$, получим

$$x=A_1(x^2+1)+(E_1x+F_1)(x+1).$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов воспользуемся методом частных значений. Подберем в последнем равенстве значение x так, чтобы второе слагаемое в правой части обратилось в ноль. Очевидно, что $x=-1$.

Подставив значение $x=-1$ в последнее равенство, получим

$$-1=2A_1, A_1=-\frac{1}{2}.$$

После подстановки найденного значения A_1 в равенство получим

$$x=-\frac{x^2+1}{2}+(E_1x+F_1)(x+1).$$

Чтобы исключить коэффициент E_1, зададим $x = 0$. В результате получим

$$0 = -\frac{1}{2} + F_1, F_1 = \frac{1}{2}.$$

Подставив найденное значение E_1 в последнее равенство, получим следующее уравнение:

$$x = -\frac{x^2+1}{2} + \left(E_1 x + \frac{1}{2}\right)(x+1).$$

Для нахождения коэффициента E_1 можно задать любое значение x, за исключением значений $x = -1$ и $x = 0$. Пусть $x = 1$. Подставив это значение в последнее уравнение, получим

$$1 = -1 + 2\left(E_1 + \frac{1}{2}\right), E_1 = -1/2.$$

Следовательно, разложение рациональной дроби в данном случае имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right).$$

Отсюда

$$I = \int \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx.$$

Преобразуем I_1 следующим образом:

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{xdx}{x^2+1} + arctgx.$$

Для нахождения интеграла

$$I_2 = \int \frac{xdx}{x^2+1}$$

воспользуемся методом замены переменной. Введем новую переменную

$$t = x^2 + 1.$$

Найдем дифференциал

$$dt = 2xdx.$$

Исходное подынтегральное выражение содержит в числителе произведение xdx. Выразив xdx через dt, получим

$$xdx = \frac{dt}{2}.$$

Следовательно, с точностью до константы

$$I_2 = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t|.$$

Возвратимся к исходной переменной x

$$I_2 = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1|.$$

Следовательно, интеграл I_1 равен (с точностью до константы)

$$I_1 = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + arctgx = ln\sqrt{x^2 + 1} + arctgx.$$

Таким образом окончательно получим

$$I = -\frac{\ln|x + 1| + ln\sqrt{x^2 + 1} + arctgx}{2} + C.$$

Ответ: $-\dfrac{\ln|x + 1| + ln\sqrt{x^2 + 1} + arctgx}{2} + C.$

3.7. Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$. Требуется найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью абсцисс $y = 0$.

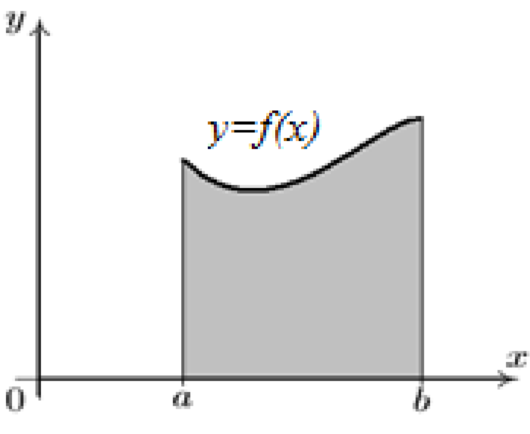

Рис. 27. Криволинейная трапеция

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n сегментов точками $x_0, x_1, \dots x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

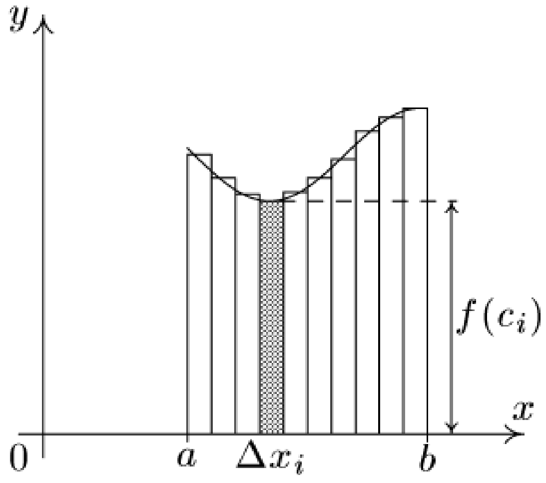

Рис. 28. Разбивка фигуры

Внутри каждого сегмента длиной

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \ (i = 1,2, \dots, n)$$

выберем произвольную точку c_i и вычислим значение $f(c_i)$. Произведение $f(c_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма площадей всех прямоугольников

