ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. В. Шилина, А. Н. Оглезнева

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

ЧАСТЬ 1

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. В. Шилина, А. Н. Оглезнева

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

ЧАСТЬ 1

Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям подготовки бакалавров «Математика»,
«Прикладная математика и информатика»,
«Механика и математическое моделирование»

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2022

УДК 517.98(075.8)
ББК 22.162я73
Ш578

Шилина А. В.

Ш578 Функциональный анализ. Задачи и упражнения [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. В. Шилина, А. Н. Оглезнева ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – Ч. 1 – 1,77 Мб ; 97 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Shilina-Oglezneva-Funkcionalnyj-Analiz-Zadachi-I-Uprazhneniya-Chast-1.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3854-3

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемых авторами в течение ряда лет на механико-математическом факультете Пермского государственного национального исследовательского университета, подготовлено на кафедре фундаментальной математики. Оно посвящено исследованию свойств функциональных пространств и отображений и является основой курса «Функциональный анализ».

Пособие предназначено для студентов, изучающих функциональный анализ, а также может быть полезно магистрантам и аспирантам, которые занимаются исследованиями, связанными с применением математических методов. В нём содержится необходимый теоретический материал, примеры с подробным решением, задачи для самостоятельной работы, а также приведен пример итоговой работы по данному курсу.

УДК 517.98(075.8)
ББК 22.162я73

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра «Высшая математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (и.о. зав. кафедрой, д-р физ.-мат. наук, профессор ***А. Р. Абдуллаев***);

профессор кафедры высшей математики НИУ ВШЭ – Пермь, д-р пед. наук, профессор ***Е. Г. Плотникова***

ISBN 978-5-7944-3854-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1.1. Понятия и определения

Рассмотрим базовые понятия раздела. Все понятия раздела представлены в нижеследующей таблице.

Имя понятия, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
Категория линейных пространств (л.п.) и линейных отображений (л.о.), **L**	**Категория L**, для которой **ObL** состоит из всех линейных пространств, **L(X,Y)** состоит из всех линейных операторов $A{:}X\to Y$ $\mathbf{ComL} = \mathbf{ComS}\big\vert_{\mathbf{L(X,Y)\times L(Y,Z)}}$ (т.е. композиции и единицы в **L** и **S** совпадают)
Линейное подпространство (л.п/п)	Непустое **подмножество** $V\subset X\,\vert$ $(f,g \in V;\ \alpha\in\mathbf{P}) \Rightarrow (1.\ f+g \in V;\ 2.\ \alpha f \in V)$
Линейная оболочка, Sp(U), $U\subset X$	**Л. п/п** $\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n \mid x_k\in U;\ \alpha_k\in\mathbf{P};\ n\in\mathbf{N}\}\subseteq X$
Линейно независимое (л/н) м	**Подмножество** $U\subseteq X\,\vert$ $(\sum\alpha_kx_k=0,\ x_k\in U) \Rightarrow \alpha_k=0\ \forall k$
Базис	Л/н **множество** $V\subset X \mid X = Sp(V)$
Конечномерное (к/м) линейное пространство	**Линейное пространство**, которое имеет конечный базис
Бесконечномерное (б/м) линейное пространство	**Линейное пространство**, которое не имеет конечного базиса
Размерность линейное пространство, dimX	**Мощность** базиса
Отрезок, $[x_0, x_1]$, $x_0, x_1\in X$	**Подмножество** $\{(1-\lambda)x_0+\lambda x_1 \mid \lambda\in[0, 1]\}\subset X$
Выпуклое множество	**Подмножество** $U\subset X \mid x_0, x_1\in U \Rightarrow [x_0, x_1]\subset U$
Сумма V + W, V, $W\subseteq X$	**Подмножество** $\{v+w \mid v\in V;\ w\in W\}\subseteq X$
λV, $V\subseteq X$	**Подмножество** $\{\lambda v \mid v\in V\}\subseteq X$
Прямая сумма п/п, $V\oplus W$, V, W – л. п/п в X	**Сумма** п/п, в которой представление x=v+w однозначно
$A{:}X\to Y$ линейный оператор, ядро линейного оператора, kerA	**Л. п/п** $\{x\in X \mid Ax=\theta_Y\}= A^{-1}\theta_Y \subseteq X$
Образ линейного оператора, imA	**Л. п/п** $A(X) \subseteq Y$
Линейное уравнение (л.у.)	**Уравнение** Ax=y (с линейный оператор A)
Однородное уравнение	**Л.у.** $Ax=\theta_Y$
Собственное значение	**Комплексное число** $\lambda \mid \ker(\lambda I-A)\neq\theta_X$
Собственное подпространство, отвечающее λ, X_λ	**Л. п/п** $\ker(\lambda I-A)$
Собственный вектор, отвечающий λ	**Вектор** $x\in\ker(\lambda I-A) \setminus \theta_X$

1.2. Основные утверждения и теоремы раздела

УТВ Л-1.2.1. *Свойства Sp(U)* (Sp(U) – л. п/п.;   Sp(U) – наименьшее л. п/п, содержащее U).

УТВ Л-1.2.2. (V,W – л п/п в линейное пространство X & X = V + W) $\Rightarrow$ (X=V$\oplus$W $\Leftrightarrow$ V$\cap$W = θ_X).

УТВ Л-1.2.3. *Свойства линейных операторов:*

- произведение линейных операторов является линейным оператором;
- тождественный оператор **I** линеен;
- A – обратимый линейный оператор $\Rightarrow$ A^{-1} –линейный оператор;
-$A\theta_X = \theta_Y$;
- ядро линейного оператора kerA – линейное подпространство в X;
- образ линейного оператора imA – линейное подпространство в Y;
- линейный оператор A инъективен $\Leftrightarrow$ kerA = θ_X ;
- линейный оператор A сюръективен $\Leftrightarrow$ imA = Y;
- при линейном отображении образ (и прообраз) выпуклого множества является выпуклым множеством;
- при линейном отображении образ (и прообраз) линейного подпространства является линейным подпространством ;
- при линейном отображении прообраз линейного независимого множества является линейно независимым множеством.

УТВ Л-1.2.4. Линейное пространство $\mathbf{P}^k$ k-мерно.

УТВ Л-1.2.5. Изоморфизмы в категории **L** – линейные биективные отображения.

УТВ Л-1.2.6. Для $\forall$ фиксированного k   k-мерные линейные пространства изоморфны.

УТВ Л-1.2.7. Примеры линейных пространств.

1) X=B[a, b]: множество функций, ограниченных на отрезке [a, b];

2) X=C[a, b]: множество функций, непрерывных на отрезке [a, b];

3) X=C^k[a; b]: множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке [a, b];

4) X=C∞[a, b]: множество функций, дифференцируемых бесконечное число раз на отрезке [a, b];

5) Для указанных пространств справедливо включение:

S[a, b] □ B[a, b] □ C[a, b] □ C^1[a; b] □ C^2[a; b] □ … □ C^k[a; b] □ … □ C^∞[a, b];

6) X=R^n – пространство n-мерных векторов;

7) X=l_1 – пространство суммируемых с первой степенью последовательностей:

$x \in l_1: \sum_{n=1}^{\infty} \quad |x_n| < +\infty$;

8) $X=l_2$ – пространство суммируемых со второй степенью последовательностей: $x \in l_2: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$;

9) $X=l_p$ – пространство суммируемых с p-й степенью последовательностей: $x \in l_p: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$;

10) $X=l_\infty$ – пространство ограниченных последовательностей: $x \in l_\infty: \sup_{n=1,\infty}|x_n| < \infty$;

11) Для указанных пространств справедливо включение:

$l_1 \subset l_2 \subset l_3 \subset \ldots \subset l_p \subset \ldots \subset l_\infty$.

1.3. Типовые задачи по разделу

1) Дано $V \subset X$ – линейное пространство. Определить свойства множества V: V – л.п/п в X, V выпукло, V л/н, V базис?

2) Определить, является ли оператор A линейным.

3) Исследовать л.у. $Ax=y$ с использованием однородного уравнения $Ax=\theta_Y$.

4) Найти собственные значения и собственные подпространства (в частности, собственные вектора) линейного оператора.

5) Найти матрицу конечномерного линейного оператора.

1.4. Примеры решения задач

1.4.1. Определить свойства множества в линейном пространстве.

1) Дано $V = [0, 1]$, $V \subset \mathbf{R}$ – линейное пространство.

Определить свойства множества V: V – л.п/п в X, V выпукло, V л/н, V – базис?

Решение.

$[0, 1]$ не является л.п/п, т.к., например, из $x=0{,}5\in[0, 1]$ не следует $\alpha\cdot x\in[0, 1]$ при $\forall\alpha$.

$[0, 1]$ выпукло: $x_0, x_1\in[0, 1] \Rightarrow [x_0, x_1]\subset[0, 1]$.

$x_1=0{,}5\in[0, 1]$, $x_2=1\in[0, 1]$, $2x_1+(-1)x_2=0$, но $\alpha_1=2\neq0$ и $\alpha_2=-1\neq0 \Rightarrow [0, 1]$ линейно зависимо.

$[0, 1]$ не является базисом, т.к. не является линейно независимым.

2) $X = \mathbf{R}$; $V =[-1, 2]$ – л. п/п?

Решение. Нет, не является: $x_1=1$; $x_2=2$: $x_1 + x_2=3 \notin V$.

3) $X = \mathbf{R}$; $V = \mathbf{Z}$ – л. п/п?

Решение. Нет, не является: $x_1=1$; $x_2=2$: $x_1 + x_2=3 \notin V$:

$\forall\alpha\in R$: $\alpha\cdot x\notin V$. $\alpha=\sqrt{2}$ $\forall x\in V$: $\sqrt{2}\cdot x\notin V$.

4) $X=C[0, 1]$: множество функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$.

V = {x(t)=C·sint} – л. п/п?

Решение. Да, является л. п/п:

$x_1(t) + x_2(t)=2$: $x_1 + x_2= (C_1 + C_2)\cdot \sin t \in V$,

$\alpha\cdot x(t) = \alpha\cdot C\cdot \sin t = C^*\cdot \sin t \in V$.

Получили, что V – л. п/п.

1.4.2. Определить линейность оператора A:X→Y.

1) $X = Y = R, \quad f(x) = 2x+7.$ *Определить, является ли* $f(x)$ *л.о.*:

$\forall x_1, x_2;\ \forall \alpha, \beta \in P:\ f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$?

Решение.

а) $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 7 = \alpha 2x_1 + \beta 2x_2 + 7$ (*)

б) $\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = \alpha(2x_1 + 7) + \beta(2x_2 + 7) = \alpha 2x_1 + \beta 2x_2 + 7(\alpha + \beta)$ (**)

$(*) \neq (**) \Rightarrow$ *оператор* $f(x)$ *нелинейный*

2) $X = Y = C[0, 1]$

$(Ax)(t) = (t^2 + 5)\cdot x(t) -$ *оператор умножения на фиксированную функцию*

$\forall x_1, x_2;\ \forall \alpha, \beta \in P: (A(\alpha x_1 + \beta x_2))(t) \overset{?}{=} \alpha (Ax_1)(t) + \beta (Ax_2)(t)$

Решение.

$(A(\alpha x_1 + \beta x_2))(t) = (t^2 + 5)(\alpha x_1 + \beta x_2)(t) = (t^2 + 5)\cdot(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) =$

$= \alpha (t^2 + 5) x_1(t) + \beta (t^2 + 5) x_2(t) = \alpha (Ax_1)(t) + \beta (Ax_2)(t) \Rightarrow$

оператор А линейный

1.4.3. Исследовать линейное уравнение:

1.4.3.1. Исследовать операторное уравнение: $x(t^{3/2}) = y(t)$, $t\in[0, 1]$,

с использованием однородного уравнения $x(t^{3/2}) = \theta(t)$, $t\in [0, 1]$.

Решение

1) Уравнение записано поточечно: для $\forall$точки $t\in[0, 1]$ $x(t^{3/2}) = y(t)$.

2) $(Ax)(t) = x(t^{3/2})$, $t\in[0, 1]$. $A=x*h$ – оператор *внутренней суперпозиции*, где $h(t) = t^{3/2}$. Т.к. h – непрерывная функция, то можно положить $X=Y=C[0, 1]$.

2.1) Действие? $x\in C[0, 1]$ =(h – непрерывна, а композиция непрерывных функций непрерывна)$\Rightarrow$ $Ax=x*h \in Y$!

3) Свойства оператора A?

3.1) $A\in L(X,X) = L(X)$?

Доказательство. $\forall$ $t\in[0, 1]$ $\mathbf{A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t)}$ =(определение о. A)= $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t^{3/2})$ =(поточечные линейный оператор в C[0,1])= $\lambda_1 x_1(t^{3/2}) + \lambda_2 x_2(t^{3/2})$ =(определение о. A)= $\lambda_1 Ax_1(t) + \lambda_2 Ax_2(t)$ =(поточечные линейный оператор в C[0,1])= $\mathbf{(\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2)(t)}$ =(**поточечное равенство функций**)$\Rightarrow$ $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2$ =(определение линейный оператор)$\Rightarrow$ A – линейный оператор

3.2) $\ker A = \theta_X$?

Решаем однородное уравнение: $x(t^{3/2}) = \theta(t)$, $t\in[0, 1]$. Сделаем замену переменной: $t^{3/2} = \tau \Rightarrow x(\tau) = \theta(\tau^{2/3}) = \theta(\tau)$ $\forall\tau\in[0, 1]$, следовательно, однородное уравнение имеет только нулевое решение $\Leftrightarrow$ оператор A инъективен!

3.3) $\mathrm{im}A = Y$?

Для произвольной непрерывной функции $y\in C[0, 1]$ рассмотрим: $x(t^{3/2}) = y(t)$ =$(\tau=t^{3/2})\Rightarrow$ $x(\tau) = y(\tau^{2/3})$ $\forall\tau\in[0, 1] \Rightarrow$ оператор A сюръективен!

3.4) Биективность? A^{-1}?

Из 3.2) и 3.3) следует биективность A! Обратный оператор A^{-1} мы нашли, решая неоднородное уравнение: $(A^{-1}y)(t) = y(t^{2/3})$ $\forall t\in[0, 1]$, то есть $A^{-1}y = y*h^{-1}$.

3.5) Теорема существования решения? Из 3.3.3. вытекает, что решение существует при любой правой части!

3.6) Теорема единственности решения? Из 3.3.2. вытекает, что решение единственно при любой правой части!

1.4.3.2. Исследовать линейное уравнение $x(t) – x(1/2)t^2 = y(t)$, $t\in[0, 1]$, с использованием однородного уравнения $x(t) – x(1/2)t^2 = \theta(t)$, $t\in [0, 1]$.

Решение

1) Уравнение записано поточечно: для $\forall$*точки* $t\in[0, 1]$ $x(t) – x(1/2)t^2 = y(t)$ (1). Рассмотрим оператор $(Kx)(t) = x(1/2)t^2$, $t\in[0, 1]$, тогда уранение (1) можно записать в векторной записи: $x – Kx = y \Leftrightarrow Ix – Kx = y \Leftrightarrow (I – K)x = y \Leftarrow$(I – K =(обозначим)= A)$\Rightarrow Ax = y$.

2) $(Ax)(t) = x(t) – x(1/2)t^2$, $t\in[0, 1]$ – оператор A является линейной комбинацией тождественного оператора и оператора K.

Т.к. любое значение оператор K – непрерывная функция, то можно положить X=Y=C[0, 1].

2.1) Действие оператора K?

$x\in C[0, 1]$ =(опр. о. K)$\Rightarrow$ $(Kx)(t) = x(1/2)t^2$, $t\in[0, 1]$ =($x(1/2)=c$)$\Rightarrow$ $(Kx)(t) =$

$= c\, t^2$, $t\in[0, 1]$ =(квадратичная ф. непрерывна)$\Rightarrow$ $Kx \in C[0,1]$ =(C[0,1] – линейное пространство)$\Rightarrow$ $x – Kx = Ax \in C[0,1]$.

3) Свойства оператора A?

Во-первых докажем, что A – линейный оператор. Достаточно доказать линейность оператора K, т.к. оператор A является линейной комбинацией оператора K и тождественного.

Доказательство. $\forall$ $t\in[0, 1]$ $\mathbf{K(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)(t)}$ =(определение о. K)= $(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)(1/2)t^2$ =(поточечные линейный оператор в C[0,1])= $(\lambda_1x_1(1/2) + \lambda_2x_2(1/2))t^2$ =(лин. оп. в **R**)= $\lambda_1x_1(1/2) t^2 + \lambda_2x_2(1/2)t^2$ =(определение о. K)= $\lambda_1 Kx_1(t) + \lambda_2 Kx_2(t)$ =(поточечные линейный оператор в C[0,1])=

=$\mathbf{(\lambda_1 Kx_1 + \lambda_2 Kx_2)(t)}$ **=(поточечное равенство функций)**$\Rightarrow$ $K(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = =\lambda_1 Kx_1 + \lambda_2 Kx_2$ =(определение линейный оператор)$\Rightarrow$ K – линейный оператор .

3.1) $\ker A = \theta_X$? $\Leftrightarrow$ Инъективность A ? Решаем однородное уравнение: $x(t) – x(1/2)t^2 = \theta(t) = = 0$, $t\in[0, 1]$ $\Leftarrow$(тождественно преобразуем)$\Rightarrow$ $x(t) = x(1/2)t^2 = ct^2$ $\forall t\in[0,1]$, в частности, при $t = ½$ получаем $c = c\, ¼ \Leftrightarrow c3/4 = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow x(t) = 0$ $\forall t\in[0,1] \Leftrightarrow x = \theta_X$, следовательно, однородное уравнение имеет только нулевое решение $\Leftrightarrow$ оператор A инъективен.

3.2) $\operatorname{im}A = Y$? $\Leftrightarrow$ Сюръективность A ? Для произвольной непрерывной функции $y\in C[0, 1]$ рассмотрим неоднородное уравнение: $x(t) – x(1/2)t^2 = y(t)$, $\forall t\in[0, 1]$ $\Leftarrow$(тождественно преобразуем)$\Rightarrow$ $x(t) = x(1/2)t^2 + y(t) = Ct^2 + y(t)$, $t \in[0, 1]$, в частности, при $t = ½$ получаем $C = C\, ¼ + y(1/2)$ $\Leftrightarrow$ $C = 4/3y(1/2)$ =(подставляем найденное знаение C в формулу $x(t) = C\cdot t^2 + y(t)$)$\Rightarrow$ находим решение неоднородного уравнения

$\mathbf{x(t) = 4/3\ y(1/2)t^2 + y(t)}$**,** $\forall t\in[0,1]$, при любой правой части $y\in C[0, 1]$ $\Leftarrow$(определение сюръективного о.)$\Rightarrow$ оператор A сюръективен.

3.3) Биективность? A^{-1}? Из 2.3.1 и 2.3.2 следует биективность A! Обратный оператор A^{-1} мы нашли, решая неоднородное уравнение: $(A^{-1}y)(t) = 4/3\ y(1/2)t^2 + y(t)$, $\forall t\in[0, 1]$, то есть $A^{-1}y =$

$4/3Ky + y$ $\forall y \in C[0, 1]$ $\Leftarrow$(поточечное равенство операторов)$\Rightarrow$

$A^{-1} = 4/3K + I$.

4) Теорема существования решения? Из 3.2 вытекает, что решение существует при любой правой части.

5) Теорема единственности решения? Из 3.1 вытекает, что уравнение не может иметь более одного решения при любой правой части.

1.4.4. Найти собственные значения $\lambda_0, \lambda_1, \ldots (\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots)$ и собственные подпространства $X_0 = \ker(\lambda_0 I - A)$ и $X_1 = \ker(\lambda_1 I - A)$ линейного оператора A.

Рассмотрим линейный оператор $(Ax)(t) = \int_0^1 t^2 s x(s) ds : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного оператора A. Выбрать с.в. $\mathbf{e} \in X_1$ с единичной нормой (длиной) $\|\mathbf{e}\|=1$.

Решение

Рассмотрим сначала $\lambda_0=0$. $\int_0^1 t^2 s x(s) ds = 0 \Leftrightarrow t^2 \int_0^1 s x(s) ds = 0 \Leftrightarrow$

$X_0 = \{x \in C[0, 1] \mid \int_0^1 s x(s) ds = 0\}$.

При $\lambda \neq 0$ решаем уравнение $\lambda x(t) - \int_0^1 t^2 s x(s) ds = 0 \Leftrightarrow \lambda x(t) = t^2 \int_0^1 s x(s) ds \Leftrightarrow \lambda x(t) = t^2 c$ (*),

где $c = \int_0^1 s x(s) ds$ можно определить, умножая равенство (*) на t, и затем интегрируя его по отрезку [0, 1]: $\lambda c - 1/4\, c = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1/4)c = 0$.

Отсюда $\lambda_1 = 1/4$, c остается произвольным, следовательно, в силу равенства (*),

$X_1 = Sp(t^2)$. $\mathbf{e}(t) = t^2$, $\|\mathbf{e}\|_{\sup} = \sup\{|t^2| : t \in [0,1]\} = 1$.

1.4.5. Найти матрицу конечномерного линейный оператор

Пусть $A:X \to X$ к/м линейный оператор; $\mathrm{im}A = Sp(e_1, e_2) = Y \subset X$. Найдём матрицу линейный оператор $A|_Y: Y \to Y$ в базисе $<e_1, e_2>$.

Рассмотрим X= C[0, 1], $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$; $(Ax)(t) = \int_0^1 (s+ts)x(s)ds$.

Решение Координаты векторов Ae_1 и Ae_2 в базисе $<e_1, e_2>$ являются столбцами матрицы линейный оператор $A|_Y$. Вычисляем $(Ae_1)(t) = 1/2+t1/2 = 1/2e_1 + 1/2e_2$, $(Ae_2)(t) = 1/3+t1/3 = 1/3e_1 + 1/3e_2$. Следовательно, матрица линейный оператор $A|_Y = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$.

1.4.6. Доказать некоторые свойства

1.4.6.1. Произведение линейных операторов является линейным оператором.

Доказательство.

$\mathbf{BA(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}$ = (определение произведения BA(x)=B[A(x)])= $B[A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)]$ = (A линейный оператор) = $B(\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2)$ = (B линейный оператор)= $\lambda_1 B(Ax_1) + \lambda_2 B(Ax_2)$ = (определение композиции BA(x)=B[A(x)]) = $\lambda_1 BA(x_1) + \lambda_2 BA(x_2)$ = (определение линейный оператор)$\Rightarrow$ BA – линейный оператор.

1.4.6.2. При линейном отображении прообраз линейно независимого множества является линейно независимым множеством.

Доказательство.

$x_k \in A^{-1}(W)$ & $\sum\alpha_k x_k = \theta_X$ = (определение $A^{-1}(W)$)$\Rightarrow$ $Ax_k \in W$ & $A(\sum\alpha_k x_k)$ = (A линейный оператор) = $\sum\alpha_k Ax_k = A\theta_X = \theta_Y$ = (W – линейно независомое множество в Y)$\Rightarrow$ $\alpha_k = 0\ \forall k$ =(определение л/н м.)$\Rightarrow$ $A^{-1}(W)$ – линейно независомое множество.

1.5. Задачи для самостоятельной работы

1.5.1. Пусть $X,Y \in ObL$, $A \in L(X,Y)$. Доказать утверждение.

1) V,W – л п/п в X $\Rightarrow$ V + W – л.п/п в X.
2) W – выпуклое м. в Y $\Rightarrow$ прообраз $A^{-1}(W)$ – выпуклое м. в X.
3) Доказать, что C[a,b] – л. п/п в B[a,b].
4) V – выпуклое множество в X $\Rightarrow \lambda V$ – выпуклое множество в X.
5) V, W – выпуклые множества в X $\Rightarrow V \cap W$ – выпуклое множество в X

6) V – выпуклое множество в X $\Rightarrow \forall x_0 \in V,\ x_0 + V$ – выпуклое множество в X

7) U$\subseteq$X $\Rightarrow$ Sp(U) – л.п/п в X & U$\subseteq$Sp(U).

8) Доказать, что KerA – л.п/п в X.

9) V – л п/п в X $\Rightarrow$ образ A(V) – л.п/п в Y.

10) W- л/н м. в Y $\Rightarrow$ прообраз A^{-1}(W) – л/н м. в X.

11) V – выпуклое м. в X $\Rightarrow$ образ A(V) – выпуклое м. в Y.

12) V, W – выпуклые множества в X $\Rightarrow V + W$ - выпуклое множество в X.

1.5.2. Исследовать линейное уравнение в C[0,1].

1. $\frac{1}{2}x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds = y(t)$

2. $4x(t) - \int_0^1 tx(s)ds = y(t)$

3. $4x(t) - \int_0^1 t^2 sx(s)ds = y(t)$

4. $\frac{1}{3}x(t) - \int_0^1 ts^2 x(s)ds = y(t)$

5. $2x(t) - \int_0^1 t^3 sx(s)ds = y(t)$

6. $2x(t) - \int_0^1 x(s)ds = y(t)$

7. $\frac{1}{5}x(t) - \int_0^1 t^2 x(s)ds = y(t)$

8. $\frac{1}{6}x(t) - \int_0^1 t^2 s^2 x(s)ds = y(t)$

9. $x(t) - \int_0^1 sx(s)ds = y(t)$

10. $\frac{1}{4}x(t) - \int_0^1 s^2 x(s)ds = y(t)$

1.5.3. Пример теста по модулю «Линейные пространства и линейные операторы».

<table>
<tr><td colspan="2">ВАРИАНТ 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№1</td><td>X,Y – л.п.; A : X→Y – л.о.
Какими из свойств обладает мн-во векторов V:
1. выпукло 2. л. п/п в X 3. л. п/п в Y 4. Содержится в к/м л. п/п
5. л.п. 6. л/н 7. базис в X(в Y) 8. к/м л.п.
Укажите номера свойств.</td></tr>
<tr><td>$X = Sp(1, t) \subset C[0, 1]$,
V = $\{x \in X : x(t) = C_0 + C_1 t,\ C_0 \le 0,\ C_1 \in R\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№2</td><td>A : X→X – к/м л.о.; im A=Sp(e_1, e_2)=Y⊂ X. Найти матрицу л.о.
A|y : Y→Y в базисе < e_1, e_2>. A|y=[::: :::]</td></tr>
<tr><td>X=C[0,1]; e_1(t)= t; e_2(t)=sin πt; (Ax)(t)= x(1) t + $\int_0^1 \sin \pi t x(s)ds$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№3</td><td>X – л.п.; A : X→X – л.о. Найти собств. знач-я λ_0, λ_1,…($|\lambda_0|<|\lambda_1|<\ldots$) собств. п/п X_0=ker(λ_0 I-A), X_1=ker(λ_1 I-A),… Выбрать собственный вектор e∈X_1 с единичной нормой (длиной) $\|e\|=1$ ($\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$, $\|x\|_{l_p}=(\sum |x_k|^p)^{1/p}$.
λ_0,=…, X_0=…; λ_1,=…, X_1=…; e=… .</td></tr>
<tr><td>X= C[0,1]; (Ax)(t) = (t^2-0,5) x(1);</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№4</td><td>Какие из операторов A : X→Y линейны? Укажите номера.</td></tr>
<tr><td>1. $X = Y = R,\ f(x) = 7x - 11$
2. $X = Y = C[0, 1],\ (Ax)(t) = t^3 \cdot x(t)$
3.. $X = Y = C[0, 1],\ (Ax)(t) = 2 \cdot x(t^2)$
4. $X = Y = R,\ f(x) = 3x^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">№5</td><td>A : X→Y – л.о. Уравнение Ax=y не может иметь более одного решения (да/нет) ? Разрешимо для ∀y∈Y (да/нет) ?</td></tr>
<tr><td>1) X= C^1[0,1]; Y= C[0,1]; (Ax)(t)=$\frac{dx}{dt}$
2) X=Y=C[0,1]; (Ax)(t)= $\frac{1}{4}$x(t) – $\int_0^1 t^2 s\, x(s)ds$</td></tr>
</table>

Решение теста. Вариант 1.

№1 Дано: $X = Sp(1, t) \subset C[0, 1]$, $\{x \in X : x(t) = C_0 + C_1 t,\ C_0 \le 0,\ C_1 \in R\}$**.**

Определить свойства множества:

1.1. V – выпукло?

Выберем два вектора из множества V: $x_1, x_2 \in$ V **.** Рассмотрим точки x отрезка, соединяющего x_1 и x_2: x(t)=(1-α)·x_1(t)+α·x_2(t), t∈[0;1]; α∈[0; 1]. x∈V?

$x(t)=(1-\alpha)\cdot x_1(t)+\alpha\cdot x_2(t)=(1-\alpha)\cdot(C_{01}+C_{11}\cdot t)+\alpha\cdot(C_{02}+C_{12}\cdot t)=((1-\alpha)C_{01}+\alpha\cdot C_{02})+$

$+((1-\alpha)C_{11}+\alpha\cdot C_{12})\cdot t)=$[обозначим: $C_0=(1-\alpha)C_{01}+\alpha\cdot C_{02}$ **;** $C_1=(1-\alpha)C_{11}+\alpha\cdot C_{12}$]=

$=C_0+C_1\cdot t$; $C_0=(1-\alpha)C_{01}+\alpha\cdot C_{02}\le 0$, т.к. $C_{01};C_{02}\le 0$. Таким образом $x\in V\Rightarrow V$-выпукло.

1.2. V – линейное подпространство в X?

Выберем два вектора из множества V: $x_1, x_2\in V$ **.**Рассмотрим линейную комбинацию x_1 и x_2: $\forall\alpha,\beta\in P$ (P – поле чисел), имеем: $x(t)=\alpha\cdot x_1(t)+\beta\cdot x_2(t)$, $t\in[0;1]$

$\Rightarrow x(t)=\alpha\cdot x_1(t)+\beta\cdot x_2(t)=\alpha\cdot(C_{01}+C_{11}\cdot t)\ +\ +\beta\cdot(C_{02}+C_{12}\cdot t)\ =$

$(\alpha C_{01}+\beta\cdot C_{02})+(\alpha C_{11}+\beta\cdot C_{12})\cdot t)=$[обозначим: $C_0=\alpha\cdot C_{01}+\beta\cdot C_{02}$ **;**

$C_1=\alpha\cdot C_{11}+\beta\cdot C_{12}$]$=C_0+C_1\cdot t$, $\forall\alpha,\beta\in P$. C_0 должно быть меньше нуля.

Известно, что $C_{01},C_{02}\le 0$. Пусть $\alpha=-1$; $\beta=-2\Rightarrow C_0=\alpha\cdot C_{01}+\beta\cdot C_{02}=-C_{01}-2\cdot C_{02}\ge 0\Rightarrow x\notin V\Rightarrow$ V не является линейным подпространством в X.

1.3. V – линейное подпространство в Y? Т.к. пространство Y в данной задаче неопределенно, то V не может быть линейным подпространством в Y.

