ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Г. Г. Шеремет, Т. М. Коневских

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Г. Г. Шеремет, Т. М. Коневских

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебно-методического пособия для бакалавров, изучающих
дисциплину «Алгебра и аналитическая геометрия»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2022

УДК 512(075.8)
ББК 22я73
Ш492

Шеремет Г. Г.

Ш492 Алгебра и аналитическая геометрия. Практикум по аналитической геометрии [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г. Г. Шеремет, Т. М. Коневских ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – 5,78 Мб ; 103 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Sheremet-Konevskih-Algebra-I-Analiticheskaya-Geometriya-Praktikum-Po-Analiticheskoj-Geometrii.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3848-2

Учебно-методическое пособие содержит основной теоретический материал трех разделов курса «Алгебра и аналитическая геометрия»: «Прямые и плоскости», «Линии второго порядка» и «Поверхности второго порядка». Все разделы сопровождаются краткой теоретической информацией. В конце каждого раздела помещены лабораторные работы и приведены подробные решения подобных задач.

Пособие предназначено для всех направлений механико-математического и физического факультетов, изучающих дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» или «Аналитическая геометрия». Пособие также может быть использовано в курсе высшей математики при изучении разделов «Аналитической геометрии».

УДК 512(075.8)
ББК 22я73

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра высшей математики и методики обучения математике Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета (и.о. зав. кафедрой, канд. пед. наук, доцент ***Е. Л. Черемных***);

доцент кафедры математики и физики Пермского военного института войск национальной гвардии Российской Федерации, канд. физ.-мат. наук, доцент ***М. С. Ананьева***

ISBN 978-5-7944-3848-2

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современный компетентностный подход к обучению предполагает практическую направленность изучения математических дисциплин. Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования специальностей «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная математика и информатика», «Информационные системы и технологии», «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», «Компьютерная безопасность», «Информационная безопасность автоматизированных систем» подготовки бакалавров и специалистов определено, что обучающиеся в результате изучения дисциплин математического цикла должны знать основные понятия и инструменты математических дисциплин, уметь использовать математический аппарат в своей профессиональной деятельности.

Курс «Алгебра и аналитическая геометрия» является базовой дисциплиной математического и научного цикла. В результате освоения этой дисциплины студент должен:

знать

основные понятия алгебры и аналитической геометрии, определения и свойства математических объектов, формулировки ключевых утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений;

уметь

решать различные задачи методами алгебры и аналитической геометрии, контролировать правильность вычислений, приобретать новые знания;

владеть

навыками компьютерного моделирования при решении задач алгебры и аналитической геометрии.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для всех направлений механико-математического и физического факультетов, изучающих дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» или «Аналитическая геометрия». Пособие также может быть использовано в курсе высшей математики при изучении разделов «Аналитической геометрии».

Методическое пособие содержит основной теоретический материал трех разделов курса «Алгебра и аналитическая геометрия»: «Прямые и плоскости в пространстве», «Линии второго порядка» и «Поверхности второго порядка». Все разделы сопровождаются краткой теоретической информацией. В конце разделов помещены лабораторные работы и приведены подробные решения подобных задач. Каждое задание лабораторной работы сопровождается построением и исследованием компьютерной модели в программе *geogebra*.

GeoGebra – это бесплатная, кроссплатформенная динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете [https://www.geogebra.org/].

РАЗДЕЛ 1. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методические указания к выполнению лабораторной работы

Задание 1. *Виды уравнений прямой*.

Прямая дана своими уравнениями относительно аффинной системы координат. Записать остальные виды уравнений этой прямой. Привести пример направляющего вектора данной прямой и трех точек, принадлежащих ей. Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Параметрические уравнения	Канонические уравнения	Общие уравнения
$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t, t \in R \end{cases}$		
	$\frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$	
		$\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 1 = 0, \\ x + 7y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Необходимый теоретический материал

Способы задания прямой	Идеи, лежащие в основе вывода уравнений	Уравнения (Аффинная система координат)
Точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\bar{a} = \{m, n, p\}$	Точка $M(x, y, z)$ принадлежит данной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\bar{a}$ коллинеарны.	
	Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.	Канонические уравнения $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$
	или	
	Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них можно выразить через другой с помощью операции умножения вектора на действительное число.	Параметрические уравнения $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, t \in R \end{cases}$
Двумя точками $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$	В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overline{M_0M_1}$.	Канонические уравнения $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

		Параметрические уравнения $\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t, t \in R \end{cases}$
Линия пересечения двух плоскостей, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$	Две плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных в их общих уравнениях не пропорциональны.	Общие уравнения прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Если прямая задана любыми своими уравнениями, всегда можно найти координаты какого-нибудь направляющего вектора и координаты любого числа точек, принадлежащих прямой.

Вид уравнений прямой	Координаты направляющего вектора	Точки, принадлежащие прямой
Канонические уравнения $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$	$\bar{a} = \{m, n, p\}$ и любой ненулевой вектор с пропорциональными координатами	$M_0(x_0, y_0, z_0)$ и любое решение данной системы уравнений
Параметрические уравнения $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, t \in R \end{cases}$	$\bar{a} = \{m, n, p\}$ и любой ненулевой вектор с пропорциональными координатами	$M_0(x_0, y_0, z_0)$ и точка $M(x_0 + mt, y_0 + nt, z_0 + pt)$ при любом значении параметра t
Общие уравнения прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$	$\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$ и любой ненулевой вектор с пропорциональными координатами	Любое решение данной системы уравнений

Образец выполнения задания 1

1. Прямая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t, t \in R \end{cases}.$$

Направляющий вектор $\bar{a} = \{-2, 1, -3\}$, точка, определяющая прямую – $M_0(3, -1, 2)$.
Примеры точек, принадлежащих прямой:
при $t = 1$ точка $M_1(1, 0, -1)$,
при $t = 2$ точка $M_2(-1, 1, -4)$.

Так как известны точка и направляющий вектор прямой, можем написать ее канонические уравнения:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-3}.$$

Одну из возможных систем общих уравнений данной прямой можно получить, разбив канонические уравнения на систему, содержащую два уравнения, и преобразовав каждое из них:

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{1},\\ \dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-3}.\end{cases}\qquad \begin{cases}x-3=-2y-2,\\ -3y-3=z-2.\end{cases}\qquad \begin{cases}x+2y-1=0,\\ 3y+z+1=0.\end{cases}$$

Ответ:

Канонические уравнения	Параметрические уравнения	Общие уравнения	Направляющий вектор	Точки, принадлежащие прямой
$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-3}$	Дано $\begin{cases}x=3-2t,\\ y=-1+t\\ z=2-3t, t\in R\end{cases}$	$\begin{cases}x+2y-1=0,\\ 3y+z+1=0.\end{cases}$	$\bar{a}=\{-2,1,-3\}$	$M_0(3,-1,2)$, $M_1(1,0,-1)$, $M_2(-1,1,-4)$.

2. Прямая задана каноническими уравнениями

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{1}.$$

Направляющий вектор $\bar{a}=\{2,-3,1\}$, точка, определяющая прямую – $M_0(-4,2,-1)$.

Примеры точек, принадлежащих прямой:

Пусть $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{1}=1.$

Тогда точка $M_1(-2,-1,0)$.

Пусть $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{1}=2.$

Тогда точка $M_2(0,-4,1)$.

Так как известны точка и направляющий вектор прямой, можем написать ее параметрические уравнения

$$\begin{cases}x=-4+2t,\\ y=2-3t\\ z=-1+t, t\in R\end{cases}.$$

Одну из возможных систем общих уравнений данной прямой можно получить, выразив в одном из уравнений параметр t через переменные x, y, z и подставив в остальные уравнения.

Например, из третьего уравнения $t = z + 1$.

Тогда $\begin{cases}x=-4+2z+2,\\ y=2-3z-3.\end{cases}\quad \begin{cases}x-2z+2=0,\\ y+3z+1=0.\end{cases}$

Ответ:

Канонические уравнения	Параметрические уравнения	Общие уравнения	Направляющий вектор	Точки, принадлежащие прямой
Дано $\frac{x+4}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{1}$	$\begin{cases} x=-4+2t, \\ y=2-3t \\ z=-1+t, t\in R \end{cases}$	$\begin{cases} x-2z+2=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases}$	$\bar{a}=\{2,-3,1\}$	$M_0(-4,2,-1)$, $M_1(-2,-1,0)$, $M_2(0,-4,1)$.

3. Прямая задана общими уравнениями $\begin{cases} 3x-2y+5z-1=0, \\ x+7y-2z+3=0. \end{cases}$

Используя формулы $\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$, найдем координаты направляющего вектора:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}=4-35=-31, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=5+6=11, \qquad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=21+2=23.$$

Итак, направляющий вектор прямой $\bar{a}=\{-31,11,23\}$.

Найдем координаты некоторых точек, принадлежащих данной прямой.

$$\begin{cases} 3x-2y+5z-1=0, \\ x+7y-2z+3=0. \end{cases} \quad \text{Тогда} \begin{cases} 3x-2y=1-5z, \\ x+7y=-3+2z. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=21+2=23,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1-5z & -2 \\ -3+2z & 7 \end{vmatrix}=7-35z-6+4z=1-31z,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 1-5z \\ 1 & -3+2z \end{vmatrix}=-9+6z-1+5z=-10+11z.$$

Тогда $x=\frac{1-31z}{23}$, $y=\frac{-10+11z}{23}$.

При $z = 0$ получаем $M_0=\left(\frac{1}{23},-\frac{10}{23},0\right)$.

При $z = 1$ получаем $M_1=\left(-\frac{30}{23},\frac{1}{23},1\right)$.

При $z = 2$ получаем $M_2=\left(-\frac{61}{23},\frac{12}{23},2\right)$.

Так как известны точка и направляющий вектор прямой, можем написать ее параметрические уравнения

$$\begin{cases} x=\frac{1}{23}-31t, \\ y=-\frac{10}{23}+11t \\ z=23t, t\in R \end{cases}$$

и канонические уравнения

$$\frac{x-\frac{1}{23}}{-31}=\frac{y+\frac{10}{23}}{11}=\frac{z}{23}.$$

Ответ:

Канонические уравнения	Параметрические уравнения	Общие уравнения	Направляющий вектор
$\dfrac{x-\frac{1}{23}}{-31}=\dfrac{y+\frac{10}{23}}{11}=\dfrac{z}{23}.$	$\begin{cases} x=\frac{1}{23}-31t, \\ y=-\frac{10}{23}+11t \\ z=23t, t\in R \end{cases}$	Дано $\begin{cases} 3x-2y+5z-1=0, \\ x+7y-2z+3=0. \end{cases}$	$\bar{a}=\{-31{,}11{,}23\}$

Точки, принадлежащие прямой
$M_0=\left(\frac{1}{23},-\frac{10}{23},0\right),$ $M_1=\left(-\frac{30}{23},\frac{1}{23},1\right),$ $M_2=\left(-\frac{61}{23},\frac{12}{23},2\right).$

Образец проверки выполненного задания 1 в программе *geogebra*

Для начала работы в программе *geogebra* необходимо включить «*Полотно 3D*». Для этого или во вкладке «*Вид*» выбрать пункт «*Полотно 3D*», или нажать «*Ctrl* + *Shift* + 3».

Для того чтобы построить прямую, заданную параметрическими уравнениями, достаточно в поле ввода ввести «X = (координаты точки через запятую) + λ·(координаты направляющего вектора через запятую)» (рис. 1).

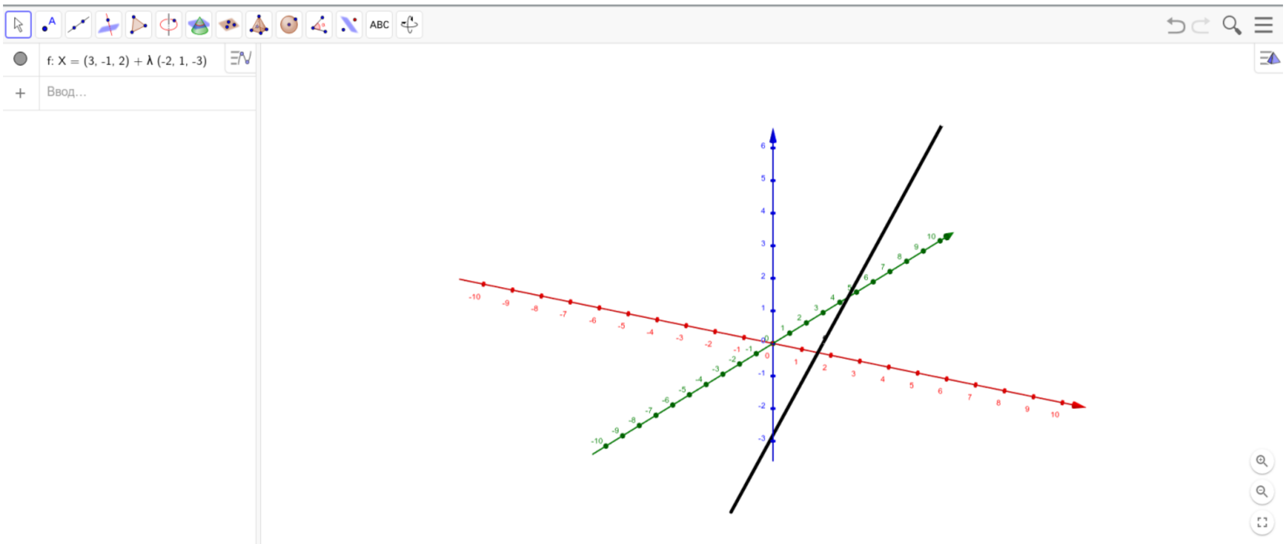


Рис. 1

Для проверки правильности выполненного задания в поле ввода вводим координаты полученных точек и направляющего вектора. Координаты точки вводятся или просто в круглых скобках через запятую, или ввод начинается с заглавного имени точки, после которого через знак равенства в круглых скобках через запятую вводятся ее координаты. При вводе координат вектора вводится его имя строчной буквой, и после знака равенства в круглых скобках координаты (рис. 2).

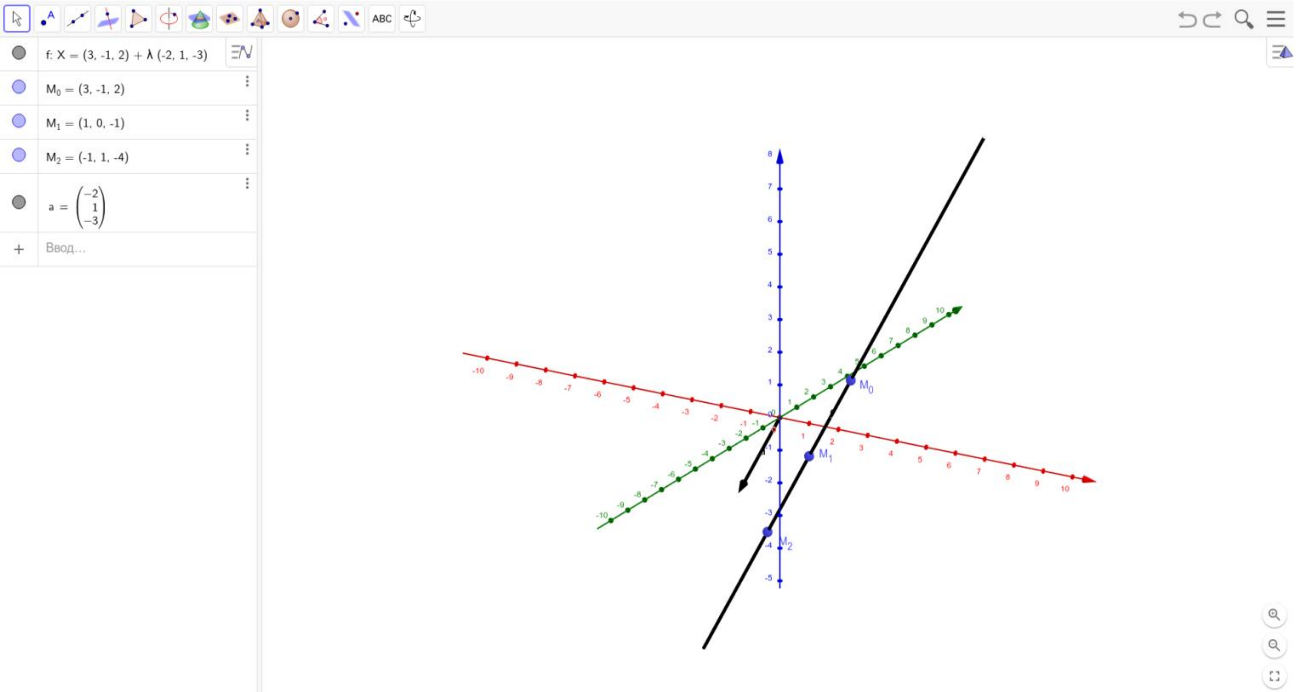


Рис. 2

Визуально убеждаемся в том, что найденные точки принадлежат прямой, и вектор ей параллелен.

Для того чтобы проверить, что канонические и общие уравнения задают ту же прямую, построим соответствующие им множества точек. Для этого в поле ввода в круглых скобках через запятую вводим уравнения, входящие в систему канонических и общих уравнений (рис. 3).

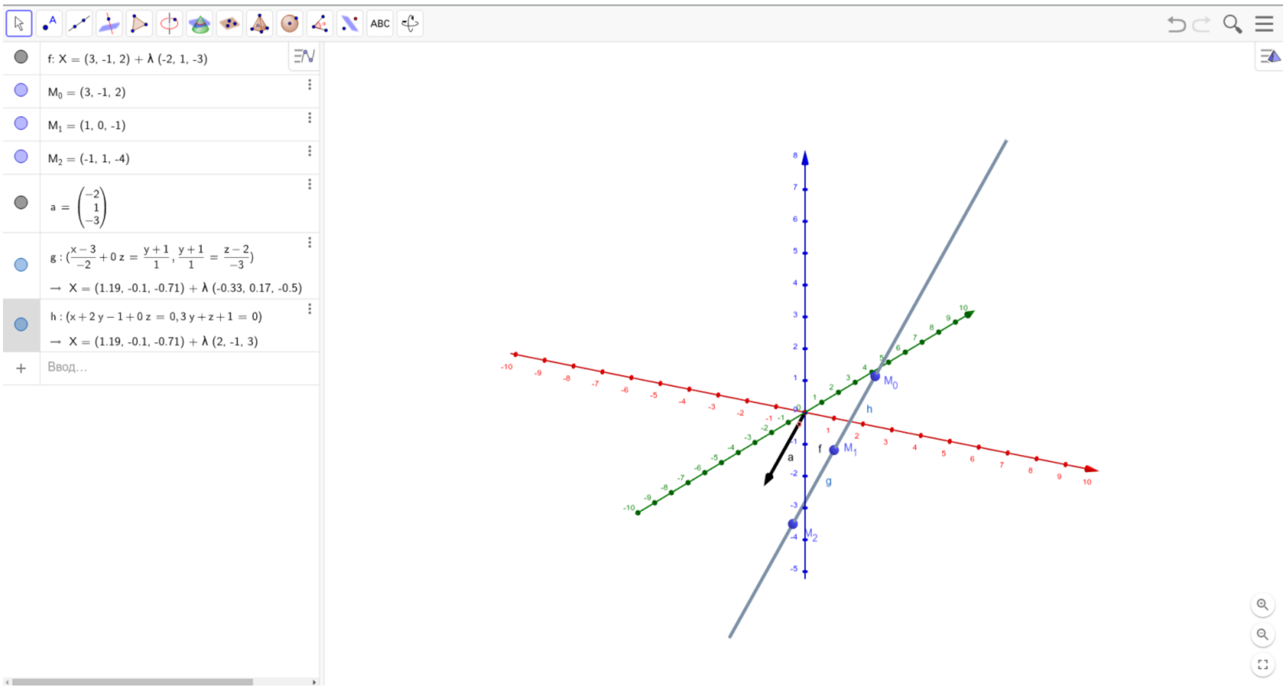


Рис. 3

Изображения всех трех прямых совпадают, значит, задание выполнено верно.

Аналогично поступаем и для двух остальных прямых (рис. 4, 5).

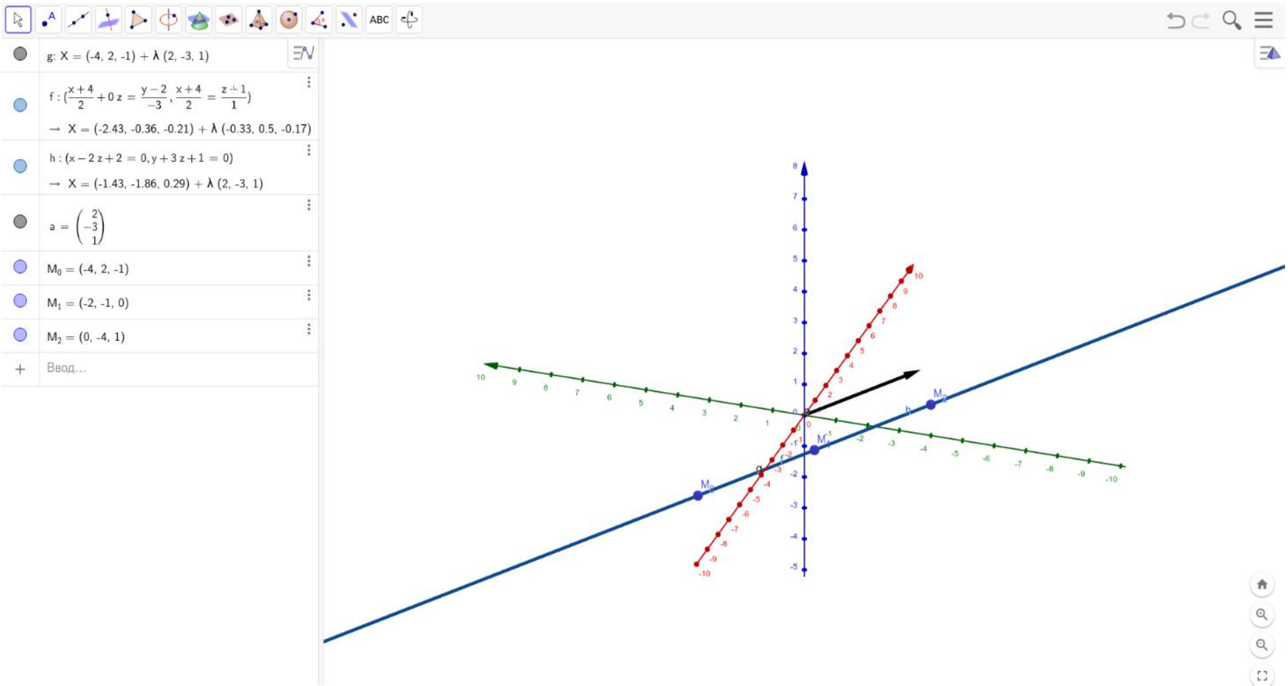


Рис. 4

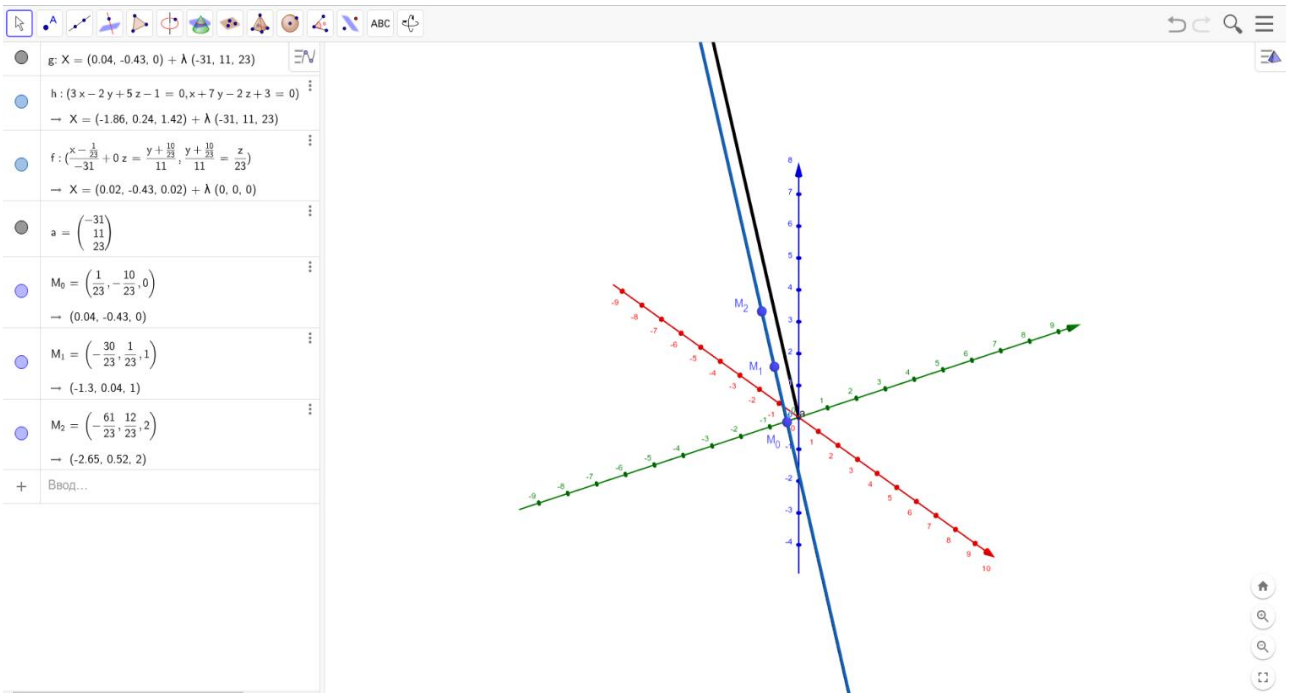


Рис. 5

Ответ на данное задание должен включать в себя таблицу со всеми видами уравнений, координатами точек и вектора и скрин результатов, полученных в программе *geogebra* (поле ввода со всеми уравнениями и координатами и чертеж).

Задание 2. Взаимное расположение прямых.

Две прямые даны своими уравнениями относительно прямоугольной декартовой системы координат. Выяснить взаимное расположение этих прямых (совпадают, параллельны и различны, пересекаются, скрещиваются). Для пересекающихся прямых найти координаты точки их пересечения и угол между ними, для скрещивающихся − уравнение их общего перпендикуляра, расстояние и угол между ними. Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Вариант	Уравнения первой прямой	Уравнения второй прямой
1	$\begin{cases} x+2y-1=0, \\ 3y+z+1=0. \end{cases}$	$\dfrac{x-7}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-3}.$
	$\begin{cases} x=3-2t, \\ y=-1+t \\ z=2-3t, t\in R \end{cases}$	$\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{-6}.$
	$\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-9}{-1}.$	$\dfrac{x-8}{-7}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{3}.$
	$\begin{cases} 3x-4y-2z+36=0, \\ 2x+y-2z-10=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$

Необходимый теоретический материал

По любому виду уравнения прямой можно указать хотя бы одну точку, принадлежащую данной прямой (M_0), и хотя бы один из ее направляющих векторов ($\bar{a}_0$).

	Точка на прямой	Направляющий вектор
Первая прямая l_0	$M_0(x_0, y_0, z_0)$	$\bar{a}_0=\{m_0, n_0, p_0\}$
Вторая прямая l_1	$M_1(x_1, y_1, z_1)$	$\bar{a}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$

Проверить коллинеарность направляющих векторов данных прямых: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда координаты векторов пропорциональны.

Векторы $\bar{a}_0$ и $\bar{a}_1$коллинеарны, следовательно, прямые либо совпадают, либо параллельны и различны.	Векторы $\bar{a}_0$ и $\bar{a}_1$ не коллинеарны, следовательно, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.
Проверить принадлежность точки M_0 прямой l_1 (или точки M_1 прямой l_0). Точка принадлежит прямой тогда и только тогда, когда ее координаты являются решением уравнений прямой).	Проверить компланарность векторов $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$ и $\overline{M_0M_1}$. Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю. Смешанное произведение тройки векторов равно нулю тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю.

Если M_0 принадлежит прямой l_1, то прямые совпадают.	Если M_0 не принадлежит прямой l_1, то прямые параллельны и различны.	Если векторы компланарны, то прямые пересекаются.	Если векторы не компланарны, то прямые скрещиваются.
-	-	Точка пересечения прямых находится как решение системы уравнений, составленных из уравнений данных прямых.	Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых находится как прямая, пересекающая обе данные прямые и перпендикулярная к каждой из них.

Образец выполнения задания 2

1. Данные прямые

$$l_0: \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ 3y + z + 1 = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad l_1: \frac{x-7}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-3}.$$

Найдем точку и направляющий вектор каждой из них.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Итак, направляющий вектор прямой $\bar{a}_0 = \{2, -1, 3\}$.

При $y = 0$ решаем систему уравнений и получаем $M_0(1, 0, -1)$.

	Точка на прямой	Направляющий вектор
Первая прямая l_0	$M_0(1, 0, -1)$	$\bar{a}_0 = \{2, -1, 3\}$
Вторая прямая l_1	$M_1(7, 1, -2)$	$\bar{a}_1 = \{-2, 1, -3\}$

Так как координаты направляющих векторов пропорциональны

$$\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{3}{-3},$$

то они коллинеарны.

Проверим принадлежность точки M_0 прямой l_1:

$$\frac{1-7}{-2} = 3, \qquad \frac{0-1}{1} = -1, \qquad \frac{-1+2}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

Координаты точки M_0 не являются решением уравнения прямой l_1. Значит, она не принадлежит этой прямой. Следовательно, прямые параллельны и различны.

Ответ: прямые параллельны и различны.

2. Данные прямые

$$l_0: \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t, t \in R \end{cases} \quad \text{и} \qquad l_1: \frac{x+1}{-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{-6}.$$

Найдем точку и направляющий вектор каждой из них.

	Точка на прямой	Направляющий вектор
Первая прямая l_0	$M_0(3,-1,2)$	$\bar{a}_0 = \{-2,1,-3\}$
Вторая прямая l_1	$M_1(-1,1,-4)$	$\bar{a}_1 = \{-4,2,-6\}$

Так как координаты направляющих векторов пропорциональны

$$\frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6},$$

то они коллинеарны.

Проверим принадлежность точки точки M_0 прямой l_1:

$$\frac{3+1}{-4} = -1, \quad \frac{-1-1}{2} = -1, \quad \frac{2+4}{-6} = -1.$$

Координаты точки M_0 являются решением уравнения прямой l_1. Значит, она принадлежит этой прямой. Следовательно, прямые совпадают.