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

приближенно равна площади криволинейной трапеции. Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Обозначим через λ максимальную из длин сегментов $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} S_n = S.$$

Числа a и b называются *нижним и верхним пределами* интегрирования функции соответственно.

В общем случае, когда функция $y = f(x)$ может принимать не только положительные, но и отрицательные значения, условимся считать площади частей фигуры под осью OX отрицательными. Например, для приведенного на рис.29 графика функции определенный интеграл равен

$$\int_a^b f(x)dx = S_2 - S_1 - S_3 .$$

Здесь S_1, S_2, S_3– площади фигур.

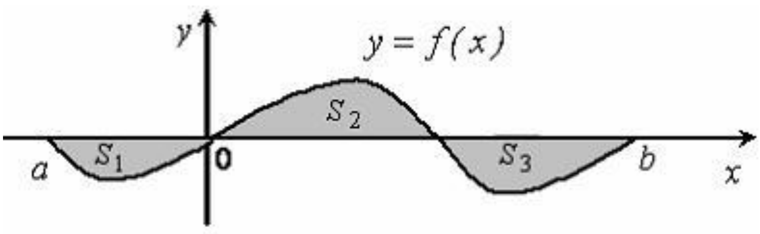

Рис. 29. Вычисление определенного интеграла в общем случае

Ранее предполагалось, что $a < b$. Понятие определенного интеграла можно обобщить и на случай $a \geq b$, полагая по определению

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

Из последнего равенства, в частности, следует

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a; b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула носит название *формулы Ньютона–Лейбница*. Для сокращения записи решения приращение первообразной обозначают следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Таким образом, основная формула интегрального исчисления принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Формула Ньютона-Лейбница позволяет свести вычисление определенного интеграла к отысканию неопределенного интеграла (первообразной). Действительно, чтобы вычислить определенный интеграл, достаточно найти неопределенный интеграл (константу C можно не записывать, так она все равно уничтожится при вычитании), подставить в найденное выражение сначала верхний предел, затем нижний предел и вычесть из первой величины вторую.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^2 3x^2dx$.

Решение:

$$\int_1^2 3x^2dx = \frac{3x^3}{3}|_1^2 = x^3|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = arctgx|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \pi/4.$$

Ответ: $\pi/4$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\,|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^5 3\sqrt{2x-1}\,dx$.

Решение. Введем новую переменную

$$t = 2x - 1.$$

Подставив в правую часть равенства значения $x = 1$ и $x = 5$, получим соответственно нижний α и верхний β пределы интегрирования новой переменной t

$$\alpha = 2 \cdot 1 - 1 = 1,\ \beta = 2 \cdot 5 - 1 = 9.$$

Выразив x через t, получим

$$x = \frac{t+1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \frac{dt}{2},$$

следовательно,

$$\int_1^5 3\sqrt{2x-1}\,dx = \int_1^9 3\sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt = t^{\frac{3}{2}}|_1^9 = t\sqrt{t}|_1^9 = 27 - 1 = 26.$$

Ответ: 26.