1.4. V содержится в конечномерном линейном подпространстве?

По условию $V\subset X=Sp(1,t)\subset C[0,1]$, а Sp(1,t) является конечномерным линейным подпространством $\Rightarrow$ V содержится в конечномерном линейном подпространстве **.**

1.5. V являетcя линейным пространством?

Т.к. V не является линейным подпространством (см. п. 1.2), то V не является и линейным пространством.

1.6. V – линейно независимо?

Т.к. V – выпукло (1.1), то V линейно зависимо.

1.7. V – базис в X(в Y)?

Из п. 1.6. следует, что V не может являться базисом.

1.8. V – конечно мерное линейное пространство?

Из п. 1.2. следует, что V не может являтся линейным пространством.

Ответ: Множество V обладает свойствами **1,4**.

№2 $X=C[0,1]$; $e_1(t)=t$; $e_2(t)=\sin\pi t$; $(Ax)(t)=x(1)\cdot t+\int_0^1 \sin\pi t\cdot x(s)ds$.

Найти матрицу линейного оператора А.

Для решения найдем образы векторов $e_1(t)$ и $e_2(t)$.

$(A\,e_1)(t)\ =e_1(1)\cdot t+\int_0^1 \sin\pi t\cdot e_1(s)ds=1\cdot t+\sin\pi t\cdot\int_0^1 s\,ds=t+0{,}5\cdot\sin\pi t=1\cdot e_1(t)+0{,}5\cdot e_2(t)$;

Заполняем первый столбец матрицы получившимися коэффициентами: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

(A e_2)(t) = $e_2(1)\cdot t+\int_0^1 \sin\pi t\cdot e_2(s)ds=(\sin\pi)\cdot t+\sin\pi t\cdot\int_0^1 \sin\pi s\, ds=0\cdot t-\frac{2}{\pi}\cdot\sin\pi t=$

$=0\cdot e_1(t)-\frac{2}{\pi}\cdot e_2(t)$; заполняем второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{\pi} \end{pmatrix}$

В результате получим матрицу оператора A: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}5 & -\frac{2}{\pi} \end{pmatrix}$.

№3 Дано: X= C[0,1]; (Ax)(t) = (t^2-0,5) x(1);

Найдём собственные значения и собственные подпространства оператора A.

Рассмотрим однородное операторное уравнение λx-Ax=0.

$\forall$t$\in$[0;1]: λx(t) – (t^2-0,5) x(1) =0 $\Rightarrow$

3.1. λ=0 $\Rightarrow$ (t^2-0,5) x(1) = 0 $\forall$t$\in$[0;1] $\Rightarrow$ x(1)=1;

Получаем собственное значение λ_0=0 и собственное подпространство X_0={x$\in$X: x(1)=0};

3.2. $\lambda\neq0$ $\Rightarrow$ $\forall$t$\in$[0;1]: λx(t) – (t^2-0,5) x(1) =0 $\Rightarrow$ пусть t =1: $\lambda\cdot$x(1) – 0,5$\cdot$x(1)=0 $\Rightarrow$

(λ-0,5)$\cdot$x(1)=0 $\Rightarrow$ учитывая, что x(1) $\neq$0 [x(1)=0 $\Leftrightarrow$ λ=0], получаем λ_1=0,5 $\Rightarrow$

Из уравнения λx(t) – (t^2-0,5) x(1) =0, $\forall$t$\in$[0;1], при λ_1=0,5, получаем собственное подпространство X_1=Sp(t^2-0,5).

Выделим из X_1 вектор с единичной нормой: x_0(t)= t^2-0,5$\in X_1$ $\Rightarrow$ $\|x_0\|=\sup\limits_{t\in[0;1]}|t^2-0{,}5|=0{,}5$ $\Rightarrow$

$$e(t)=\frac{x_0(t)}{\|x_0\|}=2\cdot(t^2-0{,}5)=2t^2-1.$$

Ответ: $\lambda_0=0;\ X_0=\{x\in X: x(1)=0\};\lambda_1=0{,}5;\ X_1=Sp(t^2-0{,}5);e(t)=2t^2-1;$

№4. Определить линейны ли операторы:

4.1. $X=Y=R,\ f(x)=7x-11$

Установим линейность или нелинейность отображения по определнию линейного оператора: $\forall$x,y$\in$R, $\forall$a,b$\in$P имеем: $f(ax+by)=7\cdot(ax+by)-11=a\cdot7x+b\cdot7y-11$ (*)

С другой стороны: $a\cdot f(x)+b\cdot f(y)=a\cdot(7x-11)+b\cdot(7y-11)$ (**)

Из (*) и (**) следует, что $f(ax+by)\neq a\cdot f(x)+b\cdot f(y)\Rightarrow$ отображение $f(x)$ нелинейно.

4.2. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=t^3\cdot x(t)$.
$\forall$x,y$\in$**R**, $\forall$a,b$\in$**P**

$$A(a\,x(t)+b\,y(t))=t^3\cdot(a\cdot x(t)+b\cdot y(t))=a\cdot t^3\cdot x(t)+b\cdot t^3\cdot y(t)=a\cdot(Ax)(t)+b\cdot(Ay)(t)\ \Rightarrow$$

по определению линейного оператора следует, что А – линейный оператор.

4.3. $X = Y = C[0,1], (Ax)(t) = 2 \cdot x(t^2)$

∀x,y∈**R**, ∀a,b∈**P** $A(a\,x(t) + b\,y(t)) = 2 \cdot (a \cdot x + b \cdot y)(t^2) = 2 \cdot \cdot x(t^2) + b \cdot y(t^2) = a \cdot (Ax)(t) + b \cdot (Ay)(t)$

⇒

по определению линейного оператора следует, что А – линейный оператор.

4.4. $X = Y = R,\ f(x) = 3x^2$

∀x,y∈R, ∀a,b∈P имеем: $f(ax + by) = 3 \cdot (ax + by)^2 = 3(a^2 \cdot x^2 + 2ab \cdot xy + b^2 \cdot y^2)$ (*)

С другой стороны: $a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$ (**)

Из (*) и (**) следует, что $f(ax + by) \neq a \cdot f(x) + b \cdot f(y) \Rightarrow$ отображение $f(x)$ нелинейно.

Ответ: Линейными являются отображения 4.2 и 4.3.

№5. Дано уравнение Ax=y. Необходимо ответить на два вопроса:

- уравнение не может иметь более одного решения (да/нет) ?

-**у**равнение разрешимо для ∀y∈Y (да/нет) ?

Первый вопрос эквивалентен инъективности отображения. Второй вопрос эквивалентен его сюръективности**.**

5.1. X= $C^1[0,1]$; Y= C[0,1]; (Ax)(t)=$\dfrac{dx}{dt}$ **.**

Определим *инъективность* отображения. Согласно утверждению УТВ_Л.1.2.3 для ответа на данный вопрос рассмотрим однородное уравнение Ax=θ_Y.

$\forall t \in [0;1]\ \dfrac{dx}{dt} = \theta_Y \Rightarrow x(t) = C,\ C \in R \Rightarrow$однородное уравнение имеет ненулевое решение

⇒оператор А не является инъективным ⇒уравнение Ax=y может иметь более одного решения.

Определим *сюръективность* отображения. Согласно утверждению УТВ_Л-1.2.3 рассмотрим уравнение Ax=y ∀y∈Y ⇒ $\forall t \in [0;1]\ \dfrac{dx}{dt} = y(t) \Rightarrow x(t) = \int_0^t y(s)ds$. Таким образом, оператор А является сюръективным ⇒уравнение разрешимо ∀y∈ Y.

Ответ: нет, да.

5.2. X=Y=C[0,1]; (Ax)(t)= $\dfrac{1}{4}$ x(t) – $\int_0^1 t^2\, s\, x(s)ds$

При рассмотрении операторного уравнения II рода удобнее воспользоваться решением неоднородного уравнения λx-Ax=y.

$\forall t \in [0;1]\ \frac{1}{4}x(t) - \int_0^1 t^2\, s\, x(s)ds = y(t)\ \Rightarrow\ \frac{1}{4}x(t) - t^2 \cdot \int_0^1 s\, x(s)ds = y(t)$

Обозначим $\int_0^1 s\, x(s)ds = C \Rightarrow \frac{1}{4}x(t) - C\cdot t^2 = y(t)$ **(*)**. Домножим это уравнение на t и проинтегрируем на [0;1]. Получим: $\frac{1}{4}\int_0^1 t\, x(t)dt - C\cdot\int_0^1 t^2\cdot t\, dt = \int_0^1 t\cdot y(t)\, dt \Rightarrow$

$\frac{1}{4}C - \frac{1}{4}C = \int_0^1 t\, y(t)dt \Rightarrow \int_0^1 t\, y(t)dt = 0$. Таким образом получилось условие разрешимости уравнения. Решение такого уравнения выпишем из (*): $x(t) = 4Ct^2 + 4\cdot y(t),\ C \in R;\ \forall t \in [0;1]$

.

Данное уравнение имеет ненулевое решение. Уравнение разрешимо не для всех правых частей, а только для тех y, которые удовлетворяют условию: $\int_0^1 t\, y(t)dt = 0$.

Ответ: нет, нет.

Выпишем все ответы на тест 1 варианта:

№1	1;4
№2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{\pi} \end{pmatrix}$
№3	$\lambda_0 = 0;\ X_0 = \{x \in X : x(1) = 0\}$ $\lambda_1 = 0,5;\ X_1 = Sp(t^2 - 0,5);$ $e(t) = 2t^2 - 1;$
№4	2,3
№5	5.1) нет; да 5.2) нет; нет

1.6. Варианты заданий для контрольной работы

ВАРИАНТ 2	
№1	X,Y – л.п.; A : X→Y – л.о. Какими из свойств обладает мн-во векторов V: **1.** выпукло **2.** л. п/п в X **3.** л. п/п в Y **4.** Содержится в к/м л. п/п **5.** л.п. **6.** л/н **7.** базис в X(в Y) **8.** к/м л.п. Укажите номера свойств**.**
	X=Y=C[0,1]. (Ax)(t)= $\int_0^1 \sin(t)\cos(s)x(s)ds$, V = im A.
№2	A : X→X – к/м л.о.; im A=Sp(e_1, e_2)=Y⊂ X. Найти матрицу л.о. A|y : Y→Y в базисе < e_1, e_2>. A|y=[::: :::]
	X=C[0,1]; e_1(t)= t; e_2(t)=1-t; (Ax)(t)= x(1) t + x(0)(1 – t).
№3	X – л.п.; A : X→X – л.о. Найти собств. знач-я λ_0, λ_1,…($\|\lambda_0\|<\|\lambda_1\|<\ldots$) и собств. п/п X_0=ker(λ_0 I-A), X_1=ker(λ_1 I-A),… Выбрать собственный вектор e∈ X_1 с единичной нормой (длиной) ‖e‖=1 (‖x‖=sup|x(t)|) λ_0,=…, X_0=…; λ_1,=…, X_1=…; e=… .
	X= C[0,1]; (Ax)(t) = $t^3 x(\frac{1}{3})$.
№4	Какие из операторов A : X→Y линейны? Укажите номера.
	1. $X = Y = R,\ f(x) = 6 - 4x$ 2. $X = R^2, Y = R,\ A(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 + 1$ 3. $X = C^1[0,1], Y = C[0,1];$, $(Ax)(t) = 5 \cdot \frac{dx}{dt}$. 4. $X = Y = C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 t^3 \cdot \cos s \cdot x(s^2)ds$
№5	A : X→Y – л.о. Уравнение Ax=y не может иметь более одного решения (да/нет) ? Разрешимо для ∀y∈Y (да/нет) ?
	1. X = Y= C[0, π]; (Ax)(t) = $x(t) \cdot \sin t$, 2. $X = Y = C[0,1];\ (Ax)(t) = 0{,}125 \cdot x(t) - \int_0^1 t^4 s^3 x(s)\, ds$

ВАРИАНТ 3	
№1	X,Y – л.п.; A : X→Y – л.о. Какими из свойств обладает мн-во векторов V:1. **выпукло** 2. **л. п/п в X** 3. **л. п/п в Y** 4. **Содержится в к/м л. п/п** 5. **л.п.** 6. **л/н** 7. **базис в X(в Y)** 8. **к/м л.п.** Укажите номера свойств.
	X=Y=C[0,1]; (Ax)(t) =0,2 x(t) – $\int_0^1 t^3 s x(s)ds$; V = ker A.
№2	A : X→X – к/м л.о.; im A=Sp(e_1, e_2)=Y⊂ X. Найти матрицу л.о. A|y : Y→Y в базисе < e_1, e_2>. A|y=[::: :::]
	X=C[0,1]; e_1(t)= t; e_2(t)=1; (Ax)(t)= $\int_0^1 (ts+s^2)x(s)ds$).
№3	X – л.п.; A : X→X – л.о. Найти собств. знач-я λ_0, λ_1,…($\|\lambda_0\|<\|\lambda_1\|<\ldots$) и собств. п/п X_0=ker(λ_0 I-A), X_1=ker(λ_1 I-A),… Выбрать собственный вектор e∈ X_1 с единичной нормой (длиной) $\\|e\\|_{C[0,1]}=1$ ($\\|x\\|=\sup_{t\in[0,1]}\|x(t)\|$, $\\|x\\|_{l_p}=(\sum_{k=1} \|x_k\|^p)^{1/p}$. λ_0,=…, X_0=…; λ_1,=…, X_1=…; e=… .
	X= C[0,1]; (Ax)(t) = $\int_0^1 t^2 \; s\cdot x(s)ds$
№4	Какие из операторов A : X→Y линейны? Укажите номера.
	1. $X=R^2, Y=R,\ \ A(x_1,x_2)=2x_1$ 2. $X=C^1[0,1], Y=C[0,1];\ (Ax)(t)=t^2\cdot x'(1)$ 3. $X=Y=R,\ f(x)=-\sqrt{x+3}$ 4. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\int_0^1 \sin(t+s)\cdot x(\sqrt{s})ds$
№5	A : X→Y – л.о. Уравнение Ax=y не может иметь более одного решения (да/нет) ? Разрешимо для ∀y∈Y (да/нет)?
	$X=Y=C[0,1];\ (Ax)(t)=(2t^2+5t-3)\cdot x(t)$ X=Y=C[0,1]; (Ax)(t)= 4x(t) – $\int_0^1 s^2 x(s)ds$

ВАРИАНТ 4	
№1	X,Y – л.п.; A : X→Y – л.о. Какими из свойств обладает мн-во векторов V:1. **выпукло** 2. **л. п/п в X** 3. **л. п/п в Y** 4. **Содержится в к/м л. п/п** 5. **л.п.** 6. **л/н** 7. **базис в X(в Y)** 8. **к/м л.п.** Укажите номера свойств**.**
	A. X=**C** – л.п. над полем C; V={1, *i* }.
№2	A : X→X – к/м л.о.; im A=Sp(e_1, e_2)=Y⊂ X. Найти матрицу л.о. A|y : Y→Y в базисе < e_1, e_2>. A|y=[::: :::]
	A. X=C[0,1]; $e_1(t)=t$; $e_2(t)=t^2$; (Ax)(t)= $\int_0^1 (t+t^2 s)x(s)ds$
№3	X – л.п.; A : X→X – л.о. Найти собств. знач-я λ_0, λ_1,…($\|\lambda_0\|<\|\lambda_1\|<\ldots$) и собств. п/п $X_0=\ker(\lambda_0 I-A)$, $X_1=\ker(\lambda_1 I-A)$,… Выбрать собственный вектор e∈ X_1 с единичной нормой (длиной) $\\|e\\|=1$ ($\\|x\\|_{C[0,1]}=\sup_{t\in[0,1]}\|x(t)\|$, $\\|x\\|_{l_p}=(\sum_{k=1} \|x_k\|^p)^{1/p}$. λ_0,=…, X_0=…; λ_1,=…, X_1=…; e=… .
	A. $X=C[0,1];\ (Ax)(t)=\sin\pi t\cdot x(0{,}5)$
№4	Какие из операторов A : X→Y линейны? Укажите номера.
	A. 1. $X=Y=R,\ f(x)=-5x$ 2. X=Y=C[0,1]; (Ax)(t)=$\int_0^1 e^{ts}x(s^3)ds$ 3. $X=\{(x_1,x_2): x_1<0,\ x_2\ge 0\},\ Y=R,\ \ A(x_1,x_2)=x_1+x_2$ 4. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=t^3+x(0)$
№5	A : X→Y – л.о. Уравнение Ax=y не может иметь более одного решения (да/нет)? Разрешимо для ∀y∈Y (да/нет)?
	A. $X=Y=C[0,1];\ (Ax)(t)=(2t^2-3t-2)\cdot x(t)$ **B.** X=Y=C[0,1]; (Ax)(t)= 2x(t) – $\int_0^1 s^2 x(s)ds$

ВАРИАНТ 5	
№1	X,Y – л.п.; A : X→Y – л.о. Какими из свойств обладает мн-во векторов V:1. **выпукло** 2. **л. п/п в X** 3. **л. п/п в Y** 4. **Содержится в к/м л. п/п** 5. **л.п.** 6. **л/н** 7. **базис в X(в Y)** 8. **к/м л.п.** Укажите номера свойств**.**
	X={ $x \in C[0,1] \vert 0 \le x(t) \le t, \forall t \in [0,1]$ }.
№2	A : X→X – к/м л.о.; im A=Sp(e_1, e_2)=Y⊂ X. Найти матрицу л.о. A|y : Y→Y в базисе < e_1, e_2>. A|y=[::: :::]
	X=C[0,1]; $e_1(t)=\sin \pi t$; $e_2(t)=t$; $(Ax)(t)=x(0)\sin \pi t + \int_0^1 tx(s)ds$.
№3	X – л.п.; A : X→X – л.о. Найти собств. знач-я $\lambda_0, \lambda_1, \ldots (\lvert\lambda_0\rvert<\lvert\lambda_1\rvert<\ldots)$ и собств. п/п $X_0=\ker(\lambda_0 I-A)$, $X_1=\ker(\lambda_1 I-A)$,… Выбрать собственный вектор e∈ X_1 с единичной нормой (длиной) $\lVert e\rVert=1$ ($\lVert x\rVert_{C[0,1]}=\sup_{t\in[0,1]}\lvert x(t)\rvert$, $\lVert x\rVert_{lp}=(\sum_{k=1} \lvert x_k\rvert^p)^{1/p}$. λ_0,=…, X_0=…; λ_1,=…, X_1=…; e=… .
	X= C[0,1]; $(Ax)(t) = \int_0^1 sx(s)ds$
№4	Какие из операторов A : X→Y линейны? Укажите номера.
	1. $X = R^2, Y = [0, +\infty),\ \ A(x_1, x_2) = 2x_1^2$ 2. $X = C^1[0,1], Y = C[0, 1];\ (Ax)(t) = \cos t \cdot x'(t^2)$ 3. $X = Y = R,\ f(x) = 5x - 4$ 4. $X = Y = C[0, 1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 t \cdot s^4 \cdot x(s)ds$
№5	A : X→Y – л.о. Уравнение Ax=y не может иметь более одного решения (да/нет)? Разрешимо для ∀y∈Y (да/нет)?
	1) $X = Y = C[0,1];\ (Ax)(t) = (t^2 + 1) \cdot x(1)$ 2) X=Y=C[0,1]; (Ax)(t)= $\frac{2}{7}x(t) - \int_0^1 \sqrt{t} \cdot s^2 x(s)ds$

1.7. Пример исследования уравнения в пространстве C[a;b].

Рассмотрим уравнение

$$5\,x(t)-\int_0^1 t^3\, s^6\, x(s)\,ds = y(t),\ t\in[0,1]$$

Решение.

1) *Запишем уравнение в векторной форме*:

$(Kx)(t)=\int_0^1 t^3\, s^6\, x(s)\,ds,\ t\in[0,\,1],$ *тогда*

уравнение примет вид: $5x-Kx=y$

2) *Зададим оператор* A:

$(Ax)(t)=5x(t)-(Kx)(t),\ t\in[0,\,1]-$ *л.к. тождественного*

и интегрального операторов

то можно положить $X=Y=C[0,1]$.

3). *Свойства оператора* A:

$A\in L(X,Y)$?

$A=5I-K;$

$Ix=x-$ *тождественный оператор, линеен, если* $x\in X-$ *л.п.*

$X=C[0,1]-$ *л.п.* $\Rightarrow I-$ *л.о.*

$\forall x_1,x_2\in X;\forall a,b\in P$ *имеем*: $t\in[0,1]$

$$K(ax_1(t)+bx_2(t))=\int_0^1 t^3\, s^6\,(ax_1(s)+b\,x_2(s))\,ds=a\int_0^1 t^3 s^6 x_1(s)\,ds+b\int_0^1 t^3 s^6\, x_2(s)\,ds=$$

$=a\,(Kx_1)(t)+b\,(Kx_2)(t)\Rightarrow(Kx)(t)-$ *л.о. в пространстве* $C[0,1]$

Следовательно, оператор A *является линейной комбинацией л.о.*:

$A=5I-K\Rightarrow A-$ *л.о. в* $C[0,1]$

2.1).$(Ax)(t)=5x(t)-(Kx)(t),\ t\in[0,\,1]$

$x(t)\in C[0,1]\Rightarrow(Kx)(t)=C\cdot t^3$

$(C=\int_0^1 s^6\, x(s)\,ds$ *и* $|C|<\infty$, *т.к.* $s^6\cdot x(t)$ *–непрерывная функция*$)$

$\Rightarrow(Ax)(t)=5x(t)-C\,t^3-$ *функция, непрерывная на* $[0,1]$,

как разность непрерывных функций $\Rightarrow y(t)=(Ax)(t)\in C[0,1]$.

3.1). *инъективность* A:

$\ker A = \theta_x$?

$\ker A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$

$$Ax = 0 \Rightarrow 5x(t) - \int_0^1 t^3 s^6 x(s)\,ds = 0,\ t \in [0,1]$$

$$5x(t) - t^3 \int_0^1 s^6\, x(s) ds = 0, t \in [0,1]$$

$$C = \int_0^1 s^6\, x(s)\,ds \Rightarrow 5x(t) - C\,t^3 = 0\ \ (x(t) = \frac{Ct^3}{5})$$

$C = ??$

Вместо $x(t)$ *получим* C.

Для этого умножим уравнение $5x(t) - C\,t^3 = 0$ *на* t^6 *и проинтегрируем по* t *на* $[0,1]$:

$$5\int_0^1 t^6\, x(t)\,dt - C\int_0^1 t^{3+6} dt = 0 \Rightarrow 5C - C \cdot 0{,}1 = 0 \Rightarrow 4{,}9C = 0 \Rightarrow C = 0!$$

решение однородного уравнения $Ax = 0$: $x(t) \equiv 0 \Rightarrow \ker A = \theta_X \Rightarrow$

$A -$ *инъективен.*

3.2). *Сюръективность оператора* A:

(*если* $imA = \{\forall y \in Y \mid \exists x \in X : Ax = y\} = Y$, *то* A *сюръетивен*)

$$5x(t) - Ct^3 = y(t),\ t \in [0,1] \Rightarrow x(t) = 0{,}2\,y(t) + \frac{C}{5}t^3,\ C = ???$$

Уравнение $5x(t) - Ct^3 = y(t)$ *умножим на* t^6 *и проинтегрируем по* t:

$$5\int_0^1 t^6\, x(t)\,dt - C\int_0^1 t^{3+6}\, dt = \int_0^1 t^6 y(t) dt$$

$$5C - 0{,}1C = \int_0^1 s^6 y(s)\,ds \Rightarrow 4{,}9C = \int_0^1 s^6 y(s)\,ds \Rightarrow C = \frac{10}{49}\int_0^1 s^6\, y(s)\,ds.$$

подставим C *в решение уравнения*: $x(t) = 0{,}2\,y(t) + \dfrac{C}{5}t^3 \Rightarrow$

$$x(t) = 0{,}2y(t) + \frac{2}{49}t^3\int_0^1 s^6 y(s)\,ds = 0{,}2\,y(t) + \frac{2}{49}\int_0^1 t^3\, s^6 y(s) ds$$

$$x(t) = 0{,}2\,y(t) + \frac{2}{49}(Ky)(t),\ t \in [0,1] \Rightarrow$$

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : x = 0{,}2\,y + \frac{2}{49}Ky \Rightarrow A - \text{сюръективен.}$$

3.3). *Из п.*3.1 *и п.*3.2 *следует, что* A *биективен* $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1} = 0{,}2I + \frac{2}{49}K$$

4). *Теорема существования*:

из п. 3.2 *следует, что решение существует.*

5). *Теорема единственности*:

из п. 3.1. *следует, что решение единственно*

Решение находится по формуле:

$$x = A^{-1}y = 0{,}2y + \frac{2}{49}Ky.$$

2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА (т.п.) И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ (н.о.)

2.1. Понятия и определения

Рассмотрим базовые понятия раздела. Все понятия раздела представлены в таблице ниже:

Имя понятия, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
Категория топологических пространств (т.п.) и непрерывных отображений (н.о.), **T**	**Категория T**, для которой: **ObT** состоит из всех т.п., **T(X,Y)** состоит из всех н.о. $A:X\to Y$, **ComT = ComS**$\mid_{\mathbf{T(X,Y)}\times\mathbf{T(Y,Z)}}$ (т.е. композиции и единицы в **T** и **S** совпадают)
$X \in$ **ObT** , топология в X, $\boldsymbol{\tau}$	**Подмножество** $\boldsymbol{\tau} \subseteq \wp(X)$ с признаками: 1° $\{\varnothing, X\} \subseteq \boldsymbol{\tau}$ 2° $u, v \in \boldsymbol{\tau} \Rightarrow u \cap v \in \boldsymbol{\tau}$ 3° $s \subseteq \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \bigcup_{u\in s} u \in \boldsymbol{\tau}$
Топологическое пространство (т.п.), $X\in$ **ObS**	**Упорядоченная пара <X, τ>**, где $\boldsymbol{\tau}$ – топология во множестве X
Открытое множество в топологическом пространстве	**Элемент** топологии $\boldsymbol{\tau}$
$X \in$ **ObT**, $x\in X$, окрестность точки x, u_x	**Открытое м.** u_x, содержащее точку x (т.е. $x\in u_x \in \boldsymbol{\tau}$)
Непрерывное о., $\langle X, \boldsymbol{\tau}_X\rangle, \langle Y, \boldsymbol{\tau}_Y\rangle \in$ **ObT** $A\in$ **T(X,Y)**	**Отображение** $A:X\to Y$ со свойством $\forall(x \in X, u_{Ax} \in \boldsymbol{\tau}_Y)\ \exists\ \mathbf{v}_x \in \boldsymbol{\tau}_X \mid A(\mathbf{v}_x) \subseteq u_{Ax}$
Гомеоморфизм	**Изоморфизм** в категории **T**
Базис окрестностей в X, $O = \{O_x \mid x\in X\}$	**Подмножество** $O = \{O_x \mid x\in X\}\subseteq \wp(X) \mid$ 1. $\forall x\in X\ O_x\subseteq \wp(X),\ O_x\neq\varnothing$; 2. $u\in O_x \Rightarrow x\in u\ \ (u = u_x)$; 3. $u,v\in O_x \Rightarrow u\cap v \supset w \in O_x$; 4. $y\in u\in O_x \Rightarrow \exists v\in O_y \mid v \subset u$
$X\in$**ObS** , топология в X, порожденная базисом окрестностей, τ_O	**Топология** $\tau_O = \{u\in \wp(X) \mid x\in u \Rightarrow u\supset v_x\in O_x\}$
$X\in$**ObT** $Y\subseteq X$, замкнутое множество	**Подмножество** $Y\subseteq X$ замкнуто, если $X\backslash Y$ – открыто
$X\in$**ObT,** $Y\subseteq X$, $x\in X$, внутренняя точка множества Y	**Элемент м.** $x\in Y \mid \exists u\in\tau$: $x\in u \subseteq Y$
$X\in$**ObT,** $Y\subseteq X$, $x\in X$, внешняя точка множества Y	**Элемент м.** $x\in X$, являющийся внутренней точкой для $X\backslash Y$
$X\in$**ObT,** $Y\subseteq X$, $x\in X$, граничная точка множества Y	**Элемент м.** $x\in X$, не являющийся ни внутренней, ни внешней точкой м. Y

Имя понятия, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
$X \in$ **ObT,** $Y \subseteq X$, $x \in X$, предельная точка множества Y	**Элемент м.** $x \in X \mid x \in u \in \tau \Rightarrow Y \cap \{u \setminus \{x\}\} \neq \varnothing$
$X \in$ **ObT,** $Y \subseteq X$, $x \in X$, точка прикосновения множества Y	**Элемент м.** $x \in X \mid x \in u \in \tau \Rightarrow Y \cap u \neq \varnothing$
Внутренность м. Y, intY	**Подмн-во** в X всех внутренних точек м. Y
Замыкание м. Y, clY	**Подмножество** в X всех точек прикосновения м. Y
Граница м. Y, ∂Y	**Подмн-во** в X всех граничных точек м. Y
Хаусдорфово (отделимое) т.п.	**Т.п.**, в котором $\forall$ две различные точки имеют непересекающиеся окрестности
Компактное множество Y	**Подмножество** $Y \subseteq X \mid$ $(Y \subseteq \cup u_\alpha \;\&\; u_\alpha \in \tau \forall \alpha) \Rightarrow Y \subset \cup u_{\alpha(k)}$, $k \in \mathbf{N}_m$ (из $\forall$ открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие)
Относительная топология, τ_Y в Y	**Топология** $\tau_Y = \{u \cap Y \mid u \in \tau\}$
Топологическое подпространство в $<X, \tau>$	**Т. п.** $<Y, \tau_Y>$, где τ_Y – относительная топология

2.2. Основные утверждения и теоремы раздела

УТВ Т-1. Пусть $<X, \tau>$ – т.п.; $Y \subseteq X$. Тогда Y открыто $\Leftrightarrow \forall$ т. Y – внутренняя.

УТВ Т-2. $\{O_x \mid x \in X\}$- базис окрестностей в X $\Rightarrow$ $<X, \tau_O>$ – т.п.

УТВ Т-3. *Свойства замкнутых множеств в т.п.* $<X, \tau>$. $\varnothing$ и X замкнуты; конечные объединения и любые пересечения замкнутых м. замкнуты.

УТВ Т-4. *Свойства* clY. $Y \subseteq$ clY; clY замкнуто; clY – пересечение всех замкнутых м., содержащих Y; clY – наименьшее замкнутое м., содержащее Y.

УТВ Т-5. *Свойства* intY. intY$\subseteq$Y; intY открыто; intY – объединение всех открытых м., содержащихся в Y; intY – наибольшее открытое м., содержащееся в Y.

УТВ Т-6. *Свойства* ∂Y. ∂Y – замкнутое м.; ∂Y = clY \ intY.

УТВ Т-7. *Свойства компактных м.* Замкнутое подмножество компакного м. компактно; компактное подмножество хаусдорфова т.п. замкнуто.