Ответ: прямые совпадают.

3. Данные прямые

$$l_0: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-9}{-1} \text{ и } l_1: \frac{x-8}{-7} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}.$$

Найдем точку и направляющий вектор каждой из них.

	Точка на прямой	Направляющий вектор
Первая прямая l_0	$M_0(7,3,9)$	$\bar{a}_0 = \{1,0,-1\}$
Вторая прямая l_1	$M_1(8,1,1)$	$\bar{a}_1 = \{-7,0,3\}$

Так как координаты направляющих векторов не пропорциональны

$$\frac{1}{-7} \neq \frac{-1}{3},$$

то они не коллинеарны. Значит, прямые или пересекаются, или скрещиваются.

Проверим компланарность векторов $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$ и $\overline{M_0M_1}$.

$$\overline{M_0M_1} = \{8-7, 3-1, 9-1\} = \{1,2,8\}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4) = 8 \neq 0$$

Так как определитель, составленный из координат векторов, отличен от нуля, то тройка векторов не компланарна и данные прямые скрещиваются.

Найдем уравнение их общего перпендикуляра.

Пусть общий перпендикуляр − прямая с направляющим вектором $\bar{a} = \{m,n,p\}$ и проходящая через точку $M(x,y,z)$. Он перпендикулярен каждой из данных прямых. Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их направляющие векторы. Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. В прямоугольной декартовой системе координат скалярное произведение вычисляется как сумма произведений соответствующих координат.

$$\begin{cases} m - p = 0, \\ -7m + 3p = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы $(0, n, 0)$. Нам подходит любое ненулевое решение. Будем считать, что $\bar{a} = \{0,1,0\}$.

Общий перпендикуляр пересекает каждую из данных прямых:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-8 & y-1 & z-1 \\ -7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Вычислив определители, получаем $\begin{cases} x + z - 16 = 0, \\ 3x + 7z - 31 = 0. \end{cases}$ Получили общие уравнения общего перпендикуляра.

Вычислим расстояние между скрещивающимися прямыми. Его можно найти по формуле

$$\frac{|(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \overline{M_0M_1})|}{|\bar{a}_0 \times \bar{a}_1|}.$$

$$|(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \overline{M_0M_1})| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 8$$

$$\bar{a}_0 \times \bar{a}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\bar{j} = \{0,4,0\}.$$

Длина вектора $\bar{a} = \{m, n, p\}$ в прямоугольной декартовой системе координат находится по формуле $|\bar{a}| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$.

Отсюда $|\bar{a}_0 \times \bar{a}_1| = 4$.

Тогда расстояние между данными скрещивающимися прямыми равно

$$\frac{|(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \overline{M_0M_1})|}{|\bar{a}_0 \times \bar{a}_1|} = \frac{8}{4} = 2.$$

Вычислим угол между скрещивающимися прямыми. Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами и его можно вычислить по формуле

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}_0 \cdot \bar{a}_1}{|\bar{a}_0| \cdot |\bar{a}_1|}.$$

$$\bar{a}_0 \cdot \bar{a}_1 = 1 \cdot (-7) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = -10,$$

$$|\bar{a}_0| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$|\bar{a}_1| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{58},$$

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}_0 \cdot \bar{a}_1}{|\bar{a}_0| \cdot |\bar{a}_1|} = \frac{-10}{\sqrt{2}\sqrt{58}} = \frac{-5}{\sqrt{29}} = \frac{-5\sqrt{29}}{29}.$$

Ответ:

Взаимное расположение прямых	Общий перпендикуляр	Расстояние	Угол
скрещиваются	$\begin{cases} x+z-16=0, \\ 3x+7z-31=0. \end{cases}$	2	$cos\varphi = \frac{-5\sqrt{29}}{29}.$

4. Данные прямые

$$l_0 : \begin{cases} 3x-4y-2z+36=0, \\ 2x+y-2z-10=0. \end{cases} \text{ и } l_1 : \begin{cases} 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

Найдем точку и направляющий вектор каждой из них.

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 10, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 11.$$

Итак, направляющий вектор первой прямой $\bar{a}_0 = \{10, 2, 11\}$.

Частным решением уравнений первой прямой является точка $M_0(-6, 8, -7)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3, \qquad \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 12, \qquad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Итак, направляющий вектор второй прямой $\bar{a}_1 = \{3, 12, 4\}$.

Частным решением уравнений второй прямой является точка $M_1(1, -2, 0)$.

	Точка на прямой	Направляющий вектор
Первая прямая l_0	$M_0(-6, 8, -7)$.	$\bar{a}_0 = \{10,2,11\}$.
Вторая прямая l_1	$M_1(1, -2, 0)$.	$\bar{a}_1 = \{3,12,4\}$.

Так как координаты направляющих векторов не пропорциональны

$$\frac{10}{3} \neq \frac{2}{12},$$

то они не коллинеарны. Значит, прямые либо пересекаются, либо скрещиваются.

Проверим компланарность векторов $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$ и $\overline{M_0M_1}$.

$$\overline{M_0M_1} = \{1+6, -2-8, 0+7\} = \{7, -10, 7\}.$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 2 & 11 \\ 3 & 12 & 4 \\ 7 & -10 & 7 \end{vmatrix} = 840 - 330 + 56 - 924 - 42 + 400 = 0.$$

Так как определитель, составленный из координат векторов, равен нулю, то тройка векторов компланарна, и данные прямые пересекаются.

Найдем координаты их точки пересечения. Для этого составим систему из уравнений данных прямых:

$$\begin{cases} 3x-4y-2z+36=0, \\ 2x+y-2z-10=0, \\ 4x+y-6z-2=0, \\ y-3z+2=0. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим, что точка пересечения $P(4, 10, 4)$.

Вычислим угол между прямыми по формуле

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}_0 \cdot \bar{a}_1}{|\bar{a}_0| \cdot |\bar{a}_1|}.$$

$$\bar{a}_0 \cdot \bar{a}_1 = 10 \cdot 3 + 2 \cdot 12 + 11 \cdot 4 = 98,$$

$$|\bar{a}_0| = \sqrt{10^2 + 2^2 + 11^2} = \sqrt{225} = 15,$$

$$|\bar{a}_1| = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$cos\varphi = \frac{\bar{a}_0 \cdot \bar{a}_1}{|\bar{a}_0| \cdot |\bar{a}_1|} = \frac{98}{15 \cdot 13} = \frac{98}{195}.$$

Ответ:

Взаимное расположение прямых	Точка пересечения	Угол
пересекаются	$P(4, 10, 4)$.	$cos\varphi = \frac{98}{195}$.

Образец проверки выполненного задания 2 в программе *geogebra*

Для параллельных или совпадающих прямых вводим в поле ввода уравнения прямых, координаты точек, им принадлежащих, и координаты их направляющих векторов. Визуально убеждаемся в правильности сделанных выводов и вычислений (рис. 6).

Для прямых

$$l_0: \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ 3y + z + 1 = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad l_1: \frac{x - 7}{-2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 2}{-3}.$$

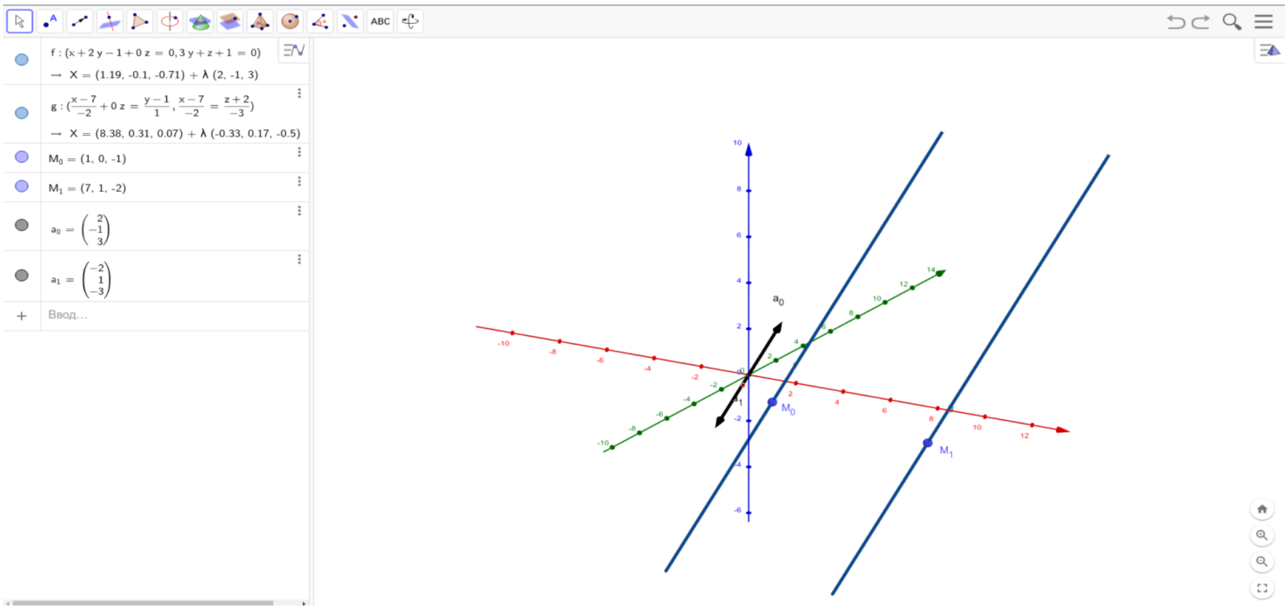


Рис. 6

Для прямых (рис. 7)

$$l_0: \begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 3t, t \in R \end{cases} \quad \text{и} \quad l_1: \frac{x + 1}{-4} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 4}{-6}.$$

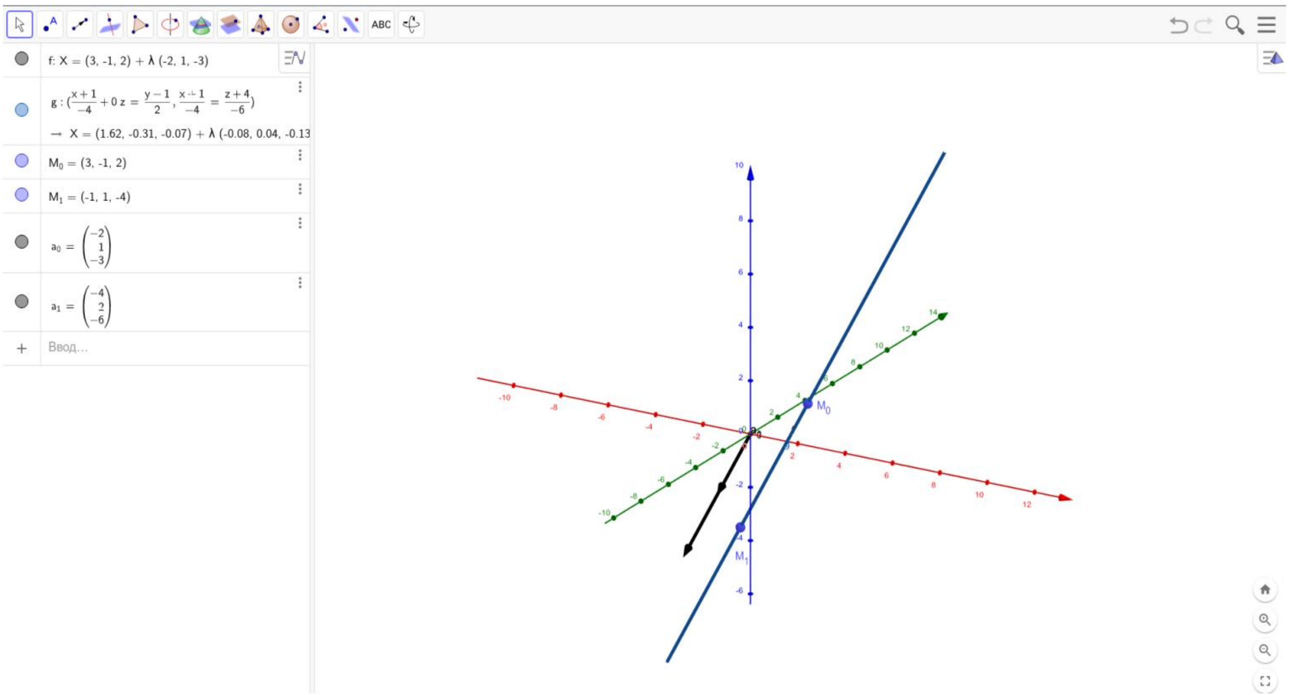
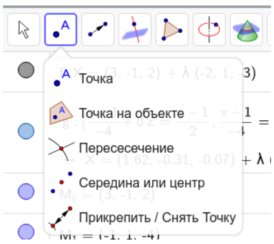


Рис. 7

Если прямые скрещиваются, то кроме ввода уравнений прямых, координат точек, им принадлежащих, и координат их направляющих векторов, необходимо

- ввести уравнения общего перпендикуляра;
- проверить, что он пересекает обе данные прямые и перпендикулярен им;
- измерить расстояние между данными прямыми и угол между ними.

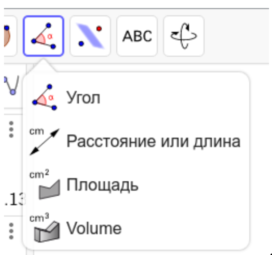
Для того чтобы проверить, пересекаются ли данные прямые, выбираем команду «*Пересечение*»



,

в качестве аргументов которой последовательно указываем интересующие нас прямые. Если прямые не пересекаются, то результатом выполнения команды будет сообщение об ошибке.

Проверка перпендикулярности проводится при помощи команды «*Угол*»



,

в качестве аргументов которой также последовательно указываем интересующие нас прямые.

В программе *geogebra* нельзя измерить угол между скрещивающимися прямыми. Поэтому для проверки решения от произвольной точки одной прямой откладываем прямую, параллельную другой из данных прямых, измеряем угол между ними. После этого в поле ввода вводим арккосинус найденного значения и сравниваем результаты (рис. 8).

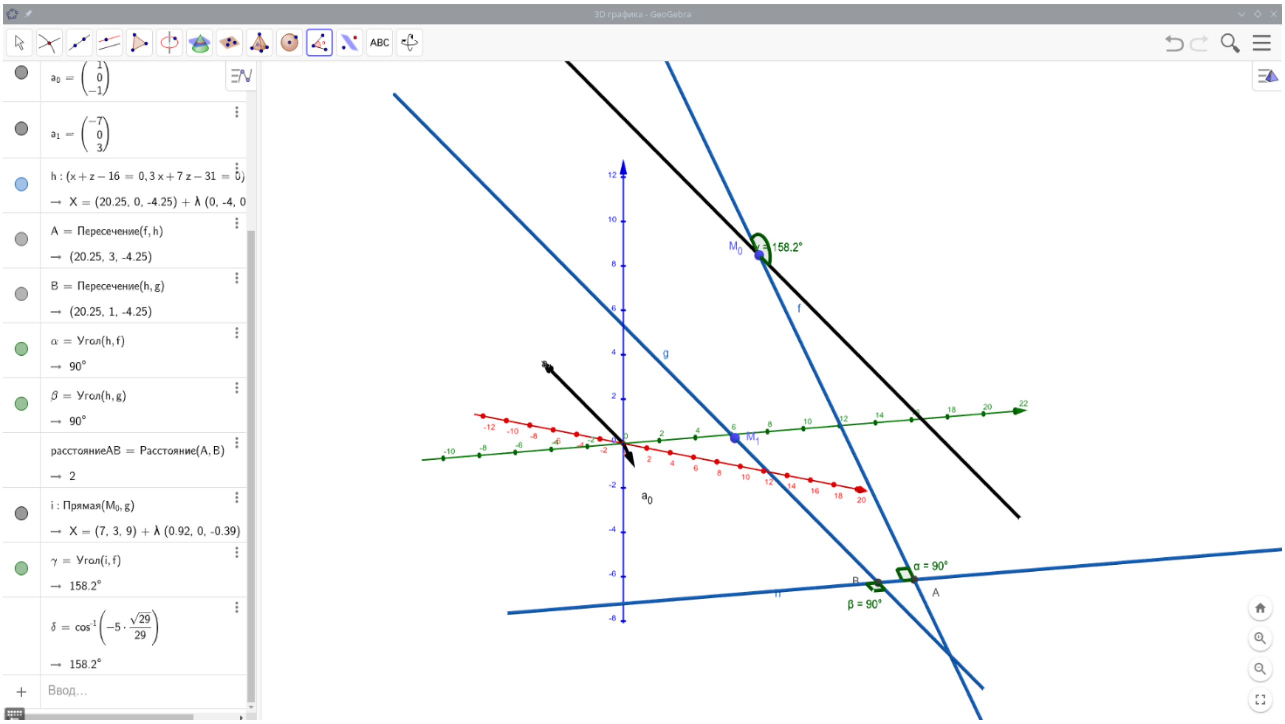


Рис. 8

Для пересекающихся прямых помимо ввода уравнений прямых, координат точек, им принадлежащих, и координат их направляющих векторов, необходимо

- отметить точку пересечения этих прямых и сравнить полученные результаты с вычисленными значениями;
- измерить угол между прямыми, в поле ввода вычислить арккосинус полученного значения и сравнить результаты (рис. 9).

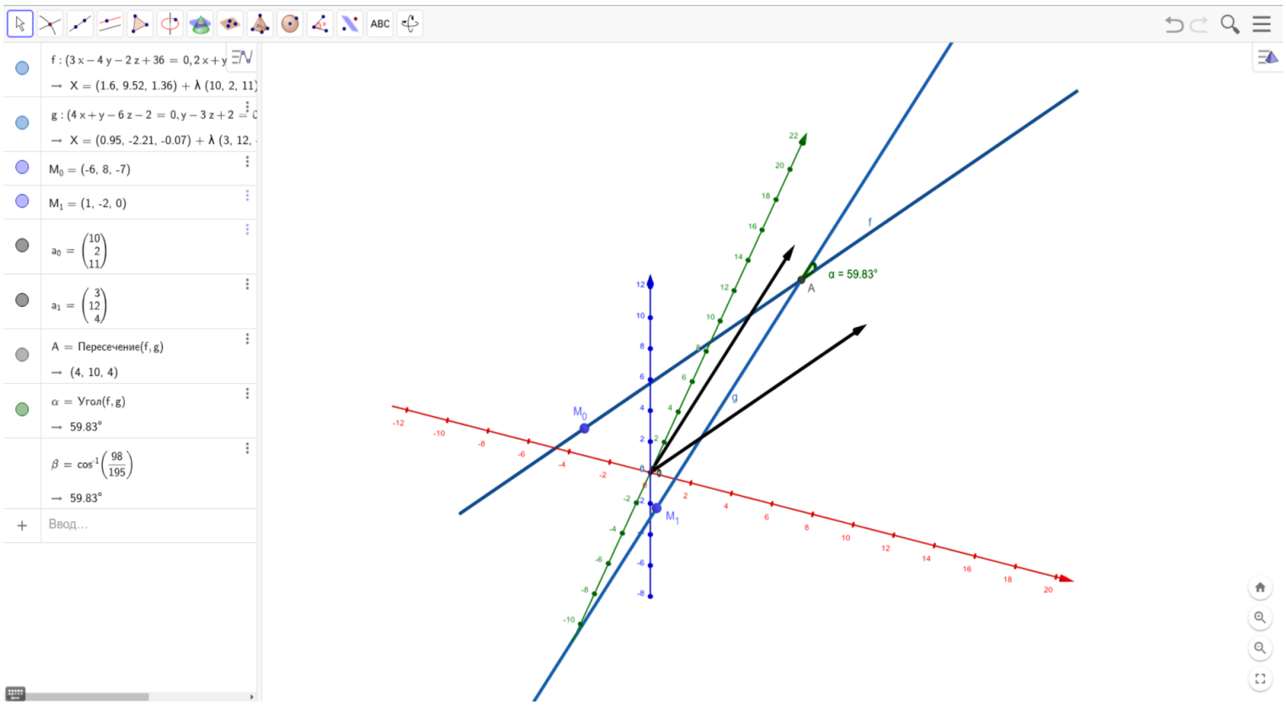


Рис. 9

Ответ на данное задание должен включать в себя вывод полученных результатов, таблицу и скрин результатов, полученных в программе *geogebra* (поле ввода со всеми уравнениями и координатами и чертеж).

Задание 3. Уравнения плоскости.

Плоскость π и прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями, а точка A − координатами относительно прямоугольной декартовой системы координат. Найти уравнения следующих плоскостей, проходящих через:

- точку A и прямую l_1;
- прямую l_1 параллельно прямой l_2;
- точку A параллельно плоскости π;
- точку A перпендикулярно прямой l_1.

Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Плоскость π	Прямая l_1	Прямая l_2	Точка A
$3x + y - 2z + 5 = 0$	$\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-9}{-1}$	$\frac{x-8}{-7} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{3}$	$(-2, 5, -1)$

Необходимый теоретический материал

Способы задания плоскости	Идеи, лежащие в основе вывода уравнений	Уравнения
В аффинной системе координат	Точка $M(x, y, z)$ принадлежит данной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ и $\overline{M_0M}$ компланарны.	

<table>
<tr>
<td rowspan="3">точкой
$M_0(x_0, y_0, z_0)$
и направляющими
векторами
$\bar{a}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$
и
$\bar{a}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$</td>
<td>Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда один из них можно представить в виде линейной комбинации двух других векторов.</td>
<td>Параметрические уравнения плоскости
$\begin{cases} x = x_0 + \alpha m_1 + \beta m_2, \\ y = y_0 + \alpha n_1 + \beta n_2 \\ z = z_0 + \alpha p_1 + \beta p_2, \alpha, \beta \in R \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">или</td>
</tr>
<tr>
<td>Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.
Смешанное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда определитель, составленный из их координат, равен нулю.</td>
<td>Уравнение плоскости через определитель
$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$
Раскрывая определитель, получаем
$Ax + By + Cz + D = 0$
Общее уравнение плоскости</td>
</tr>
<tr>
<td>В аффинной системе координат
тремя точками общего положения
$M_1(x_1, y_1, z_1)$,
$M_2(x_2, y_2, z_2)$ и
$M_3(x_3, y_3, z_3)$</td>
<td>В качестве направляющих векторов можно взять векторы $\overline{M_1 M_2}$ и $\overline{M_1 M_3}$.</td>
<td>Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки
$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$</td>
</tr>
<tr>
<td>В прямоугольной декартовой системе координат
точкой
$M_0(x_0, y_0, z_0)$
и перпендикулярным вектором $\bar{n} = \{A, B, C\}$</td>
<td>Точка $M(x, y, z)$ принадлежит данной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0 M}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны.
Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.
Скалярное произведение в прямоугольной декартовой системе координат равно сумме произведений соответствующих координат векторов.</td>
<td>$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$</td>
</tr>
</table>

Образец выполнения задания 3

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,5,-1)$ и прямую $l_1: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-9}{-1}$.

Проверим, принадлежит ли точка A прямой l_1:

$$\frac{-2-7}{1} \neq \frac{5-3}{0} \neq \frac{-1-9}{-1}.$$

Значит, точка A данной прямой не принадлежит.

По уравнению прямой найдем точку, принадлежащую данной прямой, и ее направляющий вектор: $B(7,3,9)$, $\bar{b} = \{1,0,-1\}$.

Тогда искомую плоскость можно задать точкой A и направляющими векторами $\overline{AB}$ и $\bar{b}$:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-5 & z+1 \\ 9 & -2 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$2x + 19y + 2z - 89 = 0.$$

Ответ: $2x + 19y + 2z - 89 = 0$.

2. Уравнение плоскости, проходящей через прямую

$l_1: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-9}{-1}$ параллельно прямой $l_2: \dfrac{x-8}{-7} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{3}$

Найдем точку и направляющий вектор каждой из данных прямых.

	Точка на прямой	Направляющий вектор
Первая прямая l_1	$M_1(7,3,9)$	$\bar{a} = \{1,0,-1\}$.
Вторая прямая l_2	$M_2(8,1,1)$	$\bar{b} = \{-7,0,3\}$

Тогда искомую плоскость можно задать точкой M_1 и направляющими векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-9 \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получим

$$y - 3 = 0.$$

Ответ: $y - 3 = 0$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,5,-1)$ параллельно плоскости $3x + y - 2z + 5 = 0$.

Две плоскости, заданные общими уравнениями, параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих переменных в их уравнениях пропорциональны. Коэффициент пропорциональности можем выбрать любой, в том числе и равный 1.

Тогда уравнение искомой плоскости можно искать в виде

$$3x + y - 2z + D = 0.$$

Свободный коэффициент найдем из условия принадлежности точки A данной плоскости:

$$3 \cdot (-2) + 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-1) + D = 0,$$

$$D = -1,$$

$$3x + y - 2z - 1 = 0.$$

Ответ: $3x + y - 2z - 1 = 0.$

4. Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2{,}5,-1)$ перпендикулярно прямой

$$l_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-9}{-1}.$$

По уравнению прямой найдем ее направляющий вектор: $\bar{b} = \{1{,}0,-1\}$.

Тогда искомую плоскость можно задать точкой A и перпендикулярным вектором $\bar{b}$.

$$1 \cdot (x + 2) + 0 \cdot (y - 5) + (-1) \cdot (z + 1) = 0,$$

$$x - z + 1 = 0.$$

Ответ: $x - z + 1 = 0.$

Образец проверки выполненного задания 3 в программе *geogebra*

1. В поле ввода задаем координаты данной точки, уравнения данной прямой, и получившееся уравнение плоскости. Для проверки разверните изображение так, чтобы было видно, что точка и прямая принадлежат плоскости (рис. 10).

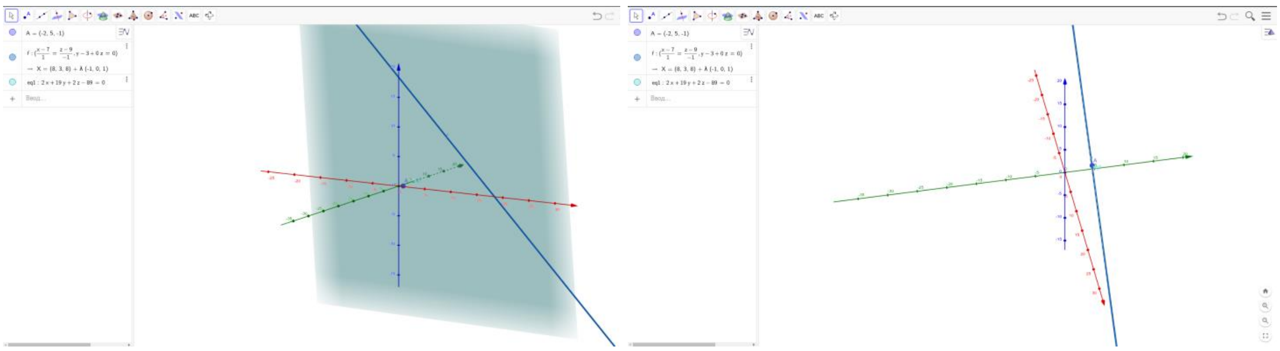


Рис. 10

2. В поле ввода задаем уравнения данных прямых и получившееся уравнение плоскости. Для проверки разверните изображение так, чтобы было видно, что первая прямая принадлежит плоскости, а вторая ей параллельна (рис. 11).

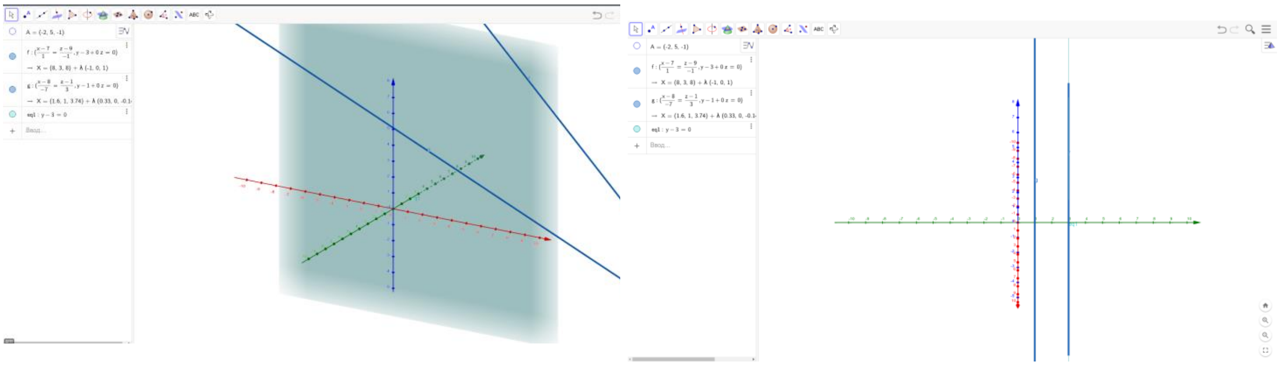


Рис. 11

3. В поле ввода задаем координаты точки и уравнения данной и получившейся плоскостей. Для проверки разверните изображение так, чтобы было видно, что точка принадлежит получившейся плоскости, и что обе плоскости параллельны (рис. 12).

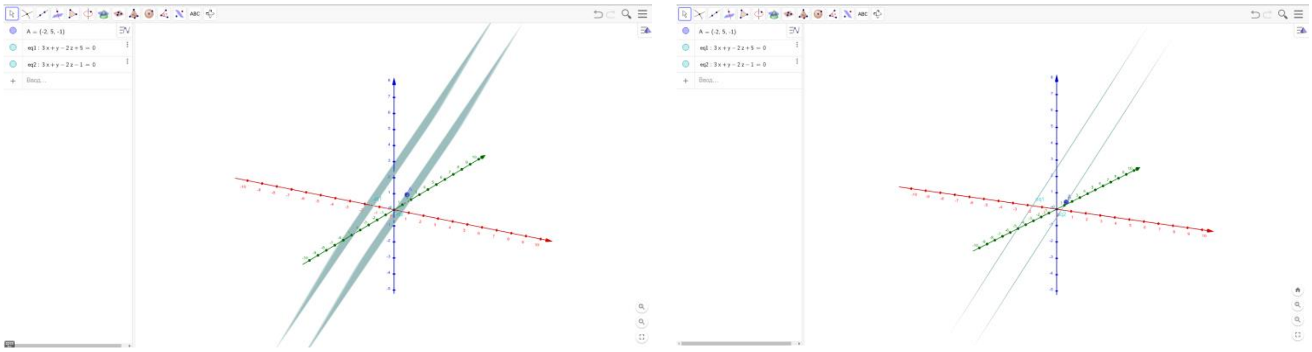


Рис. 12

4. В поле ввода задаем координаты данной точки, уравнения данной прямой и получившееся уравнение плоскости. Для проверки измерьте угол между прямой и плоскостью с помощью команды «*Угол*». Выберите наиболее удачное, на Ваш взгляд, расположение координатных осей (рис. 13).