3.8. Вычисление площадей фигур

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. По геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a, x=b$ и осью абсцисс $y=0$, равна

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы непрерывные функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ такие, что $f(x)\geq g(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$, на отрезке $[a;b]$ вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

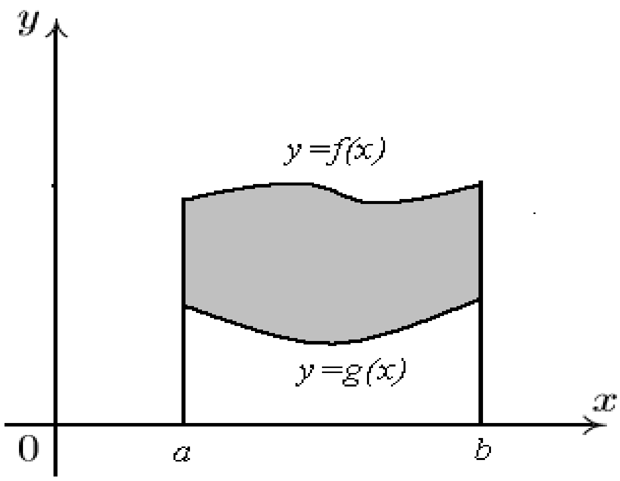

Рис. 30. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=3x^2$, прямыми $x=0, x=1$ и $y=0$.

Решение. Здесь $f(x)=3x^2, a=0, b=1$.

$$S=\int_0^1 3x^2dx=\frac{3x^3}{3}|_0^1=x^3|_0^1=1^3-0^3=1.$$

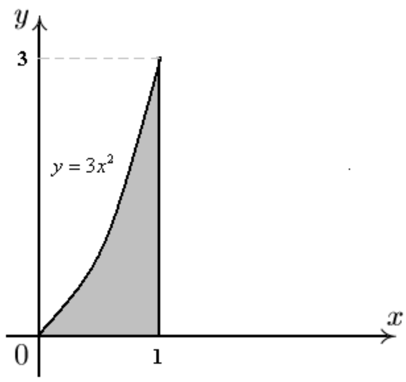

Рис. 31. Фигура, ограниченная линиями $y = 3x^2$, $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x(2 - x), y = 0$.

Решение. Найдем пределы интегрирования a и b. Вычислим координаты точек пересечения графика функции $y = 3x(2 - x)$ с осью Ox $(y = 0)$:

$$3x(2 - x) = 0;$$

$$x = 0, x = 2.$$

Таким образом, $a = 0, b = 2$.

Найдем площадь фигуры

$$S = \int_0^2 (6x - 3x^2) = (6\mathrm{x} - 3\mathrm{x}^2) = 12 - 8 = 4.$$

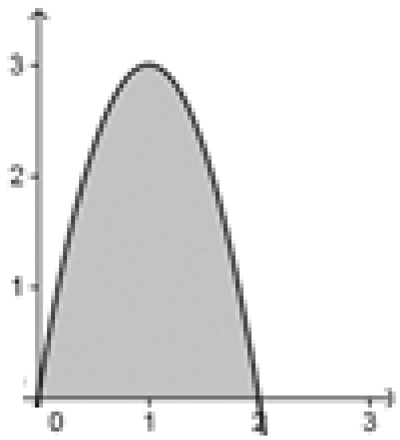

Рис. 32. Фигура, ограниченная линиями $y = 3x(2 - x), y = 0$

Ответ: 4.

Пример. Вычислить площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Найдем пределы интегрирования a и b. Вычислим координаты точек пересечения указанных кривых, для чего решим уравнение

$$x^2 = \sqrt{x}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат

$$x^4 = x.$$

Приведем это уравнение к виду

$$x^4 - x = 0, x(x^3 - 1).$$

Решив последнее уравнение, получим

$$x = 0, x = 1.$$

Таким образом, нижний и верхний пределы интегрирования соответственно равны

$$a = 0, b = 1.$$

Теперь найдем площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ на отрезке $[0; 1]$:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

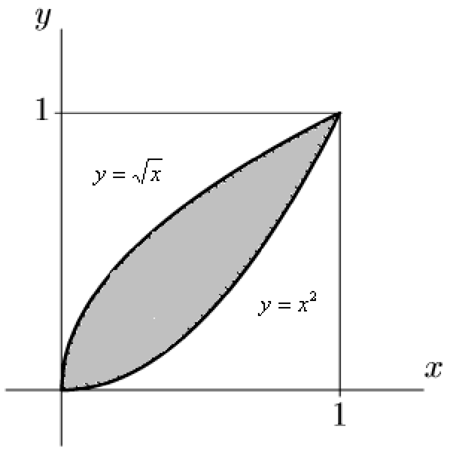

Рис. 33. Фигура, ограниченная линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$

Ответ: 1/3.