УТВ Т-8. $Y \subseteq <X, \tau> \Rightarrow <Y, \tau_Y>$ – т.п.

УТВ Т-9. *Свойства непрерывных о.* Отображение непрерывно $\Leftrightarrow$ прообраз $\forall$ открытого м. открыт $\Leftrightarrow$ прообраз $\forall$ замкнутого м. замкнут; непрерывный образ компактного м. компактен.

2.3. Типовые задачи по разделу

1) Определить, является ли данная точка x в данном топологическом пространстве $<X, \tau>$ по отношению к данному подмножеству $Y \subset X$ внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения?

2) $Y \subset <X, \tau>$. Определить свойства множества:

Y открыто? замкнуто? компактно? clY = ? intY = ? ∂Y = ?

3) Доказать утверждение.

2.4. Примеры решения задач

2.4.1. $<X, \tau> = <\mathbf{R}^2, \tau_O>$, $Y = (1,2]\times(3,5)$, $x = <2, 4>$.

Определить, является ли данная точка x в данном т.п. $<X, \tau>$ по отношению к данному подмножеству $Y \subset X$ внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения?

Решение.

В любой окрестности точки $<2, 4>$ есть как точки м. Y, так и точки м. X\Y. Следовательно, $<2, 4>$ не является внутренней, внешней, а является граничной точкой. $x \in u \in \tau_O \Rightarrow Y \cap \{u \setminus \{x\}\} \neq \varnothing \Rightarrow <2, 4>$ – предельная точка. $x \in u \in \tau_O \Rightarrow Y \cap u \neq \varnothing \Rightarrow <2, 4>$ – точка прикосновения (рис. 2.1)

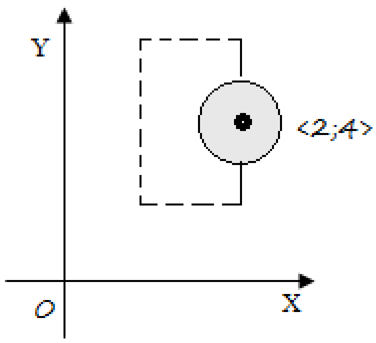

рис. 2.1.

2.4.2. $<X, \tau> = <\mathbf{R}, \tau_O>$, $Y = [1, 2)$.

Определитьсвойства множества:

Y открыто? замкнуто? компактно? clY = ? intY = ? ∂Y = ?

Решение

Y не является открытым, т.к. точка 1 не является внутренней. $X \setminus Y = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ – также не является открытым, т.к. точка 2 – не внутренняя $\Rightarrow$ Y не является замкнутым.

Y = [1, 2) не является компактным, т.к. $[1, 2) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(0;\ 2-\frac{1}{n}\right)$ и из этого открытого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. cl[1, 2) = [1, 2], int[1, 2) = (1, 2), ∂[1, 2) = {1; 2}.

2.4.2.1. Доказать теорему УТВ Т-1:

Пусть <X, τ> – т.п.; Y⊆X. Тогда Y открыто ⇔ ∀ т. Y – внутренняя.

***Доказательство*:**

⇒ ? Y открыто ⇐(определение открытого м. в т.п.)⇒Y∈τ =(определение окрестности)⇒ τ э u_y =Y – окрестность ∀ т. y∈Y =(Y⊆Y)⇒ ∀y∈u_y⊆Y =(определение внутренней точки)⇒ ∀ y – внутренняя т. Y.

⇐ ? ∀y∈Y y – внутренняя т. Y =(определение внутренней т.)⇒ ∀y∈Y ∃ u_y∈τ | y∈u_y⊆Y =(определения ∪ и ⊆)⇒ $\bigcup_{y\in Y} u_y \subseteq Y$ ***(1).*** С другой стороны, т.к. y∈u_y , $Y \subseteq \bigcup_{y\in Y} u_y$ ***(2)*** =(определение равенства множеств)⇒ из ***(1)*** и ***(2)*** следует $\bigcup_{y\in Y} u_y = Y$ ∈τ, как объединение открытых множеств.

2.4.2.2. Доказать свойство множества граничных точек: ∂Y = clY \ intY.

***Доказательство*.**

x∈∂Y ⇐(определение границы)⇒ x – граничная точка Y ⇐(определение граничной т.)⇒ x – не внутренняя т Y & x – не внешняя т. Y ⇐(определение внешней т. Y)⇒ x – не внутренняя т Y & ∀ окрестности u_x ∈τ | $u_x \not\subset$ X \ Y ⇐(определение дополнения м.)⇒ x – не внутренняя т Y & ∀ окрестности u_x ∈τ | u_x ∩Y≠∅ ⇐(определение т. прикосновения)⇒ x – не внутренняя т Y & x – т. прикосновения м. Y ⇐(определения внутренности intY и замыкания clY)⇒ x∉intY & x∈clY ⇐(определение разности м.)⇒ x∈clY \ intY ⇐(определение = множеств)⇒ ∂Y = clY \ intY.

2.5. Задачи для самостоятельной работы

2.5.1. Пусть <X, τ> – т.п.; $Y \subseteq X$. Доказать утверждение.

1) Конечное объединение замкнутых м. замкнуто.
2) Композиция непрерывных отображений непрерывна.
3) $(BA)^{-1}(w) = A^{-1}(B^{-1}(w))$.
4) ∂Y – замкнутое м.
5) $\mathrm{int}Y = \bigcup\limits_{\substack{u\in\tau \\ u\subseteq Y}} u$.
6) intY открыто.
7) $\mathrm{int}Y \subseteq Y$.
8) clY замкнуто.
9) $Y \subseteq \mathrm{cl}Y$.
10) Любое пересечение замкнутых м. замкнуто.
11) Замкнутое подмножество компактного множества компактно.
12) $\varnothing$ и X замкнуты

2.5.2. Пусть $\langle X,\tau\rangle$ – т.п.; $Y \subseteq X$; $x \in X$. Определить, является ли точка x по отношению к Y:

1. внутренней. 2. внешней. 3. граничной 4. предельной 5. точкой прикосновения.

1) $X = [-1, 6) \subset \mathbf{R}$. $\tau = \tau_X$ – относительная топология в X; $Y = [0,3)$, $x = 6$.

2) $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $\tau = \wp(X)$; $Y = \{3,4,7\}$, $x = 1$

Ответы:

1) x = 6 является точкой внутренней, предельной, точкой прикосновения Y;

2) x=1 является внешней точкой Y.

2.5.3. $\langle X,\tau\rangle$ – т.п.; $Y \subseteq X$; Определить: Y – открыто?(да/нет) Y – замкнуто? (да/нет) Y – компактно?(да/нет)

1) $X = C[0,1]$, $\tau = \tau_0$ – топология окрестностей: $x_0 \in X$;

$Y = \{x \in Sp\{x_0\}: x(t) = C\cdot x_0,\ C \in [1;4]\}$

2) $X = \{1,2,3\}$, $\tau = \{\varnothing, X, \{2,3\}\}$, $Y = \{2,3\}$

Ответы:

1) Y не открыто, замкнуто, компактно;

2) Y открыто, не замкнуто, компактно.

2.5.4. **$\langle X,\tau\rangle$ –** т.п.; **$Y \subseteq X$;** Найти замыкание множества *cl*Y; определить внутренность множества *int*Y; границу множества ∂Y.

1) $X = \{1,2,3,4,5\}$; $\tau = \{\varnothing, X, \{1,2,3\}\}$, $Y = \{1,2,3,4\}$

2) $X = C[0,1]$, $\tau = \tau_0$, $Y = \{x \in X \mid 0 < x(t) \le 1 \ \forall t \in [0,1]\}$

Ответы:

1) $clY=X$; $intY=\varnothing$; $\partial Y=clY \setminus intY=X$;

2) $clY= \{x \in X \mid 0 \le x(t) \le 1 \ \forall t \in [0,1]$; $intY=\{x \in X \mid 0 < x(t) < 1 \ \forall t \in [0,1]$;
$\partial Y=\{x \in X \mid \exists t_0 \in [0;1]: x(t_0)=0 \vee x(t_0)=1\}$

3. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА (м.п.) И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ (н.о.)

3.1. Понятия и определения

Рассмотрим базовые понятия раздела. Все понятия раздела представлены в таблице ниже:

Имя понятия, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
Категория метрических пространств (м.п.) и непрерывных отображений (н.о.), **M**	**Категория M**, для которой: **ObM** состоит из всех м.п., **M(X,Y)** состоит из всех н.о. $A:X\to Y$, **ComM = ComS**$\mid_{\mathbf{M(X,Y)}\times\mathbf{M(Y,Z)}}$ (т.е. композиции и единицы в **M** и **S** совпадают)
$X \in$ **ObS** , X – метрическое пространство (м.п.)	**Упорядоченная пара <X, d>**, где **d** – метрика во множестве X
Метрика	**Функция $\mathbf{d} : X\times X \to [0, +\infty)$** такая, что $\forall\, x,y,z \in X$ 1° $\mathbf{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 2° $\mathbf{d}(x,y) = \mathbf{d}(y,x)$ 3° $\mathbf{d}(x,y) \le \mathbf{d}(x,z) + \mathbf{d}(z,y)$
$\langle X, \mathbf{d}\rangle \in$ **ObM,**x_n , $x_0 \in X$ сходящаяся последовательность, $x_n \to x_0$	**Последовательность** x_n называется сходящейся к x_0 при $n \to \infty$, если $\mathbf{d}(x_n , x_0) \to 0$
Фундаментальная последовательность	**Последовательность** x_n называется фундаментальной при $n,m \to \infty$, если $\mathbf{d}(x_n , x_m) \to 0$
Полное метрической пространство	**Метрическое пространство**, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится (к некоторому $x_0 \in X$)
Непрерывное ототбражение в м.п., $A \in$ **M(X,Y)**	**Отображение** $A:X\to Y$ со свойством: $(x \in X,\ x_n\to x) \Rightarrow Ax_n\to Ax$
Шар (в м.п.), $\mathbf{B}_{x,r}$	**Подмножество** $\mathbf{B}_{x,r} = \{y\in X \mid \mathbf{d}(x,y) < \mathbf{r}\} \subseteq X$
Топология окрестностей в м.п. X, τ_O	**Топология** $\tau_O = \{u \in \wp(X) \mid x \in u \Rightarrow u \supseteq \mathbf{B}_{x,r}$ для некоторого $\mathbf{r} > 0\,\}$
Ограниченное множество	**Подмножество** $Y\subseteq X \mid \exists$ шар $\mathbf{B}_{x,r} \supseteq Y$
<X, d> ∈**ObM**, ε-сеть м. $Y\subseteq X$	**Подмножество** $Q\subset X \mid \forall y\in Y\ \exists x\in Q$: $d(x,y)<\varepsilon$
<X, d> ∈**ObM**, вполне ограниченное множество $Y\subseteq X$	**Подмножество** $Y\subseteq X \mid \forall\varepsilon>0\ \exists$ конечная ε-сеть для множества Y
плотное в X множество Y	**Множество** Yплотно в X, если $clY\supseteq X$
Сепарабельное м.п.	**М.п.** <X, d> такое, что ∃ счетное плотное в X множество
Предкомпактное м.	**Подмножество** $Y\subseteq X \mid$ из ∀ последовательности

Имя понятия, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
	$\{x_n\}\subset Y$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность
Непрерывное отображение $A:\langle X,d_X\rangle\to\langle Y,d_Y\rangle$	**Отображение** $A \mid x_n \to x \Rightarrow Ax_n \to Ax$
Равномерно непрерывное на подмножестве $Y\subseteq X$ отображение: $A:\langle X,d_X\rangle\to\langle Y,d_Y\rangle$	**Отображение** $A \mid \forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ $(x_1,x_2\in Y,\ d_X(x_1, x_2)<\delta) \Rightarrow d_Y(Ax_1,Ax_2)<\varepsilon$
Изометрия	**Отображение** $A \mid \forall x_1, x_2 \in X$ $d_Y(Ax_1,Ax_2) = d_X(x_1, x_2)$
Ограниченное отображение $A:\langle X,d_X\rangle\to\langle Y,d_Y\rangle$	**отображение** $A: X\to Y$ такое, что всякое ограниченное множество M преводит в ограниченное A(M): $X\supseteq M$ – ограничено $\Rightarrow Y\supseteq A(M)$ – ограничено
Сжимающее отображение $A:\langle X,d_X\rangle\to\langle Y,d_Y\rangle$	**О**тображение $A: X\to Y$ такое, что $\exists\alpha: 0\le\alpha<1: d_Y(Ax_1,Ax_2) \le \alpha d_X(x_1, x_2)\forall x_1,x_2$
$C[a, b] \supset Y$ раностепенно непрерывное множество	**Подмножество** $Y\subset C[a, b]$ такое, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0: (x\in Y,\ t_1,t_2 \in [a, b], \lvert t_1-t_2\rvert < \delta \Rightarrow \lvert x(t_1) - x(t_2)\rvert < \varepsilon)$

3.2. Основные утверждения и теоремы раздела

УТВ М-3.2.1. Шары в м.п. образуют базис окрестностей.

Следствие 3.2.1.

М.п. (с топологией окрестностей τ_0) является хаусдорфовым топологическим пространством.

УТВ М-3.2.2. *Простейшие свойства сходящихся последовательностей.*

1) Сходящаяся последовательность фундаментальна.

2) Сходящаяся последовательность ограничена.

3) Сходящаяся последовательность не может сходиться более, чем к одной точке.

4) Всякая подпоследовательность сходящейся к точке x последовательности сходится к той же самой точке x.

УТВ М-3.2.3. *Критерий точки прикосновения в м.п.:*

(x – точка прикосновения подмножества $Y \subseteq \langle X, d\rangle) \Leftrightarrow$

$(x = \lim x_k, \{x_k\}\subseteq Y)$.

УТВ М-3.2.4. *Критерий предельной точки в м.п.:*

(x – предельная точка подмножества $Y \subseteq \langle X, d\rangle) \Leftrightarrow$

$(x = \lim x_k$, x_k различны, $\{x_k\}\subseteq Y)$.

УТВ М-3.2.5. *Критерий замкнутости подмножества в м.п.:*

($\langle X, d\rangle \supseteq Y$ – замкнуто) $\Leftrightarrow$

(Y содержит все свои точки прикосновения, т.е. $Y \ni x_k \to x \Rightarrow x \in Y$)

УТВ М-3.2.6. *Критерий компактности подмножества в м.п.:*

($\langle X, d\rangle \supseteq Y$ – компактно) $\Leftrightarrow$ (из любой последовательности $\{x_k\} \subseteq Y$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из Y)

УТВ М-3.2.7. *Критерий предкомпактности подмножества в полном м.п.:*

(в полном м.п. подмножество Y предкомпактно) $\Leftrightarrow$ (Y вполне ограничено)

УТВ М-3.2.8. *Критерий непрерывности отображения в м.п.:*

($A:\langle X,d_X\rangle \to \langle Y,d_Y\rangle$ непрерывно) $\Leftrightarrow$ $A^{-1}(\tau_{0Y}) \subseteq \tau_{0X} \Leftrightarrow$

($\forall x \in X$, $\forall$ ε-окрестности $B_{Ax,\varepsilon}$ $\exists$ δ-окрестность $B_{x,\delta} \mid A(B_{x,\delta}) \subseteq B_{Ax,\varepsilon}$).

Следствие 3.2.8 $\mathbf{M}(X,Y) \subseteq \mathbf{T}(X,Y)$

УТВ М-3.2.9. Категория **M** является подкатегорией категории **T**.

УТВ М-3.2. 10. *Свойства непрерывных отображений:*

1) Все свойства, которыми обладают непрерывные отображения в т.п. выполняются
и в метрическом пространстве.

2) Если $\langle X, d_X\rangle$ компактное м.п., то всякое н.о. $A:\langle X,d_X\rangle \to \langle Y,d_Y\rangle$ равномерно непрерывно.

УТВ М-3.2.11. $\langle X,d_X\rangle$ – м.п. $\Rightarrow$ функция $d_X(.,y)$ непрерывна $\forall y \in X$; аналогично $d_X(x,.)$ непрерывна $\forall x \in X$.

УТВ М-3.2.12. *Теорема Арцела (критерий предкомпактности в* C[a, b]*):*

($C[a, b] \supset Y$ предкомпактно) $\Leftrightarrow$

(Y ограничено & Y равностепенно непрерывно).

Пример. $C[a, b] \supset Y = \{x \in C^1[a, b] \mid \|x\| = \|x\|_{sup} + \|x'\|_{sup} \leq M\}$ – ограниченное в $C^1[a, b]$ подмножество равностепенно непрерывно.

УТВ М-3.2.13. *Принцип сжимающих отображений:*

в полном м.п. $\langle X, d_X\rangle$ всякое сжимающее отображение $A:X \to X$ имеет единственную неподвижную точку ($Ax=x$), к которой сходятся последовательные приближения $x_n = Ax_{n-1}$, $n=0,1,2,...$ при любом $x_0 \in X$.

3.3. Типовые задачи по разделу

1) Дано множество $Y \subset X$, $x_0 \in X$. Определить, является ли данная точка x_0 в данном м.п. $<X, d_X>$ по отношению к данному подмножеству Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения?

2) $Y \subseteq <X, d_X>$. Определить: Y открыто? замкнуто? компактно? предкомпактно? ограничено? вполне ограничено? сепарабельно?

$clY = ?$ $intY = ?$ $\partial Y = ?$

3) Исследовать сходимость данной последовательности в данном м.п.

4) Определить, является ли отображение сжимающим и вэтом случае найти неподвижную точку.

5) доказать утверждение.

3.4. Примеры решения задач

3.4.1. Дано множество $Y = (2, 3) \cup \{1/k\}_{k\in N} \subset X$, X=R. Определить, является ли данная точка $x = 0$ в данном метрическом пространстве $<X, d_X> = <\mathbf{R}, d_R(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|>$ по отношению к данному подмножеству Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения?

Решение.

Любая окрестность $B_{0,r}$ содержит как точки, не принадлежащие Y (например, достаточно малые по модулю отрицательные числа), так и точки, принадлежащие Y (последовательность $1/k \to 0$), поэтому точка 0 не является ни внутренней, ни внешней, т.е. является граничной. Точка $0 = \lim x_k = \lim 1/k$, $\{x_k\} \subset Y$ & x_k различны, поэтому, по критерию УТВ М-4, точка 0 является предельной, а следовательно, по критерию УТВ М-3, и точкой прикосновения.

3.4.2. Определить свойства множества:

$Y= (2, 3) \cup \{1/k\}_{k\in N} \subseteq R$; $<X, d_X>=<\mathbf{R}, d_R(x_1,x_2)>$.

Определить: Y открыто? замкнуто? компактно? предкомпактно? ограничено? вполне ограничено? сепарабельно? $clY = ?$ $intY = ?$ $\partial Y=?$

Решение.

Множество Y *не является открытым*, т.к. у него есть точки ($\{1/k\}_{k\in N}$), не являющиеся внутренними.

Множество Y *не является замкнутым*, т.к. точка 2 является предельной точкой Y, но не принадлежит Y, а согласно критерию замкнутости (УТВ М-5), замкнутое множество содержит все свои точки прикосновения, в частности, все свои предельные точки.

Множество Y *ограничено:* $B_{0,3} \supset Y$.

Множество Y *предкомпактно*, т.к. всякая последовательность его точек является ограниченной, и поэтому, в силу известного из математического анализа принципа компактности, содержит сходящуюся подпоследовательность.

Множество Y *вполне ограничено*, т.к. $<\mathbf{R}, d_R(x_1,x_2)>$ полно, а следовательно (УТВ М-7) полная ограниченность эквивалентна предкомпактности.

Множество Y *не компактно*, т.к. не замкнуто (см. УТВ Т-9).

Множество Y *сепарабельно*, т.к. м. рациональных чисел Q счетно и плотно в Y.

$clY = [2, 3] \cup \{1/k\}_{k\in N} \cup \{0\}$ (УТВ Т-4). $intY = (2, 3)$ (по определению внутренности). $\partial Y = \{2\}\cup\{3\}\cup\{1/k\}_{k\in N} \cup\{0\}$ ($\partial Y = clY \setminus intY$).

3.4.3. Исследовать сходимость последовательности

Рассмотрим последовательность:

$$x^1 = \{1, 0, 0,....\},\ x^2 = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0,...\},\quad x^3 = \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0, ...\}, ...$$

Определить, сходится ли последовательность $\{x^n\}$ к точке $\theta = \{0, 0, 0, ...\}$ в метрическом пространстве l_2 ?

в метрическом пространстве $\mathbf{l}_\infty$?

Решение.

$$d_2(x^k, \theta) = ((\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_i^k - 0\right|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k})^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^k \text{ не сходится к } \theta \text{ в } l_2.$$

$$d_{sup}(x^k, \theta) = \sup\{|x_i^k - 0| : i\in\mathbf{N}\} = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0\ (k\to\infty) \Rightarrow x^k \text{ сходится к } \theta \text{ в } \mathbf{l}_\infty.$$

3.4.4. Определить, является ли отображение сжимающим.

$$X = Y = C[0,1];\ (Ax)(t) = \frac{t}{t^2+1}\cdot x(0,5);$$

1. *Определить, будет ли* A *сжимающим отображением*:

по определению, отображение сжимающее, если:

$d(Ax, Ay) \le \alpha \cdot d(x, y);\ \alpha \in [0,1).$

Проверим выполнение этого условия:

$$d(Ax, Ay) = \sup_{[0,1]}\left|\frac{t}{t^2+1}x(0,5) - \frac{t}{t^2+1}y(0,5)\right| =$$

$$= \sup_{[0,1]}\left|\frac{t}{t^2+1}\right|\cdot|x(0,5)-y(0,5)| \le 0,5\cdot\sup_{[0,1]}|x(t)-y(t)| = 0,5\,d(x,y);$$

$\alpha = 0,5 < 1 \Rightarrow$ *отображение* A *сжимающее*;

2). *Т.к. отображения* A *сжимающее, найдём неподвижную точку.*

$x_n = Ax_{n-1},\ x_0 \in X$

$x_0(t) = 2t \Rightarrow x_0(0,5) = 2*0,5 = 1$

$$Ax_0(t) = \frac{t}{t^2+1} = x_1(t);\ \ Ax_1(t) = \frac{t}{t^2+1}\cdot x_1(0,5) = 0,4\cdot\frac{t}{t^2+1} = x_2(t);$$

$$Ax_2(t) = \frac{t}{t^2+1}\cdot x_2(0,5) = (0,4)^2\cdot\frac{t}{t^2+1} = x_3(t);.....$$

$$x_n(t) = (0,4)^{n-1}\cdot\frac{t}{t^2+1};\ \sup_{[0,1]}|x_n(t)| = \sup_{[0,1]}\left|(0,4)^{n-1}\frac{t}{t^2+1}\right| = 0,5\cdot(0,4)^n \to 0, n\to\infty;$$

$$\sup_{[0,1]}|x_n(t)| = \sup_{[0,1]}|x_n(t)-0| = d(x_n,\theta)\to 0,\ n\to\infty$$

$x_0(t) = Ax_0(t) \equiv 0 -$ *неподвижная точка.*

3.4.5. Пример решения варианта контрольной работы.

1) Проверить, является ли предложенная функция $d(x,y)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$ метрикой в пространстве $X=C[0,2]$.

Решение.

Для решения необходимо проверить аксиомы метрики:

$d(x,y)\ge 0,\ \forall x,y\in X$

$d(x,y)=0\Leftrightarrow \sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|=0\Leftrightarrow \forall t\in[0,1]\ |x(t)-y(t)|=0\Leftrightarrow$

$\forall t\in[0,1]\ x(t)=y(t)$, но при $t\in(1,2]\ x(t)\ne y(t)\Rightarrow$

Первая аксиома метрики не выполняется ⇒ функция d(x;y) не является метрикой.

2) Пусть $Y\subseteq\langle R,d\rangle$. Проверить, является ли множество $Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1};\ \frac{1}{n}\right)$

открытым, замкнутым, ограниченным, вполне ограниченным, предкомпактным, компактным, сепарабельным?

Решение.

2.1. $Y=\left(\frac{1}{2};1\right)\bigcup\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\bigcup.....\Rightarrow\forall n\in N:\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)\in\tau_0\Rightarrow$

(любое объединение открытых множеств открыто) $Y-$открыто.

2.2. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои предельные точки; рассмотрим точку $x_0=0-$предельная точку множества Y:

последовательность $x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)=\frac{2n+1}{2n(n+1)}\in\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Rightarrow x_0=0-$предельная, $x_0=0\notin Y\Rightarrow Y$ не замкнуто.

2.3. Ограниченность множества:

$Y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)\subset[0,1]\Rightarrow Y$ ограниченое множество;

2.4. Y вполне ограничено?

$\varepsilon-$сеть $A=\{a\in[0,1]:a_0=0;\ a_n=a_0+\varepsilon\cdot n,\ n=1,N\}$;

$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1<+\infty\Rightarrow\varepsilon-$сеть A конечна $\Rightarrow Y$ вполне ограничено;

2.5. $R-$полное метрическое пространство $\Rightarrow Y$ предкомпактно (т.к. вполне ограничено);

Y не замкнуто $\Rightarrow Y$ не компактно;

2.6. Y сепарабельно, т.к. $\exists$счётное, всюду плотное в Y множество:

$M=Q\bigcap Y,\ M\subset Y\wedge[M]=[0,1]\supset Y$.

Ответ.

Y – открытое, ограниченное, вполне ограниченное, предкомпактное, сепарабельное множеств, не является замкнутым и компактным.

3) Пусть Y – множество из условий задачи 2), x_0 – заданная точка. Ответить на вопросы: является ли точка x_0 по отношению к Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения?

3.1. $x_0 = 0$. 3.2. $x_0 = 0,75$.

Решение.

Исходя из определения характеристик точек, получаем *ответ*:

$x_0 = 0$ – граничная, предельная и точка прикосновения;

$x_0 = 0,75$ – внутренняя, предельная и точка прикосновения.

4) Даны две функции x_1(t), x_2(t). В каком из пространств

C[0, b], L_1 [0, b], L_2 [0, b] расстояние d(x_1, x_2) является наименьшим и наибольшим?

b = 2, x_1(t) =cost + t^2, x_2(t) = cos t.

Решение.

$$1) X = C[0,2];\ d(x,y) = \sup_{[0,2]} |x_1(t) - x_2(t)| = \sup_{[0,2]} |t^2| = 4;$$

$$2) X = L_1[0,2];\ d_1(x,y) = \int_0^2 |x_1(t) - x_2(t)|\,dt = \int_0^2 t^2 dt = 8/3;$$

$$3) X = L_2[0,2];\ d_2(x,y) = \sqrt{\int_0^2 |x_1(t) - x_2(t)|^2\,dt} = \sqrt{\int_0^2 t^4 dt} = 0,8\sqrt{10}.$$

$$8/3 < 3 < 4;\ 0,8\sqrt{10} < 0,8\sqrt{16} = 3,2.$$

$$64/9 > 6,4 = 64/10.$$

Ответ. Наименьшее расстояние в L$_2$[0;2]; наибольшее в C[0;2].

5) Определить, является ли оператор $A: X \to Y$ непрерывным:

$$X = Y = C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 \sin\pi t \cdot \cos\pi s \cdot x(s)ds$$

Решение.

Оператор $A: X \to Y$ называется непрерывным, если $(\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \to x_0 \in X,\ n \to \infty)$ $\Rightarrow (Ax_n \to Ax_0 \in Y, n \to \infty)$.

Дано: $d_X(x_n, x_0) < \delta, n > N(\delta)$;

Доказать: $d_Y(Ax_n, Ax_0) < \varepsilon(\delta)|$.

$$d(Ax_n, Ax_0) = \sup_{[0,1]} |(Ax_n)(t) - (Ax_0)(t)|.$$

$$|(Ax_n(t) - (Ax_0)(t)| = \left|\sin \pi t \cdot \int_0^1 \cos \pi s \cdot (x_n(s) - x_0(s))ds\right| \le$$

$$\le 1 \cdot \int_0^1 |\cos \pi s| \cdot |x_n(s) - x_0(s)| ds \le \int_0^1 |\cos \pi s| \cdot d_X(x_n, x_0) ds =$$

$$= \frac{2}{\pi} d_X(x_n, x_0) < \frac{2\delta}{\pi};$$

переходя к sup по $t \in [0,1]$, получим $d_Y(Ax_n, Ax_0) \le \dfrac{2\delta}{\pi} = \varepsilon$.

*Ответ***.** Оператор A непрерывен.

6) Определить с помощью критерия Арцела, является ли множество М в пространстве C[0, 1] предкомпактным, если $M = \{x_n(t) = \sin(nt), n \in N\}$.

Решение.

Критерий Арцела (УТВ М-3.2.12.).

Множество М предкомпактно в C[a;b],если М ограничено и равностепенно непрерывно.

$$M = \{x_n(t) = \sin nt,\ n \in N\}$$

Ограниченность:

$\sup\limits_{[0,1]} |x_n(t)| = 1 \Rightarrow M$ ограничено.

Равностепенная непрерывность:

$$\forall t_1, t_2 \in [0,1] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |x_n(t_1) - x_n(t_2)| < \varepsilon,\ \delta = \delta(\varepsilon);$$

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = |\sin nt_1 - \sin nt_2| = |2\sin\frac{n(t_1 - t_2)}{2} \cdot \cos\frac{n(t_1 + t_2)}{2}| =$$

$$= (\sin\xi \approx \xi, |\xi| < \delta) = 2 \cdot \frac{n|t_1 - t_2|}{2} \cdot |\cos\frac{n(t_1 - t_2)}{2}| \le n \cdot \delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon/n.$$

Так как δ зависит не только от ε, но и от n, это говорит о том, что множество М не является равностепенно непрерывным.

Ответ: М не является предкомпактным множеством.

7) Определить, является ли отображение $A : X \to Y$ сжимающим, если является, то найти неподвижную точку.

$$X = Y = C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 \sin \pi t \cdot \cos \pi s \cdot x(s) ds.$$

Решение.

7.1. Проверим, является ли отображение А сжимающим.

$$\forall t \in [0;1]: \left|\int_0^1 \sin \pi t \cdot \cos \pi s \cdot x(s)ds - \int_0^1 \sin \pi t \cdot \cos \pi s \cdot y(s)ds\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \sin \pi t \cdot \cos \pi s \cdot (x(s) - y(s))ds\right| \le \int_0^1 |\sin \pi t| \cdot |\cos \pi s| \cdot |\, x(s) - y(s)\,|\, ds \le$$

$$\le \sin \pi t \cdot \int_0^1 |\cos \pi s| \cdot d(x,y) \cdot ds = \sin \pi t \cdot \int_0^1 |\cos \pi s\,| ds \cdot d(x,y) = \frac{2}{\pi} \cdot \sin \pi t \cdot d(x,y).$$

Переходя к sup по $t \in [0;1]$, получим

$$d(Ax, Ay) \le \frac{2}{\pi} \cdot \sup_{t \in [0;1]} |\sin \pi t\,| \cdot d(x,y) \Rightarrow d(Ax, Ay) \le \frac{2}{\pi} \cdot d(x,y);\ \alpha = \frac{2}{\pi} < 1.$$

Таким образом, отображение А является сжимающим.