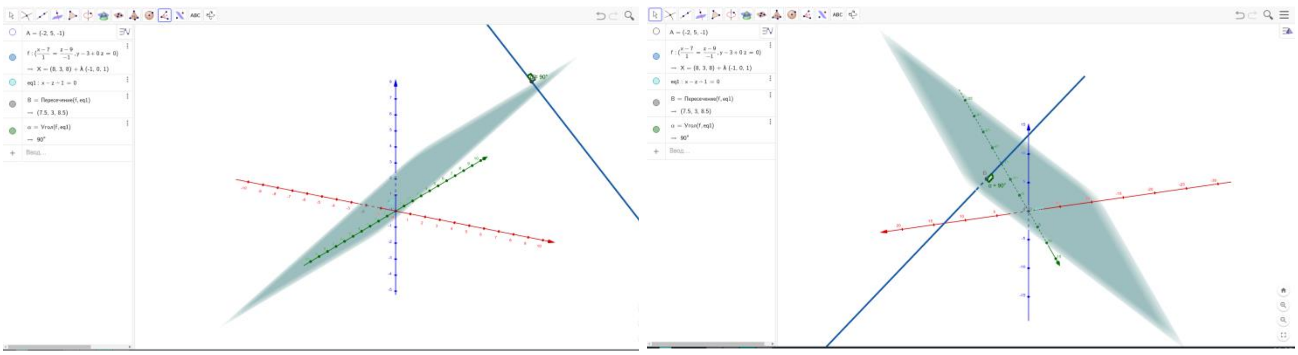


Рис. 13

Ответ на данное задание должен включать в себя полученные уравнения плоскостей и скрин результатов, полученных в программе *geogebra* (поле ввода со всеми уравнениями и координатами и чертеж).

Задание 4. Метрические задачи на плоскость.

Точки A, B, C, D заданы своими координатами относительно прямоугольной декартовой системы координат. Найти высоту тетраэдра *ABCD*, опущенную из вершины *D*, и величину двугранного угла при ребре *AB*.

Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Вариант	Координаты точек
1	$A(1,-5,4)$, $B(-3,2,7)$, $C(3,5,-3)$, $D(2,3,4)$

Необходимый теоретический материал

Дана прямоугольная декартова система координат.

Постановка задачи	Идеи, лежащие в основе вывода формулы	Формула
Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости π $Ax + By + Cz + D = 0$.	Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на плоскость π. Длина вектора $\overline{M_1M_0}$ равна расстоянию от точки M_0 до плоскости π. Вектор $\bar{n} = \{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости, а значит коллинеарен $\overline{M_1M_0}$.	$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Угол между плоскостями $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.	Угол между плоскостями равен углу между их векторами нормали $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.	$\cos\varphi = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

Образец выполнения задания 4

Найдем уравнения плоскостей ABC и ABD. Используем формулу уравнения плоскости, проходящей через три данные точки.

Плоскость ABC:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-4 \\ -3-1 & 2-(-5) & 7-4 \\ 3-1 & 5-(-5) & -3-4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-4 \\ -4 & 7 & 3 \\ 2 & 10 & -7 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$-79x - 22y - 54z + 185 = 0.$$

Плоскость ABD:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-4 \\ -3-1 & 2-(-5) & 7-4 \\ 2-1 & 3-(-5) & 4-4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-4 \\ -4 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$-8x + y - 13z + 65 = 0.$$

Найдем расстояние от точки D до плоскости ABC:

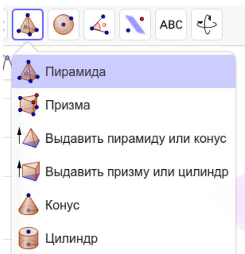
$$d(D, ABC) = \frac{|-79 \cdot 2 - 22 \cdot 3 - 54 \cdot 4 + 185|}{\sqrt{(-79)^2 + (-22)^2 + (-54)^2}} = \frac{255}{\sqrt{9641}}$$

Найдем угол между плоскостями ABC и ABD:

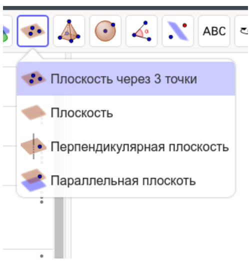
$$cos\varphi = \frac{(-79) \cdot (-8) - 22 \cdot 1 - 54 \cdot (-13)}{\sqrt{9641} \cdot \sqrt{(-8)^2 + 1^2 + (-13)^2}} = \frac{1312}{\sqrt{9641} \cdot \sqrt{234}}.$$

Образец проверки выполненного задания 4 в программе geogebra

В поле ввода задаем координаты данных точек. Используя команду «*Пирамида*», строим тетраэдр $ABCD$.

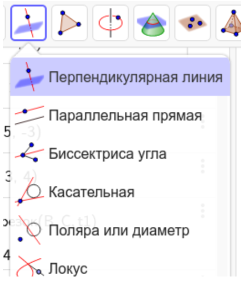


С помощью команды «*Плоскость через 3 точки*», строим плоскость ABC.

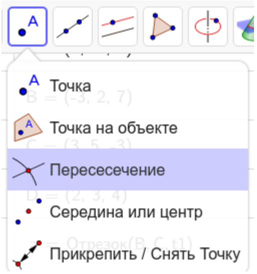


Сравниваем уравнение, получившееся в программе, с полученным в результате вычислений.

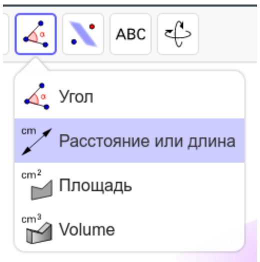
Из точки D на плоскость ABC опускаем перпендикуляр с помощью команды «*Перпендикулярная линия*».



Отмечаем основание построенного перпендикуляра с помощью команды «*Пересечение*».



И измеряем его длину с помощью команды «*Расстояние или длина*».



Сравниваем результаты, полученные в результате измерений и вычислений, вводя в поле ввода полученную формулу (рис. 14)

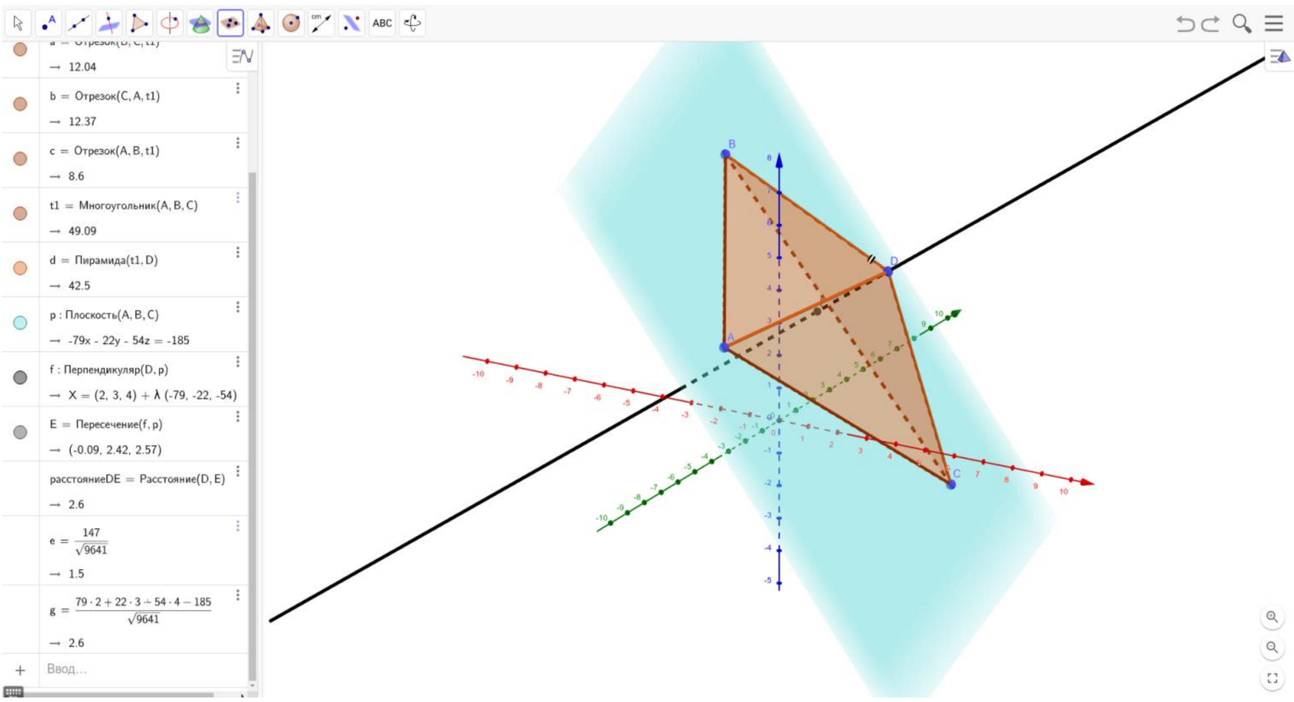
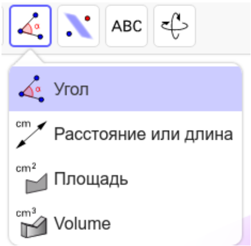


Рис. 14

Строим плоскость *ABD* и с помощью команды «*Угол*» измеряем угол между плоскостями *ABC* и *ABD*.



Вводя в поле ввода арккосинус величины, полученной в результате вычисления, сравниваем результаты измерений и вычислений (рис. 15).

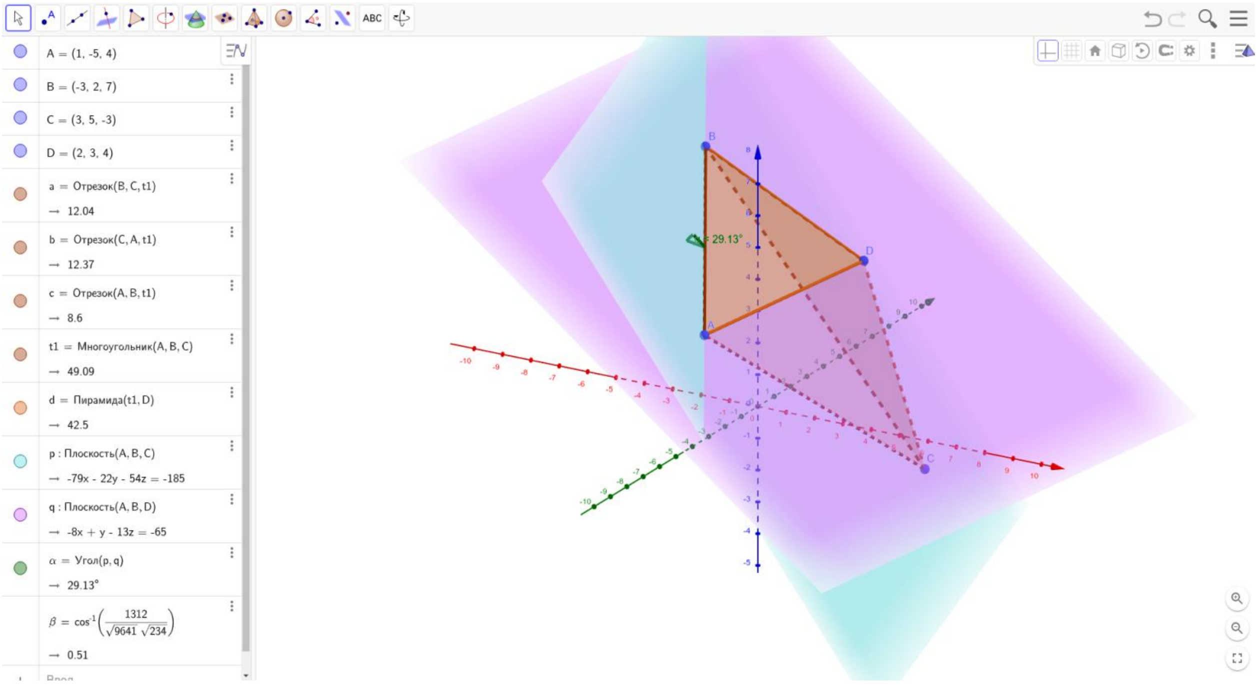


Рис. 15

Ответ на данное задание должен включать в себя полученные уравнения плоскостей, точные значения высоты и косинуса двугранного угла, скрин результатов, полученных в программе *geogebra* (поле ввода со всеми уравнениями, величинами и чертеж).

Лабораторная работа
«Прямые и плоскости в пространстве»

Задание 1. Виды уравнений прямой.

Прямая дана своим уравнением относительно аффинной системы координат. Записать остальные виды уравнений этой прямой. Привести пример направляющего вектора данной прямой и трех точек, принадлежащих ей. Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Вариант	Параметрические уравнения	Канонические уравнения	Общие уравнения
1	$\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 - t, t \in R \end{cases}$		
		$\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+11}{2}$	
			$\begin{cases} 3x - 2z - 2 = 0, \\ x + 3y - z + 2 = 0. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = -1 + 6t, \\ z = 3 - 3t, t \in R \end{cases}$		
		$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{7}$	
			$\begin{cases} 5x - y + 5z - 2 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 4 + 3t, t \in R \end{cases}$		
		$\frac{x-4}{5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{2}$	
			$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x = -3t, \\ y = -1, \\ z = 2 - t, t \in R \end{cases}$		
		$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{-1}$	
			$\begin{cases} 3x - 5y + z - 1 = 0, \\ x + 7y - 2z + 2 = 0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = -2 + t, \\ z = 2 - t, t \in R \end{cases}$		

		$\frac{x+3}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-3}$	
			$\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x+y-2z+4=0. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x=5-3t, \\ y=4+t, \\ z=2-3t, t\in R \end{cases}$		
		$\frac{x-4}{-4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$	
			$\begin{cases} 3x-y+2z-12=0, \\ 2x+3y-z=0. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x=1+t, \\ y=1-2t, \\ z=2-7t, t\in R \end{cases}$		
		$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+7}{-5}$	
			$\begin{cases} 2x-3y+5z-1=0, \\ 7x+y-2z+3=0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x=4+3t, \\ y=-1+2t, \\ z=2+t, t\in R \end{cases}$		
		$\frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{2}$	
			$\begin{cases} 4x-2y+3z-2=0, \\ x+y-2z+3=0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x=-4+t, \\ y=-1-2t, \\ z=2+3t, t\in R \end{cases}$		
		$\frac{x-7}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{2}$	
			$\begin{cases} 3x-2y+z+1=0, \\ x-7y-2z+3=0. \end{cases}$
10	$\begin{cases} x=2-5t, \\ y=-7+2t, \\ z=2+t, t\in R \end{cases}$		
		$\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-2}$	
			$\begin{cases} 3x-y+2z-1=0, \\ x+3y-2z+1=0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} x=4-10t, \\ y=3+2t, \\ z=-1+t, t\in R \end{cases}$		

		$\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+2}{0}$	
			$\begin{cases}3x-2y+4z-2=0,\\ x+4y-2z+3=0.\end{cases}$
12	$\begin{cases}x=4-3t,\\ y=-1-3t,\\ z=7+t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$	
			$\begin{cases}-2y+5z-1=0,\\ x+7y-5z+2=0.\end{cases}$
13	$\begin{cases}x=1+2t,\\ y=-1+t,\\ z=4+2t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$	
			$\begin{cases}2x-3y+3z-2=0,\\ 2x+y-2z+3=0.\end{cases}$
14	$\begin{cases}x=2+7t,\\ y=-3+2t,\\ z=4+t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x-3}{7}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+2}{2}$	
			$\begin{cases}2x-4y+3z-2=0,\\ x-3y-2z+7=0.\end{cases}$
15	$\begin{cases}x=4-3t,\\ y=-1+2t,\\ z=2+2t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x+1}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{1}$	
			$\begin{cases}3x-2y-z+1=0,\\ x+4y-2z+2=0.\end{cases}$
16	$\begin{cases}x=9+t,\\ y=1+2t,\\ z=2-t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x+5}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{5}$	
			$\begin{cases}3x-y+5z-2=0,\\ 2x+5y-2z+3=0.\end{cases}$
17	$\begin{cases}x=2+2t,\\ y=-3+2t,\\ z=2-t, t\in R\end{cases}$		

		$\frac{x+3}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{1}$	
			$\begin{cases}5x-3y+2z+1=0,\\ x+y-2z+3=0.\end{cases}$
18	$\begin{cases}x=4+2t,\\ y=-5-2t,\\ z=2+5t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$	
			$\begin{cases}x-y+3z+5=0,\\ x+3y+2z+3=0.\end{cases}$
19	$\begin{cases}x=-3+2t,\\ y=2t,\\ z=2+6t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x+3}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$	
			$\begin{cases}3x-2y+z-7=0,\\ x-4y-2z+7=0.\end{cases}$
20	$\begin{cases}x=8+t,\\ y=7-2t,\\ z=6+t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+2}{-2}$	
			$\begin{cases}2x-7y+5z-6=0,\\ 2x+y-3z+1=0.\end{cases}$
21	$\begin{cases}x=3t,\\ y=-3+2t,\\ z=2-t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x-1}{7}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-2}$	
			$\begin{cases}x-2y+z-4=0,\\ x+5y-3z+1=0.\end{cases}$
22	$\begin{cases}x=4,\\ y=2-2t,\\ z=2+3t, t\in R\end{cases}$		
		$\frac{x+6}{-3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{4}$	
			$\begin{cases}3x-5y-z+1=0,\\ x+y-z+3=0.\end{cases}$
23	$\begin{cases}x=12+5t,\\ y=7-2t,\\ z=1-4t, t\in R\end{cases}$		

		$\dfrac{x+6}{3}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+2}{-2}$	
			$\begin{cases}3x-2y+1=0,\\7y-2z+3=0.\end{cases}$
	$\begin{cases}x=4+7t,\\y=2-9t,\\z=1+3t, t\in R\end{cases}$		
24		$\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z+4}{1}$	
			$\begin{cases}3x-y+z-1=0,\\2x+3y-2z+4=0.\end{cases}$

Задание 2. Взаимное расположение прямых.

Две прямые даны своими уравнениями относительно прямоугольной декартовой системы координат. Выяснить взаимное расположение этих прямых (совпадают, параллельны и различны, пересекаются, скрещиваются). Для пересекающихся прямых найти координаты точки их пересечения и угол между ними, для скрещивающихся − уравнение их общего перпендикуляра, расстояние и угол между ними. Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Вариант	Уравнения первой прямой	Уравнения второй прямой
1	$\begin{cases}x-2y+z-1=0,\\x+5y-2z+3=0.\end{cases}$	$\dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-5}{7}$
	$\begin{cases}x=-7-8t,\\y=5+5t,\\z=3+t, t\in R\end{cases}$	$\begin{cases}2x+3y+z-4=0,\\x+2y-2z+3=0.\end{cases}$
	$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{z-1}{-7}$	$\begin{cases}x=4-t,\\y=-5+9t,\\z=6-12t, t\in R\end{cases}$
	$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{3}$	$\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{1}$
2	$\begin{cases}2x+3y+z-4=0,\\x+2y-2z+3=0.\end{cases}$	$\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-1}{-1}$
	$\begin{cases}15x+10y-3z-44=0,\\-4x+y+3z+11=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=4-3t,\\y=-1+3t,\\z=2-5t, t\in R\end{cases}$
	$\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+3}{8}=\dfrac{z-2}{-8}$	$\begin{cases}x=2-5t,\\y=-5+10t,\\z=-3-3t, t\in R\end{cases}$
	$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$	$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$

3	$\begin{cases}15x+10y-3z-44=0,\\ -4x+y+3z+11=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=4-3t,\\ y=7+3t,\\ z=2-5t, t\in R\end{cases}$
	$\begin{cases}-2x-15y+21z+35=0,\\ -4x+y+11z+39=0.\end{cases}$	$\frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$
	$\begin{cases}x=1-4t,\\ y=2+3t,\\ z=2+2t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{7}$
	$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{-1}$
4	$\begin{cases}-2x-15y+21z+35=0,\\ -4x+y+11z+39=0.\end{cases}$	$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+7}{1}$
	$\begin{cases}-37x-16y+15z+87=0,\\ -29x+16y+7z+111=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=4+2t,\\ y=-1+t,\\ z=3+6t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+5}{7}$	$\begin{cases}x=3-6t,\\ y=5,\\ z=-3+5t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{-2}$
5	$\begin{cases}-37x-16y+15z+87=0,\\ -29x+16y+7z+111=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=6-2t,\\ y=-1-t,\\ z=3-6t, t\in R\end{cases}$
	$\begin{cases}-27x-16y+17z+73=0,\\ 9x+16y-11z-19=0.\end{cases}$	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{6}$
	$\begin{cases}x=4-7t,\\ y=3+t,\\ z=-5+7t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x-1}{-4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{7}$
	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$
6	$\begin{cases}-27x-16y+17z+73=0,\\ 9x+16y-11z-19=0.\end{cases}$	$\frac{x-4}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-5}{-6}$
	$\begin{cases}-53x-7y-4z+80=0,\\ 11x+25y-8z+4=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=1+t,\\ y=1-3t,\\ z=5-8t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x-10}{-13}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{4}$	$\begin{cases}x=3-6t,\\ y=1,\\ z=-5+7t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-1}$

7	$\begin{cases}53x+7y+4z-80=0,\\11x+25y-8z+4=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=2+t,\\y=3-3t,\\z=5-8t, t\in R\end{cases}$
	$\begin{cases}25x-7y+4z-52=0,\\9x+25y-2z+26=0.\end{cases}$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-5}{-8}$
	$\begin{cases}x=1+3t,\\y=-3+2t,\\z=t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x+3}{10}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+5}{7}$
	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-3}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{1}$
8	$\begin{cases}25x-7y+4z-52=0,\\-9x-25y+2z-26=0.\end{cases}$	$\frac{x-6}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{8}$
	$\begin{cases}-43x+y+4z+56=0,\\5x+5y-2z-6=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=1+t,\\y=-1+3t,\\z=-3+10t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-1}$	$\begin{cases}x=-3+10t,\\y=1-2t,\\z=-5+7t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$
9	$\begin{cases}-43x+y+4z+56=0,\\-5x-5y+2z+6=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=2+t,\\y=-7+3t,\\z=-3+10t, t\in R\end{cases}$
	$\begin{cases}-43x+10y-3z+87=0,\\-32-30y+9z+61=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{0}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{10}$
	$\begin{cases}x=2+2t,\\y=-3+2t,\\z=-5+3t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-2}$
	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-1}$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{-2}$
10	$\begin{cases}-43x+10y-3z+87=0,\\32+30y-9z-61=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+5}{-10}$
	$\begin{cases}-x+24y-19z+83=0,\\-17x-24y+z+7=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=2-4t,\\y=-1+3t,\\z=3+4t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x-7}{-7}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-3}$	$\begin{cases}x=-3+3t,\\y=1-2t,\\z=1-3t, t\in R\end{cases}$
	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$
11	$\begin{cases}-x+24y-19z+83=0,\\17x+24y-z-7=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=-2-4t,\\y=11+3t,\\z=3+4t, t\in R\end{cases}$

	$\begin{cases}-5x+12y-11z+43=0,\\ x+4y-z+1=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$
	$\begin{cases}x=2-t,\\ y=-1,\\ z=3-2t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+2}{3}$
	$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-1}$
12	$\begin{cases}5x-12y+11z-3=0,\\ x+4y-z+1=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2}$
	$\begin{cases}-37x+24y-31z+95=0,\\ -x-z+5=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=2-4t,\\ y=3-t,\\ z=3+4t, t\in R\end{cases}$
	$\begin{cases}x=1-2t,\\ y=3-t,\\ z=5-8t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x-4}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{5}$
	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-3}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{1}$
13	$\begin{cases}-37x+24y-31z+5=0,\\ x+z-5=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=2-4t,\\ y=3-t,\\ z=3+4t, t\in R\end{cases}$
	$\begin{cases}51x+13y+31z-48=0,\\ 13x+11y+9z-32=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+3}{7}$
	$\begin{cases}x=-1+2t,\\ y=3-t,\\ z=4-7t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{5}$
	$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$
14	$\begin{cases}51x+13y+31z-4=0,\\ 13x+11y+9z-32=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-7}$
	$\begin{cases}-21x+y-11z+4=0,\\ 35x+33y+53z-76=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=2-4t,\\ y=5-7t,\\ z=-3+7t, t\in R\end{cases}$
	$\begin{cases}x=-1+2t,\\ y=3,\\ z=2-5t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x-4}{-3}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-2}{-5}$
	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-1}$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{-2}$
15	$\begin{cases}21x-y+11z+4=0,\\ 35x+33y+53z-7=0.\end{cases}$	$\begin{cases}x=2+4t,\\ y=5+7t,\\ z=-3-7t, t\in R\end{cases}$

	$\begin{cases} 3x+2y+3z+1=0, \\ 12x+34y+25z+17=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{6}$
	$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=-1+3t, \\ z=2-5t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x-4}{-3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+2}{-1}$
	$\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-3}$
16	$\begin{cases} 3x+2y+3z+1=0, \\ 12x+34y+25z-1=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-6}$
	$\begin{cases} -3x+4y-21z+65=0, \\ -12x+16y-25z+83=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2-4t, \\ y=1-3t, \\ z=3, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=-1-t, \\ z=3-6t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z+2}{-1}$
	$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$	$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-3}$
17	$\begin{cases} 3x-4y+21z+6=0, \\ -12x+16y-25z+8=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2+4t, \\ y=1+3t, \\ z=3, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x+7y-15z+62=0, \\ -10x+24y-21z+101=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{2}$
	$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=-1-t, \\ z=3, t\in R \end{cases}$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{1}$
	$\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{-2}$
18	$\begin{cases} 3x+7y-15z+6=0, \\ 10x-24y+21z+10=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{6}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{4}$
	$\begin{cases} 5x+y-3z+6=0, \\ -2x+12y-5z+41=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2+t, \\ y=-1+t, \\ z=5+2t, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=-2t, \\ z=-3+6t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{5}$
	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$	$\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{-2}$
19	$\begin{cases} 5x+y-3z+6=0, \\ 2x-12y+5z+1=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2-2t, \\ y=-1-2t, \\ z=5-4t, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} 9x+y-3z+2=0, \\ -8x+20y-13z+87=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-7}{4}$

	$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=5-7t, \\ z=-3+6t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{2}$
	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-2}$	$\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-2}$
20	$\begin{cases} 9x+y-3z+12=0, \\ 8x-20y+13z+7=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-7}{-4}$
	$\begin{cases} 2x+3y-5z+23=0, \\ -3x+10y-7z+38=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2-t, \\ y=1-t, \\ z=6-t, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} x=-1+2t, \\ y=5-7t, \\ z=2+t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-7}{-4}$
	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-3}$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{1}$
21	$\begin{cases} 2x+3y-5z+3=0, \\ 3x-10y+7z+8=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2+t, \\ y=1+t, \\ z=6+t, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} -9x+y-3z+20=0, \\ 14x+4y+13z-45=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{2}$
	$\begin{cases} x=1-t, \\ y=5-7t, \\ z=2+t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$
	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{3}$
22	$\begin{cases} 9x-y+3z+2=0, \\ 14x+4y+13z-4=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-2}$
	$\begin{cases} -17x+2y-3z+33=0, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2-t, \\ y=-1-t, \\ z=-1+5t, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} x=1+4t, \\ y=5-7t, \\ z=5-2t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x+3}{8}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z}{3}$
	$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$	$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{1}$
23	$\begin{cases} 17x-2y+3z+3=0, \\ 2x+3y+z+3=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x=2+t, \\ y=-1+t, \\ z=-1-5t, t\in R \end{cases}$
	$\begin{cases} 8x-2y-z-16=0, \\ 9x+21y-5z+13=0. \end{cases}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{6}$
	$\begin{cases} x=1+4t, \\ y=5-7t, \\ z=-5+2t, t\in R \end{cases}$	$\frac{x+3}{8}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z+1}{-2}$

	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$
24	$\begin{cases}-8x+2y+z-1=0,\\9x+21y-5z+1=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-6}$
	$\begin{cases}7x-y-z-10=0,\\22x+30y+z-19=0.\end{cases}$	$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-8}$
	$\begin{cases}x=1+4t,\\y=1-3t,\\z=-5+3t, t\in R\end{cases}$	$\frac{x+1}{6}=\frac{y-5}{-7}=\frac{z+1}{-1}$
	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$	$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$

Задание 3. Уравнения плоскости.

Плоскость π и прямые l_1 и l_2 заданы своими уравнениями, а точка A − координатами относительно прямоугольной декартовой системы координат. Найти уравнения следующих плоскостей, проходящих через:

- точку A и прямую l_1;
- прямую l_1 параллельно прямой l_2;
- точку A параллельно плоскости π;
- точку A перпендикулярно прямой l_1.

Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Вар.	Плоскость π	Прямая l_1	Прямая l_2	Точка A
1	$12x-12y-14z-5=0$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$	$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$	$A(-2,3,4)$
2	$x+2y+5z-17=0$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-2}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$	$A(4,-1,0)$
3	$6x+4y-20z+13=0$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$	$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{1}$	$A(-2,3,-5)$
4	$10x+4y+12z-21=0$	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{3}$	$A(-2,3,-3)$
5	$x+5y-6z-27=0$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{-3}$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{1}$	$A(3,5,-5)$
6	$x-3y+4z-12=0$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-2}$	$\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-2}$	$A(1,1,-3)$
7	$4x+18y-4z-1=0$	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$	$\frac{x+3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{-2}$	$A(-5,-4,-1)$

8	$5x-y+6z-1=0$	$\frac{x+2}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{2}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{-2}$	$A(1,3,5)$
9	$x-y+2z-15=0$	$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$	$\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-3}$	$A(3,-5,5)$
10	$7x-8y-5z+2=0$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{-1}$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-3}$	$A(-3,5,2)$
11	$2x-2y-6z-9=0$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-1}$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{-2}$	$A(-1,-5,-2)$
12	$2x-2y-6z-9=0$	$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$	$A(1,3,-4)$
13	$2x-18y-2z-13=0$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-3}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{1}$	$A(2,4,1)$
14	$14x-12y-17=0$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-1}$	$A(3,-5,1)$
15	$4x-y+z+3=0$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$	$A(-2,4,0)$
16	$2x-2y-6z-9=0$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-1}$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{-2}$	$A(-1,-5,-2)$
17	$2x-2y-6z-9=0$	$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$	$A(1,3,-4)$
18	$2x-18y-2z-13=0$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-3}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{1}$	$A(2,4,1)$
19	$14x-12y-17=0$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-1}$	$A(3,-5,1)$
20	$4x-y+z+3=0$	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x+3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$	$A(-2,4,0)$
21	$2x-2y+6z-9=0$	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$	$\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+2}{-2}$	$A(1,-5,2)$
22	$2x+2y-6z-9=0$	$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$	$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{-1}$	$A(1,-3,-4)$
23	$x+4y+z-5=0$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-3}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1}$	$A(2,-4,-1)$

24	$14x - 12y + 17 = 0$	$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{3}$	$\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{1}$	$A(-3,-5,1)$

Задание 4. Метрические задачи на плоскость.