3.9. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x \geq a$ и интегрируема на любом отрезке $[a;\ z]$. Тогда

$$\lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)dx$$

называется несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\,.$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, в противном случае – *расходится*.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$

Решение. Сначала вычислим интеграл

$$\int_0^z e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^z = -e^{-z} - (-e^0) = -\frac{1}{e^z} + 1 = 1 - \frac{1}{e^z}\,.$$

Теперь найдем предел

$$\lim_{z \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^z}\right) = 1\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Ответ: 1.

Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x \leq b$ и интегрируема на любом отрезке $[z;\ b]$. Тогда

$$\lim_{z \to -\infty} \int_{z}^{b} f(x)dx$$

называется несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом и обозначается

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx.$$

Таким образом, по определению,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{z \to -\infty} \int_{z}^{b} f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, в противном случае – *расходится*.

Пример. Найти интеграл $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Сначала вычислим интеграл

$$\int_{z}^{-1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{z}\Big|_{z}^{-1} = -(-1) - \left(-\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z}.$$

Теперь найдем предел

$$\lim_{z \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right) = 1.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Ответ: 1.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на всей числовой оси. Несобственным интегралом с бесконечными пределами называется следующая сумма:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

в предположении, что оба несобственных интеграла справа являются сходящимися. Можно доказать, что введенное определение не зависит от выбора числа c.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. По определению,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Найдем первый интеграл:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{z\to-\infty} \int_{z}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2};$$

$$\int_{z}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = arctg(x+1)|_z^0 = \frac{\pi}{4} - arctg(z+1);$$

$$\lim_{z\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - arctg(z+1)\right) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

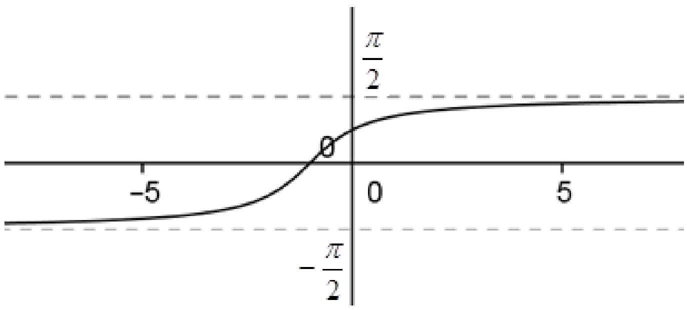

Рис. График функции $y = arctg(x+1)$

Найдем второй интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+2};$$

$$\int_0^z \frac{dx}{(x+1)^2+1} = arctg(x+1)|_0^z == arctg(z+1) - \frac{\pi}{4};$$

$$\lim_{z\to+\infty} \left(arctg(z+1) - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Ответ: π.

В курсе теории вероятностей встречается несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

называемый *интегралом Эйлера–Пуассона*. Доказано, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

3.10. Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < b$ и имеет точку бесконечного разрыва при $x = b$. Тогда соответствующий несобственный интеграл от разрывной функции определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{z\to b-0} \int_a^z f(x)dx.$$

Пример. Найти интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Функция

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

на отрезке $[0;1]$ имеет точку бесконечного разрыва $x = 1$. Следовательно,

$$I = \lim_{z\to 1-0} \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{z\to 1-0} \left(arcsin|_0^z\right) = \lim_{z\to 1-0} (arsin\, z - arcsin 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\pi/2$.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при $a < x \le b$ и имеет точку бесконечного разрыва при $x = a$. Тогда соответствующий несобственный интеграл от разрывной функции определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{z\to a+0} \int_z^b f(x)dx.$$