7.2. Найдем неподвижную точку.

$x_n = Ax_{n-1};\ \ x_0 \in X,$

$x_0(t)$ выбирается произвольно, поэтому $x_0(t) = 1 \Rightarrow$

$$(Ax_0)(t) = \int_0^1 \sin \pi t \cdot \cos \pi s \cdot 1 ds = \sin \pi t \cdot \int_0^1 \cos \pi s\, ds = 0 \Rightarrow x_1 = Ax_0 = \theta \Rightarrow$$

$x_n = Ax_{n-1} = \theta,$ так как оператор A линейный$(A\theta_x = \theta_Y).$

Таким образом, неподвижная точка $x_н = \theta$.

3.4.6. Доказать утверждение.

1) Пусть <X, d> – м.п. Доказать, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Доказательство.

$x_n \to x$ $\Leftarrow$(опр. сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $d(x_n, x) \to 0$ $(n \to \infty)$ =(3 аксиомы метрики и сумма б/м есть б/м)$\Rightarrow$ $0 \le d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x_m, x) \to 0$ $(n,m \to \infty)$ =(лемма о зажатой последовательности)$\Rightarrow$ $d(x_n, x_m) \to 0$ $(n,m \to \infty)$ $\Leftarrow$(опр. фундаментальной последовательности)$\Rightarrow$ $\{x_n\}$ фундаментальна.

2) Доказать критерий замкнутости множества.

<X, d> $\supseteq$ Y – замкнуто $\Leftrightarrow$ Y содержит все свои точки прикосновения, т.е. $Y \ni x_k \to x \Rightarrow x \in Y$.

Доказательство. X $\supseteq$ Y – замкнуто $\Leftarrow$(теорема из т.п.)$\Rightarrow$ Y = clY $\Leftarrow$($Y \subseteq clY$ $\forall Y$ и опр. = м.)$\Rightarrow$ $clY \subseteq Y$ $\Leftarrow$(опр. $\subseteq$)$\Rightarrow$ $(x \in clY \Rightarrow x \in Y)$ $\Leftarrow$(критерий т. прикосновения)$\Rightarrow$ $(Y \ni x_k \to x \Rightarrow x \in Y)$.

3.5. Задачи для самостоятельной работы

Пусть <X, d> – метрическое пространство. Доказать утверждения.

1) Сходящаяся последовательность ограничена.
2) Критерий внутренней точки.
3) Критерий точки прикосновения.
4) Критерий граничной точки.
5) Сходящаяся последовательность не может сходиться более чем к одной точке.
6) Критерий замкнутости множества.
7) Композиция непрерывных отображений непрерывна.
8) $<X,d_X>$ – м.п. $\Rightarrow$ функция $d_X(.,y)$ непрерывна $\forall y\in X$; аналогично $d_X(x,.)$ непрерывна $\forall x\in X$.
9) Шар $B_{\theta,R}$ в метрическом пространстве $C^1[a,b]$ является предкомпактным подмножеством в н.п. $C[a,b]$.
10) Пусть функция $k(t,s):[0,1]^2\to\mathbf{R}$ непрерывна, тогда линейный оператор

$$(Ax)(t)=\mu\int_0^1 k(t,s)x(s)ds : C[0,1]\to C[0,1]$$

является сжимающим отображением при достаточно малом $|\mu|$.

11) Критерий предельной точки.
12) Шары в м.п. образуют базис окрестностей.
13) Тождественное отображение непрерывно.

3.6. Варианты заданий контрольной работы

ВАРИАНТ № 1	
1	Проверить, является ли предложенная функция $d(x,y)=\int\limits_0^1 \chi_{[0;1]}(t)\cdot \sup\limits_{t\in[0,1]}\lvert x(t)-y(t)\rvert dt$ метрикой в пространстве $X=L_1[0,2]$.
2	Пусть $Y\subseteq \langle R,d\rangle$. Проверить, является ли множество $Y=f^{-1}[8,\ 35],\quad где\ \ f(x)=35-2x-x^2$, открытым, замкнутым, ограниченным, вполне ограниченным, предкомпактным, компактным, сепарабельным.
3	Пусть Y – множество из условий задачи 2, x_0 – заданная точка. Ответить на вопросы: является ли точка x_0 по отношению к Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения? 3.1. $x_0 = 1$. 3.2. $x_0 = -1$.
4	Даны две функции x1, x2. В каком из пространств C[0, b], L1[0, b], L2[0, b] расстояние $d(x_1, x_2)$ является наименьшим? наибольшим? b = 3, x_1(t) =sin πt +$\chi_{[0,2]}$(t), x_2(t) = sin πt.
5	Определить, является ли оператор $A: X\to Y$ непрерывным. $X=Y=C[0,1],\ \ (Ax)(t)=\int\limits_0^1 t^2 s^4 x(s)ds$.
6	Определить с помощью критерия Арцела, является ли множество M в пространстве C[0, 1] предкомпактным, если $M=\{x_n(t)=\sin(nt), n\in N\cap[0,10]\}$.
7	Определить, является ли отображение $A: X\to Y$ сжимающим, если да – найти неподвижную точку, $X=Y=C[0,1],\ \ (Ax)(t)=\int\limits_0^1 t^2 s^4 x(s)ds$.

Ответы к варианту 1:

1) не является метрикой;

2) множество Y=[-7; -2]U[0; 5], Y – множество замкнутое, ограниченное, вполне ограниченное, компактное, сепарабельное.

3) x_0=0 – точка граничная, предельная и точка прикосновения;

x_0=-1 – внешняя точка;

4) наибольшее расстояние в L_1[0;3]; наименьшее в C[0;3];

5) A-непрерывный оператор;

6) множество M предкомпактно;

7) отображение сжимающее с μ=0,5; неподвижная точка $x_0=\theta$.

ВАРИАНТ №2	
1	Проверить, является ли предложенная функция $d(x,y)=\int_{-1}^{1}\lvert 4x(t)-y(t)\rvert dt$ метрикой в пространстве $X=C[-1,1]$.
2	Пусть $Y\subseteq\langle R,d\rangle$. Проверить, является ли множество $Y=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[-1,\ \frac{n+1}{n}\right)$ открытым, замкнутым, ограниченным, вполне ограниченным, предкомпактным, компактным, сепарабельным.
3	Пусть Y – множество из условий задачи 2, x_0 – заданная точка. Ответить на вопросы: является ли точка x_0 по отношению к Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения? 3.1. $x_0 = 1$. 3.2. $x_0 = -0,5$.
4	Даны две функции x1, x2. В каком из пространств C[0, b], L_1[0, b], L_2[0, b] расстояние $d(x_1, x_2)$ является наименьшим? наибольшим? b = 3, $x_1(t)=\ln(t+1)+t^3$, $x_2(t)=\ln(t+1)$.
5	Определить, является ли оператор $A: X\to Y$ непрерывным. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\int_0^1 t^3\sqrt{s}\ x(s)ds.$
6	Определить с помощью критерия Арцела, является ли множество M в пространстве C[0, 1] предкомпактным, если $M=\{x_\alpha(t)=(t+\alpha)^2,\ n\in N\}$.
7	Определить, является ли отображение $A: X\to Y$ сжимающим, если да – найти неподвижную точку. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\int_0^1 t^4 s^2 x(s)ds.$

ВАРИАНТ №3	
1	Проверить, является ли предложенная функция $d(x,y)=\sup\limits_{t\in[0,\,2]}\lvert 2\cdot x(t)-3\cdot y(t)\rvert$ метрикой в пространстве $X=C[0;\ 2]$.
2	Пусть $Y\subseteq\langle R,d\rangle$. Проверить, является ли множество Y – множество иррациональных чисел отрезка [0, 1] открытым, замкнутым, ограниченным, вполне ограниченным, предкомпактным, компактным, сепарабельным.
3	Пусть Y – множество из условий задачи 2, x_0 – заданная точка. Ответить на вопросы: является ли точка x_0 по отношению к Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения? 3.1. $x_0 = 1$. 3.2. $x_0 = \sin 2$.
4	Даны две функции x1, x2. В каком из пространств C[0, b], L1[0, b], L2[0, b] расстояние $d(x_1, x_2)$ является наименьшим? Наибольшим? $b = 2$, $x_1(t) = t^4 + e^t$, $x_2(t) = t^4$.
5	Определить, является ли оператор $A: X\to Y$ непрерывным. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\int\limits_0^1 t^4(s+5)x(s)ds.$
6	Определить с помощью критерия Арцела, является ли множество M в пространстве C[0, 1] предкомпактным, если $M=\{x_n(t)=\cos(t+n),\ n\in N\}$.
7	Определить, является ли отображение $A: X\to Y$ сжимающим, если да – найти неподвижную точку. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\frac{3}{4}t^4x(0{,}5).$

ВАРИАНТ № 4	
1	Проверить, является ли предложенная функция $d(x,y)=\lvert x(0)-y(0)\rvert$ метрикой в пространстве $X=C[0;\ 1]$.
2	Пусть $Y \subseteq \langle R,d \rangle$. Проверить, является ли множество $Y=([-1,1]\cap Q)\cup\{n^2+1\}_{n=1}^{\infty}$ открытым, замкнутым, ограниченным, вполне ограниченным, предкомпактным, компактным, сепарабельным.
3	Пусть Y – множество из условий задачи 2, x_0 – заданная точка. Ответить на вопросы: является ли точка x_0 по отношению к Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения? 3.1. $x_0 = 0$. 3.2. $x_0 = 2$.
4	Даны две функции x1, x2. В каком из пространств C[0, b], L_1[0, b], L_2[0, b] расстояние $d(x_1, x_2)$ является наименьшим? Наибольшим? $b = 2$, $x_1(t) = \sin t + t^2$, $x_2(t) = \sin t$.
5	Определить, является ли оператор $A: X \to Y$ непрерывным. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\frac{3}{4}t^4\cdot x(0).$
6	Определить с помощью критерия Арцела, является ли множество M в пространстве C[0, 1] предкомпактным, если $M=\{x_\alpha(t)=e^{-\alpha\cdot t},\ \alpha\in R\}$.
7	Определить, является ли отображение $A: X \to Y$ сжимающим, если да – найти неподвижную точку. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\int_0^1 t^7 s^2 x(s)ds.$

ВАРИАНТ № 5	
1	Проверить, является ли предложенная функция $d(x,y)=\sup\limits_{k=1,10}\lvert x_k-y_k\rvert$ метрикой в пространстве $X=\ell_\infty$.
2	Пусть $Y\subseteq\langle R,d\rangle$. Проверить, является ли множество $Y=(3,4)\cup Q$, где Q – множество рациональных чисел отрезка [0, 2], открытым, замкнутым, ограниченным, вполне ограниченным, предкомпактным, компактным, сепарабельным.
3	Пусть Y – множество из условий задачи 2, x_0 – заданная точка. Ответить на вопросы: является ли точка x_0 по отношению к Y внутренней? внешней? граничной? предельной? точкой прикосновения? 3.1. x_0 = 0,5. 3.2. x_0 = e.
4	Даны две функции x1, x2. В каком из пространств C[0, b], L1[0, b], L2[0, b] расстояние $d(x_1, x_2)$ является наименьшим? Наибольшим? b=3, $x_1(t) = t^{10} – t$, $x_2(t) = – t$.
5	Определить, является ли оператор $A:X\to Y$ непрерывным. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=(2t^2-t)\cdot x(t).$
6	Определить с помощью критерия Арцела, является ли множество M в пространстве C[0, 1] предкомпактным, если $M=\{x_\alpha(t)=\sin(\alpha\cdot t),\ \alpha\in[2,\ 4]\}$.
7	Определить, является ли отображение $A:X\to Y$ сжимающим, если да – найти неподвижную точку. $X=Y=C[0,1],\ (Ax)(t)=\int\limits_0^1 t^5\cdot s\cdot x(s)ds.$

4. НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ЛИНЕЙНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

4.1. Понятия и определения

Базовые понятия раздела представлены в таблице:

Понятие, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
Категория N нормированных пространств (н.п.) и линейных непрерывных отображений (л.н.о.), N	Категория N, для которой: ObN состоит из всех н.п., N(X,Y) состоит из всех л.н.о. $A:X\to Y$, $ComN = ComS\,\vert_{N(X,Y)\times N(Y,Z)}$ (т.е. композиции и единицы в N и S совпадают)
$X \in ObL$, нормированное пространство (н.п.), X	Упорядоченная пара $<X, \Vert\,.\,\Vert>$, где $\Vert\,.\,\Vert$ – норма в л.п. X
Норма, $\Vert\,.\,\Vert$	Функция $\Vert\,.\,\Vert: X \to [0, +\infty)\ \vert\ \forall\, x,y\in X,\ \lambda \in R\ (C)$ $1^\circ\ \Vert x \Vert = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ $2^\circ\ \Vert \lambda x \Vert = \vert\lambda\vert\ \Vert x \Vert$ $3^\circ\ \Vert x + y \Vert \le \Vert x \Vert + \Vert y \Vert$
Метрика в н.п.	Метрика $d(x,y) = \Vert x - y \Vert$
Банахово пространство (б.п.)	Полное н.п.
Локально компактное н.п.	Н.п.$\vert\ \forall$ ограниченное подмножество в X предкомпактно
Непрерывное л.о. в н.п., $A \in N(X,Y)$	Отображение $A:X\to Y$ с 2 признаками: 1° A непрерывно, 2° A линейно.
Линейный ограниченный оператор (л.о.о.) $A:X\to Y$	Отображение $A:X\to Y$ с 2 признаками: 1° Q ограниченно $\Rightarrow$ A(Q) ограниченно, 2° A линейно.
Норма н.л.о.	Норма $\Vert A \Vert$ = наименьший элемент числового м. $\{M\in R\,\vert\ \Vert Ax\Vert \le M\Vert x\Vert\ \forall x\in X\}$
Линейный непрерывный функционал (л.н.ф.)	Непрерывный линейный оператор $F:X\to P$, где P – поле вещественных или комплексных чисел
Пространство линейных непрерывных операторов (л.н.о.), N(X,Y)	Нормированное п. $<N(X,Y), \Vert\,.\,\Vert>$, где $\Vert\,.\,\Vert$ – норма л.н.о.
Пространство X^*, сопряженное к н.п. X	Нормированное пространство л.н.ф., определенных на X, т.е. $X^* = N(X, P)$
Подпространство (п/п) в н.п. X	Линейное п/п в X, с той же нормой $\Vert\,.\,\Vert_X$
$<X,\Vert.\Vert_X>,<Y,\Vert.\Vert_Y>\in ObN$, компактный оператор, $K:X\to Y$	Оператор $K:X\to Y\,\vert\ X\supset Q$ – ограничено $\Rightarrow Y\supset A(Q)$ – предкомпактно
$<X, \Vert\,.\,\Vert_X> \in ObN$, ряд в н.п X, $\sum x_n$	Упорядоченная пара $<x_n, s_n>$ последовательностей в н.п.X $\vert\ s_n = x_1 + x_2 + .. + x_n\ \forall n\in N$

Понятие, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
Сходящийся ряд в н.п.	Ряд $\sum x_n$ $\vert$ $\{s_n\}$ сходится
Абсолютно сходящийся ряд в н.п.	Ряд $\sum x_n$ $\vert$ $\sum\|x_n\|_X$ сходится
Регулярное значение оператора A	Комплексное число λ такое, что $\lambda I\text{-}A$ – изоморфизм в категории N
Резольвентное множество оператора A, $\rho(A)$	Множество регулярных значений
Резольвента л.н.о., $R_\lambda(A)$	Л.н.о. $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} \in N(X)$
Спектр A, $\sigma(A)$	М. $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$
Отношение эквивалентности норм: $\|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$ $\vert$ $\exists\, c_1, c_2 > 0$ $\vert$ $\|\cdot\|_\alpha \le c_1\|\cdot\|_\beta$ & $\|\cdot\|_\beta \le c_2\|\cdot\|_\alpha$	

4.2. Основные утверждения и теоремы раздела

УТВ Н-1. *Неравенства Гельдера и Минковского.*
$(p,q > 1\ \&\ 1/p + 1/q = 1 \Leftrightarrow p + q = pq \Leftrightarrow p = (p-1)q) \Rightarrow \|xy\|_1 \le \|x\|_p\, \|y\|_q$.
$(p\ge 1) \Rightarrow \|x + y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$.
УТВ Н-2. *Согласованность линейной и метрической структуры в н.п.*
Алгебраические операции в н.п. непрерывны:
$(x_n \to x,\ y_n \to y,\ \lambda_n \to \lambda) \Rightarrow x_n + y_n \to x + y\ \&\ \lambda_n x_n \to \lambda x$.
Норма непрерывна: $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$. *Шар* $B_{x,r} = x + rB_{\theta,1}$.
УТВ Н-3. *Критерии банаховости нормированного пространства.*
$<X, \|\cdot\|_X>$ банахово $\Leftrightarrow$ (X – замкнутое п/п в б.п. $<Y, \|\cdot\|_X>$) $\Leftrightarrow$
($\forall$ абсолютно сходящийся ряд в X сходится).
УТВ Н-4. $<B(T), \|\cdot\|_{sup}>$ – банахово п.
Следствия:
Н-4.1. l_∞ – б.п.;
Н-4.2. T – компакт $\Rightarrow$ $<C(T), \|\cdot\|_{sup}>$ – б.п.;
Н-4.3. C[a, b] – сепарабельное, б/м б.п.
УТВ Н-5. *Лемма Рисса о почти перпендикуляре.*
(X н.п., $X \ne Y$ – замкнутое п/п в X, $\varepsilon>0$)$\Rightarrow$
$(\exists p\in X \mid \|p\| = 1\ \&\ dist(p,Y) \ge 1 - \varepsilon)$.
УТВ Н-6. Свойства к/м н.п.
- в к/м н.п. $\forall$ две нормы эквивалентны;
- сходимость по любой норме – покоординатная сходимость (в любом базисе);
- к/м н.п. полно и сепарабельно;
- к/м п/п в н.п. всегда замкнуто;
- критерий конечномерности – локальная компактность;
- любой л.о. в к/м н.п. непрерывен;
– к/м н.п. одинаковой размерности изоморфны в категории **N**.
УТВ Н-7. Свойства N(X, Y).
УТВ Н-7.1. Критерии непрерывности л.о. $A:<X, \|\cdot\|X> \to <Y, \|\cdot\|Y>$:

(A непрерывен)$\Leftrightarrow$(A непрерывен в т. θ)$\Leftrightarrow$(A ограничен)$\Leftrightarrow$
($\exists M \geq 0 \mid \| Ax \|_Y \leq M \| x \|_X \ \forall x \in X$)

Н-7.2. *Формулы для вычисления нормы л.н.о.* $A \in \mathbf{N}(X,Y)$:

$$\|A\| = \sup\{\| Ax \|_Y : \| x \|_X \leq 1\} = \sup\{\| Ax \|_Y : \| x \|_X = 1\} = \sup\left\{\frac{\| Ax \|_Y}{\| x \|}, x \neq \theta\right\}.$$

Следствие. $\mathbf{N}(X,Y) \in \mathrm{Ob}\mathbf{N}$.

УТВ Н-7.3. Y – б.п. $\Rightarrow$ N(X,Y) – б.п.

УТВ Н-7.4. Теорема о продолжении по непрерывности.
(X – н.п., Y – б.п., D_A – н.п/п в X, $A: D_A \subset X \to Y$ – л.н.о.) $\Rightarrow$ ($\exists$ единственный л.н.о. $\bar{A}$: $\bar{D}_A \subset X \to Y$, продолжающий A на замыкание $\bar{D}_A$ (т.е. $\bar{A} \mid D_A = A$) &
$\| \bar{A} \| = \| A \|$).

УТВ Н-7.5. *Теорема Банаха-Штейнгауза* – критерий ограниченности в N(X,Y).
($\mathbf{N}$(X – б.п., Y) $\supset$ M – ограничено) $\Leftrightarrow$
($\forall x \in X$ числовое м. $\{\| Ax \|_Y : A \in M\}$ ограничено).

УТВ Н-7.6. Теорема об открытом отображении.
Пусть $A \in \mathbf{N}$(X – б.п., Y – б.п.); тогда (A – открытое отображение (т.е. образ $\forall$ открытого м. открыт)) $\Leftrightarrow$ A сюръективен.

УТВ Н-7.7. *Теорема Банаха об обратном операторе.*
($\mathbf{N}$(X – б.п., Y – б.п.) э A – биективен) $\Leftrightarrow$ ($A^{-1} \in \mathbf{N}$(Y – б.п., X – б.п.), т.е. A – изоморфизм в $\mathbf{N}$).

Следствия:

УТВ Н-7.7.1. *Об эквивалентности норм.*
($\langle X, \|\cdot\|_\alpha\rangle$ – б.п., $\langle X, \|\cdot\|_\beta\rangle$ – б.п. & $\exists\, c>0 \mid \|\cdot\|_\alpha \leq c\|\cdot\|_\beta$) $\Rightarrow \|\cdot\|_\alpha \sim \|\cdot\|_\beta$.

УТВ Н-7.7.2. *Теорема о замкнутом графике.* (X, Y – б.п., $A: X \to Y$ – л.о.) $\Rightarrow$ (A непрерывен $\Leftrightarrow$ график $Gr(A) = \{\langle x, Ax\rangle : x \in X\}$ – замкнутое л. п/п в б.п. $\langle X \times Y, \|\langle x,y\rangle\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y\rangle$).

УТВ Н-8. *Свойства произведения л.н.о.*

УТВ Н-8.1. A, B – л.н.о. $\Rightarrow$ BA – л.н.о. & $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.

УТВ Н-8.2. $A \in \mathbf{N}(X) \Rightarrow A^n \in \mathbf{N}(X)\ \forall\, n \in \mathbf{N}$ & $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

УТВ Н-8.3. Умножение л.н.о. *непрерывно*:
($A_n \to A$ & $B_n \to B$) $\Rightarrow B_n A_n \to BA$.

УТВ Н-8.4. *Дистрибутивный закон для операторных рядов:*
(A_k, B, $\sum A_k \in \mathbf{N}(X)$) $\Rightarrow B\sum A_k = \sum BA_k$.

УТВ Н-9. *Теорема о ряде Неймана.*
($A \in \mathbf{N}$(X – б.п.) & $\|A\|<1$) $\Rightarrow$ (ряд Неймана $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1} \in \mathbf{N}(X)$ &
$\|(I-A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-\|A\|}$).

Следствия:

Н-9.1. *Ряд Неймана для резольвенты.*
($A \in \mathbf{N}$(X – б.п.) & $\|A\| < |\lambda|$) $\Rightarrow$ (ряд Неймана $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{\lambda^{k+1}} = (\lambda I-A)^{-1} \in \mathbf{N}(X)$ &
$\|(\lambda I-A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|}$).

Н-9.2. A∈**N**(X – б.п.) ⇒ спектр σ(A) ограничен: σ(A) ⊂ $\overline{B}_{\theta,\|A\|}$ ⊂ **C**.

УТВ Н-10. k(t,s):$[a,b]^2$ → **P** непрерывна ⇒ интегральный оператор

$(Kx)(t) = \int\limits_a^b k(t,s)x(s)ds, t \in [a,b]$ компактен в C[a,b].

Н-10. Формулы для вычисления норм.

Формулы для вычисления норм векторов в нормированных пространствах указаны в таблице далее.

Пространство	Формула для вычисления нормы
X=C(T)	$\| x \|_{\sup} = \sup\limits_{x \in T} \| x(t) \|$
$X = C^k(T)$	$\| x \|_{\sup} = \sum\limits_{n=0}^{k} \sup\limits_{t \in T} \| x^{(n)}(t) \|$
$X = L_1(T)$	$\| x \|_1 = \int\limits_T \| x(t) \| dt$
$X = L_p(T)$	$\| x \|_p = \left(\int\limits_T \| x(t) \|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$
$X = \ell_1$	$\| x \|_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x_k \|$
$X = \ell_p$	$\| x \|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| x_k \|^p \right)^{\frac{1}{p}}$
$X = m$	$\| x \|_{\sup} = \sup\limits_{k=1,\infty} \| x_k \|$

4.3. Типовые задачи по разделу

1) Вычислить норму вектора x ∈ <X, ‖ . ‖$_X$>.

2) Доказать, что <X, ‖ . ‖$_X$> ∈ **ObN**.

3) Исследовать последовательность $\{x_n\}$ ⊂ <X, ‖ . ‖$_X$> на сходимость.

4) Доказать, что норминованное пространство <X, ‖ . ‖$_X$> является банаховым.

5) Доказать непрерывность линейного оператора в нормированном пространстве.

6) Оценить (вычислить) норму линейного непрерывного оператора.

7) Доказать непрерывность и оценить (вычислить) норму линейного непрерывного функционала.

8) Найти в простейших случаях спектр, резольвентное множество, резольвенту линейного непрерывного оператора.

9) При $|\lambda| > \|A\|$ разложить резольвенту в ряд Неймана.

10) Исследовать методами функционального анализа операторное уравнение.

10.1) Исследовать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$(\lambda I - K)x = y$ в нормированном пространстве $<X, \|\,.\,\|_X>$.

4.4. Примеры решения задач

4.4.1. Вычислить норму вектора в нормированном пространстве

4.4.1.1. Вычислить норму вектора $x \in <C^2[0, 1], \|\,.\,\|_X>$, $x(t) = t^3$.

Решение.

$\|x\|_X = \|x\|_{sup} + \|x'\|_{sup} + \|x''\|_{sup} = \sup\{|t^3| : t\in[0, 1]\} + \sup\{|3t^2| : t\in[0, 1]\} + \sup\{|6t| : t\in[0, 1]\}$ $= 1 + 3 + 6 = 10.$

4.4.1.2. Вычислить норму вектора $x \in < L_2[0;1], \|\,.\,\|_X>$, $x(t) = t^3$.

Решение.

$$\| x \|_X = \sqrt{\int_0^1 | t^3 |^2 \, dt} = \sqrt{\int_0^1 t^6 dt} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

4.4.1.3. Вычислить норму вектора $x \in < L_4[-1;2], \|\,.\,\|_X>$, $x(t) = t^3$.

Решение.

$$\| x \|_X = \sqrt[4]{\int_{-1}^{2} | t^3 |^4 dt} = \sqrt[4]{\int_{-1}^{2} t^{12} dt} = \sqrt[4]{\left.\frac{t^{13}}{13}\right|_{-1}^{2}} = \sqrt[4]{\frac{2^{13}+1}{13}}.$$

4.4.1.4. Вычислить норму вектора $x \in < \ell_3, \|\,.\,\|_X>$, $x = \left\{ \frac{(i)^n}{2^{n-1}} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Решение.

$$\| x \|_3 = \sqrt[3]{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{i^n}{2^{n-1}} \right|^3} = \sqrt[3]{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n-3}}} = \sqrt[3]{8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1-\frac{1}{8}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{7}}$$

4.4.2. Доказать, что множество функций, непрерывных на отрезке [a; b] с sup-нормой, является нормированным пространством: $\langle C[a, b], \|\,.\,\|_{sup}\rangle \in$ **ObN**.

Решение.

1) C[a, b] – линейное пространство относительно поточечных операций сложения и умножения на числа.

2) $\|\cdot\|_{sup}$ – норма?

Проверим аксиомы нормы:

а) $\| x \| \geq 0;\ \| x \| = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$:

$\| x \| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{t \in T} | x | = 0 \Leftrightarrow \forall t \in T\ | x(t) | = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$;

б) $\| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$ – проверить самостоятельно;

в) неравенство треугольника

$\forall t \in [a, b]$ $|(x + y)(t)|$ =(сложение поточечное)= $|x(t) + y(t)|$ ≤(неравенство треугольника для модуля)≤ $|x(t)|$ + $|y(t)|$ ≤(определение sup)≤ $\|x\|_{sup} + \|y\|_{sup}$ =(переходим в полученном неравенстве к sup)⇒ $\|x + y\|_{sup} \leq \|x\|_{sup} + \|y\|_{sup}$.

4.4.3. Исследовать на сходимость последовательность.

$\{x_n\} = \{t^n\} \subset \langle L_1[0, 1], \|\,.\,\|_1\rangle$ (к θ).

Решение.

Рассмотрим норму разности n-го члена последовательности и предполагаемого предела:

$\|x_n - \theta\|_1 = \|x_n\|_1 = \int\limits_0^1 \left|t^n\right| dt = \left.\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \to 0$ ($n \to \infty$) =(определение сходящейся последовательности)⇒ $x_n \to \theta$ в $\langle L_1[0, 1], \|\,.\,\|_1\rangle$.

4.4.4. Доказать, что $\langle X, \|\,.\,\|_X\rangle = \langle C[a, b], \|\,.\,\|_{sup}\rangle$ – б.п.

Решение.

C[a, b] – л.п/п в B[a, b] – б.п.(УТВ Н-4) =(критерий банаховости УТВ Н-3)⇒ (C[a, b] – б.п. ⇔ C[a, b] – *замкнутое* л.п/п в б.п. B[a, b]).

Осталось показать замкнутость C[a,b].

Пусть $C[a,b] \ni x_n \to x$ ⇐(определение сходимости)⇒ $\|x_n - x\|_{sup} \to 0$, т.е. последовательность x_n *равномерно* на [a, b] сходится к x =(теорема из анализа)⇒ предельная функция x непрерывна, т.е. $x \in C[a,b]$.

4.4.5. Доказать действие оператора $Ax(t) = \dfrac{dx}{dt} : C^1[a,b] \to C[a,b]$.

Решение.

$x \in C^1[a,b]$ =(определение $C^1[a,b]$)$\Rightarrow$ $x'(t) = \dfrac{dx}{dt} \in C[a,b]$ =(определение оператора A)$\Rightarrow$ $Ax = x' \in C[a,b]$.

4.4.6. Доказать непрерывность л.о. $A_a x(t) = a(t) \cdot x(t)$ в н.п. $C[a,b]$ ($a \in C[a,b]$).

Решение.

$\forall t \in [a,b]$ $|(A_a x)(t)| = |a(t)|\ |x(t)|$ $\le$(определение sup)$\le$ $||a||_{sup}\ ||x||_{sup}$ $\forall x \in C[a,b]$ =(переход к sup)$\Rightarrow$$\sup\{ |(A_a x)(t)| : t \in [a,b]\} = ||A_a x||_{sup} \le ||a||_{sup}\ ||x||_{sup}$ $\forall x \in C[a,b]$ $\Leftarrow$(критерий непрерыности л.о. УТВ Н-7.1)$\Rightarrow$ A_a непрерывен.

4.4.7. Оценить (вычислить) норму л.н.о. A_a.

Решение.