Точки A, B, C, D заданы своими координатами относительно прямоугольной декартовой системы координат. Найти высоту тетраэдра *ABCD*, опущенную из вершины *D*, и величину двугранного угла при ребре *AB*.

Проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

Вариант	Координаты точек			
1	$A(-3,4,-7)$	$B(1,5,-4)$	$C(-5,-2,0)$	$D(-12,7,-1)$
2	$A(-1,2,-3)$	$B(4,-1,0)$	$C(2,1,-2)$	$D(1,-6,-5)$
3	$A(-3,-1,1)$	$B(-9,1,-2)$	$C(3,-5,4)$	$D(-7,-2,3)$
4	$A(1,-1,1)$	$B(-2,0,3)$	$C(2,1,-1)$	$D(-2,4,2)$
5	$A(1,2,5)$	$B(1,-4,7)$	$C(1,3,-3)$	$D(6,-2,8)$
6	$A(1,0,2)$	$B(1,2,-1)$	$C(2,-2,1)$	$D(-5,-9,1)$
7	$A(1,2,-3)$	$B(1,0,1)$	$C(-2,-1,6)$	$D(3,-2,-9)$
8	$A(3,10,-5)$	$B(2,3,-15)$	$C(-6,-2,-3)$	$D(2,-7,10)$
9	$A(-1,2,4)$	$B(-1,-2,-4)$	$C(3,0,-1)$	$D(-2,-3,5)$
10	$A(0,-3,1)$	$B(-4,1,2)$	$C(2,-1,5)$	$D(-3,4,-5)$
11	$A(1,3,0)$	$B(4,-1,2)$	$C(3,0,1)$	$D(4,3,0)$
12	$A(-2,-1,-1)$	$B(0,3,2)$	$C(3,1,-4)$	$D(-11,2,-16)$
13	$A(-3,-5,6)$	$B(2,1,-4)$	$C(0,-3,-1)$	$D(3,6,8)$
14	$A(2,-4,-3)$	$B(5,-6,0)$	$C(-1,3,-3)$	$D(2,-10,8)$
15	$A(1,-1,2)$	$B(2,1,-2)$	$C(1,1,4)$	$D(-3,2,7)$
16	$A(1,3,6)$	$B(2,2,1)$	$C(-1,10,1)$	$D(5,-4,5)$
17	$A(-4,2,6)$	$B(2,-3,0)$	$C(-10,5,8)$	$D(-12,1,8)$
18	$A(7,2,4)$	$B(7,-1,-2)$	$C(-5,-7,-1)$	$D(10,1,8)$
19	$A(2,1,4)$	$B(3,5,-2)$	$C(-7,-3,2)$	$D(-3,1,8)$
20	$A(-1,-5,2)$	$B(-6,0,-3)$	$C(3,6,-3)$	$D(-10,-8,7)$
21	$A(0,-1,-1)$	$B(-2,3,5)$	$C(1,-5,-9)$	$D(-4,-13,6)$
22	$A(-5,2,10)$	$B(2,5,0)$	$C(1,2,4)$	$D(-3,-6,-8)$
23	$A(2,-1,-2)$	$B(1,2,1)$	$C(5,0,-6)$	$D(14,-3,7)$
24	$A(-2,0,-4)$	$B(-1,7,1)$	$C(4,-8,-4)$	$D(-6,5,5)$

РАЗДЕЛ 2. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Методические указания к выполнению лабораторной работы

Задание 1. Написать канонические или нормальные уравнения следующих линий:

- Окружности, если известны координаты точек A и B, являющихся концами ее диаметра.
- Эллипса, если известны его большая ($2a$) и малая ($2b$) оси.
- Гиперболы, если известно расстояние A_1A_2 между вершинами и расстояние F_1F_2 между фокусами.
- Параболы, если известно расстояние от ее фокуса F до вершины O.

Во всех случаях привести пример трех точек, принадлежащих данной линии, а также найти следующие характеристики:

Линия	Характеристики линии
Эллипс	Эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис.
Гипербола	Эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис и асимптот.
Парабола	Координаты вершины и фокуса, уравнение директрисы.

Построив все данные и найденные точки, линии по их уравнениям, директрисы и асимптоты, проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

В случае эллипса и гиперболы измерениями проверить, что отношение расстояний от точки, принадлежащей линии, до соответствующих фокуса и директрисы, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

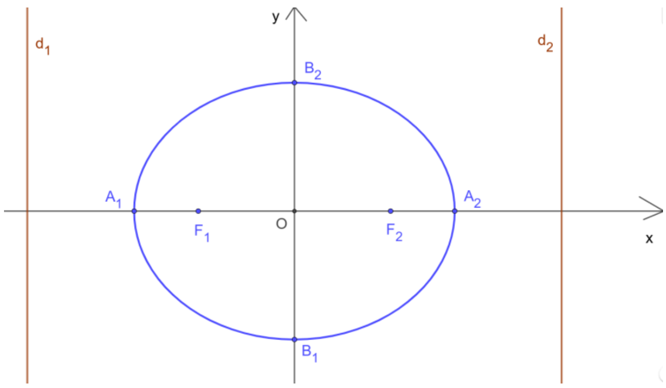
№№ варианта	A	B	$2a$	$2b$	A_1A_2	F_1F_2	FO
	(–7, 10)	(5, –2)	10	6	10	26	6

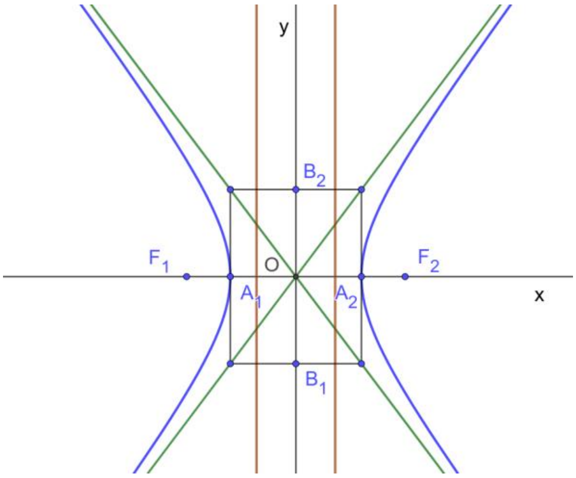
Необходимый теоретический материал

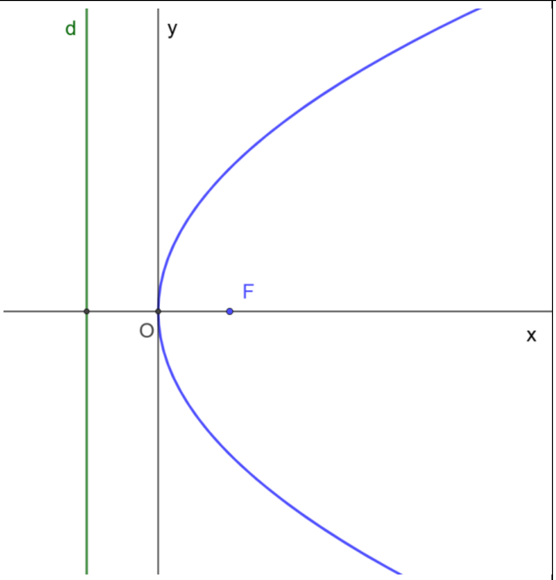
Определение линии	Идеи, лежащие в основе вывода канонических уравнений	Канонические уравнения (ПДСК)
Окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки, называемой ее центром.	Пусть $O(x_0, y_0)$ – центр окружности, r – ее радиус. Тогда по определению точка $M(x, y)$ принадлежит окружности тогда и только тогда, когда $$OM = r.$$ В прямоугольной декартовой системе координат расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле $$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$ Система координат будет канонической,	Нормальное уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, каноническое уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

	если начало координат совпадает с центром окружности.	
Эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.	Пусть F_1 и F_2 – фокусы, $2c$ – расстояние между ними. Введем ***каноническую систему координат***: Начало координат – середина отрезка F_1F_2, ось Ox направлена по линии фокусов от первого фокуса ко второму, ось Oy ей перпендикулярна. Тогда $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. По определению точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда $MF_1 + MF_2 = 2a.$ $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} = 2a.$ Для получения канонического уравнения эллипса преобразуем данное уравнение и введем обозначение $b^2 = a^2 - c^2$.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Гипербола есть геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, равная $2a$.	Пусть F_1 и F_2 – фокусы, $2c$ – расстояние между ними. Введем ***каноническую систему координат***: Начало координат – середина отрезка F_1F_2, ось Ox направлена по линии фокусов от первого фокуса ко второму, ось Oy ей перпендикулярна. Тогда $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$. По определению точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда $\lvert MF_1 - MF_2 \rvert = 2a.$ $\left\lvert\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} - \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right\rvert = 2a$ Для получения канонического уравнения гиперболы преобразуем данное уравнение и введем обозначение $b^2 = c^2 - a^2$.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Парабола есть геометрическое место точек, равноудаленных от постоянной точки (*фокуса* параболы) и постоянной прямой (*директрисы* параболы).	Введем ***каноническую систему координат***: за ось абсцисс принимаем перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису, а начало координат поместим посредине между фокусом F и директрисой d. Обозначим через параметр p расстояние от фокуса до директрисы. Тогда координаты фокуса $F(\frac{p}{2},0),$	$y^2=2px.$

	уравнение директрисы $$y=-\frac{p}{2}.$$ По определению точка $M(x,y)$ принадлежит параболе тогда и только тогда, когда $$\rho(M,d)=\lvert FM\rvert.$$ $$\frac{p}{2}+x=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}.$$ Для получения канонического уравнения параболы преобразуем данное уравнение.	

Линия	Чертеж	Обозначения
Эллипс		$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ – вершины бóльшей оси, отрезок A_1A_2 – бóльшая ось, $2a$ – бóльшая ось, a – малая полуось, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ – вершины малой оси, отрезок B_1B_2 – малая ось, $2b$ – малая ось, b – малая полуось, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокусы, $2c$ – фокальное расстояние, $a>c$, $b^2=a^2-c^2$.
	Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большой оси: $e=\frac{c}{a}$, $e<1$. Директрисами эллипса называются прямые, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии $\frac{a}{e}$. Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету эллипса.	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Гипербола</td>
<td>
</td>
<td>$A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ – вершины действительной оси,
отрезок A_1A_2 – действительная ось,
$2a$ – действительная ось,
a – действительная полуось,
$B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ – вершины мнимой оси,
отрезок B_1B_2 – мнимая ось,
$2b$ – мнимая ось,
b – мнимая полуось,
$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы,
$2c$ – фокальное расстояние,
$a < c,$
$b^2 = c^2 - a^2.$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси: $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$.
Директрисами гиперболы называются прямые, перпендикулярные к фокальной оси и отстоящие от центра на расстоянии $\frac{a}{e}$.
Отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию от той же точки до соответствующей директрисы равно эксцентриситету гиперболы.
Асимптоты гиперболы определяются равенствами $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Если точка, двигаясь по гиперболе, неограниченно удаляется, то расстояние ее от одной из асимптот стремится к нулю.
Асимптоты служат диагоналями прямоугольника, центр которого совпадает с центром гиперболы, а стороны равны и параллельны осям гиперболы.</td>
</tr>
</table>

Парабола		Параметр p – расстояние от фокуса до директрисы, $F\left(\frac{p}{2},0\right)$– фокус, $x=-\frac{p}{2}$ – директриса, $O(0,0)$ – вершина.

Образец выполнения задания 1

1. В нормальное уравнение окружности входят три параметра: координаты центра и радиус.

Центр окружности является серединой диаметра AB.

Координаты середины отрезка M_1M_2, где $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ можно найти по формуле

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Так как $A(-7,10)$, $B(5,-2)$, то координаты центра O окружности будут

$$\left(\frac{-7+5}{2},\frac{10+(-2)}{2}\right)=(-1,4).$$

Радиус окружности $r\ =\ OA$:

$$\sqrt{(-1-(-7))^2+(4-10)^2}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

Нормальное уравнение окружности имеет вид

$$(x+1)^2+(y-4)^2=72$$

Приведем примеры точек, принадлежащих данной окружности:

пусть $x=5$, тогда

$$(5+1)^2+(y-4)^2=72.$$

Отсюда $y=10$ или $y=-2$.

$M_1(5,10)$, $M_2(5,-2)$;

пусть $x=-7$, тогда

$$(-7+1)^2+(y-4)^2=72.$$

Отсюда $y=10$ или $y=-2$.

$M_3(-7,10)$, $M_4(-7,-2)$.

2. Так как $2a=10$, $2b=6$, то $a=5$, $b=3$, и уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Приведем примеры точек, принадлежащих данному эллипсу:

пусть $x = 0$, тогда

$y = 3$ или $y = -3$.

$B_1(0, 3)$, $B_2(0, -3)$ − эти точки будут являться вершинами малой оси;

пусть $x = 3$, тогда

$$y = \pm\frac{12}{5}.$$

$$M_1\left(3, \frac{12}{5}\right), M_2\left(3, -\frac{12}{5}\right).$$

Так как у эллипса $b^2 = a^2 - c^2$, то $c = 4$.

Эксцентриситет

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}.$$

Координаты вершин большой оси – $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, малой оси – $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$.

Координаты фокусов: $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

Уравнения директрис

$$x = \pm\frac{a}{e},$$

отсюда

$$x = \pm\frac{25}{4}.$$

3. Так как $A_1A_2 = 10$, $F_1F_2 = 26$, то $a = 5$, $c = 13$. Для гиперболы $b^2 = c^2 - a^2$, отсюда $b = 12$. Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

Приведем примеры точек, принадлежащих данной гиперболе:

пусть $y = 0$, тогда $x = 5$ или $y = -5$.

$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ − эти точки будут являться вершинами действительной оси;

пусть $x = 13$, тогда

$$y = \pm\frac{144}{5}.$$

$$M_1\left(13, \frac{144}{5}\right), M_2\left(13, -\frac{144}{5}\right).$$

Эксцентриситет

$$e = \frac{c}{a} = \frac{13}{5}.$$

Координаты вершин действительной оси – $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, мнимой оси – $B_1(0, 12)$, $B_2(0, -12)$.

Координаты фокусов: $F_1(-13, 0)$, $F_2(13, 0)$.

Уравнения директрис

$$x = \pm \frac{a}{e},$$

отсюда

$$x = \pm \frac{25}{13}.$$

Уравнения асимптот определяются равенствами

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

т. е.

$$y = \pm \frac{12}{5} x.$$

4. Так как $FO = 6$, то $p/2 = 6$, значит, $p = 12$, и уравнение параболы $y^2 = 24x$.

Приведем примеры точек, принадлежащих данной параболе:

пусть $x = 1/6$, тогда $y = 2$ или $y = -2$.

$$M_1\left(\frac{1}{6}, 2\right), \ M_2\left(\frac{1}{6}, -2\right).$$

пусть $x = 1$, тогда $y = \pm 2\sqrt{6}$.

$M_3\left(1, 2\sqrt{6}\right)$, $M_4\left(1, -2\sqrt{6}\right)$.

Координаты вершины параболы: $O(0, 0)$.

Координаты фокуса: $F(6, 0)$.

Уравнение директрисы $x = -6$.

Ответ:

	Окружность	Эллипс	Гипербола	Парабола
Уравнение	$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 72$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$	$y^2 = 24x$
Точки	$M_1(5, 10)$, $M_2(5, -2)$, $M_3(-7, 10)$, $M_4(-7, -2)$.	$B_1(0, 3)$, $B_2(0, -3)$, $M_1\left(3, \frac{12}{5}\right)$, $M_2\left(3, -\frac{12}{5}\right)$.	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $M_1\left(13, \frac{144}{5}\right)$, $M_2\left(13, -\frac{144}{5}\right)$	$M_1\left(\frac{1}{6}, 2\right)$, $M_2\left(\frac{1}{6}, -2\right)$ $M_3\left(1, 2\sqrt{6}\right)$, $M_4\left(1, -2\sqrt{6}\right)$.
Координаты вершин	–	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, 3)$, $B_2(0, -3)$	$A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$	$O(0, 0)$
Координаты фокусов	–	$F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$	$F_1(-13, 0)$, $F_2(13, 0)$	$F(6, 0)$
Эксцентриси-тет	–	$e = \frac{4}{5}$	$e = \frac{13}{5}$	$e = 1$

Директрисы	–	$x = \pm\dfrac{25}{4}$	$x = \pm\dfrac{25}{13}$	$x = -6$
Асимптоты	–	–	$y = \pm\dfrac{12}{5}x$	–

Образец проверки выполненного задания 1 в программе *geogebra*

1. Для проверки правильности выполненного задания в поле ввода вводим координаты данных точек, полученное уравнение окружности, координаты примеров точек, принадлежащих окружности.

Визуально убеждаемся в правильности проведенных вычислений (рис. 1).

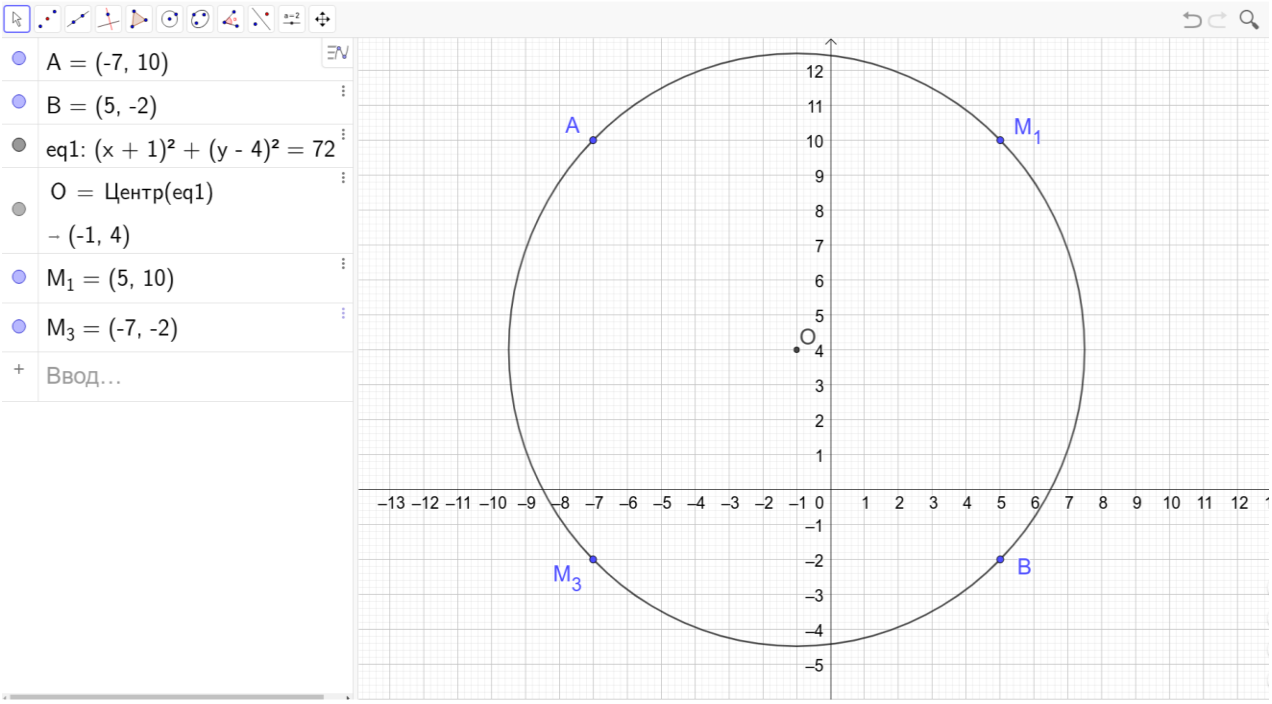


Рис. 1

2. Для проверки правильности выполненного задания в поле ввода вводим полученное уравнение эллипса, координаты примеров точек, принадлежащих эллипсу, его вершин и фокусов.

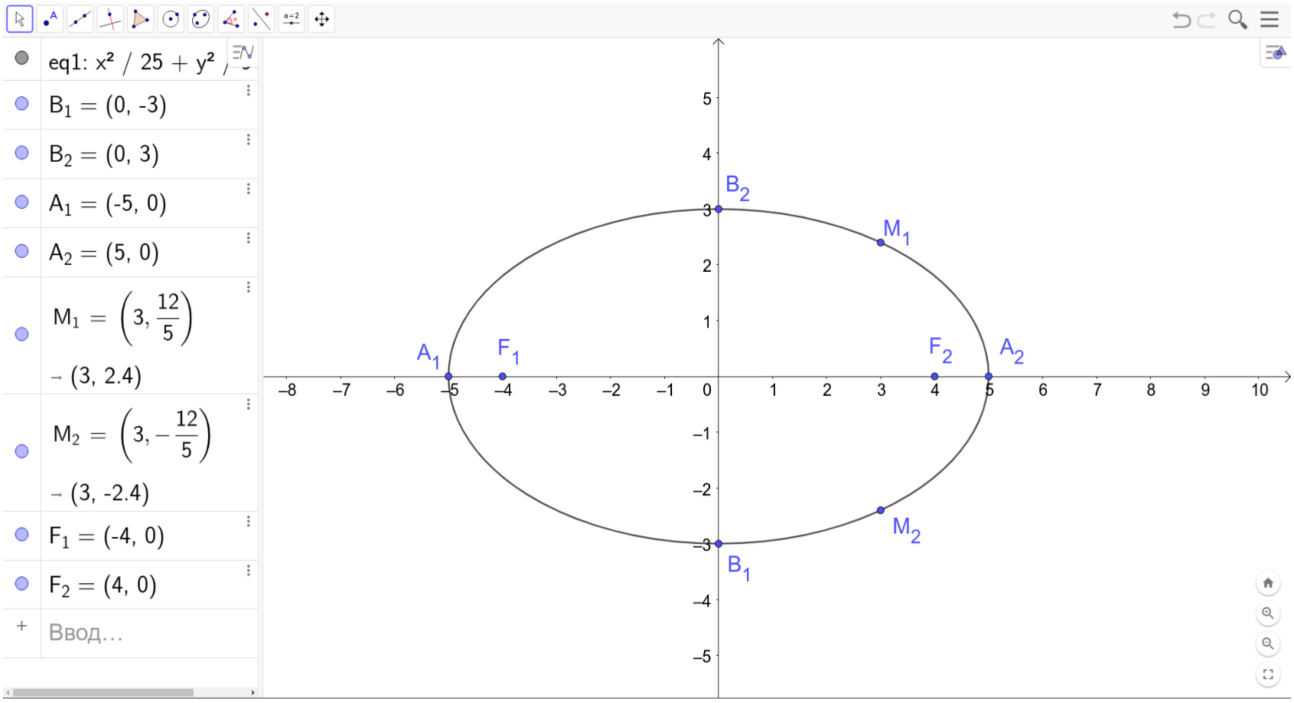
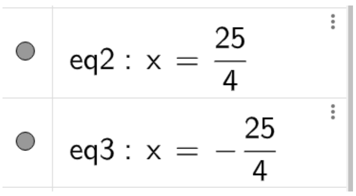


Рис. 2

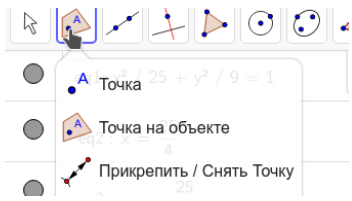
Визуально убеждаемся в правильности проведенных вычислений (рис. 2).

Для проверки правильности нахождения эксцентриситета эллипса и уравнений его директрис

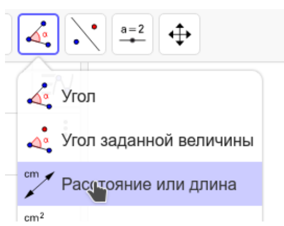
В поле ввода задаем уравнения директрис



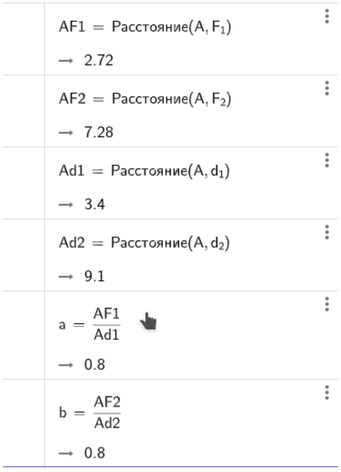
С помощью команды «*Точка на объекте*» отмечаем произвольную точку на эллипсе



С помощью команды «*Расстояние или длина*» измеряем расстояния от построенной точки до фокусов F_1и F_2 и директрис d_1 и d_2



В поле ввода задаем отношение соответствующих расстояний и сравниваем полученное значение с вычисленным эксцентриситетом эллипса.



3. Для проверки правильности выполненного задания в поле ввода вводим полученное уравнение гиперболы, координаты примеров точек, принадлежащих гиперболе, ее вершин и фокусов, уравнения асимптот и директрис.

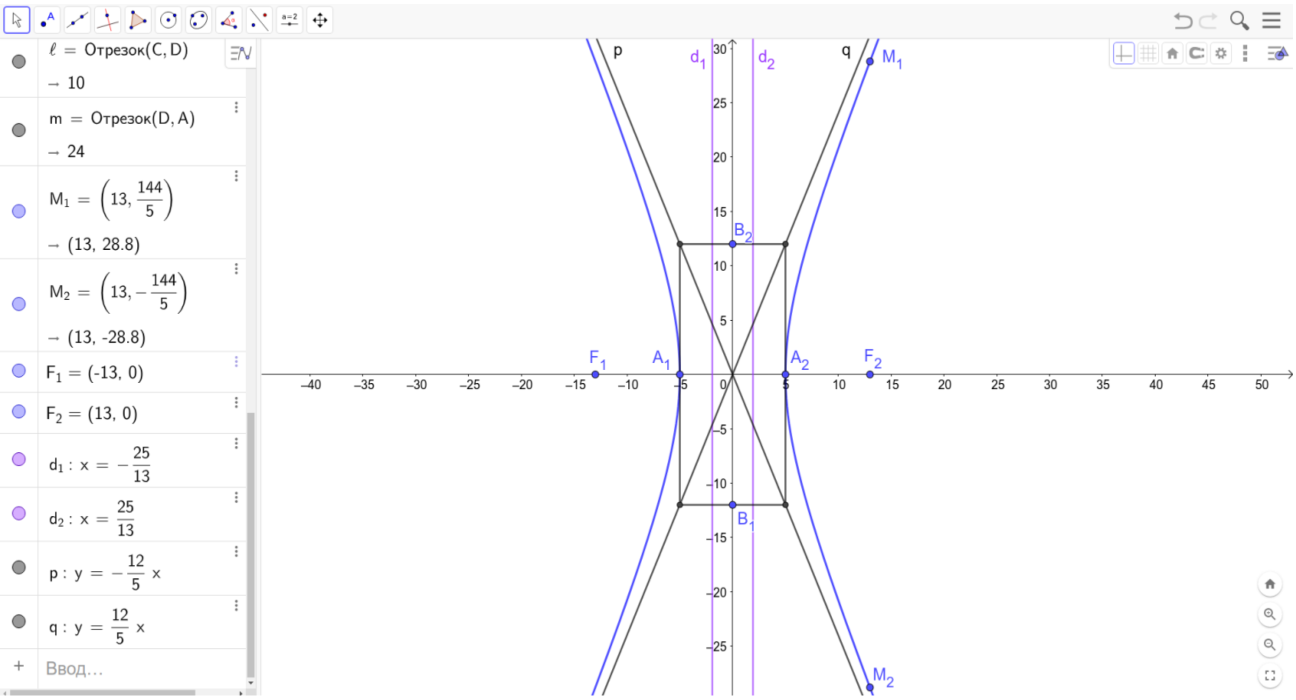


Рис. 3

Визуально убеждаемся в правильности проведенных вычислений (рис. 3).

4. Для проверки правильности выполненного задания в поле ввода вводим полученное уравнение параболы, координаты примеров точек, принадлежащих параболе, ее вершины и фокуса, уравнение директрисы.

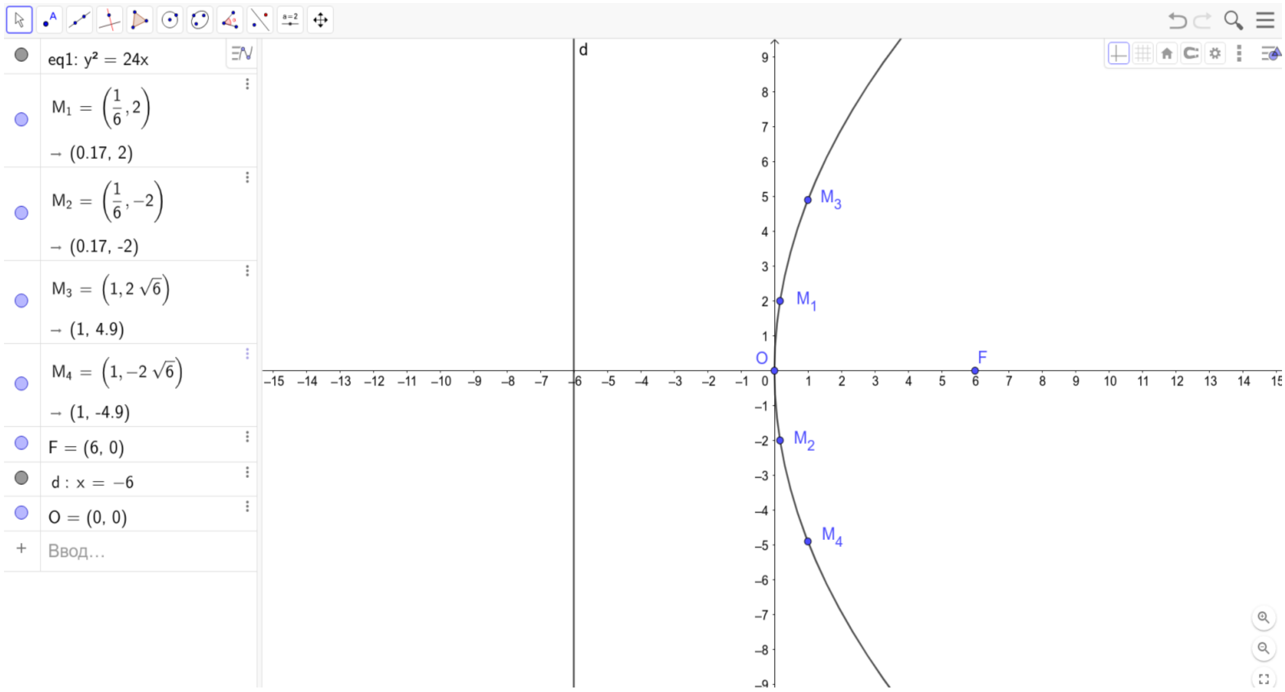


Рис. 4

Визуально убеждаемся в правильности проведенных вычислений (рис. 4).