Пример. Найти интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Функция

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

на отрезке $[0;1]$ имеет точку бесконечного разрыва $x = 0$. Следовательно,

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z\to +0} \int_z^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{z\to +0} \left(2\sqrt{x}|_z^1\right) = \lim_{z\to +0} \left(2 - 2\sqrt{z}\right) = 2.$$

Ответ: 2.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв во внутренней точке $x = c$ отрезка $[a;b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$. Тогда, по определению, полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)dx + \int_{\mathrm{c}}^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл считается *сходящимся*, если сходятся оба интеграла в правой части. Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Пример. Найти интеграл $I = \int_0^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

Решение. Функция

$$y = \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

на отрезке $[0; 3]$ имеет точку бесконечного разрыва $x = 1$. По определению,

$$I = \int_0^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} + \int_1^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} .$$

Вычислим первый интеграл, входящий в последнее выражение. Сначала найдем неопределенный интеграл

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

Введем новую переменную $t = x^2 - 1$ и найдем дифференциал этой переменной $dt = 2xdx$. Следовательно,

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = \int t^{-\frac{2}{3}}dt == 3t^{\frac{1}{3}} = 3(x^2-1)^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{x^2-1} + C.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \lim_{z\to 1-0} \int_0^z \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \lim_{z\to 1-0} \left(3\sqrt[3]{x^2-1}\right)\Big|_0^{1-0} =$$

$$= 3\lim_{z\to 1-0} \left(\sqrt[3]{z^2-1} - \sqrt[3]{-1}\right) = 3.$$

Вычислим второй интеграл

$$\int_1^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

По определению,

$$\int\limits_1^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \lim_{z\to 1+0} \int\limits_z^3 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \lim_{z\to 1+0} \left(3\sqrt[3]{x^2-1}\right)\Big|_z^3 =$$

$$= 3\lim_{z\to 1+0} \left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{z^2-1}\right) = 6.$$

Таким образом, окончательно получим

$$I = \int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} + \int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = 3 + 6 = 9.$$

Ответ: 9 .

3.11. Упражнения

1. Найти интегралы:

а) $\int x^2\sqrt{x}dx$;

б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x}}$;

в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^2}$.

2. Найти интегралы:

а) $\int (x(3x+2)+1)dx$;

б) $\int (x(4x^2+2)+3)dx$;

в) $\int (x-1)(x+1)dx$.

3. Найти интегралы:

а) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx$;

б) $\int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$;

в) $\int \left(\frac{4x-1}{x^2}\right)dx$.

4. Найти интегралы:

а) $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx$;

б) $\int \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx$;

в) $\int \frac{x^2 - 25}{x + 5} dx$.

5. Найти интегралы:

а) $\int \left(\frac{6x + 1}{\sqrt{x}}\right) dx$;

б) $\int \left(\frac{3x + 5\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right) dx$;

в) $\int \left(\frac{7\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}}\right) dx$.

6. Найти интегралы:

а) $\int \left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}\right) dx$;

б) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$;

в) $\int \frac{x^2 + 1 + \sqrt{1 - x^2}}{(x^2 + 1)\sqrt{1 - x^2}} dx$.

7. Найти интегралы:

а) $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$;

б) $\int \frac{3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$;

в) $\int \frac{5\sin^2 x + 2\cos^2 x}{cos^2 x sin^2 x} dx$.

8. Найти интегралы:

а) $\int 10(2x+1)^5dx$;

б) $\int 4\sqrt[3]{3x+1}dx$;

в) $\int \frac{2dx}{2x+3}$.

9. Найти интегралы:

а) $\int \frac{3x-1}{3x+2}dx$;

б) $\int \frac{2x+5}{2x+4}dx$;

в) $\int \frac{8x+12}{2x+1}dx$.

10. Найти интегралы:

а) $\int \frac{4dx}{1+16x^2}$;

б) $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

в) $\int 4e^{4x-6}dx$.

11. Найти интегралы:

а) $\int 3\cos(3x+2)dx$;

б) $\int 4\sin(2x+1)dx$;

в) $\int \frac{4dx}{\cos^2(4x+3)}$.