Выше получено неравенство $||A_a x||_{sup} \le ||a||_{sup}\ ||x||_{sup}$ $\forall x \in C[a,b]$ =(определение нормы оператора)$\Rightarrow$ $\mathbf{||A_a|| \le ||a||_{sup}}$. В неравенство $||A_a x||_{sup} \le ||A_a||\ ||x||_{sup}$ ($||A_a||$ – наименьшая константа, для которой это неравенство верно) подставим $x_0(t) \equiv 1$ ($||x_0||_{sup} = 1$):

$||A_a x_0||_{sup} = ||a x_0||_{sup} = ||a||_{sup} \le ||A_a||\ 1 \Rightarrow \mathbf{||a||_{sup} \le ||A_a||}$ =(антисимметричность $\le$)$\Rightarrow$

$||A_a|| = ||a||_{sup}$.

4.4.8. Доказать непрерывность и оценить (вычислить) норму линейного непрерывного функционала $Fx = x(0) : C[0,1] \to \mathbf{R}$.

Решение.

F – линейный функционал (см. модуль Л).

$|Fx| = |x(0)| \le \sup\{ |(x)(t)| : t \in [0,1]\} = ||x||_{sup}$ $\forall x \in C[0,1]$ $\Leftarrow$(критерий непрерыности л.о. УТВ Н-7.1)$\Rightarrow$ F непрерывен ($\Rightarrow F \in (C[0,1])^*$) и в силу определения нормы линеного оператора $||F|| \le 1$. В неравенство $|Fx| \le ||F||\ ||x||_{sup}$ ($||F||$ – наименьшая константа, для которой это неравенство верно) подставим $x_0(t) \equiv 1$ ($||x_0||_{sup} = 1$): $|Fx_0| = x_0(0) = 1 \le ||F|| \Rightarrow \mathbf{1 \le ||F||}$ =(антисимметричность $\le$)$\Rightarrow$ $||F|| = 1$.

4.4.9. Найти в простейших случаях спектр, резольвентное м., резольвенту линейного непрерывного оператора: $X = C(T)$, $A_a \in \mathbf{N}(X)$, $a \in X$.

Решение.

Рассмотрим уравнение $\lambda x - A_a x = y$ в пространстве C(T) $\Leftrightarrow \lambda x - ax = y \Leftrightarrow (\lambda - a)x = y \Leftrightarrow x = y / (\lambda - a) = (\lambda I - A_a)^{-1}y = R_\lambda(A_a)y$ в том и только в том случае, когда $\lambda \notin a(T)$, т.е. когда значение $\lambda - a(t) \neq 0$ ни при каком $t \in T \Rightarrow \sigma(A_a) = a(T)$, $\rho(A_a) = \mathbf{C} \setminus \sigma(A_a)$, $R_\lambda(A_a) = A_{1/(\lambda - a)}$.

4.4.10. При $|\lambda| > ||K||$ разложить резольвенту в ряд Неймана.

X=C[0,1], $(Kx)(t) = \int_0^1 tsx(s)ds : X \to X$ – интегральный оператор.

Решение.

Для представления ряда Неймана вычислим степени оператора K.

$\mathbf{(K^2x)(t)}$ = K[K(x)](t) = $\int_0^1 ts(Kx)(s)ds = \int_0^1 ts(\int_0^1 spx(p)dp)ds$ =(меняем порядок интегрирования)= $\int_0^1 tpx(p)dp\int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}\int_0^1 tpx(p)dp$ = $\frac{1}{3}$(Kx)(t) $\forall t \in [0,1]$ =(равенство поточечное)$\Rightarrow K^2 = \frac{1}{3}K \Rightarrow K^3$ $= KK^2 = K\frac{1}{3}K = \frac{1}{3}K^2 = \frac{1}{3^2}K$ =(по индукции)

$\Rightarrow K^n = \frac{1}{3^{n-1}}K$.

При $|\lambda| > ||K|| = \left\|\int_0^1 tsds\right\|_{\sup} = ||\frac{t}{2}||_{\sup} = \frac{1}{2}$ резольвента разлагается в ряд Неймана: $(\lambda I - K)^{-1}$ = $\frac{1}{\lambda}I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K^k}{\lambda^{k+1}} = \frac{1}{\lambda}I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{K}{3^{k-1}\lambda^{k+1}} = \frac{1}{\lambda}I + \frac{1}{\lambda^2}K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3\lambda)^{k-1}} = \frac{1}{\lambda}I + \frac{1}{\lambda(\lambda - \frac{1}{3})}K.$ Заметим, что резольвента определена при $\lambda \notin \sigma(A)$.

4.4.11. Исследовать методами функционального анализа данное уравнение, например, интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода $(\lambda I - K)x = y$:

$$3x(t) - \int_0^1 ts^2x(s)ds = \chi_{[0,\,0.1]}(t), \quad t \in [0,1], \qquad (1)$$

в пространстве $X = L_4[0,1]$.

План исследования приведен ниже:

1) Доказать *действие* оператора $K{:}X \to X$.

2) Оценить *норму* $||K||$ и доказать *непрерывность* о. K.

3) Доказать *компактность* о. K.

4) Решая уравнение $(\lambda I - K)x = y$, найти *резольвентное м.* $\rho(K)$ и вычислить *резольвенту* $R_\lambda(K)$; найти *спектр* $\sigma(K)$.

5) *Решить* уравнение $(\lambda I - K)x = y$ при помощи резольвенты.

6) Разложить резольвенту в *ряд Неймана* при $|\lambda| > ||K||$.

7) Найти *приближенное решение* уравнения $(\lambda I - K)x = y$, взяв 3 первых члена разложения резольвенты в ряд Неймана.

Решение.

1) Доказать *действие* оператора $K:X\to X$.

Доказательство. $x\in X \Rightarrow Kx = ca$, где число $c = \int_0^1 s^2 x(s)ds$, $a(t) = t$, $t\in[0,1] \Rightarrow a\in X$, так как

$||a||_4 = 5^{-\frac{1}{4}} < \infty$ =(X – л.п.)$\Rightarrow$ $Kx = ca\in X$.

2) Оценить *норму* $||K||$ и доказать *непрерывность* о. K.

Доказательство. $||Kx||_4 = ||ca||_4 = |c|\,||a||_4 = \left|\int_0^1 s^2 x(s)ds\right| ||a||_4 \le \int_0^1 \left|s^2 x(s)\right| ds\, ||a||_4 = ||s^2x(s)||_1\, ||a||_4$

$\le$(неравенство Гельдера)$\le ||s^2||_{4/3}\, ||x||_4\, ||a||_4 = (\int_0^1 s^{\frac{8}{3}} ds)^{\frac{3}{4}} 5^{-\frac{1}{4}}\, ||x||_4 = 0{,}2524\, ||x||_4 \Rightarrow ||Kx||_4 \le 0{,}2524$

$||x||_4 \Rightarrow$ оператор K непрерывен & $||K|| \le 0{,}2524$.

3) Доказать *компактность* о. K.

Доказательство. $X \supset D$ – ограничено =(критерии непрерывности УТВ Н-7.1)$\Rightarrow$ K(D) – ограничено =(im K = Sp(a))$\Rightarrow$ K(D) ограничено и $K(D) \subset \text{im } K$ – конечномерное н.п. =(критерий локальной компактности н.п. УТВ Н-6)$\Rightarrow$ K(D) предкомпактно =(определение компактного оператора)$\Rightarrow$ K компактен.

4) Решая уравнение $(\lambda I - K)x = y$, найти *резольвентное м.* $\rho(K)$ и вычислить *резольвенту* $R_\lambda(K)$; найти *спектр* $\sigma(K)$.

Решим уравнение $\lambda x(t) - \int_0^1 ts^2 x(s)ds = y(t)$. (2)

При $\lambda = 0$ в левой части уравнения (2) стоит функция ct, поэтому уравнение (2) не может иметь решение при $y(t) \ne ct$, следовательно, $\lambda_0 = 0 \in \sigma(K)$. При $\lambda \ne 0$ $x(t) = \frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{1}{\lambda} tc$.

Умножим это равенство на t^2 и проинтегрируем по отрезку [0,1]: $c = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 t^2 y(t)dt + \frac{c}{4\lambda} \Leftrightarrow$

$c(1 - \frac{1}{4\lambda}) = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 s^2 y(s)ds \Leftrightarrow$ при $\lambda \ne \frac{1}{4}$ $c = \frac{1}{\lambda(1-\frac{1}{4\lambda})}\int_0^1 s^2 y(s)ds \Rightarrow$

$$x(t)=\tfrac{1}{\lambda}y(t)+\tfrac{1}{\lambda(\lambda-0.25)}\int_0^1 ts^2y(s)ds=\tfrac{1}{\lambda}y(t)+\tfrac{1}{\lambda(\lambda-0.25)}(Ky)(t)\quad \forall t\in[0,1]\ \Rightarrow\ x=\tfrac{1}{\lambda}y+\tfrac{1}{\lambda(\lambda-0.25)}Ky\ \ \forall y$$

$\Rightarrow$ $R_\lambda(K) = (\lambda I - K)^{-1}$ = $\tfrac{1}{\lambda}I+\tfrac{1}{\lambda(\lambda-0.25)}K$ Резольвентное м. $\rho(K) = \mathbf{C}\setminus\{0, 0.25\}$. Спектр $\sigma(K) = \{0, 0.25\}$.

5) Решить уравнение $(\lambda I - K)x = y$ при помощи резольвенты.

$$x(t)=\tfrac{1}{3}\chi_{[0,\,0.1]}(t)+\tfrac{1}{3(3-0.25)}t\int_0^{0.1}s^2ds=\tfrac{1}{3}\chi_{[0,\,0.1]}(t)+0.0000404t,\ t\in[0,1].$$

6) Разложить резольвенту в *ряд Неймана* при $|\lambda| > \|K\|$.

Находим степени $K^k=\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1}K,\ k=1,2,\ldots$ $\Rightarrow$ ряд Неймана:

$(\lambda I - K)^{-1}$ = $\tfrac{1}{\lambda}I+\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{K^k}{\lambda^{k+1}}=\tfrac{1}{\lambda}I+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1}\tfrac{K}{\lambda^{k+1}}=\tfrac{1}{\lambda}I+K\tfrac{1}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{1}{(4\lambda)^{k-1}}$ при $|\lambda| > 0.2524$.

7) Найти *приближенное решение* уравнения $(\lambda I - K)x = y$, взяв 3 первых члена разложения резольвенты в ряд Неймана.

Приближенное решение.

$$x(t)\approx \tfrac{1}{3}\chi_{[0,\,0.1]}(t)+\left(\tfrac{1}{9}+\tfrac{0.25}{27}\right)t\int_0^{0.1}s^2ds=\tfrac{1}{3}\chi_{[0,\,0.1]}(t)+0.0000401t,\ t\in[0,1].$$

4.4.12. Вычислить норму вектора.

Пусть $x(t)=t^3$. Вычислить норму вектора x в пространствах $C^2[0,1],\ L_2[0,2]$.

Решение.

1.1. $X=C^2[0,1]$;

$$\|x\|=\sup_{[0,1]}|x(t)|+\sup_{[0,1]}|x'(t)|+\sup_{[0,1]}|x''(t)|=$$

$$=\sup_{[0,1]}|t^3|+\sup_{[0,1]}|3t^2|+\sup_{[0,1]}|6t|=1+3+6=10;$$

1.2. $X=L_2[0,2]$; $\|x\|_2=\sqrt{\int_0^2|x(t)|^2\,dt}=\sqrt{\int_0^2|t^3|^2\,dt}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

4.4.13. Исследовать последовательность на сходимость.

$x_n(t)=t^n$. Сходится ли $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ к $x_0(t)\equiv 0$ в пространствах X = $C[0,\dfrac{2}{3}]$, $X=L_3[0,1]$?

Решение.

2.1. $X=C\left[0,\ \tfrac{2}{3}\right]$; $(x_n\to x_0, n\to\infty)\Leftrightarrow(\|x_n-x_0\|\to 0,\ n\to\infty)$

$$\|x_n-x_0\|=\sup_{[0;\frac{2}{3}]}|t^n-0|=\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\to 0,\ n\to\infty.$$

Вывод: сходится.

$2.2.\ X = L_3[0;2];\ (x_n \to x_0, n \to \infty) \Leftrightarrow (\| x_n - x_0 \| \to 0,\ n \to \infty)$

$\| x_n - x_0 \| = \int_0^2 | t^n - 0 | dt = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \not\to 0,\ n \to \infty.$

Вывод: не сходится.

4.4.14. Исследование свойств множества.

Задано множество X вещественных функций, определенных на [a, b], $\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$. Является ли $(X, \|\cdot\|)$ – банаховым пространством, если X – множество многочленов степени = 3?

Решение.

Для решения воспользуемся критерием банаховости УТВ._Н-3.

Выберем $Y = L_1[a,b]$ – б.п. с нормой $\| x \|_1 = \int_a^b | x(t) | dt$

$X \subset Y$ (все многочлены интегрируемы).

Проверим замкнутость X в Y:

выберем сходящуюся последовательность $\{x_n\} \subset X \Rightarrow$

$x_n(t)$ – многочлен 3-й степени: $x_n(t) = C_{0n} + C_{1n}t + C_{2n}t^2 + C_{3n}t^3;\ C_{3n} \neq 0.$

Пусть последовательность сходится:

$x_n(t) \to x_0(t), n \to \infty, \forall t \in [a,b]$ *в пр-ве* $Y : \| x_n - x_0 \| \to 0,\ n \to \infty \Rightarrow$

$x_0(t)$ тоже многочлен. $x_0(t) \in X$?

Сходимость многочленов эквивалентна сходимости коэффициентов у этих многочленов (это уже сходимость числовых последовательностей):

$x_n \to x_0 \Leftrightarrow \left(C_{0n} \to C_0;\ C_{1n} \to C_1; C_{2n} \to C_2; C_{3n} \to C_3 \text{ при } n \to \infty\right).$

Возможно два исхода:

– если $C_3 \neq 0 \Rightarrow x_0 \in X \Rightarrow X$ замкнуто в $Y \Rightarrow$

X – банахово пространство

– *если* $\exists\{C_{3n}\} : C_{3n} \to 0$, *то* x_0 – многочлен степени $< 3 \Rightarrow x_0 \notin X \Rightarrow$

X незамкнуто в $Y \Rightarrow X$ не является банаховым пространством.

Так как $\exists\{C_{3n}\} : C_{3n} = \dfrac{1}{n}$ *и* $C_{3n} \to 0$, то множество X не замкнуто в Y, а значит, *X не является банаховым пространством*.

4.4.15. Найти ядро, образ и норму оператора A

$$(Ax)(t) = \frac{t^2}{t^2+1} x(1) \text{ в пространстве } C[0,1].$$

Решение.

4.1. Ядро линейного оператора ker A.

$$\ker A = \{x \in C[0,1] : (Ax)(t) = 0\};$$

$$Ax = 0 \Rightarrow \frac{t^2}{t^2+1} \cdot x(1) = 0,\ \forall t \in [0,1] \Rightarrow x(1) = 0 \Rightarrow$$

$\ker(A) = \{x(t) : x(1) = 0\}$ – лин. п/пр.

4.2. Образ линейного оператора A.

$$im\,A = \{y \in C[0,1] : y(t) = (Ax)(t)\};$$

$$Ax = y \Rightarrow \frac{t^2}{t^2+1} \cdot x(1) = y(t),\ \forall t \in [0,1] \Rightarrow (\text{обозн. } x(1) = C);$$

$$y(t) = C \cdot \frac{t^2}{t^2+1},\ t \in [0,1] \Rightarrow im(A) = Sp\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right).$$

4.3. Норма линейного оператора A.

$$\exists M > 0 : \forall x \in X \quad \| Ax \| \le M \| x \| .$$

Оценим модуль $|(Ax)(t)| = \left|\frac{t^2}{t^2+1} x(1)\right| = \left|\frac{t^2}{t^2+1}\right| \cdot |x(1)| \le \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|\frac{t^2}{t^2+1}\right| \cdot |x(1)| = 0{,}5 \cdot |x(1)| \le$

$\le \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| = 0{,}5 \| x \|$.

Переходя к sup по t в левой части, получим

$\| Ax \| \le 0{,}5 \| x \| \Rightarrow \| A \| \le 0{,}5$ (*)

$$\forall x \in X \quad \| Ax \| \le 0{,}5 \cdot \| x \| .$$

Поскольку норма $\| A \|$ – наименьшая из констант ограниченности,

то $\| Ax \| \le \| A \| \cdot \| x \|$.

$\exists x_0 \in X : \| Ax_0 \| = 0{,}5 \wedge \| x_0 \| = 1 \Rightarrow x_0(t) \equiv 1,$ тогда

$\| Ax_0 \| \le \| A \| \cdot \| x_0 \| \Rightarrow 0{,}5 \le \| A \| \cdot 1 \Rightarrow \| A \| \ge 0{,}5$ (**)

Из (*) и (**) следует, что ||A||=0,5.

4.4.16. Найти спектр, резольвентное множество и резольвенту оператора A.

$$X = Y = C[0,1],\ (Ax)(t) = \left(2t^2 - t\right)x(t).$$

Решение.

Рассмотрим операторное уравнение II рода $\lambda x - Ax = y$.

$$\lambda x(t)-(Ax)(t)=y(t),\ t\in[0,1],$$
$$\lambda\, x(t)-\left(2t^2-t\right)x(t)=y(t),$$
$$x(t)\left(\lambda-(2t^2-t)\right)=y(t),$$
$$x(t)=\frac{y(t)}{\lambda-(2t^2-t)},\ t\in[0,1].$$

Резольвента оператора А:

$$R_\lambda(Ax)(t)=\frac{y(t)}{\lambda-(2t^2-t)},\ t\in[0,1].$$

Спектр и резольвентное множество:

$$\sigma(A)=\left[-\tfrac{1}{8};\ 1\right];\ \rho(A)=C\setminus[-\tfrac{1}{8};1].$$

Спектральный радиус $r_{\sigma(A)}=1$.

4.5. Задачи для самостоятельной работы

4.5.1. Исследовать методами функционального анализа данное уравнение.

Исследование уравнения провести согласно пункту **4.4.11** при λ, указанном в скобках.

Варианты

1. $\lambda x(t)-\int_0^1 s^4x(s)ds=\chi_{[0,\,0.4]}(t),\quad t\in[0,1];\ X=L_3[0,1].$ (λ=1)

2. $\lambda x(t)-\int_0^1 ts^3x(s)ds=\chi_{[0,\,0.5]}(t),\quad t\in[0,1];\ X=L_4[0,1].$ (λ=2)

3. $\lambda x(t)-\int_0^1 t^2s^2x(s)ds=\chi_{[0,\,0.6]}(t),\quad t\in[0,1];\ X=L_3[0,1].$ (λ=3)

4. $\lambda x(t)-\int_0^1 t^3sx(s)ds=\chi_{[0,\,0.7]}(t),\quad t\in[0,1];\ X=L_2[0,1].$ (λ=4)

5. $\lambda x(t)-\int_0^1 t^4x(s)ds=\chi_{[0,\,0.8]}(t),\quad t\in[0,1];\ X=L_3[0,1].$ (λ=0.5)

6. $\lambda x(t)-\int_0^1 t^3sx(s)ds=\chi_{[0,\,0.9]}(t),\quad t\in[0,1];\ X=L_4[0,1].$ (λ=1)

7. $\lambda x(t)-\int_0^1 t^2s^2x(s)ds=1,\quad t\in[0,1];\ X=L_3[0,1].$ (λ=2)

8. $\lambda x(t)-\int_0^1 ts^3x(s)ds=\chi_{[0,\,0.9]}(t),\quad t\in[0,1];\ X=L_2[0,1].$ (λ=3)

9. $\lambda x(t)-\int_0^1 s^4x(s)ds=\chi_{[0,\,0.8]}(t),\quad t\in[0,1];\,X=L_2[0,1].$ (λ=4)

10. $\lambda x(t)-\int_0^1 ts^3x(s)ds=\chi_{[0,\,0.7]}(t),\quad t\in[0,1];\,X=L_2[0,1].$ (λ=0.5)

11. $\lambda x(t)-\int_0^1 t^2s^2x(s)ds=\chi_{[0,\,0.6]}(t),\quad t\in[0,1];\,X=L_2[0,1].$ (λ=1)

12. $\lambda x(t)-\int_0^1 t^3sx(s)ds=\chi_{[0,\,0.5]}(t),\quad t\in[0,1];\,X=L_3[0,1].$ (λ=2)

4.5.2. Доказать свойства.

1) Всякое нормированное пространство является метрическим.

2) Алгебраические операции в н.п. непрерывны:

$(x_n \to x,\ y_n \to y,\ \lambda_n \to \lambda) \Rightarrow x_n + y_n \to x + y \ \&\ \lambda_n x_n \to \lambda x$.

3) Норма непрерывна: $x_n \to x \Rightarrow ||x_n|| \to ||x||$.

4) C[a, b] – б.п. *Указание.* Использовать критерий банаховости н.п.

5) $\mathbf{N}(X,Y) \in \mathrm{Ob}\mathbf{N}$.

6) Y – б.п. ⇒ **N**(X,Y) – б.п. *Указание.* $\mathbf{N}(X,Y) \supset \{A_n\}$ – фундаментальна ⇒ $A_n \to A$, где $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \quad \forall x \in X$.

7) $(\langle X, ||.||_X\rangle$ и $\langle Y, ||.||_Y\rangle$ – б.п.$) \Rightarrow \langle X\times Y,\ ||\langle x,y\rangle||_{X\times Y} = ||x||_X + ||y||_Y\rangle$ – б.п.

8) $(A\in\mathbf{N}(X,Y)\ \&\ B\in\mathbf{N}(Y,Z)) \Rightarrow (BA\in\mathbf{N}(X,Z)\ \&\ ||BA|| \le ||B||\cdot||A||)$.

9) $A\in\mathbf{N}(X) \Rightarrow A^n \in \mathbf{N}(X)\ \forall\, n\in\mathbf{N}\ \&\ ||A^n|| \le ||A||^n$.

Указание. Использовать метод математической индукции.

10) Умножение л.н.о. непрерывно: $(A_n \to A\ \&\ B_n \to B) \Rightarrow B_nA_n \to BA$.

11) Дистрибутивный закон для операторных рядов*:*

$(A_k,\ B,\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathbf{N}(X)) \Rightarrow B\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \sum_{k=1}^{\infty} BA_k$

12) $A\in\mathbf{N}(X$ – б.п.$) \Rightarrow$ спектр $\sigma(A)$ ограничен: $\sigma(A) \subset \overline{B}_{\theta,||A||} \subset \mathbf{C}$.

4.6. Задания по контрольной работе

4.6.1. Определить свойства множества.

1) В нормированном пространстве X = $C[0,1]$ задано множество

$Y = \{x\in X \mid -t^3 \le x(t) \le t^3\ \forall t\in[0,1]\}$. Определить, является ли множество Y открытым, замкнутым, ограниченным.

2) В нормированном пространстве X = $C[0,1]$ задано множество $Y = \{x \in X \mid x(0) = 0\}$. Определить, является ли множество Y выпуклым, замкнутым, ограниченным.

3) В нормированном пространстве X = $C[0,1]$ задано множество $Y = Sp(t^3, t^2)$. Определить, является ли множество Y ограниченным, замкнутым, открытым.

4) В нормированном пространстве X = $C[0,1]$ задано множество $Y = \{x \in X:\ x \in Sp(1) \wedge |C| < 3\}$. Определить, является ли множество Y замкнутым, ограниченным, линейным подпространством.

4.6.2. Вычислить норму вектора.

1) Пусть $x(t) = t^2 - t + 2$. Вычислить норму вектора x в пространствах $C^2[-1,0]$, $L_2[-1,0]$.

2) Пусть $x(t) = 2t + 4$. Вычислить норму вектора x в пространствах $C^1[-1,1]$, $L_1[0,1]$.

3) Пусть $x(t) = t^5$. Вычислить норму вектора x в пространствах $C^1[-1,1]$, $L_1[0,3]$.

4) Пусть $x(t) = \sin 2\pi t$. Вычислить норму вектора x в пространствах $C^1[-1,1]$, $L_2[1,2]$.

4.6.3. Определить, является ли множество банаховым пространством.

1) Задано множество X вещественных функций, определенных на [a, b], $\|x\| = \int_a^b |x(t)|dt$. Является ли $(X, \|\cdot\|)$ банаховым пространством, если X – множество многочленов степени не выше 5?

2) Задано множество X вещественных функций, определенных на [a, b], $\|x\| = \int_a^b |x(t)|dt$. Является ли $(X, \|\cdot\|)$ банаховым пространством, если X – множество многочленов не выше второй степени?

3) Задано множество X вещественных функций, определенных на [a, b], $\|x\| = \int_a^b |x(t)|dt$. Является ли $(X, \|\cdot\|)$ банаховым пространством, если X=$\{x(t) \in X \mid x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^3, C_k > 0\}$?

4) Задано множество X вещественных функций, определенных на [a, b], $\|x\| = \int_a^b |x(t)|dt$. Является ли $(X, \|\cdot\|)$ банаховым пространством, если X – множество многочленов степени ≤ 1?

4.6.4. Найти ядро, образ и норму оператора A.

1) $(Ax)(t) = (x^2 - 2x - 3) \cdot x(1)$ в пространстве $C[-1,3]$.

2) $(Ax)(t) = \int_0^1 t^5 \cdot s^6 x(s)\,ds$ в пространстве $C[0,1]$.

3) $(Ax)(t) = \int_0^3 e^{t+s} x(s)ds$ в пространстве $C[0,3]$.

4) $(Ax)(t) = \int_0^1 \sin\pi t \cdot \cos\pi s \cdot x(s)ds$ в пространстве $C[0,1]$.

4.6.5. Найти спектр, резольвентное множество и резольвенту оператора A.

1) $X = Y = C[-5,\ 4]$, $(Ax)(t) = (t^2 + 3t - 4)x(t)$;

2) $X = Y = C\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $(Ax)(t) = \sin(\pi t)\, x(t)$;

3) $X = Y = C[0,2]$, $(Ax)(t) = e^{i\pi t}\, x(t)$;

4) $X = Y = C[-1,3]$, $(Ax)(t) = (x^2 - 2x - 3) \cdot x(1)$.

4.6.6. Дана последовательность. Определить, сходится ли последовательность в указанных пространствах к x_0.

1) Сходится ли $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n(t) = e^{-nt}$ к $x_0(t) \equiv 0$ в пространствах
$X = C[-1,1]$, $X = L_2[0,2]$?

2) Сходится ли $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$ к $x_0(t) \equiv 0$ в пространствах $X = C[0,1]$, $X = L_2[0,2]$?

3) Сходится ли $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n(t) = \sin(\pi n t)$ к $x_0(t) \equiv 0$ в пространствах $X = C\ [0, \frac{\pi}{4}]$, $X = L_2[0,2]$?

4) Сходится ли $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin nt$ к $x_0(t) \equiv 0$ пространствах
X = $C^1[0,1]$, $X = L_1[\ 0,\ 1]$?

5. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА (г.п.) И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.1. Понятия и определения

Рассмотрим базовые понятия раздела. Все понятия раздела представлены в таблице ниже:

Имя понятия, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
X – л.п., скалярное произведение (с.п.), $(\cdot,\cdot)$	**Функция** $(\cdot,\cdot)$:$X\times X\to$**C** (**R**) | 1° $(x,y) = \overline{(y,x)}$ 2° $(\lambda x+\mu y,\cdot) = \lambda(x,\cdot)+\mu(y,\cdot)$ 3° $(x,x)\geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
Гильбертово пространство (г.п.), H	**Упорядоченная пара** $<H, (\cdot,\cdot)>$, $(\cdot,\cdot)$ – с.п. в л.п. H, полном относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$
Г.п. $\mathbf{C}^m$, $m\in\mathbf{N}$	**Г.п.** $< \mathbf{C}^m, (x,y) = \sum_{k=1}^{m} x_k \overline{y_k} >$
Г.п. $\mathbf{l}_2$	**Г.п.** $< \mathbf{l}_2, (x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} >$
Г.п. $\mathbf{L}_2(T)$	**Г.п.** $< \mathbf{L}_2(T), (x,y) = \int_T x(t)\overline{y(t)}dt >$
$<H, (\cdot,\cdot)>$ – г.п. $x,y \in H$, $x \perp y$	**Упорядоченная пара** векторов $<x,y>$ называется ортогональной, если $(x,y)=0$
$<H, (\cdot,\cdot)>$ – г.п., $H\supseteq Y$, ортогональное дополнение подмножества Y, $Y^{\perp}$	**Подмножество** $Y^{\perp} = \{x\in H \mid (x,y) = 0\ \forall y\in Y\}$
$<H, (\cdot,\cdot)>$ – г.п., $H\supseteq Y$ – л. П./п., ортопроектор, $P:H\to Y$	**Л.н.о.** $P:H\to Y \mid Px = y_1$ – первое слагаемое в однозначном представлении $x = y_1 + y_2$ $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y^{\perp}$ $(H = Y\oplus Y^{\perp})$
$<H, (\cdot,\cdot)>$ – г.п., $\{\varphi_k\} \subseteq H$	Последовательность $\{\varphi_k\}$ ортогональна, если $(\varphi_i,\varphi_j) = \|\varphi_i\|^2\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронеккера (=1, если i = j, и = 0 , если $i \neq j$)
$<H, (\cdot,\cdot)>$ – г.п., $\{\varphi_k\} \subseteq H$	**Последовательность** $\{\varphi_k\}$ ортонормированна, если $(\varphi_i,\varphi_j) = \delta_{ij}$
Коэффициент Фурье (k-тый) вектора $x\in H$, x_k	**Число** $x_k = (x, \varphi_k)$
Ряд Фурье вектора $x\in H$ по о/н посл-ти $\{\varphi_k\}$, $\sum_k x_k\varphi_k$	**Ряд в н.п.** H $\sum_k x_k\varphi_k = \sum_k (x,\varphi_k)\varphi_k$
Ортобазис в H	**О/н последовательность** $\{\varphi_k\} \mid x = \sum_k (x,\varphi_k)\varphi_k$ $\forall x\in H$, т.е. каждый вектор x разлагается в ряд Фурье по ортобазису
$<H, (\cdot,\cdot)>$ – г.п. $A:H\to H$ – л.н.о.,	**Линейный оператор** $A^*: H\to H$ является сопряжённым, если $(Ax,y) = (x,A^*y)\ \forall x,y\in H$

Имя понятия, обозначение	*Определяющее понятие и видовые признаки*
Самосопряженный (с/с) оператор	**Линейный оператор** $A:H\to H \mid A^* = A$
Унитарный оператор	**Линейный оператор** $A:H\to H \mid$ $(Ax,Ay) = (x,y)\ \forall x,y\in H$
$\langle H, (\cdot,\cdot) \rangle$ – г.п., $x, x_k \in H$	**Последовательность** $\{x_k\}$ сходится слабо к x, если $\forall y\in H\ (x_k,y) \to (x,y)$

5.2. Основные утверждения и теоремы раздела

УТВ ГП-5.2.1. *Простейшие свойства с.п.*

5.2.1.1. Сопряженная линейность по 2-му аргументу*:*

$(\cdot, \lambda x+\mu y) = \overline{\lambda}(\cdot, x) + \overline{\mu}(\cdot, y)$.