Ответ на данное задание должен включать в себя необходимые вычисления, таблицу полученных результатов и скрины результатов проверки в программе *geogebra*.

Задание 2. Найти касательные к данной линии второго порядка, удовлетворяющие заданному условию. Правильность решения проверить в программе *geogebra*.

Уравнение линии второго порядка	Условия на касательную
$y^2 = 8x$	Проходит через точку $P(5,-7)$

Необходимый теоретический материал

Если линия второго порядка задана каноническим уравнением, а $A(x_0, y_0)$ − точка касания, уравнение касательной имеет вид

Эллипс	Гипербола	Парабола
Каноническое уравнение		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2 = 2px$
Уравнение касательной		
$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$	$\frac{x\cdot x_0}{a^2}-\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$	$y\cdot y_0 = p(x+x_0)$

- Если прямая, заданная общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит этой прямой, то координаты точки удовлетворяют данному уравнению, т.е. справедливо равенство $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

- Условие параллельности двух прямых, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

- Условие перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Образец выполнения задания 2

1 способ решения

Так как точка не лежит на данной линии, для нахождения касательной необходимо найти точку касания $A(x_0, y_0)$.

Уравнение касательной имеет вид $y \cdot y_0 = 4(x + x_0)$. Так как касательная проходит через точку P, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной. Следовательно, $-7 \cdot y_0 = 4(5 + x_0)$. Кроме того, эта точка лежит на параболе, т.е. $y_0^2 = 8x_0$. Получили систему уравнений для нахождения координат точки касания:

$$\begin{cases} -7 \cdot y_0 = 4(5 + x_0), \\ y_0^2 = 8x_0. \end{cases}$$

Отсюда получаем точки касания $(2, -4)$ и $(12.5, -10)$.

Уравнения касательных, проходящих через данную точку, имеют вид:

$$-4y = 4(x + 2) \text{ и } -10y = 4(x + 12.5),$$

или

$$x + y + 2 = 0,\ 2x + 5y + 25 = 0.$$

2 способ решения

Будем искать уравнение касательной в виде $y = kx + b$.

Во-первых, данная прямая проходит через точку $P(5, -7)$. Значит, $-7 = 5k + b$ (1).

Во-вторых, эта прямая и данная линия второго порядка имеют одну двойную общую точку, т.е. уравнение $(kx + b)^2 = 8x$ (2) имеет единственное решение:

$$k^2x^2 + 2kbx + b^2 = 8x.$$

Условие существования единственного двойного решения этого уравнения означают, что уравнение квадратное, и его дискриминант равен 0. Отсюда $(kb - 4)^2 - k^2b^2 = 0$, т.е.

$$16 - 8kb = 0.$$

Отсюда $kb = 2$. Получили систему уравнений $\begin{cases} kb = 2, \\ -7 = 5k + b \end{cases}$, решениями которой являются

$$\begin{cases} k = -1, \\ b = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k = -0.4, \\ b = -5. \end{cases}$$

Уравнения касательных, проходящих через данную точку, имеют вид:

$$x + y + 2 = 0, \quad 2x + 5y + 25 = 0.$$

Образец проверки выполненного задания 2 в программе *geogebra*

Для проверки найденного решения запускаем программу *geogebra*. В строке ввода набираем уравнение данной линии: $y\hat{}2 = 8 * x$

Далее в строке ввода задаем координаты точки: $(5, -7)$

Далее, выбирая команду для построения касательной, указываем точку и линию (рис. 5).

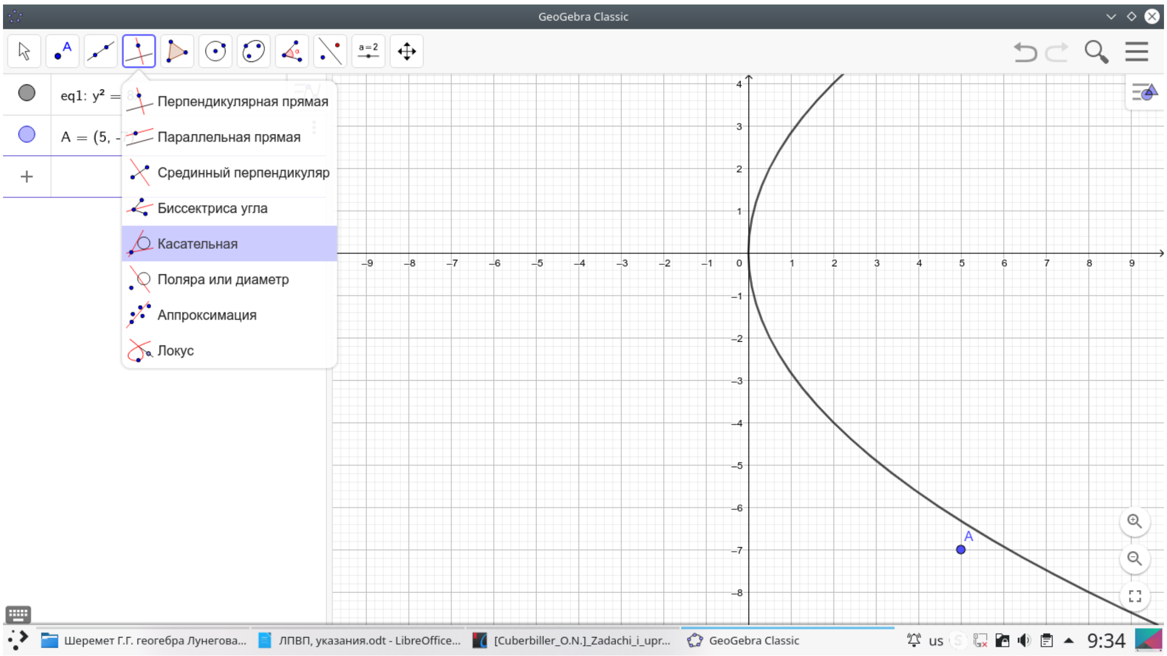


Рис. 5

Для того чтобы построить точки касания, выбираем команду «Пересечение» (рис. 6).

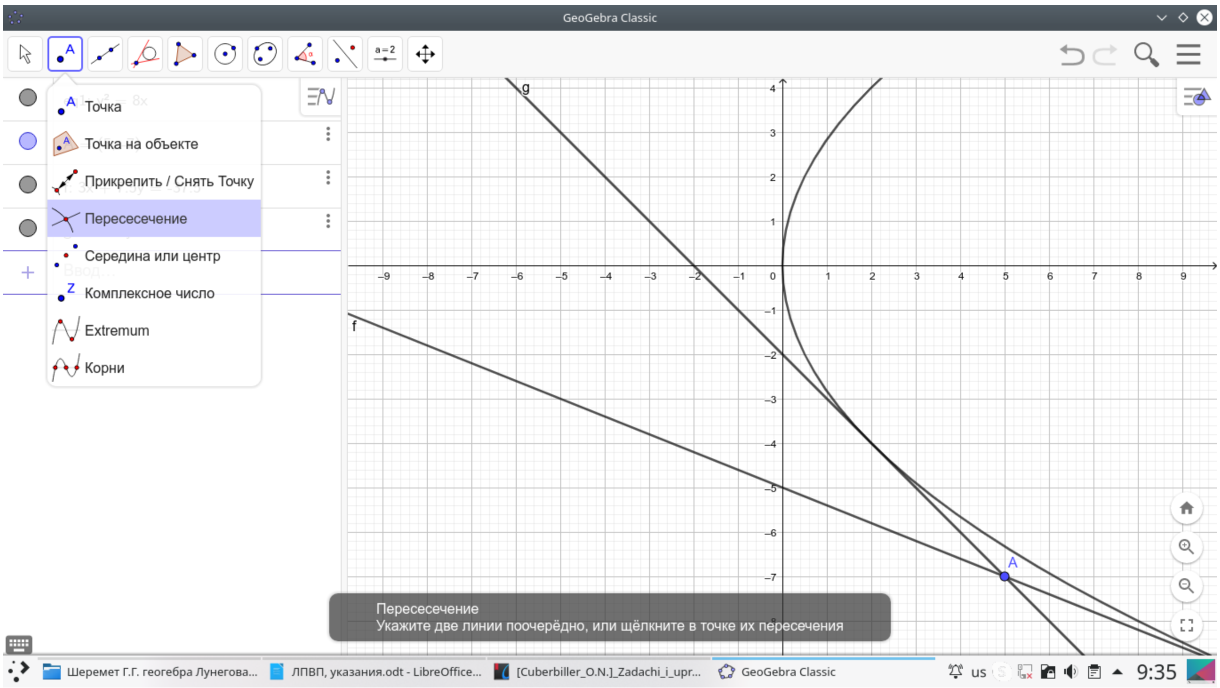


Рис. 6

При всех выполняемых построениях на панели объектов появляется их координатное описание (общие уравнения для прямых и координаты для точек) (рис. 7).

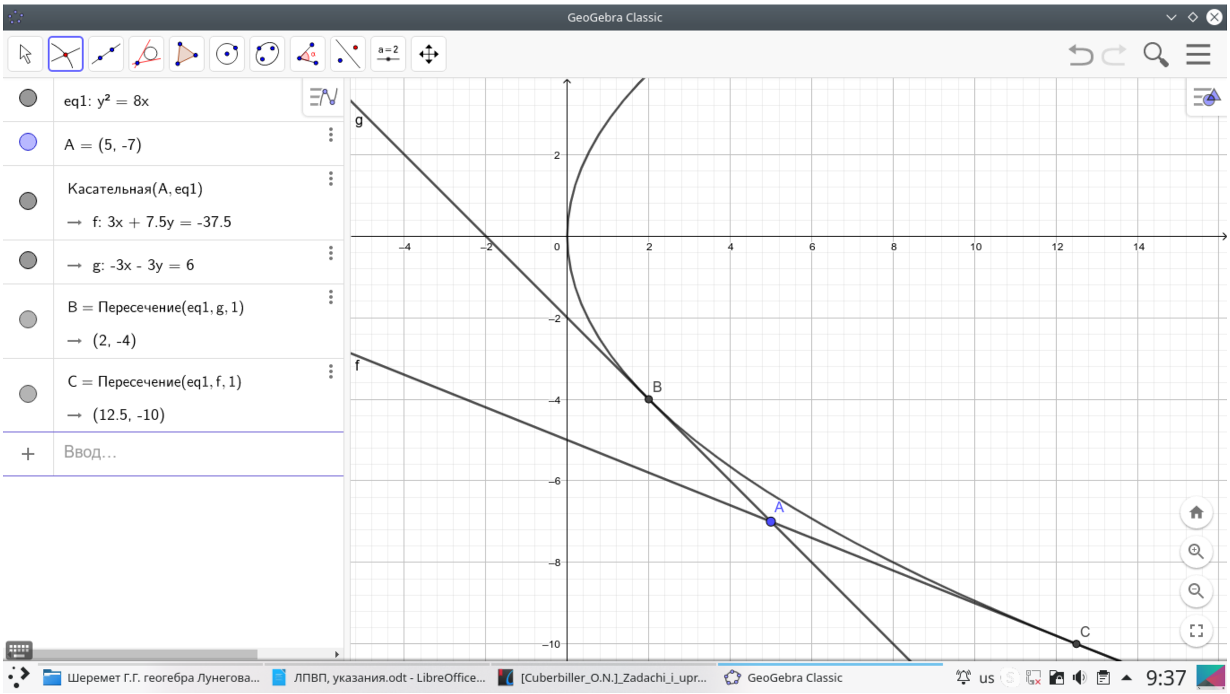


Рис. 7

Сравните результаты, полученные в программе, с результатами Ваших вычислений.

Ответ на данное задание должен включать в себя необходимые вычисления, уравнения полученных касательных и скрины результатов проверки в программе *geogebra*.

Задание 3. Линии второго порядка заданы уравнениями относительно полярной системы координат. Определить тип этих линий и найти их канонические уравнения относительно прямоугольной декартовой системы координат. Проверить выполнение задания в программе *geogebra*. На чертеже указать взаимное расположение полярной и канонической прямоугольной систем координат.

$\rho = \dfrac{25}{13 - 12cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{1}{3 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{9}{4 - 5cos\varphi}$

Необходимый теоретический материал

Пусть Γ − эллипс, ветвь гиперболы или парабола, F − фокус этой кривой, D − соответствующая директриса. Уравнение кривой Γ в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом, а полярная ось сонаправлена с осью кривой, имеет вид:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cdot cos\varphi}.$$

	Каноническое уравнение относительно ПДСК	Параметр p	Эксцентриситет e
эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$p=\frac{b^2}{a}$	$e=\frac{c}{a}<1$
гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$p=\frac{b^2}{a}$	$e=\frac{c}{a}>1$
парабола	$y^2=2px$	Соответствует параметру p из канонического уравнения	$e=1$

Образец выполнения задания 3

$$1.\ \rho=\frac{25}{13-12cos\varphi}.$$

Чтобы найти значения p и e, преобразуем уравнение так, чтобы свободный коэффициент в знаменателе был равен 1:

$$\rho=\frac{\frac{25}{13}}{1-\frac{12}{13}cos\varphi}.$$

Отсюда

$$p=\frac{b^2}{a}=\frac{25}{13},\quad e=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}<1.$$

Так как эксцентриситет меньше 1, то уравнение задает эллипс. Для нахождения значений большой и малой полуосей эллипса получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{12}{13},\\ \frac{b^2}{a}=\frac{25}{13},\\ b^2=a^2-c^2,\end{cases}$$

решая которую получаем а $=13$, $b=5$, $c=12$. И каноническое уравнение эллипса относительно ПДСК имеет вид:

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

$$2.\ \rho=\frac{1}{3-3cos\varphi}.$$

Чтобы найти значения p и e, преобразуем уравнение так, чтобы свободный коэффициент в знаменателе был равен 1:

$$\rho=\frac{\frac{1}{3}}{1-cos\varphi}.$$

Отсюда

$$p=\frac{1}{3},\quad e=1.$$

Так как эксцентриситет равен 1, уравнение задает параболу. Параметр $p = 1/3$. Каноническое уравнение параболы относительно ПДСК имеет вид:

$$y^2 = \frac{2}{3}x.$$

$$3.\ \rho = \frac{9}{4 - 5cos\varphi}.$$

Чтобы найти значения p и e, преобразуем уравнение так, чтобы свободный коэффициент в знаменателе был равен 1:

$$\rho = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4}cos\varphi}.$$

Отсюда

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1.$$

Так как эксцентриситет больше 1, то уравнение задает гиперболу. Для нахождения значений действительной и мнимой полуосей эллипса получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{5}{4}, \\ \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}, \\ b^2 = c^2 - a^2, \end{cases}$$

решая которую получаем $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$. И каноническое уравнение эллипса относительно ПДСК имеет вид:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

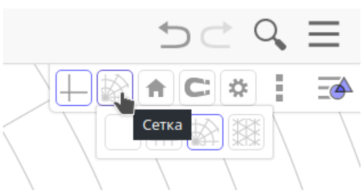
Ответ:

$\rho = \frac{25}{13 - 12cos\varphi}$	$\rho = \frac{1}{3 - 3cos\varphi}$	$\rho = \frac{9}{4 - 5cos\varphi}$
эллипс	парабола	гипербола
$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$	$y^2 = \frac{2}{3}x$	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

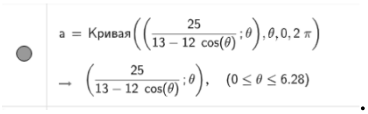
Образец проверки выполненного задания 3 в программе *geogebra*

1. В программе *geogebra* переходим к полярной системе координат.

Кнопка «*Сетка*» позволяет вам выбрать тип координатной сетки: прямоугольная, полярная или изометрическая:



В строке ввода набираем уравнение данной линии:



.

Получаем (рис. 8)

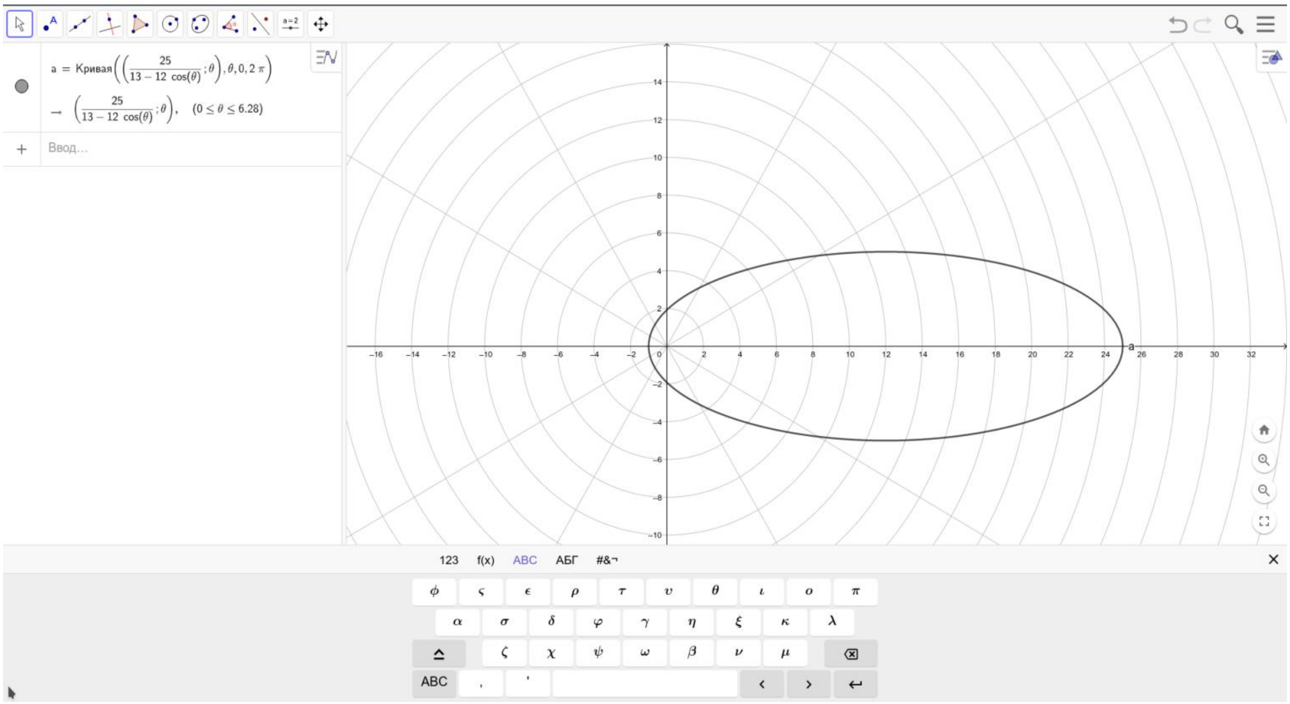


Рис. 8

Чтобы построить каноническую прямоугольную систему координат для данного эллипса, построим его центр относительно данной полярной системы координат. Это будет точка с координатами $(12, 0°)$. В программе *geogebra* полярная и прямоугольная система координат имеют общее начало, и полярная ось направлена по оси Ox. Поэтому оси канонической прямоугольной системы координат – прямые $y = 0$, $x = 12$ (рис. 9).

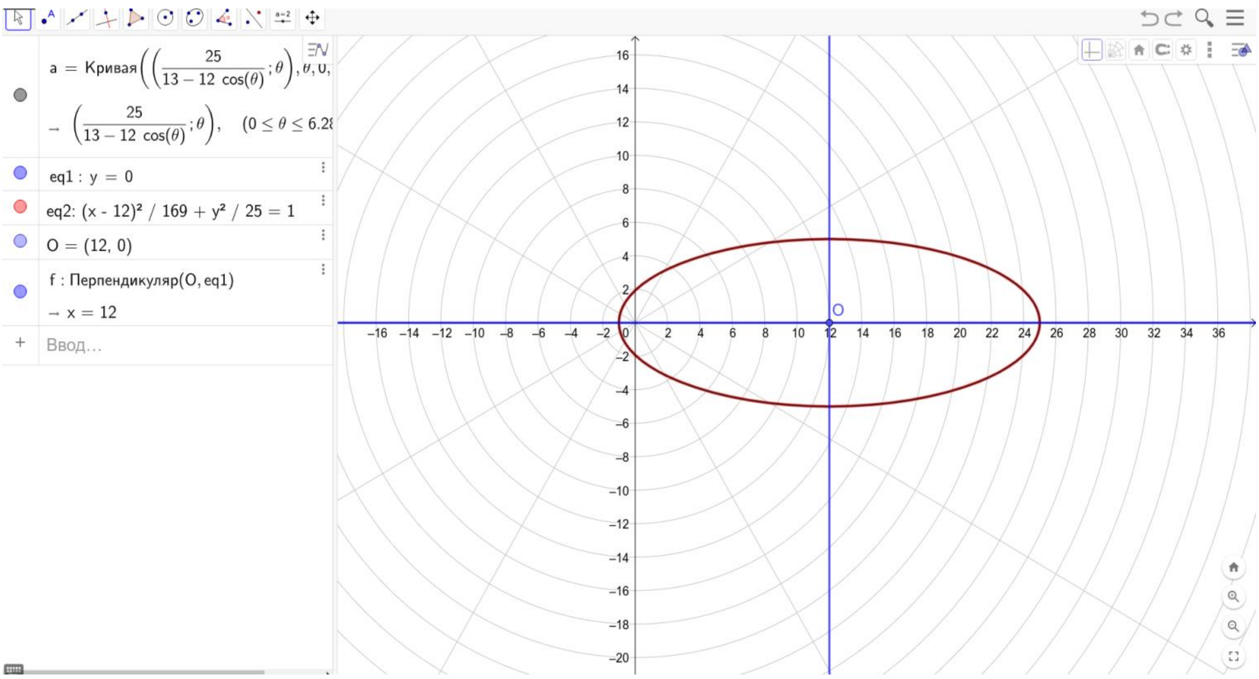


Рис. 9

Вводим в строке ввода уравнение

$$\frac{(x-12)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

Визуально убеждаемся, что оба построенных эллипса совпадают.

2. В строке ввода вводим уравнение данной линии. Вершина параболы относительно полярной системы координат имеет координаты $O\left(-\frac{1}{6},0°\right)$. В программе *geogebra* полярная и прямоугольная система координат имеют общее начало, и полярная ось направлена по оси Ox. Поэтому оси канонической прямоугольной системы координат – прямые $y=0$, $x=-1/6$ (рис. 10).

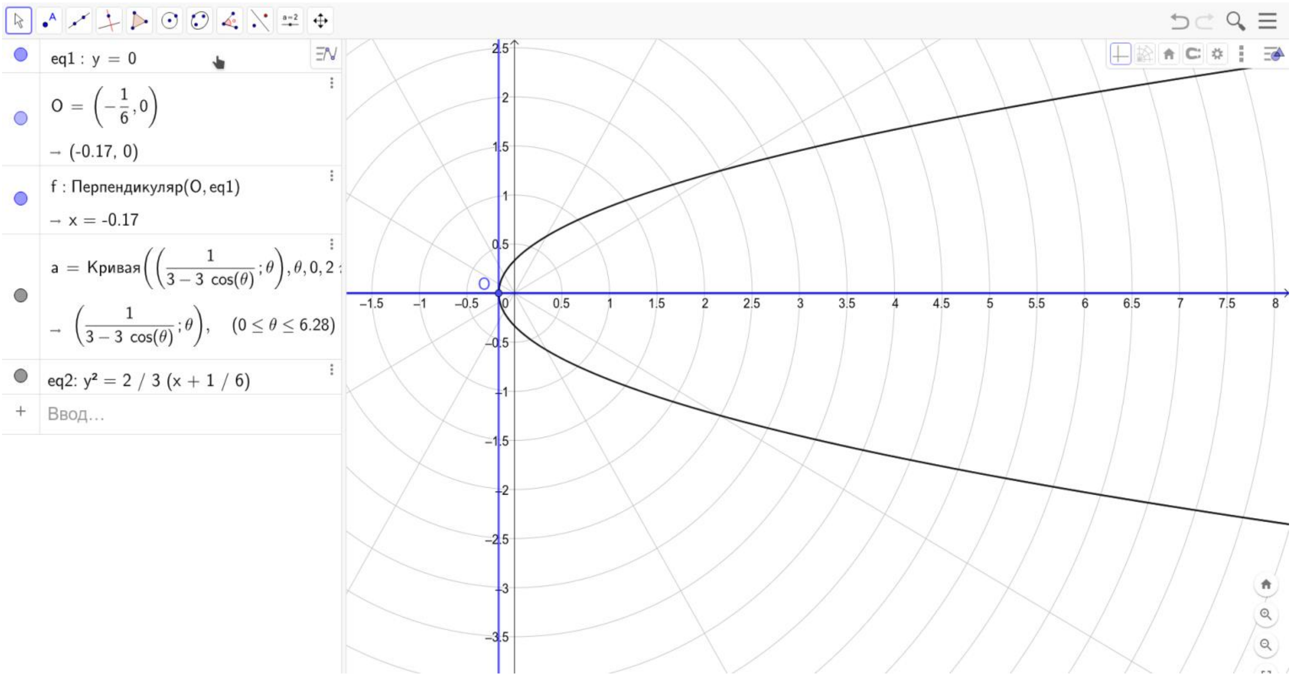


Рис. 10

Вводим в строке ввода уравнение

$$y^2=\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{6}\right).$$

Визуально убеждаемся, что обе построенных параболы совпадают.

3. В строке ввода вводим уравнение данной линии. Чтобы построить каноническую прямоугольную систему координат для данной гиперболы, построим ее центр относительно данной полярной системы координат. Это будет точка с координатами $(5,0°)$. В программе *geogebra* полярная и прямоугольная система координат имеют общее начало, и полярная ось направлена по оси Ox. Поэтому оси канонической прямоугольной системы координат – прямые $y=0$, $x=-5$ (рис. 11).

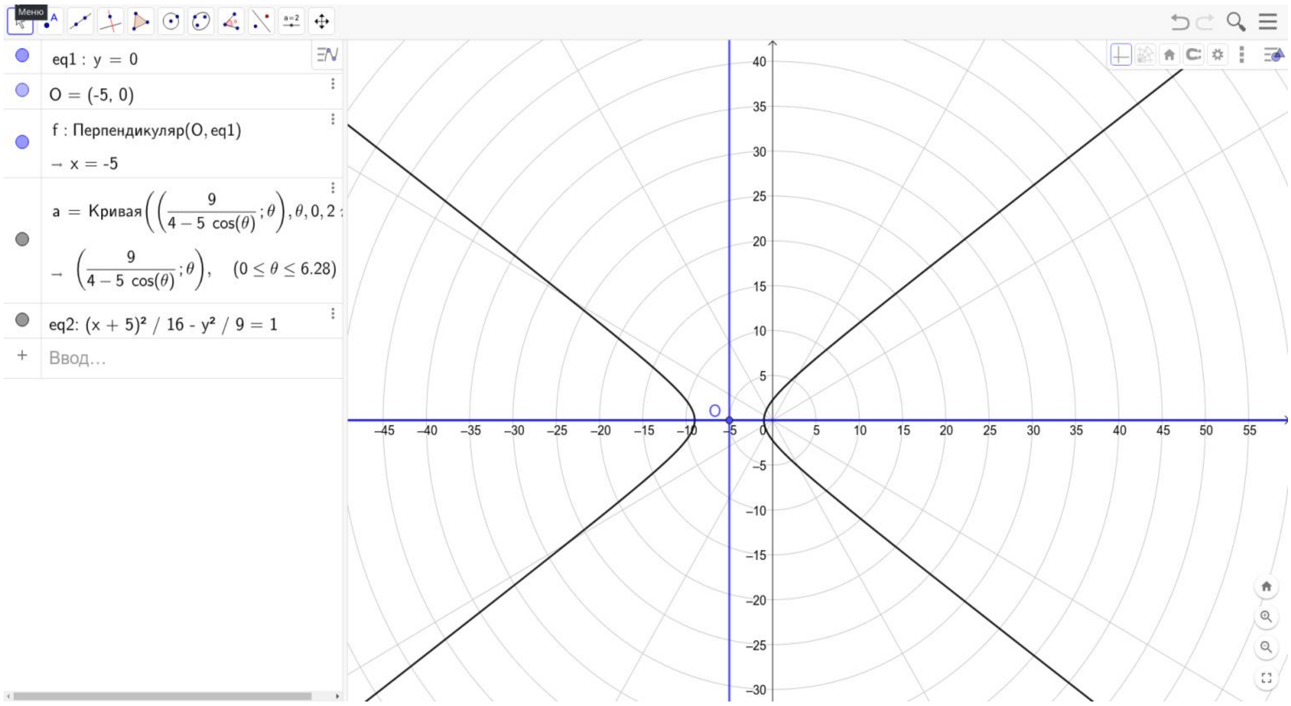


Рис. 11

Визуально убеждаемся, что обе построенных гиперболы совпадают.

Ответ на данное задание должен включать в себя необходимые вычисления, уравнения полученных кривых и скрины результатов проверки в программе *geogebra*.

Задание 4. Относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат кривые заданы своими уравнениями. С помощью преобразований системы координат привести их к каноническому виду. Определить вид линии. В пакете *geogebra* построить указанные линии по их исходным уравнениям и показать, что при найденных преобразованиях полученное каноническое уравнение соответствует заданной линии.