12. Найти интегралы:

а) $\int x\sqrt{x-1}dx$;

б) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$;

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

13. Найти интегралы:

а) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$;

б) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$;

в) $\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx$.

14. Найти интегралы:

а) $\int \frac{4lnx}{x}dx$;

б) $\int \frac{2arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

в) $\int \frac{6arctgx}{x^2+1}dx$.

15. Найти интегралы:

а) $\int 10\sin^4 x \cdot cosx\, dx$;

б) $\int 8\cos^3 x \cdot sinx\, dx$;

в) $\int \frac{sinx}{\cos^2 x}dx$.

16. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

а) $\int (x+1)e^x dx$;

б) $\int (x+2)cosxdx$;

в) $\int (x+1)\ln(x+1)dx$.

17. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям:

а) $\int 4xe^{2x}dx$;

б) $\int 4xcos2xdx$;

в) $\int 2ln2xdx$.

18. Найти интегралы:

а) $\int \frac{4dx}{x(x-6)+5}$;

б) $\int \frac{dx}{x(x-3)+2}$;

в) $\int \frac{dx}{x(x-4)+3}$.

19. Найти интегралы:

а) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$;

б) $\int \frac{3-2x}{(x+1)(x+2)}dx$;

в) $\int \frac{x+5}{(x+4)(x+3)}dx$.

20. Найти интегралы:

а) $\int \frac{xdx}{(x+1)^2}$;

б) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2}$;

в) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

21. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^3 (x^2 + 2x + 1)dx$;

б) $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$;

в) $\int_0^1 (12\sqrt[3]{x} - 2)dx$.

22. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^2 \frac{(x^2 - 1)}{x + 1}dx$;

б) $\int_1^e \frac{x + 1}{x^2 + x}dx$;

в) $\int_1^4 \frac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

23. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos^3 x + 1}{\cos^2 x}dx$;

б) $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}dx$;

в) $\int_0^2 \frac{2dx}{x^2 + 4}$.

24. Вычислить интегралы:

а) $$\int_1^2 15x\sqrt{x-1}dx.$$

б) $$\int_1^6 x\sqrt{x+3}\,dx.$$

в) $$\int_1^e \frac{3\ln^2 x\,dx}{x}.$$

25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y = x^2 + 2, x = -1, x = 2, y = 0;$

б) $y = x^2 + 2x + 0{,}5, x = 0, x = 1, \mathrm{y} = 0;$

в) $y = x^2 + 2x - 3, x = 0, x = 2, y = 0.$

26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y = 4 - x^2, y = 0;$

б) $y = -x^2 + x + 2,\ \mathrm{y} = 0;$

в) $y = -x^2 + 4x + 32, y = 0.$

27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y = 6x^2 + 18, y = 24x;$

б) $y = 2x + 6, y = x^2 + 3;$

в) $y = x^2 + 3, y = x + 3.$

28. Найти несобственные интегралы с бесконечными пределами:

а) $$\int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x^3};$$

б) $$\int_1^{+\infty} \frac{5dx}{x\sqrt{x}};$$

в) $$\int_0^{+\infty} \frac{4dx}{e^{4x}}.$$

29. Найти несобственные интегралы с бесконечными пределами:

а) $$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 10};$$

б) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5};$$

в) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

30. Найти несобственные интегралы от неограниченных функций:

а) $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

б) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x + 1)^4};$$

в) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н. Ш. Кремера. 3-е изд. Москва : ЮНИТИ, 2006. 479 с.

2. Кусяков А.Ш. Математический анализ: учеб. Пособие / Перм. Ун-т. Пермь, 2009. 180 с.

3. Шипачев В. Основы высшей математики. М.: Высшая школа, 2010. 479 с.

Учебное издание

Кусяков Альфред Шамильевич

Математика. Введение в анализ

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*
Корректор *Л. И. Семицветова*
Техническая подготовка материалов *А. Ш. Кусяков*

Объем данных 1,39 Мб
Подписано к использованию 04.07.2023

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15