5.2.1.2. Тождество пареллелограмма: $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

5.2.1.3. Неравенство Коши-Буняковского: $|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|\quad \forall x,y\in H$ – г.п.

5.2.1.4. $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ – норма.

5.2.1.5. Непрерывность скалярного произведения

$(x_k \to x,\ y_k \to y) \Rightarrow (x_k, y_k) \to (x,y)\ (k\to\infty)$.

УТВ ГП-5.2.2. *Простейшие утверждения, связанные с понятием ортогональности.*

1) $H^\perp = \theta$

2) $Y\subset H \Rightarrow Y^\perp$ – замкнутое линейное п/п в H, причем $Y\cap Y^\perp$ не содержит ненулевых элементов.

3) $x \perp Y \Rightarrow x \perp \overline{\mathrm{Sp}}Y$.

4) $Y^\perp = (\overline{\mathrm{Sp}}Y)^\perp$.

5) Y – замкнутое л. п/п в H & $H = Y + Y^\perp \Leftrightarrow H = Y \oplus Y^\perp$.

УТВ ГП-5.2.3. *Лемма Рисса о наилучшем приближении.*

Пусть Y – замкнутое линейное п/п в г.п. H, и пусть $x\in H$. Тогда в Y $\exists$ единственный элемент Px, ближайший к x, т.е.

$\|x - Px\| = \mathrm{dist}(x,Y) = \inf\{\|x - y\|: y \in Y\}$, т.е. $\exists$ единственная *проекция* x на Y (рис. 5.1).

УТВ ГП-5.2.4. *Теорема о проекции:* Y – замкнутое л.п/п в г.п. $H \Rightarrow H = Y\oplus Y^\perp$

(рис. 5.1)

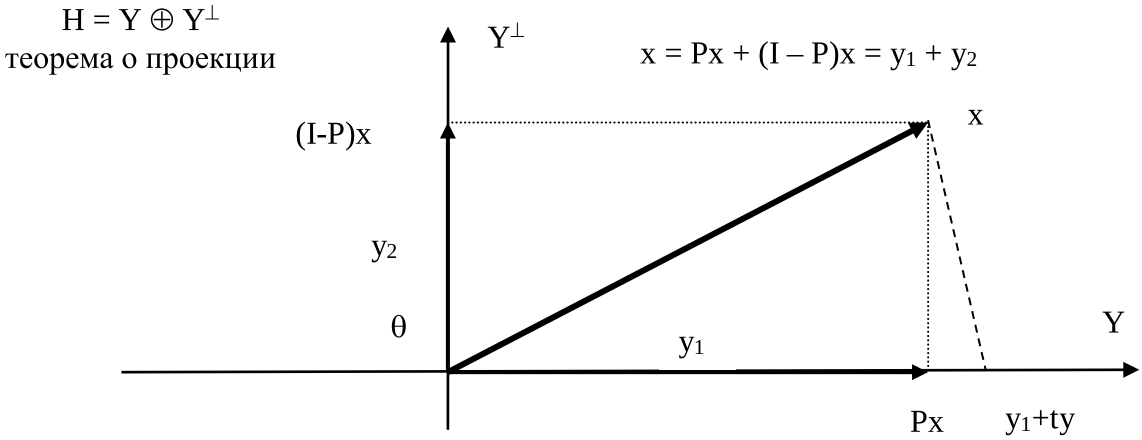

Рис. 5.1

Следствия.

1) $\| Px \| = \operatorname{dist}(x,Y^{\perp})$; $\| (I - P)x \| = \operatorname{dist}(x,Y)$

2) $\| x \|^2 = \| Px \|^2 + \| (I - P)x \|^2$ (*теорема Пифагора).*

3) Ортопроекторы $P:H \to Y$ и $I - P:H \to Y^{\perp}$ – л. н. с/с операторы с единичной нормой, причем $P + (I - P) = I$; $P^2 = P$; $P(I - P) = \theta$.

УТВ ГП-5.2.5. *Теорема об отрезке ряда Фурье*: отрезок ряда Фурье $s_m = \sum_{k=1,m} x_k\varphi_k$ является проекцией вектора x на к/м л. п/п $H_m = Sp\{\varphi_k\}_{k=1,m}$ (рис. 5.2.).

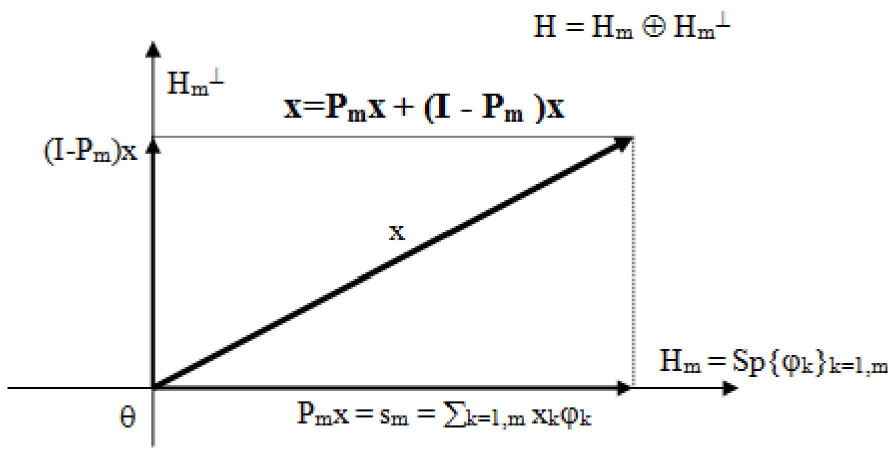

Рис 5.2

Следствия.

1) *Неравенство Бесселя:* $\sum|x_k|^2 \le \|x\|^2$.

2) Ряд Фурье всегда сходится, причем его сумма $s = \sum_k x_k\varphi_k$ является проекцией вектора x на л.п/п $H_\infty = \overline{Sp}\{\varphi_k\}_{k=1,\infty}$.

3) Ортопроектор $P_m:H \to H_m$, $P_m x = \sum_{k=1,m} (x,\varphi_k)\, \varphi_k$, – л.н.с/с оператор,

причем $\| P_m \| = 1$.

УТВ ГП-5.2.6. *Критерии ортобазиса.*

Пусть г.п. $H \supset \Phi = \{\varphi_k\}$ – о/н последовательность. Тогда (Φ полна, т.е. $\Phi^{\perp} = \theta$) $\Leftrightarrow$ (Φ замкнута, т.е. $\overline{Sp}\Phi = H$) $\Leftrightarrow$ (Φ ортобазис) $\Leftrightarrow$ ($\sum|x_k|^2 = \|x\|^2 \ \forall x \in H$ – *равенство Парсеваля*).

УТВ ГП-5.2.7. *Примеры ортобазисов:*

Ортобазис в $\mathbf{C}^m$: $\varphi_k = \langle 0, 0, ..., 1_{(k)}, 0,...,0 \rangle$, $k \in \mathbf{N}_m$

Ортобазис в $\mathbf{l}_2$: $\varphi_k = \langle 0, 0, ..., 1_{(k)}, 0,.... \rangle$, $k \in \mathbf{N}$

Ортобазисы в $\mathbf{L}_2([0, 1])$: $\varphi_k(t) = \sqrt{2}\sin k\pi t$, $k \in \mathbf{N}$; $\varphi_k(t) = \sqrt{2}\cos k\pi t$, $k \in \mathbf{N} \cup 0$.

УТВ ГП-5.2.8. *Теорема об ортогонализации Грама-Шмидта.*

Пусть $\{u_k\}_{k=1,\infty}$ – л/н последовательность векторов в г.п. H. Тогда $\exists$ о/н последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1,\infty}$ | $\forall\ n \in [1,\infty]$ выполняется равенство

$Sp\{u_k\}_{k=1,n} = Sp\{\varphi_k\}_{k=1,n}$. Векторы φ_k , k=1,2,... вычисляются рекуррентно:

$w_1 = u_1$, $\qquad \varphi_1 = w_1 / \|w_1\|$,

$w_2 = u_2 - (u_1, \varphi_1)\varphi_1$, $\qquad \varphi_2 = w_2 / \|w_2\|$,

....

$w_k = u_k - \sum_{i=1,k-1} (u_k, \varphi_i)\varphi_i$, $\qquad \varphi_k = w_k / \|w_k\|$, ...

УТВ ГП-5.2.9. *Теорема существования ортобазиса.*

Гильбертово пространство имеет хотя бы один ортобазис в том и только в том случае, когда оно сепарабельно.

УТВ ГП-5.2.10. *Теорема об изоморфизме*.

Гильбертово пространство и унитарные операторы образуют подкатегорию в **N**. Все б/м сепарабельные г.п. изоморфны в этой подкатегории.

УТВ ГП-5.2.11. *Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в г.п. H.*

$F \in H^* \Rightarrow \exists$ единственный вектор $g \in H$ | $Fx = (x,g)\ \forall x \in H$ & $\|F\|_{H^*} = \|g\|_H$.

Следствия:

1) *Теорема Хана-Банаха в г.п. :* (H – г.п., W – замкнутое п/п в H, $G \in W^*$) $\Rightarrow$

$\exists\ F \in H^*|\ F|_W = G\ \&\ \|F\|_{H^*} = \|G\|_{W^*}$.

2) *Теорема об изоморфизме вещественных г.п.*.

(H – вещественное г.п.) $\Rightarrow$ H изометрически изоморфно H* в категории **B** банаховых пространств и линейных непрерывных операторов.

УТВ ГП-5.2.12. *Свойства отображения* $A \to A^*$:

1) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$,

2) $(AB)^* = B^*A^*$,

3) $I^* = I$,

4) $A^{**} = A$,

5) $\exists\, A^{-1} \in \mathbf{N}(H) \Rightarrow \exists\, (A^*)^{-1} \in \mathbf{N}(H)\ \&\ (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

УТВ ГП-5.2.13. *Альтернатива Фредгольма.*

Если K – компактный оператор в г.п. H , а $\lambda \neq 0$, то имеет место один из двух взаимоисключающих случаев:

(A) Однородное уравнение $\lambda x - Kx = \theta$ имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение $\lambda x - Kx = y$ однозначно и корректно разрешимо при любой правой части.

(B) Однородное уравнение имеет к/м пространство решений $X_\lambda = \ker(\lambda I - K)$, $0 < \dim X_\lambda < \infty$, а неоднородное уравнение в этом случае разрешимо (причем неоднозначно) в точности для тех правых частей $y \in H$, которые ортогональны всем решениям сопряженного однородного уравнения $\bar{\lambda} x - K^* x = \theta$, т.е. для $y \in (\ker(\bar{\lambda} I - K^*))^\perp$.

5.3. Типовые задачи по разделу

1) Вычислить $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ в г.п. C^m, l_2 , L_2 .

2) Вычислить норму линейного непрерывного функционала $\|\cdot\|_{H^*}$.

3) Найти проекцию как отрезок $P_m x$ ряда Фурье данного вектора $x \in H$ и данного ортобазиса, и найти расстояние $\|x - P_m x\|$.

4) Для данного $A \in N(H$ – г.п.) найти сопряженный оператор A^*.

5) Исследовать методами функционального анализа данное уравнение, например, интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода $(\lambda I - K)x = y$ в г.п. $\langle H, (\cdot,\cdot) \rangle$.

5.4. Примеры решения задач

5.4.1. **Вычислить скалярное произведение и найти норму вектора.**

1) Пусть x,y $\in L_2[0,1]$, x(t) = sin kπt, y(t) = cos kπt.   (x,y) = ? $\|x\|_2$ = ?

Решение.

(x,y) = $\int_0^1 \sin k\pi t \cos k\pi t dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin 2k\pi t dt = \frac{1}{4k\pi}(-\cos 2k\pi t)\Big|_0^1 = \frac{1}{4k\pi}(1-1) = 0$, т.е. x $\perp$ y.

$$\|x\|_2^2 = \int_0^1 \sin^2 2k\pi t dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 2k\pi t)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2k\pi t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2) Пусть x,y $\in \mathbf{l}_2$, x = $\left\{(-\frac{1}{2})^n\right\}_{n=0}^{\infty}$, $y = \left\{(\frac{2i}{3})^n\right\}_{n=0}^{\infty}$. (x,y) = ? $\|x\|_2$ = ?

Решение.

(x,y) = $\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n\overline{(\frac{2i}{3})^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n(-\frac{2i}{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{i}{3})^n$ =(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии)= $\frac{1}{1-\frac{i}{3}} = (1+\frac{i}{3})\frac{9}{10} = \frac{9}{10} + \frac{3}{10}i$. $\|x\|_2$ = $\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{2n}} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^n} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\|y\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2i}{3})^n\overline{(\frac{2i}{3})^n}}$ =($z\,\bar{z} = |z|^2$)= $\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{4}{9})^n} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

5.4.2. Вычисление нормы линейного непрерывного функционала.

1) Пусть Fx = $\int_0^1 x(t)e^{-2it}dt : L_2[0,1] \to \mathbf{C}$. Найти $\|F\|_{H^*}$ = ?

Решение.

Согласно УТВ ГП-3.2.11 Fx = (x,g) $\forall x \in H$ & $\|F\|_{H^*} = \|g\|_H$. $g(t) = e^{2it} \Rightarrow$

$\|F\|_{H^*} = \|g\|_2$ =($|e^{2it}|^2$=1)= $\sqrt{\int_0^1 dt} = 1$.

2) Пусть Fx = $\sqrt{2}\cdot e^{\frac{i\pi}{3}}\cdot x : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Найти $\|F\|_{H^*}$ = ?

Решение

Согласно УТВ ГП-3.2.11 Fx = (x,g) $\forall x \in H$ & $\|F\|_{H^*} = \|g\|_H$. g = $\sqrt{2}\, e^{-i\pi/3} \Rightarrow \|F\|_{H^*} = \|g\|_2$ =

$$\sqrt{(g,g)} = |g|^2 = \left|\sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{3}}\right|^2 = 2.$$

5.4.3. Пусть H = $L_2[0,1]$; $\varphi(t) = \sqrt{2}\ \sin \pi t$; $x = \chi_{[0,\ 0{,}5]}(t)$.

Найти отрезок P_1x ряда Фурье данного вектора $x \in H$ и данного ортобазиса, найти расстояние $||x - P_1x||$.

Решение.

Вектор φ имеет единичную норму (см. пример 3.4.1), поэтому его можно считать первым вектором (φ_1) некоторого ортобазиса в H. Отрезок ряда Фурье $P_1x = s_1 = \sum_{k=1}^{1} x_k \varphi_k = x_1\varphi_1$.

$x_1 = (x, \varphi_1) = \int_0^1 x(t)\varphi_1(t)dt = \int_0^1 \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(t)\sqrt{2}\sin \pi t dt$ =(характеристическая функция = 1 на том м., которое она характеризует, и = 0 вне этого м.)= $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}\sin \pi t dt = \sqrt{2}(-\frac{1}{\pi}\cos \pi t)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ $\Rightarrow P_1x = (\sqrt{2}/\pi)\varphi_1$. Расстояние $||x - P_1x||$ =(теорема Пифагора и рис. 3.2)= $\sqrt{\|x\|^2 - \|P_1x\|^2}$. $||x||^2 = (x,x) = \int_0^1 \chi^2_{[0,\frac{1}{2}]}(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2}$. $||P_1x||^2 = (P_1x, P_1x) = (\frac{\sqrt{2}}{\pi}\varphi_1, \frac{\sqrt{2}}{\pi}\varphi_1) = \frac{2}{\pi^2}(\varphi_1, \varphi_1)$ =(ортонормированность)= $\frac{2}{\pi^2}$.

Итак, $||x - P_1x|| = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}}$.

5.4.4. Найти сопряжённый оператор.

Пусть H = $\mathbf{l}_2$; $Ax = A\{x_1, x_2, ...\} = ix - \{0,0, x_1, x_2, ...\}$.

Для данного $A \in \mathbf{N}(H)$ найти сопряженный оператор A*.

Решение.

Оператор A = iI – B, где $Bx = \{0,0, x_1, x_2, ...\}$ =(УТВ ГП-3.2.12)⇒

$A^* = \bar{i}\, I - B^*$.

По определению сопряженного оператора $(Bx,y) = (x,B^*y)$ $\forall x,y \in H \Rightarrow (Bx,y) = (\{0,0,x_1,x_2,...\},\{y_1,y_2,....\}) = 0\overline{y_1} + 0\overline{y_2} + x_1\overline{y_3} + x_2\overline{y_4} + ... = (x, B^*y) = x_1\overline{(B^*y)_1} + x_2\overline{(B^*y)_2} + ... \Rightarrow$ $x_1\overline{(y_3 - (B^*y)_1)} + x_1\overline{(y_4 - (B^*y)_2)} + ... = (x, \{y_3 - (B^*y)_1, y_4 - (B^*y)_2, ...\}) = 0$ $\forall x \in H$ =(УТВ. ГП-2.1)⇒ $\{y_3 - (B^*y)_1, y_4 - (B^*y)_2, ...\} = \theta = \{0,0, ...\ 0, ..\}$ =(равенство векторов покоординатное)⇒ $B^*y = \{y_3, y_4, ...\}$. Итак, $A^*x = -ix - \{x_3, x_4, ...\}$.

5.4.5. Исследовать методами функционального анализа данное уравнение.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода $(\lambda I - K)x = y$ в г.п.

<H, $(\cdot,\cdot)$ >:

$$3x(t) - \int_0^1 ts^2 x(s)ds = \chi_{[0,\,0.1]}(t), \quad t \in [0,1].$$

План исследования приведен ниже:

1) Исследовать свойства семейства операторов $\lambda I - K$: $H \to H$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

$\ker(\lambda I - K)$ = <*ответ* при $\forall\ \lambda \in \mathbf{C}$>.

2) Выбрать г.п. H ($\mathbf{C}^m$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{L}_2$), в котором действует оператор K.

H = <*ответ*>.

$x \in H$ =<*доказательство*>$\Rightarrow$ $Kx \in H$.

$y \in H$? <*доказательство*>.

$\|y\|$ = <*ответ*>.

3) Найти сопряженный оператор K^*.

Проверить самосопряженность K ($K = K^*$?).

$(K^*x)(t)$ = <*ответ*>.

4) Исследовать свойства семейства операторов $\lambda I - K^*$: $H \to H$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

$\ker(\lambda I - K^*)$ = <*ответ* при $\forall\ \lambda \in \mathbf{C}$>. С.з. сопряженного оператора λ_0^* = <*ответ*>; с.з. λ_1^* = <*ответ*>.

Собственные п/п сопряженного оператора

X_0^* = <*ответ*>; X_1^* = <*ответ*>; ... .

$X_0^{*\perp}$ = <*ответ*>; $X_1^{*\perp}$ = <*ответ*>; ... .

Проверить $y \in X_1^{*\perp}$?

Построить ортобазис в пространстве X_1^*. $\varphi_1(t)$ = <*ответ*>; $\varphi_2(t)$ = <*ответ*>; .... .

5) Найти проекцию y_1 вектора y на $X_1^{*\perp}$.

y_1 = <*ответ*>.

6) Решить уравнение $\lambda_1 x - Kx = y_1$.

Общее решение $x_1(t)$ = <*ответ*>.

7) Найти нормальное решение (т.е. решение с наименьшей нормой) уравнения

$\lambda_1 x - Kx = y_1$. $x_н(t)$ = <*ответ*>.

8) Найти условие (на правую часть $y \in H$) разрешимости уравнения

$\lambda_1 x - Kx = y$.

Уравнение $\lambda_1 x - Kx = y$ разрешимо $\Leftrightarrow$ правая часть y удовлетворяет условию <*ответ*>.

Решение.

$$1)\ \ker(\lambda I - K) = \begin{cases} X_0 = (Sp(t^2))^{\perp} \text{ при } \lambda = \lambda_0 = 0, \\ X_1 = Sp(t) \text{ при } \lambda = \lambda_1 = 0.25, \\ \theta \quad \text{при } \lambda \notin \{0, 0.25\} = \sigma(K). \end{cases}$$

2) Выбрать г.п. H ($\mathbf{C}^m$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{L}_2$), в котором действует оператор К.

H = $\mathbf{L}_2[0,1]$ – б/м сепарабельное гильбертовое пространство с поточечными линейными операциями и скалярным произведением:

(x,y) = $\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$. x∈H =(Kx = ca, c = $\int_0^1 s^2 x(s)ds \in \mathbf{C}$, a(t)=t, a∈$\mathbf{L}_2[0,1]$)⇒ Kx∈H. y∈H, так как

y измерима (⇐ [0, 0.1] измеримо по Лебегу) и ограничена (& μ[0,1] = 1 < +∞).

$\|y\|_2 = \sqrt{\int_0^{0.1} dt} = \sqrt{0.1} = 0.316.$

3) Найти сопряженный оператор K^*.

Проверить самосопряженность K ($K = K^*$?).

$(K^*x)(t) = \int_0^1 t^2 s x(s)ds$, t∈[0,1] ($k^*(t,s) = \overline{k}(s,t) = st^2$), $K^* \neq K \Rightarrow$ K не является самосопряженным.

4) Исследовать свойства семейства операторов $\lambda I - K^*$: H→H, $\lambda \in \mathbf{C}$.

Рассмотрим сопряженное однородное уравнение

$\lambda x(t) - \int_0^1 t^2 s x(s)ds = 0 \Leftrightarrow \lambda x(t) - t^2 c = 0$:

а) $\lambda = 0. \Rightarrow X_0^* = \{x \in \mathbf{L}_2[0,1] \mid \int_0^1 s x(s)ds = 0\} = \{s\}^{\perp}$ =(УТВ ГП-2.3)= $(Sp\{s\})^{\perp}$.

б) $\lambda \neq 0$. $\lambda c - 0.25c = 0 \Rightarrow \lambda_1^* = 0.25$ & $X_1^* = \{x \in H \mid x(t) = ct^2, t \in [0,1], c \in \mathbf{C}\} = Sp(t^2)$.

$$\ker(\lambda I - K^*) = \begin{cases} X_0^* = (Sp\{t\})^{\perp} \quad \text{при } \lambda = \lambda_0 = 0, \\ X_1^* = Sp(t^2) \text{ при } \lambda = \lambda_1 = 0.25, \\ \theta \text{ при } \lambda \notin \sigma(K^*) = \{0, 0.25\} (= \sigma(K)). \end{cases}$$

Собственное значение сопряженного оператора $\lambda_0^* = 0$; собственное значение $\lambda_1^* = 0.25$.

Собственные подпространства сопряженного оператора

$X_0^* = \{x \in \mathbf{L}_2[0,1] \mid (x, s) = 0\} = \{s\}^{\perp}$; $\quad X_1^* = \{x \in H \mid x(t) = ct^2, t \in [0,1], c \in \mathbf{C}\} = Sp(t^2)$.

$X_0^{*\perp} = (Sp\{t\})^{\perp\perp} = Sp\{t\}$; $X_1^{*\perp} = Sp(t^2)^{\perp} = \{x: (x, t^2) = 0\}$.

Проверить $y \in X_1^{*\perp}$? $(y, t^2) = \int_0^{0.1} t^2 dt = \frac{0.001}{3} \neq 0 \Rightarrow y \notin X_1^{*\perp}$.

Построить ортобазис в пространстве X_1^*. $w(t) = t^2 \Rightarrow X_1^* = Sp(w)$; $\|w\|_2 = \sqrt{\int_0^1 t^4 dt} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{w}{\|w\|_2} = \sqrt{5}w \Rightarrow \varphi_1(t) = 2.236t^2$, $t \in [0,1]$.

5) Найти проекцию y_1 вектора y на $X_1^{*\perp}$.

Найдем сначала проекцию y_2 вектора y на $X_1^* = Sp(t^2) = Sp(\varphi_1)$: $y_2 = (y, \varphi_1)\,\varphi_1$ (теорема об отрезке ряда Фурье). $(y, \varphi_1) = 2.236 \int_0^{0.1} t^2 dt = 2.236 \frac{0.001}{3} = 0.000745(3) \Rightarrow y_2(t) = 0.000745(3) \cdot 2.236t^2 = 0.0016(6)t^2$, $t \in [0,1]$ $= (\chi_{[0,\,0.1]} = y_1 + y_2$ – теорема о проекции$) \Rightarrow$ проекция y_1 вектора y на $X_1^{*\perp}$: $y_1(t) = \chi_{[0,\,0.1]}(t) - 0.0016(6)t^2$, $t \in [0,1]$.

6) Решить уравнение $\lambda_1 x - Kx = y_1$.

$$0.25x(t) - \int_0^1 ts^2 x(s)ds = \chi_{[0,\,0.1]}(t) - 0.001(6)t^2,\ t \in [0,1] \Rightarrow$$

$x(t) = 4\,\chi_{[0,\,0.1]}(t) - 4 \cdot 0.001(6)\,t^2 + 4t \cdot \int_0^1 s^2 x(s)ds \Rightarrow$(обозначим интеграл за $\mathbf{c} = \int_0^1 s^2 \cdot x(s)ds$); домножим уравнение на t^2 и проинтегрируем по t, после получим

$$\mathbf{c} = 4\int_0^{0.1} t^2 dt - 4 \cdot 0.001(6) \cdot 0.2 + \mathbf{c} = (4/3) \cdot 0.001 - 0.001333(3) + \mathbf{c} = 0.00133(3) - 0.00133(3) + \mathbf{c} \Rightarrow$$

$\mathbf{c} = \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c}$ **–** любое число.

Общее решение уравнения: $x_1(t) = \mathbf{c}t + 4\chi_{[0,\,0.1]}(t) - 0.00(6)\,t^2$, $t \in [0,1]$.

7) Найти нормальное решение (т.е. решение с наименьшей нормой – рис. 5.3) уравнения $\lambda_1 x - Kx = y_1$.

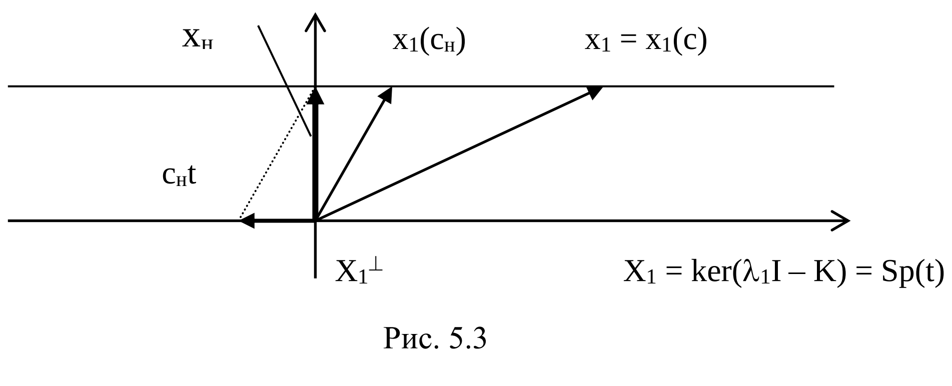

Рис. 5.3

$(x_н, t) = 0$ из этого условия найдем **c** в формуле общего решения:

$$\mathbf{c}\int_0^1 t^2 dt + 4\int_0^{0.1} t dt - 0.00(6)\int_0^1 t^3 dt = 0 \Rightarrow \mathbf{c} \cdot (1/3) + 2 \cdot 0.01 - 0.00(6) \cdot (1/4) = 0 \Rightarrow$$

c = (3/4)·0.00(6) – 0.06 = -0.055.

Нормальное решение $x_н(t) = -0.055\,t + 4\chi_{[0,\,0.1]}(t) - 0.00(6)\,t^2$, $t\in[0,1]$.

8) Найти условие (на правую часть $y\in H$) разрешимости уравнения

$\lambda_1 x - Kx = y$.

Уравнение $0.25x - Kx = \mathbf{y}$ разрешимо $\Leftarrow$(случай (В) альтернативы Фредгольма)$\Rightarrow$ правая часть **y** удовлетворяет условию $\mathbf{y} \perp \ker(0.25I - K^*) = X_1^* = Sp(t^2) \Rightarrow 0.25x - Kx = \mathbf{y}$ разрешимо

$\Leftrightarrow$ y удовлетворяет условию $\int_0^1 y(t)t^2dt = 0.$

5.5. Задачи для самостоятельной работы

5.5.1. Выполнить следующие задания.

1) Вычислить скалярное произведение и определить, являются ли векторы ортогональными.

1) $H=L_2[0,1]^2$; $x(t,s)=s^2$; $y(t,s)=t+is$;

2) $H=L_2[0,1]$; $x(t)=\sin(\pi t)$; $y(t) = e^{i\pi t}$;

3) $H=L_2[0,1]$; $x(t)=\cos(\pi t)$; $y(t) = e^{i\pi t}$;

4) $H=L_2[0,1]$; $x(t)= t$; $y(t) = \sin\pi t$;

5) $H = l_2, x = \left\{\frac{(i)^n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, y = \left\{\frac{(3i)^{n+1}}{5^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

6) $H = l_2, x = (4,-8,0,32,0,0...,0,..), y = \left\{\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

7) $H = l_2, x = \left\{\frac{e^{in+1}}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, y = \left\{\frac{e^{in}}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

8) $H = l_2, x = (1,-1,2,-2,0,0...,0,..), y = \left\{\frac{(-1)^n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2) $H=L_2[a;b]$- г.п., $F\in H^*$. Вычислить норму $\|F\|$ линейного непрерывного функционала F в гильбертовом пространстве H, если

1) $Fx = \int_0^1 e^{(1+i)t}x(t)dt,\ t\in[0;1]$; 2) $Fx = \int_0^1 (t^3 + ti)x(t)dt,\ t\in[0;1]$;

3) $Fx = \int_{-1}^{1} (t^3 - i)x(t)dt,\ t \in [-1;1]$;

4) $Fx = \int_{-1}^{2} \chi_{[0;2]}(t) \cdot t^3 x(t)dt,\ t \in [-1;2]$;

5) $Fx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(t)(t+\pi)dt,\ t \in [0;\pi]$;

6) $Fx = \int_{0}^{2} (1+it)x(t)dt,\ t \in [0;2]$.

3) В гильбертовом пространстве H задана пара векторов φ_1 и φ_2. Определить, является ли система $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ортонормированной. Если нет, то с помощью ортогонолизации получить ортонормированную систему.