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Необходимый теоретический материал

Пусть в ПДСК Oxy линия второго порядка задана своим общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Известно, что существует такая ПДСК $Ox'y'$, полученная поворотом системы Oxy относительно точки O на угол α, в которой уравнение линии не содержит член с произведением неизвестных, т.е. имеет вид

$$a'_{11}{x'}^2 + a'_{22}{y'}^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0\ (*).$$

Здесь возможны следующие случаи:

1. Если $a'_{11} \neq 0$ и $a'_{22} \neq 0$, то уравнение (*) переписываем в виде

$$a'_{11}\left({x'}^2 + 2\frac{a'_{13}}{a'_{11}}x' + \frac{{a'_{13}}^2}{{a'_{11}}^2}\right) + a'_{22}\left({y'}^2 + 2\frac{a'_{23}}{a'_{22}}y' + \frac{{a'_{23}}^2}{{a'_{22}}^2}\right) - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}} + a'_{33} = 0$$

или

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + A_{33} = 0,$$

где

$$A_{33} = a'_{33} - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}}.$$

Применяя параллельный перенос

$$\begin{cases} X = x' + \dfrac{a'_{13}}{a'_{11}}, \\ Y = y' + \dfrac{a'_{23}}{a'_{22}} \end{cases}$$

получаем простейшее уравнение линии

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + A_{33} = 0. (1)$$

2. Если $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$ и $a'_{13} \neq 0$, то, выделяя полный квадрат, получаем простейшее уравнение

$$a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}X = 0, (2)$$

где

$$Y = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, \qquad X = x' + \frac{a'_{33}}{2a'_{13}}.$$

3. Если $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$ и $a'_{13} = 0$, то из уравнения

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

получаем

$$a'_{22}\left({y'}^2 + 2\frac{a'_{23}}{a'_{22}}y' + \frac{{a'_{23}}^2}{{a'_{22}}^2}\right) - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}} + a'_{33} = 0$$

или

$$a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + A_{33} = 0,$$

где

$$A_{33} = a'_{33} - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}}.$$

Обозначая

$$Y = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}},$$

окончательно получаем

$$a'_{22}Y^2 + A_{33} = 0. (3)$$

По уравнению (1), (2) или (3) можно найти каноническое уравнение линии.

При выполнении работы следует придерживаться следующего порядка:

1. Определить угол поворота α из равенства
$$ctg2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$
2. Найти $cos\alpha$ и $sin\alpha$, используя формулы
$$\cos 2\alpha = \frac{ctg2\alpha}{\sqrt{1 + ctg^2 2\alpha}}, \qquad sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - cos2\alpha}{2}}, \qquad cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + cos2\alpha}{2}}.$$
3. Составить формулы поворота ПДСК
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

4. Найти уравнение данной линии в новой системе координат, убедиться, что оно не содержит произведение $x'y'$.
5. В полученном уравнении выделить полные квадраты, определить тип линии, записать формулы параллельного переноса и каноническое уравнение линии.

Образец выполнения задания 4

1. Так как $a_{11} = 0$, $2a_{12} = 6$, $a_{22} = 8$, то
$$ctg2\alpha = -\frac{4}{3}, \quad cos2\alpha = -\frac{4}{5}, \quad sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$
2. Выбирая
$$sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$
составляем формулы преобразования координат
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}x' - \dfrac{3}{\sqrt{10}}y' \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{10}}y'. \end{cases}$$

3. Подставляя x и y из формул преобразования координат в уравнение (*), раскрываем скобки, приводим подобные и получаем уравнение
$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}x' + \sqrt{10}y' + 11 = 0.$$
4. Выделяя полные квадраты, получаем
$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 9 = 0.$$
5. Формулы параллельного переноса имеют вид
$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ Y = y' - \dfrac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$$

Это перенос на вектор

$$w = \left\{\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}.$$

После соответствующей замены приходим к простейшему виду уравнения

$$9X^2 - Y^2 - 9 = 0.$$

Откуда получаем канонический вид уравнения

$$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Таким образом, линия является гиперболой, $a = 1$, $b = 3$.

Данное уравнение	$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$
Вид линии	гипербола
Формулы преобразования координат	$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' \\ y = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' \end{cases}; \quad \begin{cases} X = x' - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ Y = y' - \frac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$
Каноническое уравнение	$\frac{X^2}{1} - \frac{Y^2}{9} = 1$

Образец проверки выполненного задания 4 в программе *geogebra*

В программе *geogebra*

a) построить данную линию по ее исходному уравнению;

b) построить систему координат, полученную из исходной поворотом на угол α;

c) относительно новой системы построить вектор переноса и систему координат, полученную параллельным переносом;

d) относительно первоначальной системы координат построить линию, заданную найденным каноническим уравнением;

e) построить линию, получающуюся из линии, заданной каноническим уравнением, композицией поворота на угол α и параллельным переносом на построенный вектор.

Запускаем программу geogebra.

a) В строке ввода записываем уравнение

6*x*y+8*y^2-12*x-26*y+11=0

Получаем изображение данной линии (рис. 12).

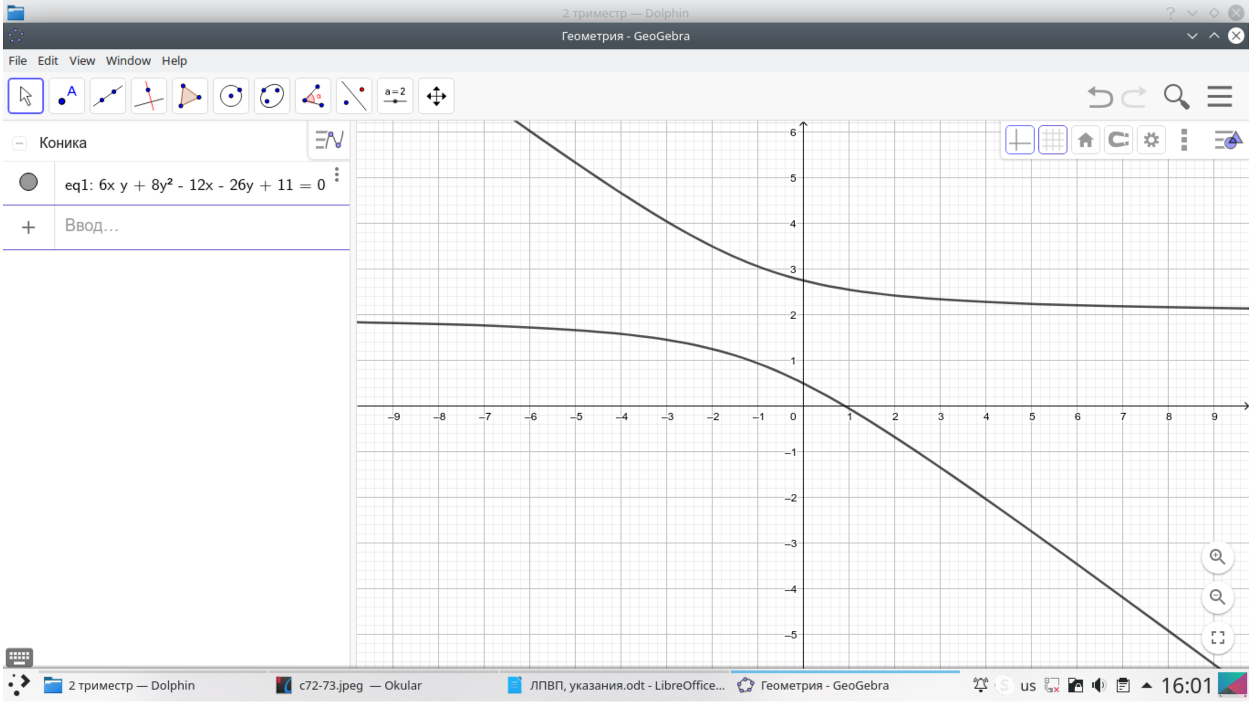


Рис. 12

b) Чтобы построить систему координат, полученную из исходной поворотом на угол α, где

$$cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

строим прямые $x = 0$ и $y = 0$, задавая их уравнениями на панели ввода, и начало координат O (0, 0). Выбирая команду «*Поворот*» из меню преобразований плоскости на верхней панели, строим образы осей при повороте на угол α (рис. 13).

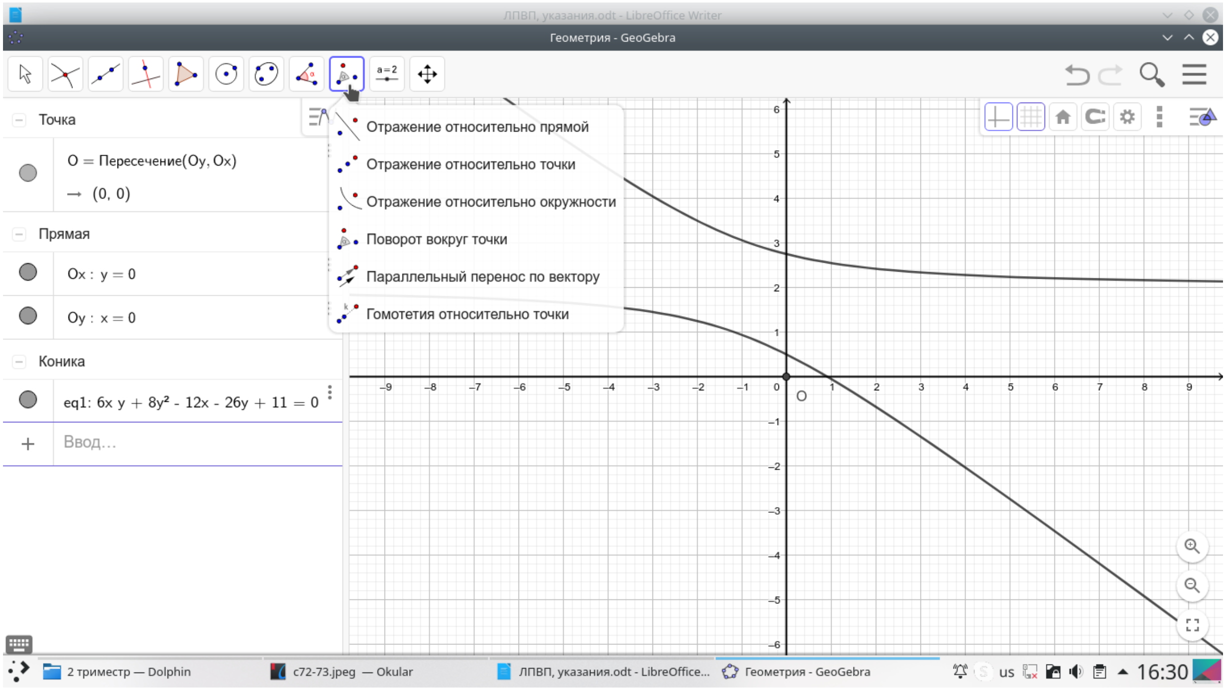


Рис. 13

При построении образа фигуры при повороте сначала указывается поворачиваемый объект, затем центр поворота и вводится величина угла поворота. Можно в окне ввести:

$$\arccos(1/sqrt(10))$$

или в меню ввод ввести эту величину и затем в окне ввода ввести ее имя (рис. 14, 15).

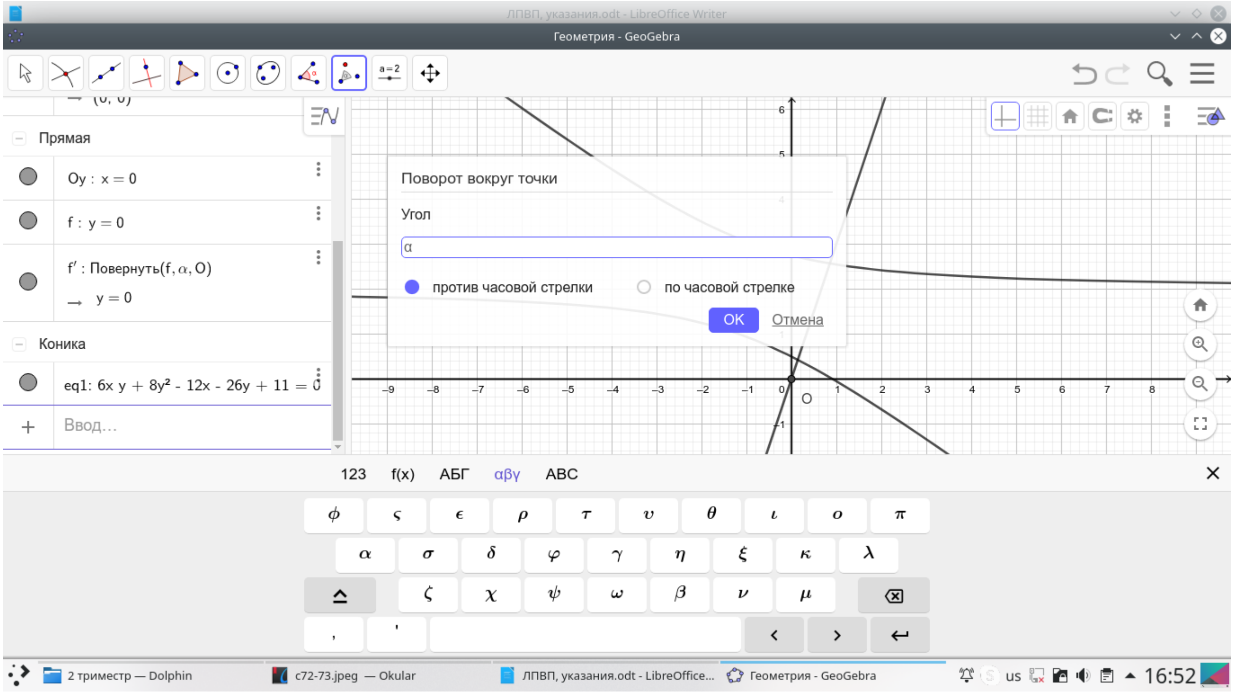


Рис. 14

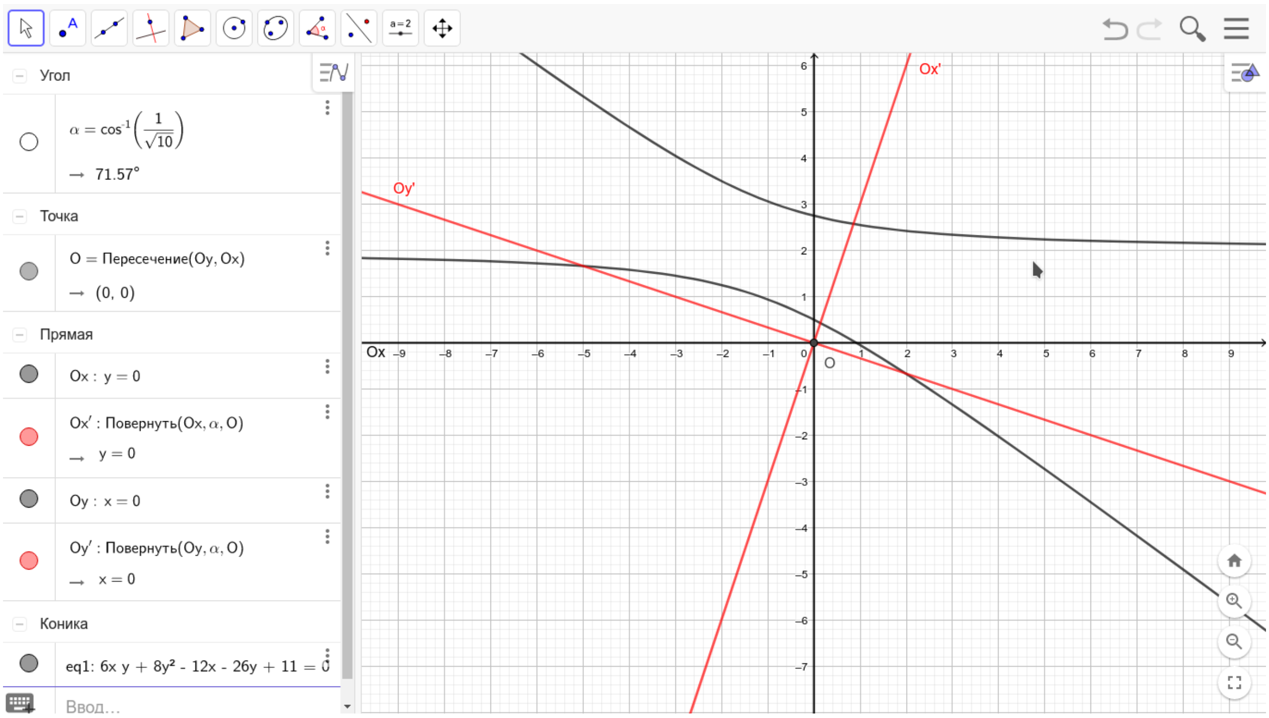
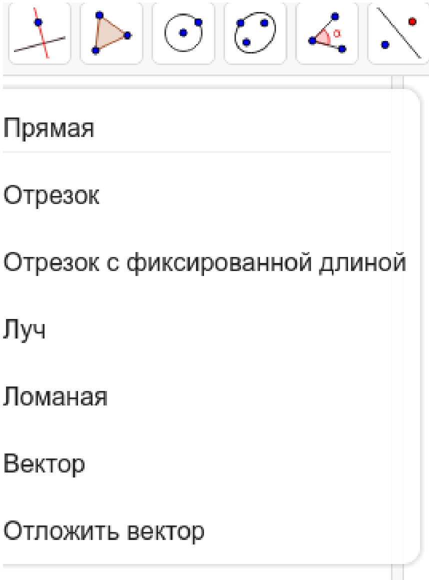


Рис. 15

c) Чтобы относительно новой системы построить вектор переноса и систему координат, полученную из $Ox'y'$ параллельным переносом, необходимо отметить единичные векторы на осях Ox' и Oy'. Для этого можно построить с помощью команды «*Окружность* *по центру и радиусу*» единичную окружность с центром в начале координат и отметить точки A и B – точки пересечения с осями Ox' и Oy'.



Чтобы построить векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, выбираем команду «*Вектор*» и указываем начальную и конечную точки. На панели объектов в описании векторов появятся их имена. В рассматриваемом примере это u и v.

По проведенным вычислениям вектор переноса

$$w = \left\{\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$$

в системе координат $Ox'y'$.

Чтобы построить этот вектор, в поле ввода набираем

$$sqrt(10)/2 * (u + v)$$

В результате получим (рис. 16).

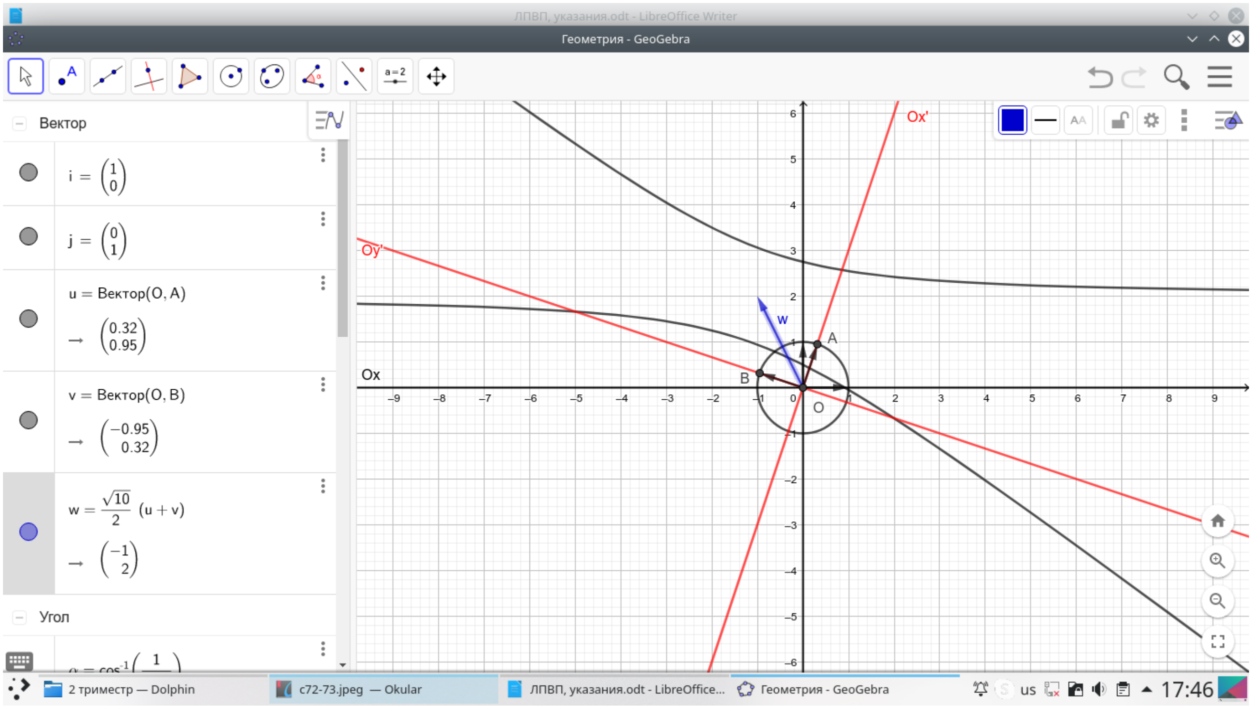


Рис. 16

Выбирая в меню преобразования команду «*Параллельный перенос*», строим новую систему координат $Cx'y'$ (рис. 17).

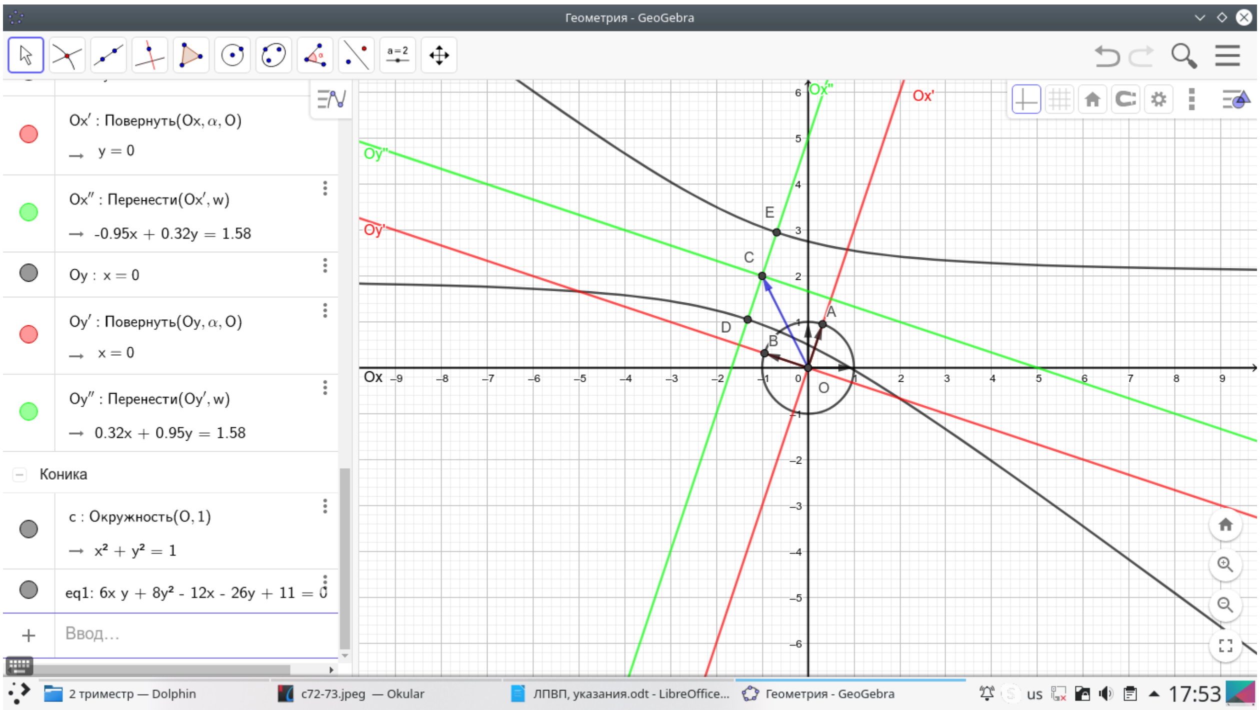


Рис. 17

Для проверки правильности найденного канонического уравнения прячем все построенные объекты, кроме вектора переноса и в меню ввода вводим каноническое уравнение (рис. 18).

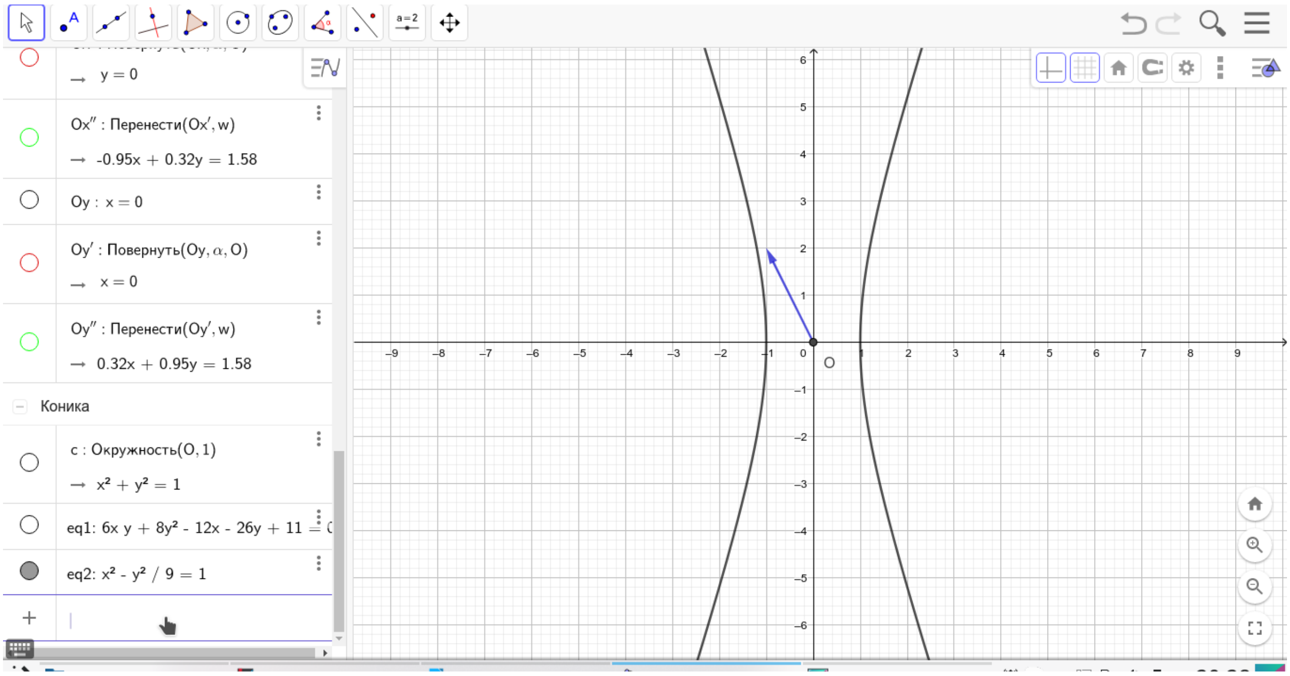


Рис. 18

Далее строим образ этой гиперболы при повороте относительно начала координат на угол α, а получившуюся гиперболу отображаем параллельным переносом на вектор w (рис. 19).

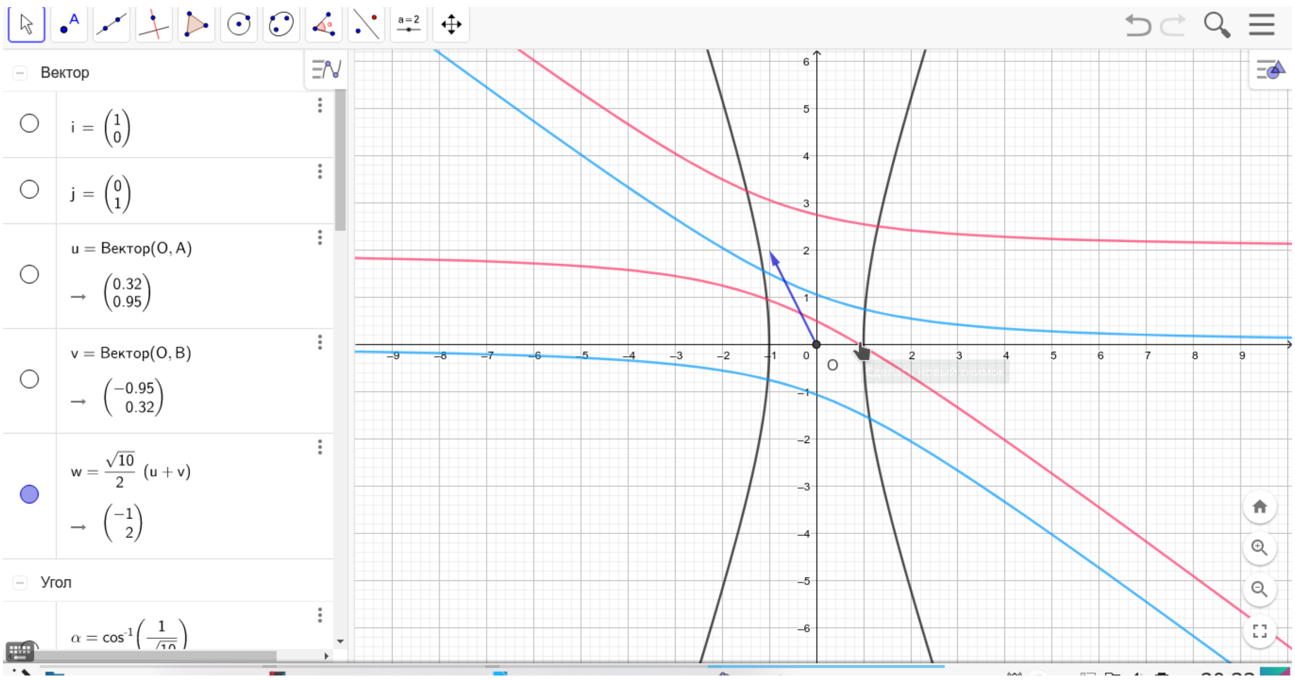


Рис. 19

Если результат совпал с гиперболой, построенной по исходному уравнению (*), значит, все вычисления и построения были выполнены верно.

Лабораторная работа «Линии второго порядка»

Задание 1. Написать канонические уравнения следующих линий:

- Окружности, если известны координаты точек A и B, являющихся концами ее диаметра.
- Эллипса, если известны его большая ($2a$) и малая ($2b$) оси.
- Гиперболы, если известно расстояние A_1A_2 между вершинами и расстояние F_1F_2 между фокусами.
- Параболы, если известно расстояние от ее фокуса F до вершины A.