1) H=ℓ_2. $\varphi_1 = (i,0,0,0,...,0,...)$; $\varphi_{2,} = (0,-i,0,0,0...,0,..)$;

2) H=ℓ_2. $\varphi_1 = (1,0,-1,0,1,0,-1,0,0,...,0,...)$; $\varphi_{2,} = (1,0,1,0,1,0,1,0...,0,..)$;

3) H=ℓ_2. $\varphi_1 = (2,0,0,1,0,...,0,...)$; $\varphi_2 = (1,0,0,-2,1,-1,0,...,0,..)$;

4) H=$L_2[0,\frac{\pi}{2}]$; $\varphi_1(t) = \sin 6t$, $\varphi_2(t) = \sin 8t$;

5) H=$L_2[-1,1]$; $\varphi_1(t) = t$; $\varphi_2(t) = t^2 - 1$;

6) H=$L_2[0,1]$; $\varphi_1(t) = \sin 2\pi t$; $\varphi_2(t) = \sin 3\pi t$;

7) H=$L_2[0,2]$; $\varphi_1(t) = \sin \pi t$; $\varphi_2(t) = \sin \frac{3}{2}\pi t$;

8) H=$L_2[0,\frac{\pi}{2}]$; $\varphi_1(t) = \sin 2t$; $\varphi_2(t) = \sin 4t$.

4) В гильбертовом пространстве H задан вектор f и пара векторов $\{\varphi_1; \varphi_2\}$. Вычислить:

4.1. $dist(f, Sp^{\perp}(\varphi_1))$;

4.2. $dist(f, Sp(\varphi_1))$;

4.3. $dist(f, Sp^{\perp}(\varphi_1, \varphi_2))$;

4.4. $dist(f, Sp(\varphi_1, \varphi_2))$.

Примеры заданий:

1) H= $L_2[0,\frac{\pi}{2}]$; $\varphi_1(t)=\sin 2t$; $\varphi_2(t)=\sin 4t$; f(t)= $\frac{1}{\pi}t-1$;

2) H= $L_2[0,2]$; $\varphi_1(t)=\sin \pi t$; $\varphi_2(t)=\sin\frac{3}{2}\pi t$; f(t) $\equiv 1$;

3) H= $L_2[0,1]$; $\varphi_1(t)=\sin 2\pi t$; $\varphi_2(t)=\sin 3\pi t$; f(t) $=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$;

4) H= $L_2[-1,1]$; $\varphi_1(t)=t$; $\varphi_2(t)=t^2-1$; f(t)= $t+1$;

5) H= $L_2[0,\frac{\pi}{2}]$; $\varphi_1(t)=\sin 6t$, $\varphi_2(t)=\sin 8t$; f(t) $\equiv 0.25$;

6) H=ℓ_2. $\varphi_1=(2,0,0,1,0,...,0,...)$; $\varphi_2=(1,0,0,-2,1,-1,0,...,0,..)$;

f = $(1,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},0,0,....,0,...)$;

7) H=ℓ_2. $\varphi_1=(1,0,-1,0,1,0,-1,0,0,...,0,...)$; $\varphi_{2,}=(1,0,1,0,1,0,1,0...,0,..)$; f = $\left\{\frac{2^{n-1}}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

8) H=ℓ_2. $\varphi_1=(i,0,0,0,...,0,...)$; $\varphi_{2,}=(0,-i,0,0,0...,0,..)$; f = $\left\{\frac{3^{n+1}}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

5.5.2. Построить логический вывод утверждения.

Доказать:

1) Скалярное произведение сопряженно линейно по 2-му аргументу:

$(\cdot, \lambda x+\mu y) = \bar{\lambda}(\cdot, x) + \bar{\mu}(\cdot, y)$.

2) Тождество пареллелограмма $||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2\,||x||^2 + 2\,||y||^2$.

3) Неравенство Коши-Буняковского: $|(x,y)| \le ||x||\,||y||$ $\forall x,y\in H$ – г.п.

4) $||x||=\sqrt{(x,x)}$ – норма.

5) Непрерывность с.п. ($x_k \to x$, $y_k \to y$) $\Rightarrow$ $(x_k, y_k) \to (x,y)$ $(k\to\infty)$.

6) $H^{\perp} = \theta$.

7) $Y\subset H \Rightarrow Y^{\perp}$ – замкнутое линейное п/п в H, причем $Y\cap Y^{\perp}$ не содержит ненулевых векторов.

8) $x \perp Y \Rightarrow x \perp \overline{Sp}Y$.

9) $Y^{\perp} = (\overline{Sp}Y)^{\perp}$.

10) Y – замкнутое л. п/п в H & $H = Y + Y^{\perp} \Leftrightarrow H = Y \oplus Y^{\perp}$.

11) Следствие т. о проекции: $||\,Px\,|| = dist(x,Y^{\perp})$; $||\,(I-P)x\,|| = dist(x,Y)$.

12) Следствие т. о проекции: $\| x \|^2 = \| Px \|^2 + \| (I-P)x \|^2$ (*теорема Пифагора).*

13) Следствие т. о проекции: Ортопроекторы $P:H \to Y$ и $I-P:H \to Y^{\perp}$ – л. операторы, причем $P + (I – P) = I$.

14) Следствие т. о проекции: $P^2 = P$. $P(I – P) = \theta_{N(H)}$.

15) Неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le \|x\|^2$.

16) Ряд Фурье всегда сходится.

17) Сумма ряда Фурье $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k$ является проекцией вектора x на л.п/п $H_\infty = \overline{Sp}\{\varphi_k\}_{k=1,\infty}$.

18) Ортопроектор $P_m:H \to H_m$, $P_m x = \sum_{k=1}^{m} (x, \varphi_k)\varphi_k$ - л.н.с/с оператор, причем $\| P_m \| = 1$.

19) Теорема Хана-Банаха в г.п. *:* (H – г.п., W – замкнутое п/п в H, $G \in W^*$) $\Rightarrow \exists F \in H^* |$ $F|_W = G$ & $\|F\|_{H^*} = \|G\|_{W^*}$.

20) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda} A^* + \bar{\mu} B^*$.

21) $(AB)^* = B^*A^*$.

22) $I^* = I$.

23) $A^{**} = A$.

24) $\exists A^{-1} \in \mathbf{N}(H) \Rightarrow \exists (A^*)^{-1} \in \mathbf{N}(H)$ & $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

5.5.3. Исследовать методами ФА данное уравнение.

13. $\lambda x(t) - \int_0^1 t^3 x(s)ds = \chi_{[0,\,0.3]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_2[0,1].$ (λ=0.5)

14. $\lambda x(t) - \int_0^1 s^4 x(s)ds = \chi_{[0,\,0.4]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_3[0,1].$ (λ=1)

15. $\lambda x(t) - \int_0^1 ts^3 x(s)ds = \chi_{[0,\,0.5]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_4[0,1].$ (λ=2)

16. $\lambda x(t) - \int_0^1 t^2 s^2 x(s)ds = \chi_{[0,\,0.6]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_3[0,1].$ (λ=3)

17. $\lambda x(t) - \int_0^1 t^3 s x(s)ds = \chi_{[0,\,0.7]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_2[0,1].$ (λ=4)

18. $\lambda x(t) - \int_0^1 t^4 x(s)ds = \chi_{[0,\,0.8]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_3[0,1].$ (λ=0.5)

19. $\lambda x(t) - \int_0^1 t^3 s x(s)ds = \chi_{[0,\,0.9]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_4[0,1].$ (λ=1)

20. $\lambda x(t)-\int\limits_0^1 t^2 s^2 x(s)ds=1,\quad t\in[0,1];\, X=L_3[0,1].$ (λ=2)

21. $\lambda x(t)-\int\limits_0^1 ts^3 x(s)ds=\chi_{[0,\,0.9]}(t),\quad t\in[0,1];\, X=L_2[0,1].$ (λ=3)

22. $\lambda x(t)-\int\limits_0^1 s^4 x(s)ds=\chi_{[0,\,0.8]}(t),\quad t\in[0,1];\, X=L_2[0,1].$ (λ=4)

23. $\lambda x(t)-\int\limits_0^1 ts^3 x(s)ds=\chi_{[0,\,0.7]}(t),\quad t\in[0,1];\, X=L_2[0,1].$ (λ=0.5)

24. $\lambda x(t)-\int\limits_0^1 t^2 s^2 x(s)ds=\chi_{[0,\,0.6]}(t),\quad t\in[0,1];\, X=L_2[0,1].$ (λ=1)

25. $\lambda x(t)-\int\limits_0^1 t^3 s x(s)ds=\chi_{[0,\,0.5]}(t),\quad t\in[0,1];\, X=L_3[0,1].$ (λ=2)

5.6. Схема исследования уравнения

$$\lambda x(t)-\int\limits_0^1 k(t,s)x(s)ds=y(t),\quad t\in[0,1];\, X=L_p[0,1].$$

Схема исследования уравнения представлена ниже:

1) Запишем уравнение в операторном виде: λx – Kx = y. (Kx)(t) = ……… .

2) ||K|| = ……. , <доказательство ответа>, =(….?….)⇒ K∈**N**(X).

Указание: для ядра k(t,s) = $t^m s^n$ использовать функцию $x_0(s) = s^{n(q-1)}$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad p,q>1;$

использовать также неравенство Гельдера $\|xy\|_1 \le \|x\|_p \|y\|_q$.

3) σ(K) = {λ_0, λ_1} = ….. , $|\lambda_0| < |\lambda_1|$.

4) $X_1 = \ker(\lambda_1 I - K)$ = ….. .

5) $(\lambda I - K)^{-1}$ = ….. , λ∉σ(K) ….<вывод формулы резольвенты при помощи ряда Неймана> … . *Указание*: сначала выразить K^n через K.

6) Сформулировать *выводы* относительно уравнения λx – Kx = y, считая λ∈**C** и y∈X произвольными параметрами (существование, единственность, устойчивость решения, формула для решения).

7) K∈**N**(H = $\mathbf{L}_2$[0, 1])? x∈H =(… <доказательство> …)⇒ Kx∈H.

8) y∈H? <доказательство>.

9) σ(K*) = {{λ^*_0, λ^*_1} = ….. , $|\lambda^*_0| < |\lambda^*_1|$.

10) $X^*_1 = \ker(\overline{\lambda}^*_1 I - K^*)$ = ….. .

11) $X^{*\perp}_1$ = ….. .

12) Построить ортобазис в к/м г.п. X^*_1 . $\varphi_1(t)$ = …. ; $\varphi_2(t)$ = …. ; ….. .

13) Найти проекцию y_1 вектора y на $X^{*}{}_1^{\perp}$. $y_1(t)$ = …. .

14) Найти общее решение x_1 уравнения $\lambda_1 x - Kx = y_1$. $x_1(t)$ = ….. .

15) Найти нормальное решение $x_н$ (т.е. решение с наименьшей нормой) уравнения

$\lambda_1 x - Kx = y_1$. $x_н(t)$ = ….. .

Отвечайте последовательно на вышеприведенные 15 вопросов, соблюдайте формат ответов (заполняя фрейм, приведенный в задании).

Варианты уравнений выбираются те же, что и в модуле «Нормированные пространства».

5.7. Пример исследования уравнения

Исследовать интегральное уравнение

$$\lambda x(t) - \int_0^1 t^2 s^2 x(s)ds = \chi_{[0,0.6]}(t), \quad t \in [0,1]; X = L_3[0,1].$$

1) Запишем уравнение в векторном виде: $\lambda x - Kx = y$. $(Kx)(t) = \int_0^1 t^2 s^2 x(s)ds, \quad t \in [0,1]$.

2) $||K||$ = 0.20746.

Доказательство. $||Kx||_3$ =(опр. о. K: Kx = ca, (*) c = $\int_0^1 s^2 x(s)ds$, a(t) = t^2:[0,1]$\to$R)= $||ca||_3$ =(полуоднородность нормы)= $|c|\ ||a||_3$ =((*))= $\left|\int_0^1 s^2 x(s)ds\right|\ ||a||_3$ ≤(теорема об оценке интеграла)≤ $\int_0^1 \left|s^2 x(s)\right|ds\ ||a||_3$ =(опр. интегральной 1-нормы)= $||s^2x(s)||_1\ ||a||_3$ ≤(неравенство Гельдера для p=3, $\frac{1}{3} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$)≤ $\left\|s^2\right\|_{\frac{3}{2}} \|x\|_3 \|a\|_3$ =(опр. интегральной p-нормы)= $\left(\int_0^1 s^{2\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 t^6 dt\right)^{\frac{1}{3}} \|x\|_3$ = $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}} \|x\|_3$ = $\frac{1}{\sqrt[3]{112}}$ $||x||_3$ = 0.20746$||x||_3$, т.е.

$||Kx||_3 \le 0.20746||x||_3$ $\forall x \in L_3[0,1]$ =(критерий непрерывности л.о.)$\Rightarrow$ K$\in$**N**(X) и по определению нормы линейного непрерывного оператора $||K|| \le 0.20746$.

Для ядра $k(t,s) = t^m s^n = t^2 s^2$ используем функцию $x_0(s) = s$, т.к. n=2,

$q - 1 = \frac{1}{2}$, $n(q-1) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Вычислим $(Kx_0)(t) = \int_0^1 t^2 s^3 ds = \frac{1}{4}t$, $\|Kx_0\|_3 = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 t^6 dt\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$, $\|x_0\|_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ и подставим в нормативное неравенство $||Kx_0||_3 \le ||K||\ ||x_0||_3$:

$\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt[3]{7}} \le \|K\|\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow \|K\| \ge \frac{\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}\sqrt[3]{7}} = \frac{1}{\sqrt[3]{112}} = 0.20746$. Следовательно, в силу антисимметричности отношения ≤ $\|K\| = 0.20746$.

3) $\sigma(K) = \{\lambda_0, \boldsymbol{\lambda_1}\} = \{0, \frac{1}{5}\}$, $|\lambda_0| < |\lambda_1|$.

4) $X_1 = \ker(\lambda_1 I - K) = Sp(t^2)$.

5) $(\lambda I - K)^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{K}{\lambda(\lambda-\frac{1}{5})}$, $\lambda\notin\sigma(K)$. $(K^2x)(t)$ =(опр. композиции)= $K(Kx(t))$ =(опр. о. К)=

$\int_0^1 t^2 s^2 (Kx)(s)ds$ =(опр. о. К)= $\int_0^1 t^2 s^2 (\int_0^1 s^2 p^2 x(p)dp)ds$ =(меняем порядок интегрирования ?)=

$t^2\int_0^1 p^2 x(p)dp\int_0^1 s^4 ds = \frac{1}{5}\int_0^1 t^2 p^2 x(p)dp$ =(опр. о. К)= $\frac{1}{5}(Kx)(t)\ \forall t\in[0,1]$ =(поточечное равенство функций и операторов)$\Rightarrow$ $K^2 = \frac{1}{5}K$ =(по индукции)$\Rightarrow$

$K^n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}K,\ n\in\{1,2,3,...\},\ K^0 = I$. По теореме о ряде Неймана при $|\lambda|>\|K\|$ имеем

$$(\lambda I - K)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{K}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{K}{\lambda}\right)^n = \frac{I}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}K\frac{1}{\lambda^{n+1}} = \frac{I}{\lambda} + \frac{K}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5\lambda)^{n-1}} = \frac{I}{\lambda} + \frac{K}{\lambda^2}\frac{1}{1-\frac{1}{5\lambda}} = \frac{I}{\lambda} + \frac{K}{\lambda(\lambda-\frac{1}{5})}.$$

6) Уравнение $\lambda x - Kx = y$ при $\lambda\notin\sigma(K)$ однозначно разрешимо $\forall y\in L_3[0,1]$; формула для решения: $x = (\lambda I - K)^{-1}y$; решение устойчиво:

$y_n\to y \Rightarrow x_n = (\lambda I - K)^{-1}y_n \to x = (\lambda I - K)^{-1}y$, т.к. резольвента непрерывна. При $\lambda\in\sigma(K)$ ничего нельзя сказать о решениях без дополнительного исследования.

7) $K\in N(H = L_2[0, 1])$?

Доказательство. $x\in H$ =($Kx = ca$, $c\in P$, $a\in L_2[0,1]$ – л.п.)$\Rightarrow$ $Kx\in H$!

8) $y\in H$?

Доказательство. $\|y\|_2 = \left(\int_0^{0.6} dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0.6} = 0.7746$.

9) $\sigma(K^*) = \{\lambda^*_0, \lambda^*_1\} = \{0, \frac{1}{5}\}$, $|\lambda^*_0| < |\lambda^*_1|$. $k^*(t,s) = \overline{k(s,t)} = k(t,s)$, следовательно, оператор К самосопряжён.

10) $X^*_1 = \ker(\overline{\lambda}^*_1 I - K^*) = Sp(t^2)$.

11) $X^{*\perp}_1 = \{x\in L_2[0,1] \mid (x, t^2) = 0\} = \{x\in L_2[0,1] \mid \int_0^1 x(t)t^2dt = 0\}$.

12) Построить ортобазис в к/м г.п. X^*_1 . $\varphi_1(t) = \frac{t^2}{\|t^2\|} = \frac{t^2}{\sqrt{\int_0^1 t^4 dt}} = \sqrt{5}t^2 = 2.236t^2$.

13) Найти проекцию y_1 вектора y на $X^{*}{}_1^{\perp}$. $y_1(t) = y - (y,\varphi_1)\varphi_1$. $(y,\varphi_1) =$ $\int_0^{0.6} t^2 dt \cdot 2.236 = \frac{(0.6)^3}{3} 2.236 = 0.161$. $y_1(t) = \chi_{[0,\,0.6]}(t) - 0.161 \cdot 2.236t^2 = \chi_{[0,\,0.6]}(t) - 0.36t^2$.

14) Найти общее решение x_1 уравнения $\lambda_1 x - Kx = y_1$. $x_1(t) = 5\chi_{[0,\,0.6]}(t) - 1.8t^2 + ct^2$, с – любое.

15) Найти нормальное решение $x_н$ (т.е. решение с наименьшей нормой) уравнения $\lambda_1 x - Kx = y_1$.

Решение с наименьшей нормой можно найти как минимум функционала $f(c) = \| x_1 \|^2 = \| 5 \cdot \chi_{[0;0.6]}(t) - 1.8 \cdot t^2 + c \cdot t^2 \|^2$ либо из условия, что $x_H \perp \ker(\lambda_1 I - K)$(см. рис 5.3).

Вычисляя C из условия $(x_н, t^2)=0$, получим $C=0 \Rightarrow x_н(t) = 5\chi_{[0,\,0.6]}(t) - 1.8t^2$.

6. ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

В данном разделе приводится пример итогового теста с инструкцией к его выполнению.

6.1. Инструкция

Решение теста построено на ОЧП и ОЭ, определённых на различных множествах. Какие множества выбирать, указано в колонке «Дополнительная информация».

В колонках А и В представлены (различными способами) элементы А и В частично упорядоченного множества(ЧУМ) <**O**, ≤>. В колонке *Дополнительная информация* указано ЧУМ <**O**, ≤> и иногда другая необходимая информация. Номер тестового задания указан в колонке ***№.***

Сравните элементы А и В и выберите букву ответа по правилу:

$A,B \in O$ & $A>B \Rightarrow$ **(A)** ; $A,B \in O$ & $A<B \Rightarrow$ **(B)** ; $A,B \in O$ & $A=B \Rightarrow$ **(C)** ;

$A,B \in O$ & A несравнимо с В $\Rightarrow$ **(D)** ; $A \notin O$ или $B \notin O$ $\Rightarrow$ **(E).**

В тесте используются следующие ЧУМ:

– *O=<R, ≤>, A≤B ⇔ B – A∈[0, +∞)*, ***числа;***

– *O=<φ(X), ≤> для некоторого X∈ObS,A≤B ⇔ A⊆B*, ***множества;***

– *O=<S(T,R), ≤ > для некоторого T∈ObS, A≤B ⇔A(t) ≤ B(t) для ∀t ∈T*, ***функции;***

– *O=<PR, ≤> – ЧУМ высказываний, η:PR →{ 0, 1} – интерпретация высказываний,*

A ≤ B ⇔ η(A) ≤ η(B) (A = B ⇔ η(A) = η(B)), ***высказывания;.***

– *O=<CON,≤> – ЧУМ понятий, A≤B⇔ $V_A \subseteq V_B$ –объемы понятий(A=B ⇔ $V_A = V_B$)*, ***понятия.***

6.2. Тест

№	A	B	Дополнительная информация
1.	А – сюрьективен	Ker A≡θ	**Высказывание** $A:C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t)=\int_0^1 t^5 \cdot s \cdot x(s)ds$
2.	$\rho(A) = C \setminus [0,1]$	$A \in \overline{B}_{\theta,1} \setminus \overline{B}_{\theta,\frac{3}{4}}$	**Высказывание** $A \in N(C[0,1]),$: $(Ax)(t)=\sin \pi t \cdot x(0)$
3.	intY=∅	x_0 – внешняя точка Y.	**Множества** X = {a,b,c,d}, $x_0 = a$ τ = {∅, X}, Y={a,c,d}
4.	$\lVert F_g \rVert \geq 1$	$\lVert F_f \rVert \leq 1$	**Высказывания**

№	A	B	Дополнительная информация
5.	$dist\left(f, Sp^{\perp}(\varphi)\right) \le 1$	$dist\left(f, Sp(\varphi)\right) \le 1$	$H = L_2[0,1],\ f(t) = 1,$ $F_g x = \int_0^1 \sin \pi t \cdot x(t)dt,$ $\varphi(t) = t^2$
6.	Y замкнуто	Y компактно	**Параметрическое высказывание** <X,τ> – хаусдорфово топологическое пр-во, $Y \subseteq X$
7.	$FABx_0$	$FBAx_0$	**Числа** X = C[0,1]; (Ax)(t) = $\int_0^1 t \cdot x(s)ds$; (Bx)(t) = $x^2(t)$; Fx = $x(1)$; $x_0(t)$ = t .
8.	$\left\|x\right\|_{C^2[-1,0]}$	$\left\|x\right\|_{L_1[0,1]}$	**Числа** $x(t) = t^2 + t$.
9.	Y – вполне ограничено	Y – ограничено	**Параметрическое высказывание** <X, d_x > – м.п., $Y \subseteq X$
10.	$\sigma(A) = [-1,1]$	Ряд Неймана для резольвенты сходится для $\lambda \in C : \lvert\lambda\rvert > 1$	**Высказывание** (Ax)(t)= $e^{it}x(t), t \in [0,2\pi]$.

6.3. Ответы

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ответ	D	C	A	C	A	A	D	A	B	B

6.4. Примеры итогового контроля

ВАРИАНТ 2			
№	**A**	**B**	**Дополнительная информация**
1	kerA=θ	A – линейный оператор	**Высказывание** X,Y – л.п.; $F \in L(X,P)$; $a \in Y$; $Ax=F(3x)+a$.
2	$A \in \overline{B}_{\theta,1} \setminus B_{\theta,\frac{1}{4}}$	$\sigma(A) = \{0,1\}$	**Высказывание** $A \in N(C[0,1]),: (Ax)(t)=$ $\int_0^1 tsx(s)ds$
3	$cl(0;1)$ *в т.п.* $< X;\tau_2 >$	$cl(0;1)$ *в т.п.* $< X;\tau_1 >$	**Множества** X = **R** , $\tau_1 = \{\varnothing, X, (a, +\infty)\}$, $\tau_2 = \tau_0$
4	x_0 – внутренняя точка Y.	x_0 – точка прикосновения Y	**Параметрическое высказывание** $<X, \tau>$ – т.п. $Y \subseteq X$, $x_0 \in X$
5	Y – замкнутое множество	$\partial Y = \{1\}$	**Высказывание** $<X, \tau>$ – т.п. $X = (0, +\infty)$, $\tau = \tau_x$, $Y= (0, 1]$.
6	$\lVert F_g \rVert \le 1$	$\lVert F_f \rVert \ge 1$	**Высказывания** $H = L_2[0,1]$, $f(t) = t+1$, $F_g(x) = \int_0^1 t^2 \cdot x(t)dt$, $\varphi(t) = t$
7	$dist(f, Sp^{\perp}(\varphi)) \le 1$	$dist(f, Sp(\varphi)) \le 1$	
8	$\lVert x \rVert_{C^2[0,2]}$	$\lVert x \rVert_{L_2[0,1]}$	**Сравнить числа** $x(t) = t^5$
9	Y – банахово пространство в X	Y ограничено в X	**Высказывание** Задано н.п. X= C[0,1]. Y – множество многочленов степени не больше 4.
10	Ряд Неймана для резольвенты при заданном λ сходится	$(\lambda I - A)^{-1}$ непрерывна	**Высказывание** $A \in N(X), \lambda \in \rho(A)$ *и* $\lvert\lambda\rvert < \lVert A \rVert$

Ответы:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ответ	D	A	A	B	C	C	D	A	A	B

ВАРИАНТ 3			
№	**A**	**B**	**Дополнительная информация**
1	V – линейно независимое множество	V – конечномерное линейное подпространство в C[0,1]	**Высказывание** A:C[0,1] $\to$C[0,1], (Ax)(t)= $(t^2+t^4)\cdot x(0)$, V= imA
2	$A\in \overline{B}_{\theta,1}\setminus B_{\theta,\frac{1}{4}}$	$\sigma(A)=\{0,\frac{1}{6}\}$	**Высказывание** $A\in N(C[0,1])$: $(Ax)(t)=\int_0^1 t^2s^3x(s)ds$
3	∂Y	clY	**Множества** X = {a,b,c,d}, τ = {$\varnothing$, X}, Y={a,b,c}
4	x – внутренняя точка Y	x – предельная точка Y.	**Параметрическое высказывание** <X, τ > – т.п. Y$\subseteq$ X, x $\in$ X
5	$\lVert F_g\rVert\geq 1$	$\lVert F_f\rVert\leq 1$	**Высказывания** $H=L_2[0,1],\ f(t)=t,$ $F_g(x)=\int_0^1 x(t)dt,$ $\varphi(t)=\sin(\pi t)$
6	$dist\left(f, Sp^{\perp}(\varphi)\right)\leq 1$	$dist\left(f, Sp(\varphi)\right)\leq 1$	
7	$FABx_0$	$FBAx_0$	**Числа** X = C[0,1], (Ax)(t) = $\int_0^1 t^2x(s)ds$; (Bx)(t) = tx(t); Fx = x (1); $x_0(t)=t^3$.
8	$\lVert X\rVert_{C[-1,1]}$	$\lVert X\rVert_{L_1[0,1]}$	**Сравнить числа** $x(t)=t^3$.
9	X – конечномерное, нормированное пространство	X – сеперабельное нормированное пространство	**Параметрическое высказывание** <X,$\lVert\cdot\rVert_x$> – н.п.
10	λ – точка спектра A	$R_\lambda(A)$ непрерывна	**Высказывание** $A\in N(X),\lambda\in\sigma(A)$

Ответы:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ответ	B	C	C	E	C	A	B	A	B	A

ВАРИАНТ 4			
№	**A**	**B**	**Дополнительная информация**
1	A – сюрьективен	Ker A≡θ	**Высказывание** A:C[0,1] →C^1[0,1], (Ax)(t)= $\int_0^t (s+1)^4 x(s)ds$
2	$\rho(A) = C \setminus [0,1]$	$A \in \overline{B}_{\theta,1} \setminus \overline{B}_{\theta,\frac{3}{4}}$	**Высказывание** $A \in N(C[0,1])$: $(Ax)(t) = \sin t \cdot x(1)$
3	intY=∅	x_0 – внешняя точка Y	**Множества** X = {a,b,c,d}, $x_0 = b$ τ = {∅, X}, Y={a,c,d}
4	x – граничная точка Y.	x – точка прикосновения Y	**Параметрическое высказывание** <X, τ > – т.п. Y⊆ X, x ∈ X
5	$\{x_n\}$ сходится к $x_0 \equiv 0$ в пространстве $C\ [0,1]$	$\{x_n\}$ сходится к $x_0 \equiv 0$ в пространстве $L_1[0,\frac{1}{2}]$	Высказывание $x_n = t^{n+1} - t^n$
6	Y замкнуто	Y компактно	**Параметрическое высказывание** <X,τ> – хаусдорфово топологическое пр-во, $Y \subseteq X$
7	$FABx_0$	$FBAx_0$	**Числа** X = C[0,1], (Ax)(t) = $\int_0^1 x(s)ds$; (Bx)(t) = $x(t) + 2x(1)$; Fx = $x(1)$; $x_0(t)$ = t .
8	$\lVert x \rVert_{C^2[-1,0]}$	$\lVert x \rVert_{L_1[0,1]}$	**Числа** $x(t) = t + 1$.
9	Y – вполне ограничено	Y – ограничено	**Параметрическое высказывание** <X, d_x > – м.п., $Y \subseteq X$
10	Ряд Неймана для резольвенты сходится для $\lambda \in C : \lvert\lambda\rvert > 1$	$\sigma(A) = [-1,1]$	**Высказывание** (Ax)(t)= $e^{it} x(t), t \in [0,2\pi]$

Ответы:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ответ	C	B	A	B	B	B	C	A	B	A

ВАРИАНТ 5			
№	**A**	**B**	**Дополнительная информация**
1	V – к/м линейное подпространство	Im A = Y	**Высказывание** A:X $\to$ Y, X=Y=C[0,1], (Ax)(t)= $\int_0^1 t^2 s^4 x(s)ds$, V= im A.
2	$A \in \overline{B}_{\theta,2} \setminus B_{\theta,1}$	$\sigma(A) = \{\lambda \in C : \lvert\lambda\rvert = 1\}$	**Высказывание** $A \in N(C[0,\pi])$, $(Ax)(t)= e^{it} \cdot x(t)$
3	∂Y={d,c,b}	x_0 – внутренняя точка Y	**Множества** X = {a,b,c,d}, $x_0 = c$ τ = {∅, X,{a)}, Y={a,c,d}
4	x – внешняя точка Y	x – точка прикосновения Y	**Параметрическое высказывание** <X, τ > – т.п. Y⊆ X, x ∈ X.
5	$\{x_n\}$ сходится в пространстве $C\ [-1,0]$	$\{x_n\}$ сходится в пространстве $L_1[0,1]$	**Высказывание** $x_n = \frac{1}{n}\sin \pi nt$
6	Y – к/м подпространство	Y – сеперабельно	**Параметрическое высказывание** <X, d_x > – м.п., $Y \subseteq X$
7	$FABx_0$	$FBAx_0$	**Числа** X = C[0,1], (Ax)(t)= $\int_0^1 \cos(t)x(s)ds$; (Bx)(t) $= tx(t)$;Fx $= x(0)$;x $_0$(t) =1.
8	$\lVert x \rVert_{C^1[-1,0]}$	$\lVert x \rVert_{L_2[0,1]}$	**Числа** $x(t) = 2t + 1$.
9	Y – банахово пространство	N(X,Y) – банахово пространство	**Параметрическое высказывание** A: X→Y – л.н.о.
10	Ряд Неймана расходится для всех λ: $\lvert\lambda\rvert < \frac{1}{3}$	$R_\lambda(A)$ непрерывна	**Высказывание** (Ax)(t)= $\int_0^1 ts^2 x(s)ds, t \in [0,1]$, λ=0,25.