Во всех случаях привести пример трех точек, принадлежащих данной линии, а также найти следующие характеристики:

Линия	Характеристики линии
Эллипс	Эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис.
Гипербола	Эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис и асимптот.
Парабола	Координаты вершины и фокуса, уравнение директрисы.

Построив все данные и найденные точки, линии по их уравнениям, директрисы и асимптоты, проверить правильность выполнения задания в программе *geogebra*.

В случае эллипса и гиперболы измерениями проверить, что отношение расстояний от точки, принадлежащей линии, до соответствующих фокуса и директрисы, есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

№ варианта	A	B	$2a$	$2b$	A_1A_2	F_1F_2	FA
1	$(-6,-2)$	$(-6,6)$	8	6	10	6	2
2	$(1,-1)$	$(-7,-5)$	10	8	5	3	3
3	$(10,-2)$	$(2,6)$	12	10	13	5	1
4	$(35,-5)$	$(25,-25)$	16	12	25	7	0.5
5	$(6,-8)$	$(18,-16)$	14	10	15	9	4
6	$(8,-4)$	$(0,-16)$	18	12	26	10	2.5
7	$(8,-4)$	$(-16,-6)$	22	16	20	12	1.5
8	$(3,-2)$	$(-19,14)$	20	10	17	15	5
9	$(3,-2)$	$(-7,14)$	24	18	20	16	4.5
10	$(-7,-6)$	$(3,-2)$	16	14	34	16	7
11	$(8,-6)$	$(-12,-2)$	22	18	30	18	3.5
12	$(7,-5)$	$(-19,13)$	36	28	26	24	8
13	$(-11,11)$	$(7,-5)$	26	16	30	24	6.5
14	$(-8,5)$	$(4,1)$	18	14	65	25	7
15	$(12,11)$	$(-8,-5)$	34	28	45	27	9
16	$(3,-5)$	$(1,11)$	32	28	34	30	5.5
17	$(-7,17)$	$(3,-5)$	28	16	50	30	7.5
18	$(-4,-5)$	$(0,23)$	26	18	64	31	8.5
19	$(-9,-5)$	$(5,19)$	16	10	40	32	9
20	$(-5,-5)$	$(1,23)$	26	14	55	33	2.2
21	$(-5,-1)$	$(-7,19)$	34	18	65	33	4.8
22	$(-1,20)$	$(-5,2)$	24	14	37	35	5.2
23	$(-7,3)$	$(-3,19)$	22	10	60	36	6.4
24	$(-3,-1)$	$(-7,3)$	36	28	50	40	9.5

Задание 2. Найти касательные к данной линии второго порядка, удовлетворяющие заданному условию. Правильность решения проверить в программе *geogebra*.

№ варианта	Уравнение линии	Условия для касательной p
1	$4x^2 - 25y^2 - 100 = 0$	$A \in p, A(4,4)$
2	$4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$	$p \perp q, \quad q: 2x + y = 0$
3	$4x^2 - 25y^2 + 100 = 0$	$p \,\|\|\, q, \quad q: x + 3y - 10 = 0$

4	$25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$	$A \in p,\ A(2, -3)$
5	$16x^2 - 9y^2 = 144$	$p \perp q,\ q:\ x - 2y + 1 = 0$
6	$16x^2 + 9y^2 = 144$	$p \parallel q,\ q:\ x + 4y + 6 = 0$
7	$16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$	$A \in p,\ A(-4, 2)$
8	$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$	$p \perp q,\ q:\ 3x + 4y = 0$
9	$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$	$p \parallel q,\ q:\ 3x - 4y = 0$
10	$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$	$A \in p,\ A(1, 4)$
11	$9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$	$p \perp q,\ q:\ y = 2x + 5$
12	$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$	$p \parallel q,\ q:\ \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 4 + t \end{cases}$
13	$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$	$A \in p,\ A(1, -3)$
14	$9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$	$p \perp q,\ q:\ \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 3t \end{cases}$
15	$9x^2 - 25y^2 + 225 = 0$	$p \parallel q,\ q:\ x = 3y - 15$
16	$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$	$A \in p,\ A(-4, -1)$
17	$x^2 + 25y^2 - 100 = 0$	$p \perp q,\ q:\ \begin{cases} x = t, \\ y = 5t \end{cases}$
18	$x^2 - 25y^2 - 100 = 0$	$p \parallel q,\ q:\ x - 4y = 20$
19	$x^2 - 25y^2 + 100 = 0$	$A \in p,\ A(8, 0)$
20	$25x^2 + y^2 - 100 = 0$	$p \perp q,\ q:\ x = 5y + 5$
21	$x^2 - 9y^2 - 36 = 0$	$p \parallel q,\ q:\ \begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = -5 + t \end{cases}$

22	$x^2 - 9y^2 + 36 = 0$	$A \in p, A(-7, 1)$
23	$x^2 + 9y^2 - 36 = 0$	$p \perp q,\ q:\ 5x + 4y - 7 = 0$
24	$9x^2 + y^2 - 36 = 0$	$p \parallel q,\ q: \begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 + 5t \end{cases}$

Задание 3. Линии второго порядка заданы уравнениями относительно полярной системы координат. Определить тип этих линий и найти их канонические уравнения относительно прямоугольной декартовой системы координат. Проверить выполнение задания в программе *geogebra*. На чертеже указать взаимное расположение полярной и канонической прямоугольной систем координат.

№ варианта	Уравнение линии	Уравнение линии	Уравнение линии
1	$\rho = \dfrac{12}{4 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{5}{3 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{5}{3 - 6cos\varphi}$
2	$\rho = \dfrac{6}{5 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{6}{4 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{4}{2 - 3cos\varphi}$
3	$\rho = \dfrac{6}{8 - 6cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{1}{1 - cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{6}{4 - 8cos\varphi}$
4	$\rho = \dfrac{8}{10 - 5cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{3}{5 - 5cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{6}{3 - 6cos\varphi}$
5	$\rho = \dfrac{8}{6 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{7}{2 - 2cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{8}{2 - 4cos\varphi}$
6	$\rho = \dfrac{12}{6 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{4}{2 - 2cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{6}{3 - 5cos\varphi}$
7	$\rho = \dfrac{14}{8 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{2}{4 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{10}{4 - 8cos\varphi}$
8	$\rho = \dfrac{14}{6 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{7}{4 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{12}{3 - 6cos\varphi}$
9	$\rho = \dfrac{4}{2 - cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{9}{5 - 5cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{10}{3 - 6cos\varphi}$
10	$\rho = \dfrac{18}{6 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{12}{6 - 6cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{4}{3 - 6cos\varphi}$
11	$\rho = \dfrac{18}{10 - 6cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{14}{7 - 7cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{14}{5 - 10cos\varphi}$
12	$\rho = \dfrac{18}{14 - 10cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{9}{7 - 7cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{14}{4 - 8cos\varphi}$
13	$\rho = \dfrac{14}{20 - 16cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{6}{8 - 8cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{20}{8 - 16cos\varphi}$
14	$\rho = \dfrac{12}{20 - 16cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{7}{5 - 5cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{22}{9 - 18cos\varphi}$
15	$\rho = \dfrac{12}{10 - 6cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{7}{3 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{12}{4 - 8cos\varphi}$
16	$\rho = \dfrac{6}{8 - 5cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{12}{3 - 3cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{10}{6 - 12cos\varphi}$

17	$\rho = \dfrac{6}{12 - 8cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{12}{7 - 7cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{12}{4 - 10cos\varphi}$
18	$\rho = \dfrac{18}{14 - 7cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{10}{7 - 7cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{14}{5 - 10cos\varphi}$
19	$\rho = \dfrac{18}{12 - 6cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{3}{9 - 9cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{18}{6 - 12cos\varphi}$
20	$\rho = \dfrac{16}{4 - 2cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{14}{8 - 8cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{18}{8 - 10cos\varphi}$
21	$\rho = \dfrac{10}{6 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{14}{4 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{16}{8 - 12cos\varphi}$
22	$\rho = \dfrac{10}{8 - 6cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{8}{4 - 4cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{36}{12 - 24cos\varphi}$
23	$\rho = \dfrac{12}{9 - 6cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{6}{5 - 5cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{36}{6 - 12cos\varphi}$
24	$\rho = \dfrac{20}{16 - 8cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{10}{7 - 7cos\varphi}$	$\rho = \dfrac{26}{4 - 8cos\varphi}$

Задание 4. Относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат кривые заданы своими уравнениями. С помощью преобразований системы координат привести их к каноническому виду. Определить вид линии. В пакете *Geogebra* построить указанные линии по их исходным уравнениям и показать, что при найденных преобразованиях полученное каноническое уравнение соответствует заданной линии.

№ варианта	Уравнение линии	Уравнение линии
1	$x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$	$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$
2	$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0$	$4x^2 + 4xy + y^2 - 30x + 10y + 75 = 0$
3	$x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$	$x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$
4	$x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$	$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
5	$x^2 - 6xy + y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$	$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 16x - 12y - 4 = 0$
6	$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$	$x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$
7	$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$
8	$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$	$x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$
9	$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$	$9x^2 + 30xy + 25y^2 + 4x - 16y + 8 = 0$
10	$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$	$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$
11	$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$	$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$
12	$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$	$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
13	$x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 9y - 1 = 0$
14	$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 12 = 0$	$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 6y = 0$
15	$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$	$9x^2 + 30xy + 25y^2 + 4x - 16y + 8 = 0$
16	$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y = 0$	$4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$

17	$x^2 - xy + y^2 - 5x + y - 2 = 0$	$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$
18	$4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$	$4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$
19	$7x^2 - 24xy - 38x - 24y + 175 = 0$	$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$
20	$8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0$	$x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$
21	$2x^2 - 72xy + 23y^2 + 68x + 26y + 28 = 0$	$x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 12y + 8 = 0$
22	$x^2 - 6xy + y^2 + 8x + 24y = 0$	$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$
23	$8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 1 = 0$	$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 5x + 5y - 3 = 0$
24	$x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$	$x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$

РАЗДЕЛ 3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

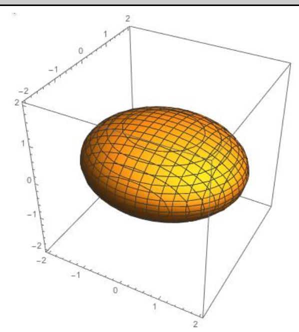
Методические указания к выполнению лабораторной работы

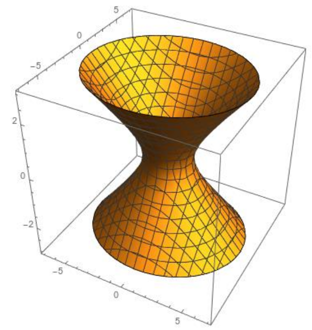
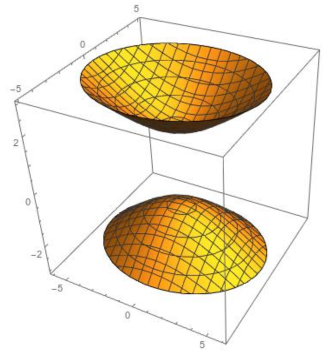
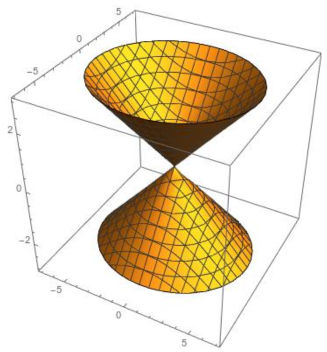
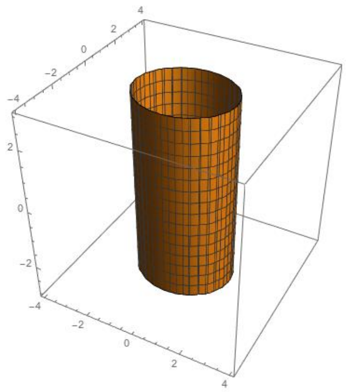
Задание 1. Для поверхностей, заданных каноническими уравнениями,

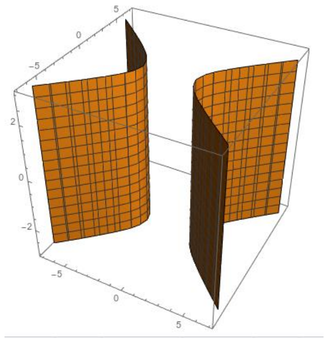
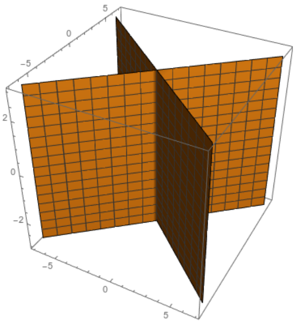
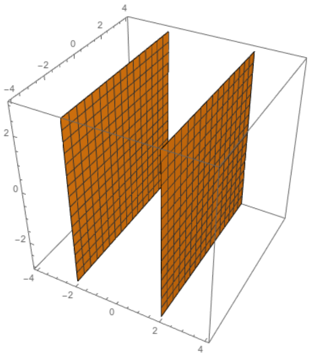
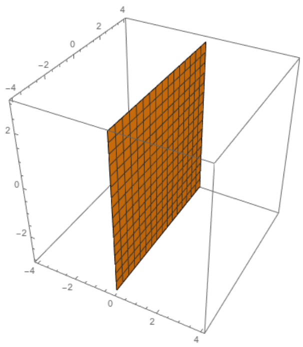
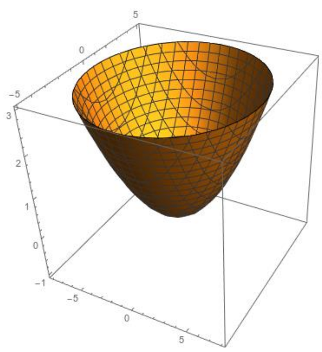
- определить их название;
- построить изображение в программе *geogebra*;
- определить вид сечений заданными плоскостями, для невырожденных линий второго порядка, получившихся в сечении, указать ее основные характеристики (для эллипса – величины большой и малой полуосей и эксцентриситет, для гиперболы – величины действительной и мнимой полуосей и эксцентриситет, для параболы – расстояние между фокусом и директрисой).

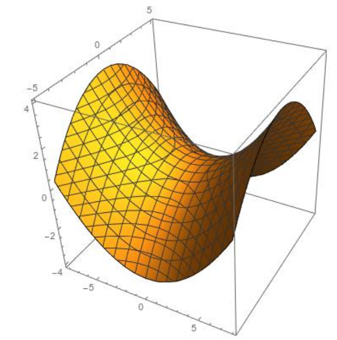
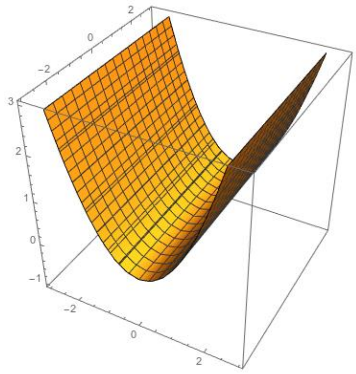
№№	Уравнение поверхности	Уравнения секущих плоскостей
1 вариант	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$	1. $x=0$, 2. $x=3$.
	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$	1. $x=0$, 2. $x=3$.
	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$	1. $x=0$, 2. $z=3$.

Необходимые теоретические сведения

Каноническое уравнение	Чертеж	Название
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		Эллипсоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	Пустое множество	Мнимый эллипсоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	Одна действительная точка $(0,0,0)$	Мнимый конус

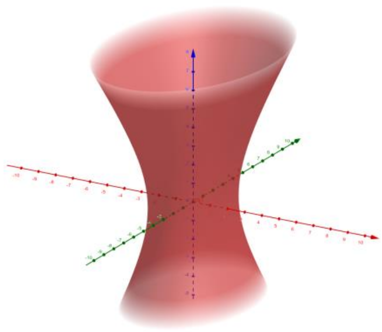
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$		Однополостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$		Двуполостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$		Конус
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$		Эллиптический цилиндр
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$	Пустое множество	Мнимый эллиптический цилиндр
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$	Ось Oz	Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой (оси Oz)

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Гиперболический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		Пара пересекающихся плоскостей
$\frac{x^2}{a^2} = 1$		Пара параллельных плоскостей
$\frac{x^2}{a^2} = -1$	Пустое множество	Пара мнимых параллельных плоскостей
$\frac{x^2}{a^2} = 0$		Пара совпавших плоскостей
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$		Эллиптический параболоид

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$		Гиперболический параболоид
$\frac{x^2}{a^2} = 2z$		Параболический цилиндр

Образец выполнения задания 1

1. В программе *geogebra* в поле ввода вводим уравнение данной поверхности. В таблицу заносим уравнение поверхности, ее название и полученное изображение.

Формула	Название	Чертеж
$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$	Однополостный гиперболоид	

Построим сечение плоскостью $x = 0$ (рис. 1).

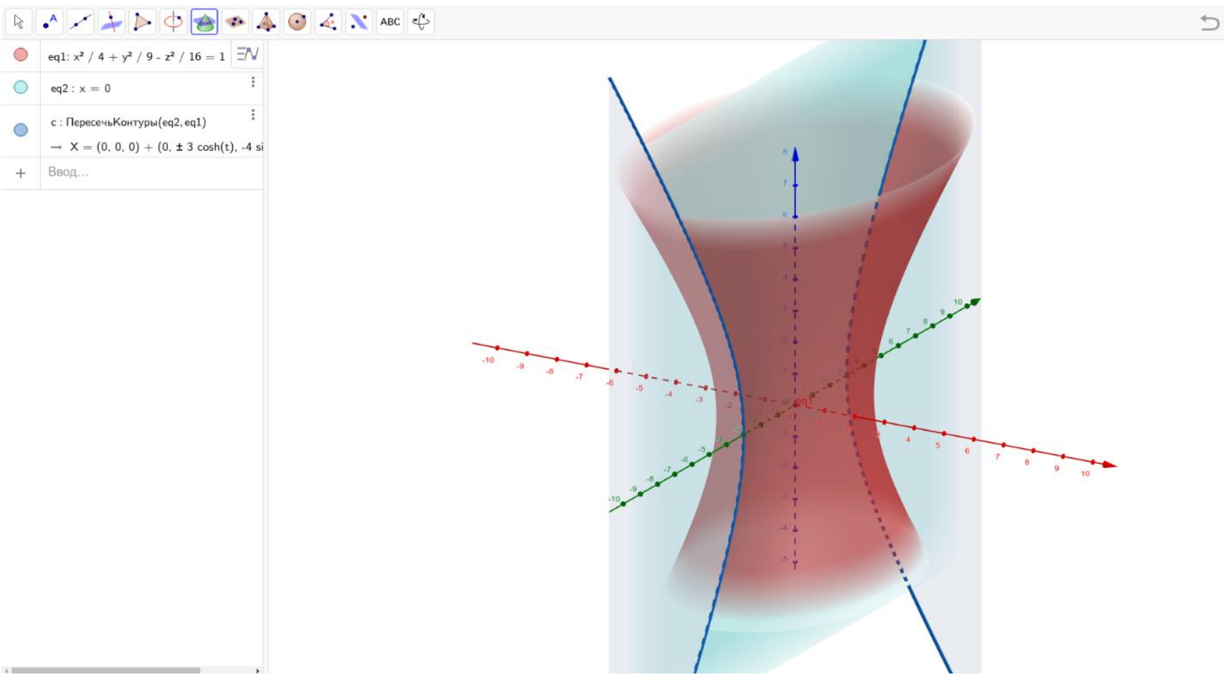


Рис. 1

Исследуем свойства полученной линии:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

В сечении получили гиперболу, у которой

$$a = 3, b = 4, c = 5, \varepsilon = \frac{5}{3}.$$

Построим сечение плоскостью $x = 3$ (рис. 2).

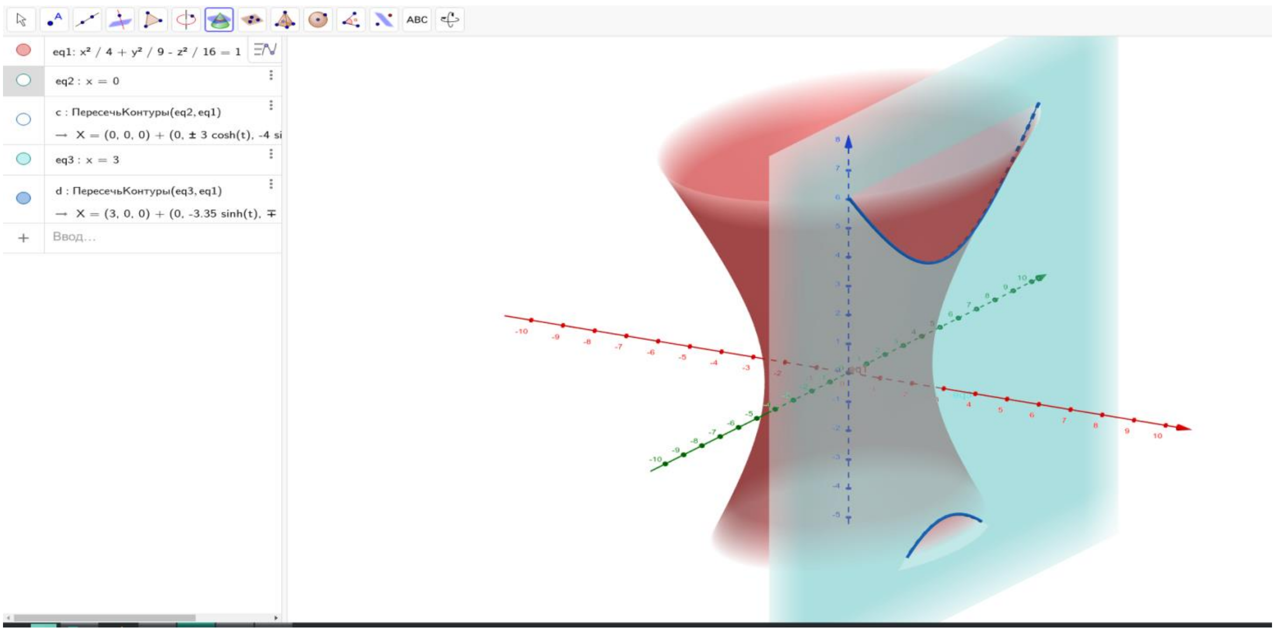


Рис. 2

Исследуем свойства полученной линии:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

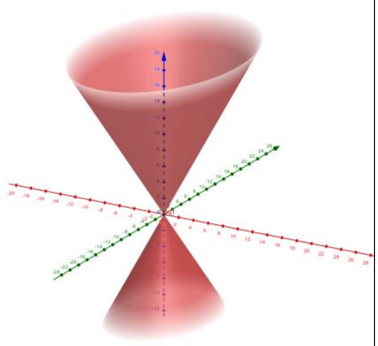
Следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{9}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1, \\ x = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = -\dfrac{5}{4}, \\ x = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{z^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = \dfrac{5}{4}, \\ x = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{z^2}{20} - \dfrac{y^2}{\frac{45}{4}} = 1, \\ x = 3. \end{cases}$$

В сечении получили гиперболу, у которой

$$a = 2\sqrt{5}, b = \frac{3\sqrt{5}}{2}, c = \frac{5\sqrt{5}}{2}, \varepsilon = \frac{5}{4}.$$

2. В программе *geogebra* в поле ввода вводим уравнение данной поверхности. В таблицу заносим уравнение поверхности, ее название и полученное изображение.

Формула	Название	Чертеж
$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 0$	Конус	

Построим сечение плоскостью $x = 0$ (рис. 3).

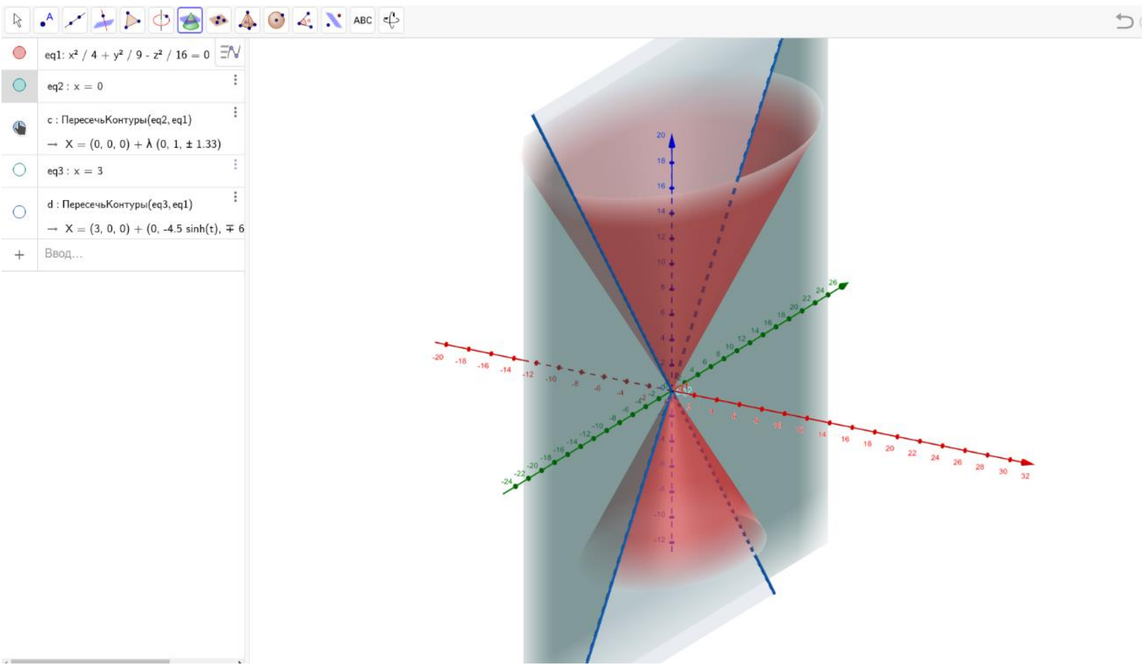


Рис. 3

Исследуем свойства полученной линии:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 0. \\ x = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 0. \\ x = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение раскладываем в произведение двух линейных множителей:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4}\right)\left(\dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4}\right) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

В сечении получили пару пересекающихся прямых

$$\begin{cases} \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Построим сечение плоскостью $x = 3$ (рис. 4).

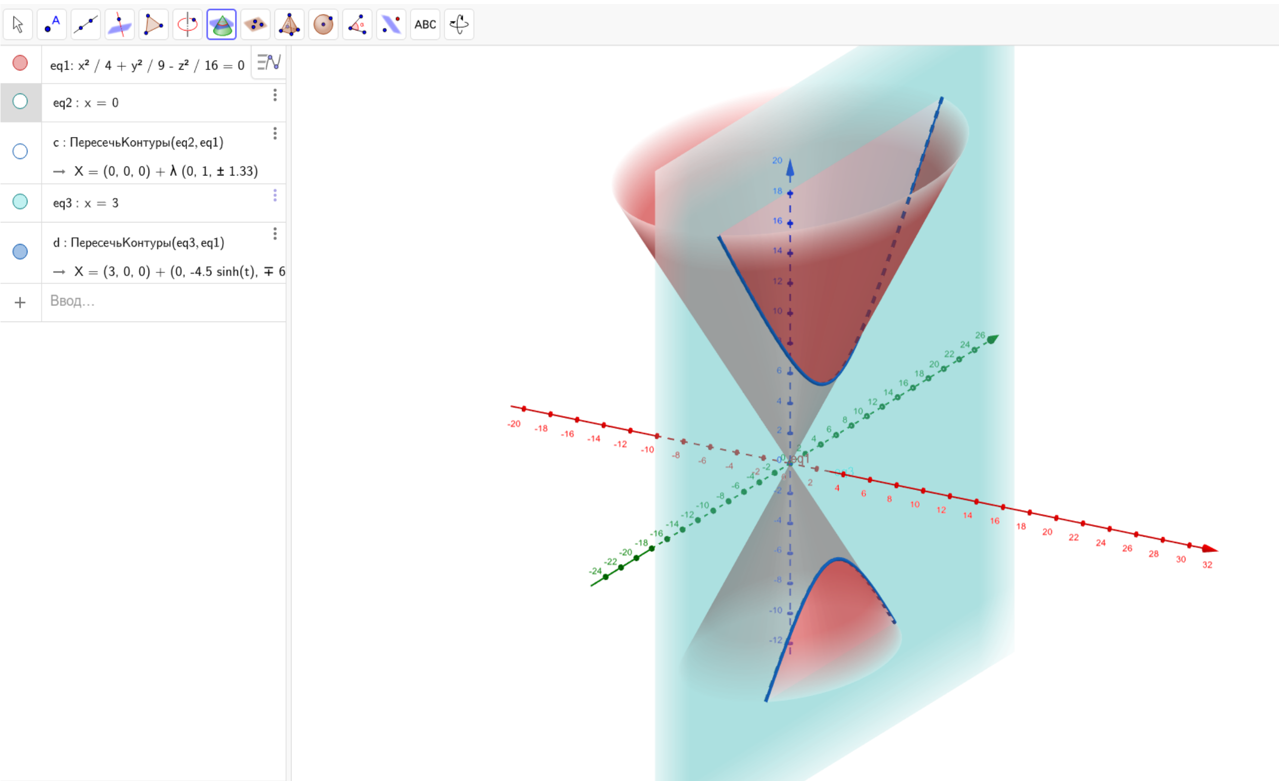


Рис. 4

Исследуем свойства полученной линии:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$

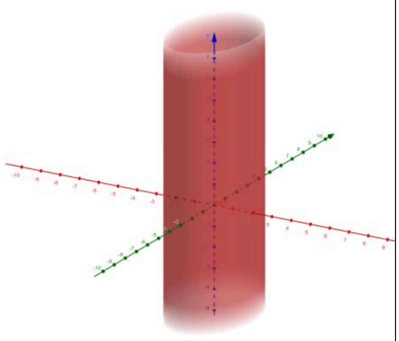
Следовательно,

$$\begin{cases}\frac{9}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0,\\ x=3.\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-\frac{9}{4},\\ x=3.\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{9}=\frac{9}{4},\\ x=3.\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{z^2}{36}-\frac{y^2}{\frac{81}{4}}=1,\\ x=3.\end{cases}$$

В сечении получили гиперболу, у которой

$$a=6, b=\frac{9}{2}, c=\frac{25}{2}, \varepsilon=\frac{25}{12}.$$

3. В программе *geogebra* в поле ввода вводим уравнение данной поверхности. В таблицу заносим уравнение поверхности, ее название и полученное изображение.