Ответы заполнить самостоятельно:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ответ										

ВАРИАНТ 6			
№	**A**	**B**	**Дополнительная информация**
1	А – сюрьективен	Ker A≡θ	**Высказывание** A:C[0,1] →C[0,1], (Ax)(t)= $x(t)-\int_0^1 s^4 x(s)ds$
2	Im A – банахово пространство	$A\in \overline{B}_{\theta,1}\setminus \overline{B}_{\theta,\frac{3}{4}}$	**Высказывание** $A\in N(C[0,1]),$: $(Ax)(t)=\int_0^1 \sin\pi t\cdot\cos\pi s\cdot x(s)ds$
3	Y – открыто	∂Y={2,3}	**Множества** X =(0,3], $\tau=\tau_x$, Y=(2,3]
4	clY.	cl(int Y).	**Множества** <X, τ > – т.п. Y⊆ X.
5	$\{x_n\}$ сходится в пространстве $C^1[0,\frac{1}{2}]$	$\{x_n\}$ сходится в пространстве $L_2[0,1]$	**Высказывание** $x_n=e^{-\frac{t}{n}}$
6	Y компактно	Y ограничено	**Параметрическое высказывание** <X,τ> – хаусдорфово топологическое пр-во, $Y\subseteq X$
7	$FABx_0$	$FBAx_0$	**Числа.** X = C[0,1], (Ax)(t) = $\int_0^t x(s)ds$; (Bx)(t) = $t^3x(0)$; Fx = $x(1)+x(0)$; x $_0$(t) = 2t+1 .
8	$\|x\|_{C^2[-1,0]}$	$\|x\|_{L_1[0,1]}$	**Числа** $x(t)=2t$
9	T – компактное множество	C(T) – банахово пространство	**Параметрическое высказывание** X – пространство непрерывных функций, определённых на множестве T
10	$\sigma(A)=[-1,1]$	Ряд Неймана для резольвенты сходится для $\lambda\in C:\|\lambda\|>1$	**Высказывание** (Ax)(t)= $e^{it}x(t), t\in[-\pi,\pi]$.

Ответы заполнить самостоятельно:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ответ										

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ

7.1. УТВ. М-13. Принцип сжимающих отображений

В полном м.п. $<X, d_X>$ всякое сжимающее отображение $A:X\to X$ имеет единственную неподвижную точку ($Ax=x$), к которой сходятся последовательные приближения $x_n = Ax_{n-1}$, $n=0,1,2,...$ при любом $x_0 \in X$.

Доказательство теоремы.

Доказательство проведем в 4 этапа.

1. Сжимающее отображение непрерывно? (A сжимающее & $x\in X$, $x_n\to x$) =(отображение непрерывно)$\Rightarrow$ $Ax_n\to Ax$.

Доказательство.

$x\in X$, $x_n\to x$ $\Leftarrow$(опр. сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $d(x_n,x)\to 0$ $(n\to\infty)$ =(A сжимающее о.)$\Rightarrow$ $d(Ax_n,Ax) \le \alpha d(x_n,x) \to 0$ =(неотрицательность метрики)$\Rightarrow$ $0 \le d(Ax_n,Ax) \le \alpha d(x_n,x) \to 0$ =(лемма о двух милиционерах)$\Rightarrow$ $d(Ax_n,Ax) \to 0$ $\Leftarrow$(опр. сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $Ax_n\to Ax$!

2. Единственность решения уравнения $Ax = x$ (единственность *неподвижной точки*)?

Доказательство.

$x_1 = Ax_1$ & $x_2 = Ax_2$ =(A сжимающее о.)$\Rightarrow$ $d(x_1,x_2) = d(Ax_1,Ax_2) \le \alpha\, d(x_1,x_2)$

=($d \ge 0$ & $\alpha< 1$)$\Rightarrow$ $d(x_1,x_2) = 0$ $\Leftarrow$(невырожденность метрики)$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$!

3. Последовательность $\{x_n = Ax_{n-1}\}$ фундаментальна ($n,m \to\infty \Rightarrow d(x_n,x_m)\to 0$)?

Доказательство.

Пусть для определенности $m > n$. $d(x_n,x_m)$ =(определение x_n)= $d(Ax_{n-1},Ax_{m-1})$ $\le$(A сжимающее о.)$\le$ $\alpha\, d(x_{n-1},x_{m-1})$ =(определение x_n)= $\alpha\, d(Ax_{n-2},Ax_{m-2})$ $\le$(A сжимающее о.)$\le$ $\alpha^2\, d(x_{n-2},x_{m-2}) \le \ldots \le \alpha^n\, d(x_0,x_{m-n})$ $\le$(неравенство Δ)$\le$ $\alpha^n\, [d(x_0,x_1) + d(x_1, x_{m-n})]$ $\le$(неравенство Δ)$\le$ $\alpha^n\, [d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})]$ =(определение x_n)= $\alpha^n\, [d(x_0,x_1) + d(Ax_0,Ax_1) + d(Ax_1,Ax_2) + \ldots + d(Ax_{m-n-2}, Ax_{m-n-1})]$ $\le$(A сжимающее о.)$\le$ $\alpha^n\, [d(x_0,x_1) + \alpha d(x_0,x_1) + \alpha d(x_1,x_2) + \ldots + \alpha d(x_{m-n-2}, x_{m-n-1})]$ =(определение x_n)= $\alpha^n\, [d(x_0,x_1) + \alpha d(x_0,x_1) + \alpha d(Ax_0,Ax_1) +\ldots+ \alpha d(Ax_{m-n-3}, Ax_{m-n-2})]$ $\le$(A сжимающее о.)$\le$ $\alpha^n\, [d(x_0,x_1) + \alpha d(x_0,x_1) + \alpha^2\, d(x_0,x_1) + \ldots + \alpha^2\, d(x_{m-n-3}, x_{m-n-2})]$ $\le$(продолжаем таким же образом)$\le$ $\alpha^n\, d(x_0,x_1)\, (1 + \alpha + \alpha^2 +\ldots + \alpha^{m-n-1})$ $\le$(конечная сумма меньше суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии)$\le$ $\alpha^n(1 - \alpha)^{-1}\, d(x_0,x_1) \to 0$ $(n\to\infty)$ =(свойства метрики & $m > n$)$\Rightarrow$ $d(x_n,x_m)\to 0$ $(n,m \to\infty)$!

4. Так как X – *полное* м.п., $x_n \to x^*$. Докажем, что x^* – неподвижная точка о. A?

Доказательство.

$x_n \to x^*$ =(A непрерывное о.)$\Rightarrow$ $Ax_n \to Ax^*$ =(определение $x_n = Ax_{n-1}$)$\Rightarrow$ $x_{n+1} \to Ax^*$ =(единственность предела сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $x^* = Ax^*$.

7.2. УТВ. Н-7.1. Критерии непрерывности линейного оператора

Пусть $A:\langle X, \|\,.\,\|_X\rangle \to \langle Y, \|\,.\,\|_Y\rangle$: (1° A непрерывен) $\Leftrightarrow$ (2° A непрерывен в т. θ) $\Leftrightarrow$ (3° A ограничен)$\Leftrightarrow$(4° $\exists M \ge 0 \mid \|Ax\|_Y \le M\|x\|_X\ \forall x \in X$).

Доказательство.

1°$\Leftrightarrow$2°?

1°$\Rightarrow$2°? – Очевидно!

2°$\Rightarrow$1°? *Доказательство.* $x_n \to x$ =(непрерывность алгебраических операций в X)$\Rightarrow$ $x_n - x \to \theta_X$ =(2°)$\Rightarrow$ $A(x_n - x) \to A\theta_X$ =(A – л.о.)$\Rightarrow$ $Ax_n - Ax \to \theta_Y$ =(непрерывность алгебраических операций в Y)$\Rightarrow$ $Ax_n \to Ax$ $\Leftarrow$(определение н.о.)$\Rightarrow$ выполнение п.1°

2°$\Rightarrow$3°$\Rightarrow$4°$\Rightarrow$2°?

2°$\Rightarrow$3°? Предположим противное: [$X \supset D$ – ограниченное, но A(D) не ограничено =(определение ограниченного множества)$\Rightarrow$ $A(D) \not\subset B_{\theta,n}\ \forall n \in \mathbf{N}$ =(определение $\subseteq$)$\Rightarrow$ $A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n}) \neq \varnothing\ \forall n \in \mathbf{N}$ =(аксиома выбора)$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists\ y_n \in A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n})$ =(определение образа A(D))$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists\ x_n \in D \mid y_n = Ax_n \in A(D) \cap (Y \setminus B_{\theta,n})$ =(определение дополнения $Y \setminus B_{\theta,n}$)$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists\ x_n \in D \mid \|Ax_n\| \ge n$ =(т.к. $\{x_n\} \subseteq D$ – ограничено)$\Rightarrow$ $z_n = x_n/n \to \theta$ при $n \to \infty$, но $\|Az_n\|$ =($z_n = x_n/n$)= $\|A(x_n/n)\|$ =(линейность о. A и полуоднородность нормы)= $\|Ax_n\| / n \ge$($\|Ax_n\| \ge n$)≥ 1, т.е. Az_n не сходится к θ_Y – противоречит 2° =(не 3° $\Rightarrow$ не 2° эквивалентно 2°$\Rightarrow$3°)$\Rightarrow$ 3° !

3°$\Rightarrow$4°? Предположим противное: не 4°, т.е. $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists\ x_n \neq \theta$ (?) | $\|Ax_n\|_Y > n\|x_n\|$ =(невырожденность и полуоднородность нормы и линейность о. A)$\Rightarrow$ $\left\|A\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\| > n$ =($\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ – ограничена, но $A\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}$ не ограничена)$\Rightarrow$ противоречит 3° =(не 4° $\Rightarrow$ не 3° эквивалентно 3°$\Rightarrow$4°)$\Rightarrow$ 4° !

4°$\Rightarrow$2°? $x_n \to \theta_X$ $\Leftarrow$(определение сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $\|x_n\|_X \to 0$ =($\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$)$\Rightarrow$ $0 \le \|Ax_n\|_Y \le M\|x_n\|_X \to 0$ =(два милиционера)$\Rightarrow$ $\|Ax_n\|_Y \to 0$ $\Leftarrow$(определение сходящейся последовательности)$\Rightarrow$ $Ax_n \to \theta_Y$ $\Leftarrow$(определение непрерывного в θ о.)$\Rightarrow$ 2° .

7.3. УТВ. Н-7.2. Формулы для вычисления нормы линейного непрерывного оператора $A \in N(X,Y)$

Норма линейного непрерывного оператора может быть вычислена по формулам:

$\|A\|$ = (α) $\sup\{ \|Ax\|_Y : \|x\|_X \le 1\}$ = (β) $\sup\{ \|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\}$ =

= (γ) $\sup\{ \|Ax\|_Y / \|x\|_X : x \ne \theta\}$.

Доказательство.

$\alpha=\beta$? $\beta\le\alpha$ – очевидно (sup подмножества). $\alpha\le\beta$? Пусть $0<\|x\|\le 1$. $\|Ax\|$ =(полуоднородность нормы и линейность о. A)= $\|x\| \left\| A(\frac{x}{\|x\|}) \right\|$ $\le$($\|x\| \le 1$ и определение sup)$\le$ $\sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\}$ = β =(sup – наименьшая мажоранта)$\Rightarrow$ $\alpha\le\beta$ =(антисимметричность **$\le$)$\Rightarrow$** $\alpha=\beta$!

$\beta=\gamma$? β = $\sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X = 1\}$ =(делим на единицу)= $\sup\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : \|x\| = 1\}$ $\le$(sup подмножества)$\le$ $\sup\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x\ne\theta\}$ = γ, т.е. $\beta\le\gamma$**.** Далее при $x\ne\theta$ $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ =(полуоднородность нормы и линейность о. A)= $\left\| A(\frac{x}{\|x\|}) \right\|$ $\le$(sup – мажоранта)$\le$ β =(sup – наименьшая мажоранта)$\Rightarrow$ $\gamma\le\beta$ =(антисимметричность **$\le$)$\Rightarrow$** $\beta=\gamma$!

$\|A\|=\alpha$? Для $\|x\| \le 1$ имеем $\|Ax\|$ $\le$(нормативное неравенство)$\le$ $\|A\|\,\|x\|$ $\le$($\|x\| \le 1$)$\le$ $\|A\|$ =(sup – наименьшая мажоранта)$\Rightarrow$ $\alpha\le\|A\|$. Далее фиксируем $\varepsilon > 0$ =(определение нормы л.о.)$\Rightarrow$ $\exists\, x_\varepsilon \ne \theta \mid \|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$ =(делим на $\|x_\varepsilon\| > 0$ и полуоднородность нормы и линейность о. A)$\Rightarrow$ $\left\| A(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}) \right\|$ > $\|A\| - \varepsilon$ =(sup – мажоранта)$\Rightarrow$ $\beta=\alpha > \|A\| - \varepsilon$ =($\varepsilon\to+0$)$\Rightarrow$ $\alpha\ge\|A\|$ =(антисимметричность **$\le$)$\Rightarrow$** $\|A\| = \alpha$! =(транзитивность отношения =)$\Rightarrow$ $\|A\| = \alpha = \beta = \gamma$.

7.4. УТВ. Н-7.7. Теорема Банаха об обратном операторе

(**N**(X – б.п., Y – б.п.) э A – биективен) $\Leftrightarrow$ ($A^{-1} \in$ **N**(Y – б.п., X – б.п.), т.е. A – изоморфизм в **N**)

Доказательство.

Необходимость $\Rightarrow$? $X \supseteq u$ – открыто. $(A^{-1})^{-1}u$ =(A – биекция $\Rightarrow$ $(A^{-1})^{-1} = A$)= Au – открыто в Y в силу т. об открытом отображении УТВ. Н-7.6, т.е. при обратном отображении $A^{-1}:Y\to X$ прообраз $(A^{-1})^{-1}u$ $\forall$ открытого м. u открыт **$\Leftarrow$(**одно из эквивалентных определений непрерывного отображения)$\Rightarrow$ A^{-1}:Y$\to$X непрерывно **!** *Достаточность*: $\Leftarrow$**?** Вытекает из того, что **N** – подкатегория в **S.**

7.5. УТВ. Н-9. Теорема о ряде Неймана

(A$\in$**N**(X – б.п.) & ||A||<1)$\Rightarrow$(ряд Неймана $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ = (I – A)$^{-1}\in$**N**(X) & ||(I – A)$^{-1}$|| $\le$ (1 – ||A||)$^{-1}$).

Доказательство.

а) Пусть X – б.п.=(УТВ N-7.3)$\Rightarrow$ **N**(X) б.п. $\Leftarrow$(критерий банаховости)$\Rightarrow$ $\forall$ абсолютно сходящийся ряд в **N**(X) сходится ! Рассмотрим ряд из норм $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left\|A^k\right\|$ $\le$(УТВ. N-8.2: $\|A^n\| \le \|A\|^n$)$\le$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|A\|^k$ =(||A||<1)= $\dfrac{1}{1-\|A\|}$ =(мажорантный признак сходимости неотрицательных числовых рядов)$\Rightarrow$ ряд Неймана $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ абсолютно сходится =(a°)$\Rightarrow$ ряд Неймана сходится в **N**(X) !

б) (I – A) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ =(дистрибутивный закон для операторных рядов)= $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(I-A)A^k$ =(определение сходящегося ряда)= $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(I-A)A^k$ =(**N**(X) – банахова алгебра)= $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}(A^k-A^{k+1})$ =(взаимно уничтожаются слагаемые)= $\lim\limits_{n\to\infty}(I-A^{n+1})$ =(линейность lim)= $I-\lim\limits_{n\to\infty}A^{n+1}$ =(||A||<1$\Rightarrow A^{n+1}\to\theta$ при $n\to\infty$)= I.

Аналогично, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ (I – A) = I =(определение обратного морфизма)$\Rightarrow$ (I-A)$^{-1}$ = $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ (*) !

в) ||(I-A)$^{-1}$|| =(*)= $\|\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k\|$ =(определение суммы сходящегося ряда)= $\|\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} A^k\|$ =(непрерывность нормы)= $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\sum\limits_{k=0}^{n} A^k\right\|$ $\le$(неравенство треугольника)$\le$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\left\|A^k\right\|$ $\le$(УТВ. N-8.2)$\le$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\|A\|^k$ =(||A||<1)= $\dfrac{1}{1-\|A\|}$.

7.6. УТВ. ГП-4. Теорема о проекции

Если Y – замкнутое л.п/п в г.п. $H \Rightarrow H = Y \oplus Y^{\perp}$ (рис. 7.1).

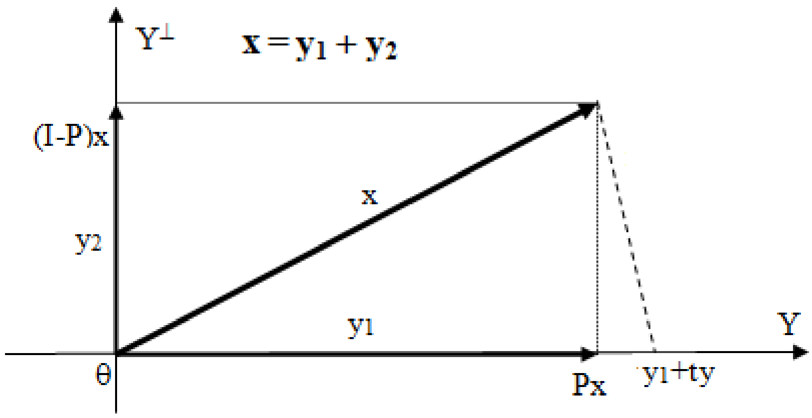

Рис. 7.1

*Доказательство***.** Пусть $x \in H$; положим $y_1 = Px$ – ближайший к x вектор в Y, $\exists$ и единственный в силу леммы Рисса. Обозначим $y_2 = x - y_1$, тогда $x = y_1 + y_2$. **$y_2 \in Y^{\perp}$?** Пусть $d = \| x - y_1\|$ =(y_1 – ближайший к x вектор в Y)$\Rightarrow \forall(y \in Y,\ t \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C})$

$d^2 \leq \|x - (y_1 + ty)\|^2$ =($y_2 = x - y_1$)= $\|y_2 - ty\|^2$ =(определение нормы в г.п.)=

$(y_2 - ty,\ y_2 - ty)$ =(свойства с.п.)= $(y_2,y_2) - (ty,y_2) - (y_2,ty) + t^2(y,y)$ =(свойства с.п. и определение нормы в г.п.)=

$\|y_2\|^2 - t[(y,y_2) + \overline{(y,y_2)}] + t^2\|y\|^2$ =($z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z$)= $d^2 - 2t\mathrm{Re}(y,y_2) + t^2\|y\|^2$ = (после сокращения d^2)$\Rightarrow \forall(y \in Y,\ t \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C})$ $\ -2t\mathrm{Re}(y,y_2) + t^2\|y\|^2 \geq 0$ (*) Из (*) получаем:

1) $t > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(y,y_2) \leq \dfrac{t}{2}\|y\|^2$ =($t \to +0$)$\Rightarrow \mathrm{Re}(y,y_2) \leq 0$

2) $t < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(y,y_2) \geq \dfrac{t}{2}\|y\|^2$ =($t \to -0$)$\Rightarrow \mathrm{Re}(y,y_2) \geq 0$, т.е. $\mathrm{Re}(y,y_2) = 0\ \forall y \in Y$.

Аналогично, заменяя t на it, получим $\mathrm{Im}(y,y_2) = 0\ \forall y \in Y$. Итак, $(y,y_2) = 0\ \forall y \in Y$ $\Leftarrow$(определение $Y^{\perp}$)$\Rightarrow y_2 \in Y^{\perp}$ =(x – произвольный вектор из H)$\Rightarrow H = Y + Y^{\perp}$ =(УТВ. ГП-2.5)$\Rightarrow H = Y \oplus Y^{\perp}$.

7.7. УТВ ГП-5. Теорема об отрезке ряда Фурье.

Отрезок ряда Фурье $s_m = \sum_{k=1,m} x_k\varphi_k$ является проекцией вектора x на конечномерное линейное подпространство $H_m = Sp\{\varphi_k\}_{k=1,m}$ (см. рис. 7.2).

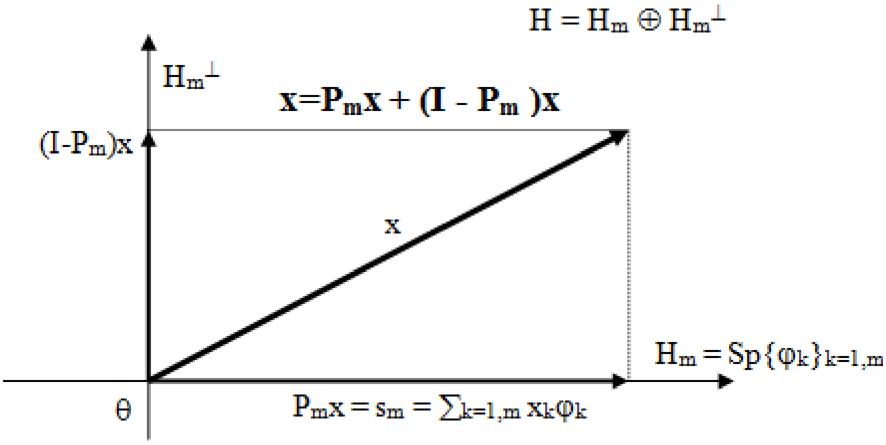

Рис. 7.2

Доказательство.

Докажем, что $x = s_m + (x - s_m)$. $x - s_m \perp H_m$.

Перпендикулярность H_m эквивалентна перпендикулярности φ_n $\forall$ $n\in\{1,2,\ldots, m\}= \mathbf{N}_m$, т.е. нужно проверить $x - s_m \perp \varphi_n$ $\forall$ $n\in \mathbf{N}_m$? $(x - s_m , \varphi_n)$ =(подставляем s_m и линейность с.п. по первому аргументу)= $(x, \varphi_n) - (\sum_{k=1}^{m} x_k\varphi_k , \varphi_n)$ =($\{\varphi_k\}$ – ортонормированная последовательность)= x_n-$x_n(\varphi_n, \varphi_n)=0$ $\forall n\in\mathbf{N}_m$ =(x – произвольный вектор из H)$\Rightarrow$ $H = H_m + H_m^{\perp}$ =(УТВ ГП-2.5)$\Rightarrow$ $H = H_m \oplus H_m^{\perp}$ & $P_m x = s_m$.

Следствия УТВ ГП_5:

1) Неравенство Бесселя: $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le \|x\|^2$.

2) Ряд Фурье всегда сходится, причем его сумма $s = \sum_k x_k\varphi_k$ является проекцией вектора x на линейное подпространство $H_\infty = \overline{Sp}\{\varphi_k\}_{k=1,\infty}$.

3) Ортопроектор P_m:$H \to H_m$, $P_m x = \sum_{k=1,m} (x,\varphi_k)\, \varphi_k$, – линейный непрерывный самосопряжённый оператор, причем $\| P_m \| = 1$.

Доказательство следствий.

1) $\forall m$ $\|s_m\|^2 = (\sum_{k=1}^{m} x_k\varphi_k , \sum_{k=1}^{m} x_k\varphi_k)$ =($\{\varphi_k\}$ – ортонормированная последовательность)= $\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2$ $\le$($\| x \|^2 = \| s_m \|^2 + \| x - s_m \|^2$)$\le \| x \|^2$ $\forall m$ =($m\to\infty$)$\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le \| x \|^2$.

Следствие 1 доказано.

2) Пусть, для определенности m>n. $\|s_m - s_n\|^2$ =(подставляем $s_m - s_n$)= $\left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \varphi_k \right\|^2$

=(определение нормы в г.п.)= $(\sum_{k=n+1}^{m} x_k \varphi_k, \sum_{k=n+1}^{m} x_k \varphi_k)$ =($\{\varphi_k\}$ – ортонормированная последогва-тельность)= $\sum_{k=n+1}^{m} |x_k|^2 \to 0$ (n,m$\to\infty$), т.к. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ сходится =(H – б.п.)$\Rightarrow$ последовательность $\{s_m\}$ сходится, т.е. ряд Фурье сходится.

Сумма ряда Фурье s = $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k$ =(определение суммы сходящегося ряда)= $\lim_{m\to\infty} s_m$ = $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_k \varphi_k$ $\in$(критерий замыкания)$\in$ **cl**Sp$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ =(обозначим)= $H_\infty \subseteq$ H. s – проекция x на H_∞?

x = s + (x – s), x – s $\perp$ H_∞?

Перпендикулярность H_∞ эквивалентна перпендикулярности φ_n $\forall$n, т.е. нужно проверить x – s $\perp$ φ_n $\forall$ n? (x – s , φ_n) =(s = $\lim_{m\to\infty} s_m$)= (x – lim s_m, φ_n) =(непрерывность алгебраических операций и с.п.)= $\lim_{m\to\infty}(x - s_m, \varphi_n)$ =(x – s_m $\perp$ φ_n при m>n)= 0. Следствие 2 доказано.

3) Вытекает непосредственно из теоремы об отрезке и теоремы о проекции.

7.8. УТВ. ГП-11. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве H

Пусть F – функционал, F$\in$H* $\Rightarrow$ $\exists$ единственный вектор g$\in$H | Fx = (x,g) $\forall$x$\in$H & $\|F\|_{H^*}$ = $\|g\|_H$.

Доказательство.

1° Если N = kerF = H, то g = θ_H и F = θ_{H^*} , Fx = (x, θ_H) $\forall$x$\in$H !

2° kerF = N $\neq$ H =(N – замкнутое л.п/п в H и теорема о проекции)$\Rightarrow$ H = N $\oplus$ $N^\perp$, $N^\perp \neq \theta$. Пусть z$\in$ $N^\perp$, z $\neq$ θ. $\forall$x$\in$H F(x)z – F(z)x $\in$(F – линейный функционал)$\in$ N = kerF

=(z $\perp$ N)$\Rightarrow$ $\forall$x$\in$H F(x)(z, z) – F(z)(x, z) = 0 =(z$\neq\theta$)$\Rightarrow$ $\forall$x$\in$H Fx = $\frac{F(z)}{(z,z)}(x,z)$ =(скаляроное произведение сопряженно линейно по второму аргументу)= $(x, \frac{\overline{F(z)}}{\|z\|^2} z)$ = (x, g), где g = $\frac{\overline{F(z)}}{\|z\|^2} z$.

Итак, существование g $\in$H доказано .

Докажем единственность. Пусть (x, g) = (x, p) $\forall x \in H$ =(с.п. сопряженно линейно по второму аргументу)$\Rightarrow$ (x, g-p) = 0 $\forall x \in H$ =(при x = g – p)$\Rightarrow$ (g-p, g-p) =(определение нормы в г.п.)= $\|g - p\|^2 = 0$ =(невырожденность нормы)$\Rightarrow$ g = p ! $\|F\|_{H^*} = \|g\|_H$? $\forall x \in H$ $|F(x)| = |(x, g)| \leq$(неравенство Коши-Буняковского)$\leq \|x\| \, \|g\|$ =(определение нормы л.н.ф. $\|F\|_{H^*}$)$\Rightarrow$ $\mathbf{\|F\| \leq \|g\|}$. Подставляем в нормативное неравенство x = g: $|F(g)| \leq \|F\| \, \|g\|$ =(F(g) = (g, g))$\Rightarrow$ $\|g\|^2 = (g, g) = |F(g)| \leq \|F\| \, \|g\|$ =(делим на $\|g\|$)$\Rightarrow$ $\|g\| \leq \|F\|$ =(антисимметричность отношения **≤)⇒** $\|F\|_{H^*} = \|g\|_H$.

7.9. УТВ. ГП-11.1. Теорема Хана-Банаха в г.п.

(H – г.п., W – замкнутое п/п в H, $G \in W^*$) $\Rightarrow \exists\, F \in H^* |\ F|_W = G \ \&\ \|F\|_{H^*} = \|G\|_{W^*}$.

Доказательство.

Пусть W – замкнутое п/п в H =(критерий банаховости – замкнутость н.п/п в б.п. H)$\Rightarrow$ W – г.п. & $G \in W^*$ =(теорема об общем виде л.н.ф. в г.п. W)$\Rightarrow$ $\exists$ единственный вектор $g \in W \mid G = (\bullet, g)$ =(обозначим)= F, т.е. F(x) = G(x) $\forall x \in W$, т.е. $F|_W = G$. Далее $F \in H^*$ (т.к. скалярное произведение линейно по первому аргументу, и для $\forall x \in H$ $|F(x)| = |(x, g)| \leq$(неравенство Коши-Буняковского)$\leq \|x\| \, \|g\|$ =(критерий непрерывности л.о. в н.п.)$\Rightarrow$ F непрерывно), причем $\|F\|_{H^*}$ =(теорема об общем виде л.н.ф. в г.п. H)= $\|g\|_H$ =(W – н.п/п в г.п. H)= $\|g\|_W$ =(теорема об общем виде л.н.ф. в г.п. W)= $\|G\|_{W^*}$ **.**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа/ М:Физматлит, 2004 – 572 с.

2. Рудин У. Функциональный анализ: учебник для вузов // пер. с англ. В. Я. Лина ; под ред. Е. А. Горина.-СПб:Лань, 2005 – 436 с.

3. Треногин В. А. Функциональный анализ: учебник/ М:Физматлит,2002 – 482 с.

4. Кириллов А. А.,Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа:учебное пособие для вузов по специальностям "Математика" и "Прикладная математика"/М:Наука,1988 – 381 с.

5. Треногин В. А.,Писаревский Б. М.,Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу:учебное пособие для студентов университетов, обучающихся по специальности "Математика" и "Прикладная математика/ М:Физматлит,2002 – 240 с.

6. Дерр В. Я. Функциональный анализ/ М:Юрайт,2012 – 464 с.

7. Очан Ю. С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного: учебное пособие для педагогических институтов/ М:Просвещение,1965. – 231с.

8. Богачев В. И.,Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ:университетский курс/ М:Институт компьютерных исследований,2009 – 724 с.

9. Осиленкер, Б. П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / М : Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 с.

10. Глазырина П. Ю. Функциональный анализ. Типовые задачи:Учебное пособие/ Ект:Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ,2016 – 216 с.

11. Функциональный анализ в упражнениях и задачах/Казань: КГУ им. В. И. Ульянова-Ленина.Вып. 1.Метрические пространства,1970. – 54 с.

12 . Крепкогорский, В.Л. Функциональный анализ: учебное пособие, http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428727

Электронные ресурсы:

1. Библиотека литературы EqWorld, http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm

Учебное пособие

Шилина Алла Владимировна

Оглезнева Анна Николаевна

**ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ.
ЧАСТЬ 1.**

Редактор *Л. А. Богданова*

Корректор *Л. И. Семицветова*

Компьютерная верстка *А. В. Шилина*

Объем данных 1,77 Мб
Подписано к использованию 29.07.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15