Формула	Название	Чертеж
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$	Эллиптический цилиндр	

Построим сечение плоскостью $x=0$ (рис. 5).

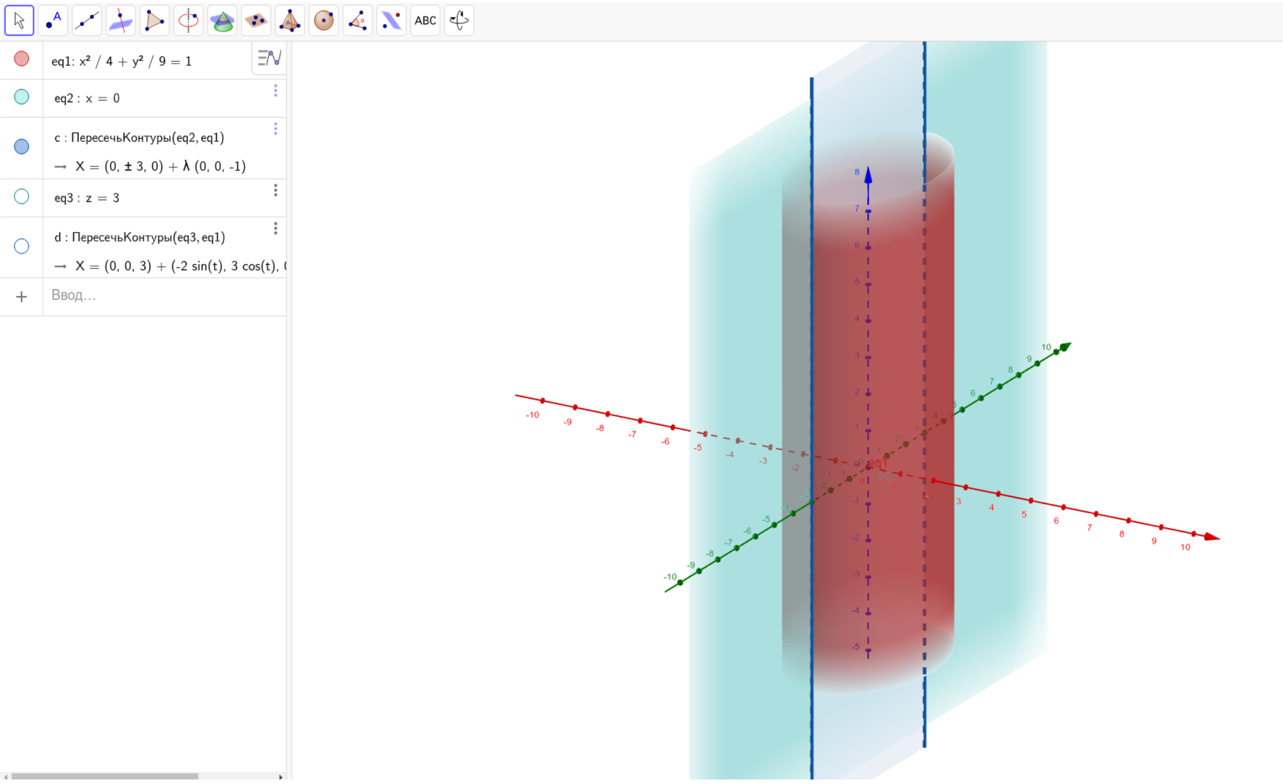


Рис. 5

Исследуем свойства полученной линии:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

В сечении получили пару параллельных прямых

$$\begin{cases} \dfrac{y}{3} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{3} = -1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Построим сечение плоскостью $z = 3$ (рис. 6).

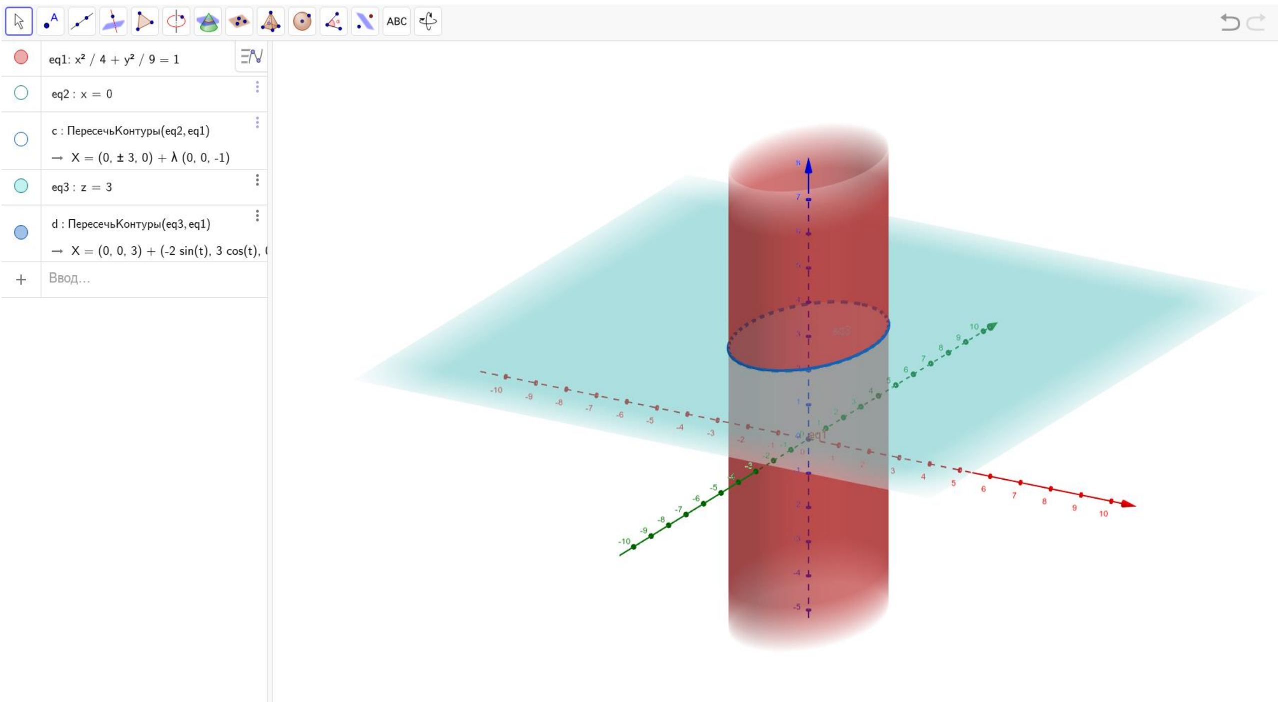


Рис. 6

Исследуем свойства полученной линии:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

В сечении получили эллипс, у которого большая ось направлена вдоль оси Oy, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Задание 2. Относительно некоторой ПДСК поверхности заданы своими уравнениями. С помощью преобразований системы координат привести их к каноническому виду. Определить вид поверхности. В пакете *geogebra* построить указанные поверхности по исходным уравнениям, показать, что при найденных преобразованиях полученное каноническое уравнение соответствует заданной поверхности.

№ вар.		
1	Уравнение первой поверхности	$9x^2 - 36y^2 + 4z^2 - 18x + 72y + 16z - 47 = 0$
	Уравнение второй поверхности	$2x^2 - y^2 - xy + xz - yz + 3y + z - 2 = 0$

Необходимые теоретические сведения

Пусть в ПДСК $Oxyz$ поверхность второго порядка задана своим общим уравнением
$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ (*).

Иногда это уравнение можно привести к каноническому, или близкому к каноническому, путем небольших преобразований.

Один из таких приемов – метод выделения полных квадратов и применение параллельного переноса. Его удобно применять, когда $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$.

Если уравнение (*) определяет пару плоскостей, то их уравнение можно получить, раскладывая левую часть на множители как квадратный трехчлен относительно какой-нибудь переменной.

Если поверхность имеет уравнение вида $z = xy$, то ее каноническое уравнение можно получить поворотом относительно оси Oz на угол 45°, который задается формулами

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ z = z'. \end{cases}$$

Образец выполнения задания 2

1. Преобразуем левую часть поверхности, выделяя полные квадраты:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 - 36(y^2 - 2y + 1) + 36 + 4(z^2 + 4z + 4) - 16 - 47$$
$$= 9(x-1)^2 - 36(y-1)^2 + 4(z+2)^2 - 36 = 0$$

Для получения канонического уравнения поверхности введем новые координаты

$$\begin{cases} X = x - 1, \\ Y = y - 1, \\ Z = z + 2. \end{cases}$$

Это соответствует параллельному переносу на вектор $w = \{1, 1, -2\}$. Уравнение поверхности в новой системе координат $9X^2 - 36Y^2 + 4Z^2 - 36 = 0$ (*), или

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{1} + \frac{Z^2}{9} = 1.$$

Это однополостный гиперболоид.

Построив в программе *geogebra* поверхности, соответствующие данному (рис. 7.1) и полученному уравнению (рис. 7.2), визуально убеждаемся, что эти поверхности получаются одна из другой параллельным переносом на вектор $w = \{1, 1, -2\}$.

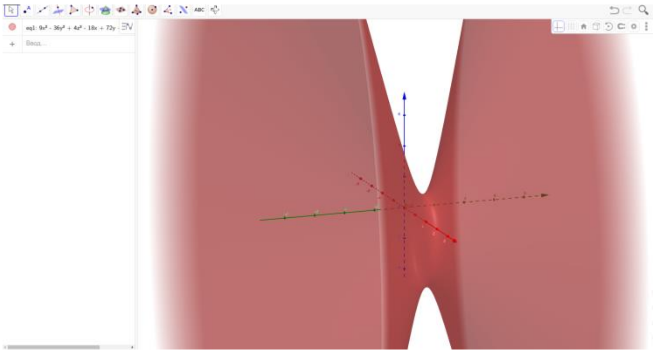


рис. 7.1

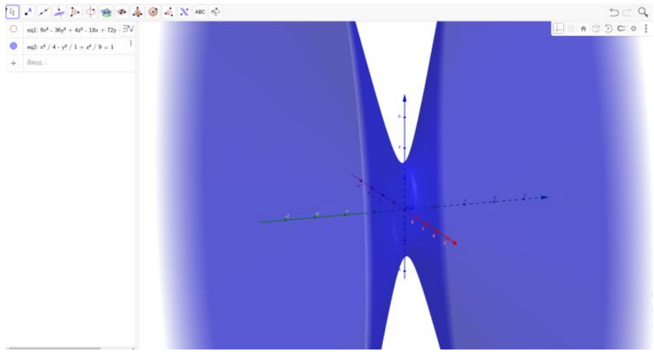


рис. 7.2

2 Преобразуем уравнение поверхности, раскладывая левую часть на множители:

$$(x - y + 1)(2x + y + z - 2) = 0.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{r} x - y + 1 = 0, \\ 3x + y + z - 2 = 0. \end{array}\right.$$

Данная поверхность – пара пересекающихся плоскостей.

Построив в программе *geogebra* поверхности, соответствующие данному (рис. 8.1) и полученному уравнению (рис. 8.2), визуально убеждаемся в правильности решения.

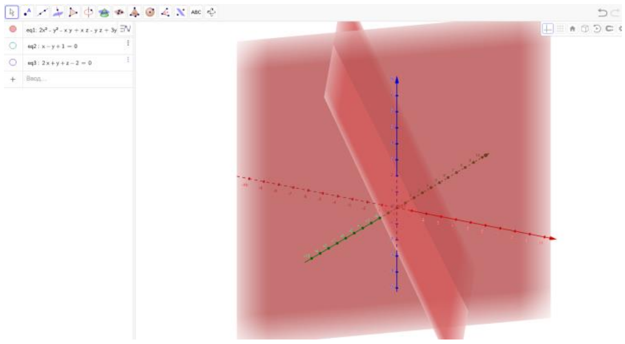


Рис. 8.1

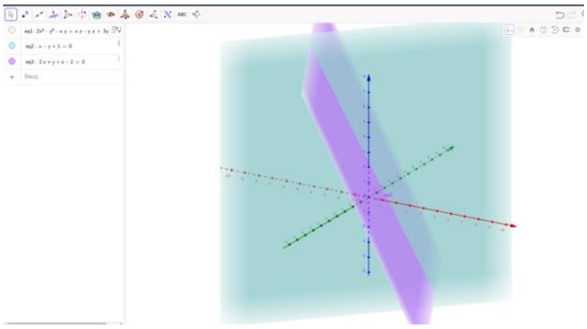


Рис. 8.2

Задание 3. Для поверхности, заданной каноническими уравнениями относительно ПДСК, найти общий вид уравнений прямолинейных образующих и уравнения прямолинейных образующих, проходящих через указанную точку. В пакете *Geogebra* построить поверхность и найденные прямолинейные образующие и визуально убедиться, что они целиком принадлежат данной поверхности.

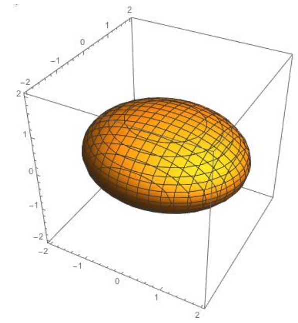
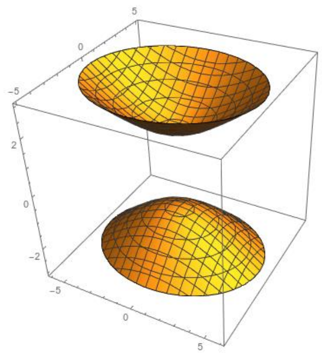
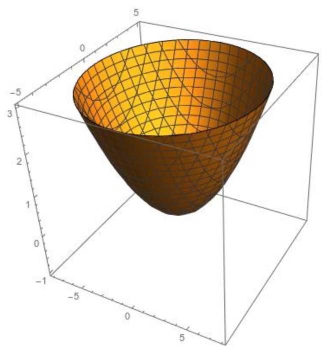
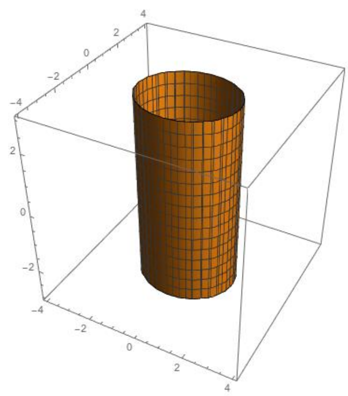
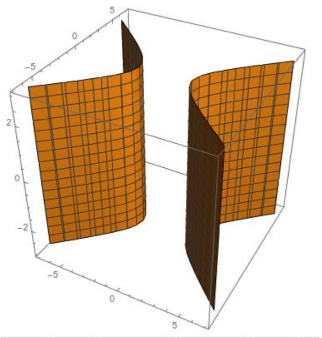
№ варианта	Уравнение поверхности	Координаты точки
1	$x^2 - 4y^2 = z$	$A(-1, 2, -15)$

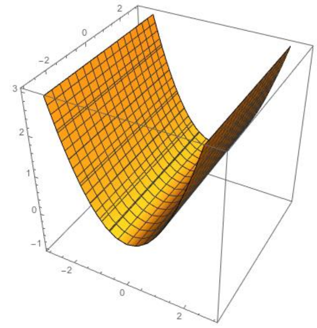
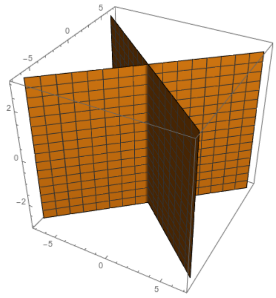
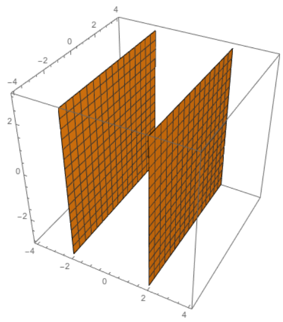
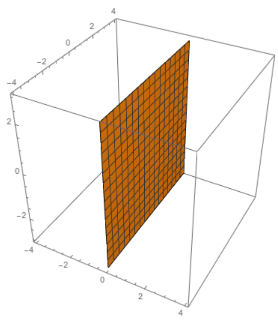
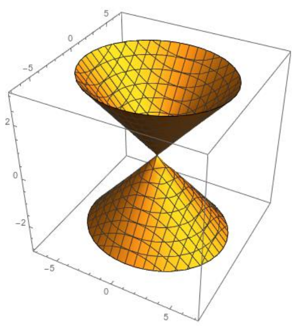
Необходимые теоретические сведения

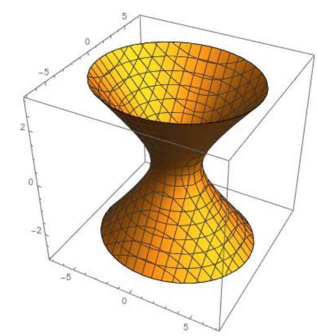
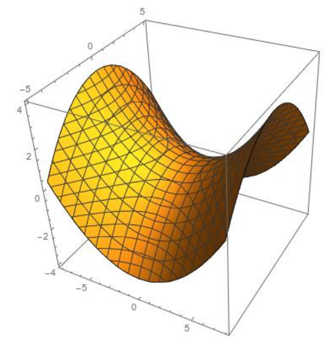
Определение. Прямая называется ***прямолинейной образующей*** поверхности, если она целиком лежит на поверхности.

Определение. ***Линейчатая поверхность*** – поверхность, образованная движением прямой линии. Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются прямолинейными образующими, а каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие, называется направляющей кривой.

Рассмотрим невырожденные поверхности второго порядка.

<table>
<tr><th>Каноническое уравнение</th><th>Чертеж</th><th>Прямолинейные образующие</th></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ Эллипсоид</td><td></td><td rowspan="3">Нет</td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ Двуполостный гиперболоид</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$ Эллиптический параболоид</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ Эллиптический цилиндр</td><td></td><td rowspan="2">Цилиндрические поверхности имеют бесконечно много прямолинейных образующих. Все они параллельны между собой. Через каждую точку невырожденной цилиндрической поверхности проходит равно одна прямолинейная образующая.</td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ Гиперболический цилиндр</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2} = 2z$$
Параболический цилиндр</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$
Пара пересекающихся плоскостей</td><td></td><td rowspan="3">Любая плоскость имеет бесконечно много прямолинейных образующих, через каждую точку плоскости проходит бесконечно много прямых.</td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$
Пара параллельных плоскостей</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2} = 0$$
Пара совпавших плоскостей</td><td></td></tr>
<tr><td>$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$
Конус</td><td></td><td>Конические поверхности имеют бесконечно много прямолинейных образующих. Все они проходят через вершину конуса. Через каждую точку конической поверхности проходит равно одна прямолинейная образующая.</td></tr>
</table>

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Однополостный гиперболоид		Два бесконечных семейства прямолинейных образующих: $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\ 1+\dfrac{y}{b}=\alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right).\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ 1-\dfrac{y}{b}=\beta\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right).\end{cases}$ Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно две прямолинейных образующих.
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ Гиперболический параболоид		Два бесконечных семейства прямолинейных образующих: $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\alpha,\\ z=\alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\beta,\\ z=\beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$ Через каждую точку гиперболического параболоида проходит ровно две прямолинейных образующих.

Образец выполнения задания 3

Так как координаты точки $A(-1,2,-15)$ удовлетворяют данному уравнению гиперболического параболоида $x^2-4y^2=z$, эта точка лежит на параболоиде. Запишем уравнение в виде $(x-2y)(x+2y)=1\cdot z$. Получим две пропорции

$$\frac{x-2y}{1}=\frac{z}{x+2y} \quad \text{и} \quad \frac{x-2y}{z}=\frac{1}{x+2y},$$

каждая из которых эквивалентна данному уравнению. Эти пропорции, в свою очередь, эквивалентны соответственно системам уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\alpha,\\ z=\alpha(x+2y)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-2y=\beta z,\\ 1=\beta(x+2y),\end{cases}$$

где α и β любые действительные числа. Так как искомые образующие должны проходить через точку A, координаты этой точки должны удовлетворять уравнениям этих образующих, т.е.

$$\begin{cases} (-1)-2\cdot 2=\alpha,\\ -15=\alpha(-1+2\cdot 2)\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} (-1)-2\cdot 2=\beta\cdot(-15),\\ 1=\beta(-1+2\cdot 2).\end{cases}$$

Отсюда $\alpha = -5$, $\beta = \frac{1}{3}$. Подставляя полученные значения параметров α и β в уравнения соответствующих семейств прямолинейных образующих, получаем

$$\begin{cases} x - 2y = -5, \\ z = -5(x + 2y) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - 2y = \frac{z}{3}, \\ 1 = \frac{1}{3}(x + 2y). \end{cases}$$

После преобразований получим общие уравнения двух прямолинейных образующих, проходящих через точку A:

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0, \\ 5x + 10y + z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x - 6y - z = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Образец проверки выполненного задания в программе geogebra

В строке ввода вводим уравнение данной поверхности, координаты данной точки и уравнения прямолинейных образующих. Визуально убеждаемся в правильности выполненного задания (рис. 9).

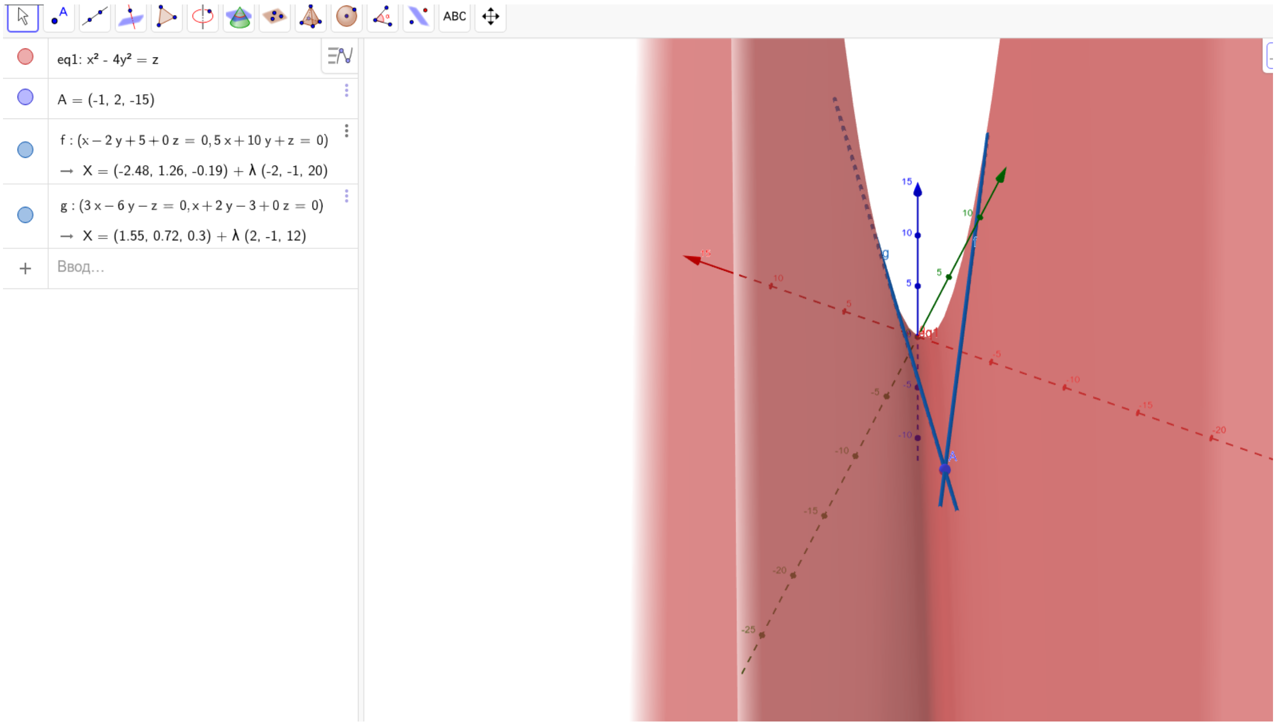


Рис. 9

Лабораторная работа «Поверхности второго порядка»

Задание 1. Для поверхностей, заданных каноническими уравнениями,

- определить их название;
- построить изображение в программе *geogebra*;
- определить вид сечений заданными плоскостями, для невырожденных линий второго порядка, получившихся в сечении, указать ее основные характеристики (для эллипса – величины большой и малой полуосей и эксцентриситет, для гиперболы – величины действительной и мнимой полуосей и эксцентриситет, для параболы – расстояние между фокусом и директрисой).

Вариант	Уравнение поверхности	Уравнения секущих плоскостей
1 вариант	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$	$y=0$ $x=8$
	$-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=0$	$z=0$ $x=5$
	$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	$x=0$ $y=5$
2 вариант	$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=-1$	$x=0$ $y=4$
	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=0$	$z=0$ $z=3$
	$y^2=4x$	$z=0$ $z=5$
3 вариант	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$	$z=0$ $y=0$
	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=0$	$x=5$ $z=3$
	$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	$x=0$ $z=0$
4 вариант	$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2x$	$z=0$ $x=2$
	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=0$	$y=2$ $z=4$
	$\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$	$y=6$ $x=0$
5 вариант	$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=1$	$y=0$ $z=10$
	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=0$	$x=0$ $z=5$

	$z^2 = 4x$	$y = 0$ $x = 9$
6 вариант	$\frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{4} = x$	$z = 0$ $x = 1$
	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0$	$y = 8$ $z = -3$
	$\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$	$y = 0$ $z = 0$
7 вариант	$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$	$x = 0$ $y = -4$
	$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0$	$z = 0$ $y = 2$
	$x^2 = -6y$	$z = 0$ $y = -6$
8 вариант	$\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 2y$	$z = 0$ $y = 2$
	$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0$	$x = -6$ $z = 0$
	$-\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$	$z = 5$ $x = 0$
9 вариант	$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 2x$	$z = 0$ $x = 2$
	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{81} = 0$	$y = 4$ $z = -9$
	$\frac{z^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$	$y = 3$ $z = 0$
10 вариант	$\frac{x^2}{12} - \frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{3} = -1$	$x = 0$ $z = 4$
	$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 0$	$z = 0$ $z = -5$
	$y^2 = 9z$	$x = 0$ $z = 4$
11 вариант	$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = -2x$	$y = 0$ $x = -2$
	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{16} = 0$	$y = -7$ $z = 4$
	$\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$	$x = 5$ $y = 0$
12 вариант	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{1} = 1$	$x = 0$ $y = -3$

	$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{49}=0$	$z=0$ $y=-8$
	$x^2=-6z$	$y=0$ $z=-6$
13 вариант	$\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{4}=2x$	$z=0$ $x=2$
	$-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}+\frac{z^2}{9}=0$	$x=-5$ $z=-3$
	$\frac{z^2}{64}+\frac{x^2}{25}=1$	$y=0$ $x=3$
14 вариант	$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$	$x=0$ $y=-4$
	$\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=0$	$z=-3$ $y=2$
	$z^2=-6y$	$x=0$ $y=-6$
15 вариант	$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-2y$	$x=0$ $y=-2$
	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{64}=0$	$y=-7$ $z=0$
	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$	$x=5$ $z=0$
16 вариант	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$	$x=0$ $z=0$
	$-\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=0$	$z=0$ $x=-7$
	$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	$x=0$ $z=-1$
17 вариант	$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=-2x$	$y=0$ $x=-2$
	$-\frac{z^2}{25}+\frac{y^2}{81}+\frac{x^2}{9}=0$	$z=-5$ $x=-3$
	$z^2=-5x$	$y=0$ $x=-5$
18 вариант	$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=2z$	$x=0$ $z=-2$
	$-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=0$	$x=-5$ $z=-3$
	$\frac{z^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$	$x=0$ $y=-4$

19 вариант	$\frac{z^2}{25}+\frac{x^2}{9}=-2y$	$x=0$ $y=-2$
	$\frac{x^2}{36}-\frac{z^2}{9}+\frac{y^2}{16}=0$	$x=6$ $y=0$
	$-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$	$z=-5$ $x=0$
20 вариант	$\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{4}+\frac{x^2}{3}=-1$	$y=0$ $z=4$
	$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=0$	$z=0$ $z=-4$
	$y^2=-9x$	$z=0$ $x=-4$
21 вариант	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{49}=1$	$y=0$ $z=0$
	$-\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=0$	$z=0$ $x=-7$
	$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$	$y=0$ $z=-1$
22 вариант	$\frac{z^2}{64}-\frac{y^2}{4}=2x$	$z=0$ $x=2$
	$-\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}+\frac{z^2}{36}=0$	$x=-5$ $z=-6$
	$\frac{z^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$	$x=0$ $y=5$
23 вариант	$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=x$	$y=0$ $x=1$
	$\frac{z^2}{25}+\frac{y^2}{81}-\frac{x^2}{9}=0$	$z=-5$ $x=-3$
	$y^2=-5x$	$z=0$ $x=-5$
24 вариант	$\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=-2y$	$x=0$ $y=2$
	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}+\frac{z^2}{64}=0$	$y=7$ $x=0$
	$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$	$x=5$ $z=0$

Задание 2. Относительно некоторой ПДСК поверхности заданы своими уравнениями. С помощью преобразований системы координат привести их к каноническому виду. Определить вид поверхности. В пакете *geogebra* построить указанные поверхности по исходным

уравнениям, показать, что при найденных преобразованиях полученное каноническое уравнение соответствует заданной поверхности.

Вариант	Уравнения поверхностей
1	а). $3x^2+3y^2+3z^2-6x+9y-12z-7=0$ б). $x^2-2y^2-3z^2-xy-2xz+7yz+x-14y+17z-20=0$
2	а). $x^2+y^2+4z^2-8x+12y-16z-1=0$ б). $2x^2-y^2+2z^2-xy-5xz-yz-x+4y+5z-3=0$
3	а). $3x^2+4y^2+6z^2-6x+16y-36z+49=0$ б). $x^2-3y^2+2z^2+2xy-3xz-yz+3x-7y-2z-4=0$
4	а). $2x^2+3y^2-6z^2-8x-6y-12z-1=0$ б). $2x^2+3z^2+xy-7xz-yz-6x+4y-7z-20=0$
5	а). $4x^2+9y^2-36z^2+8x-36y-72z-4=0$ б). $-x^2-2y^2+3xy-3xz+3yz-7x+10y-9z-12=0$
6	а). $x^2+2y^2-4z^2-6x+4y+32z-40=0$ б). $x^2-4z^2-3xy-6yz+12y+16z-16=0$
7	а). $x^2+2y^2-2z^2-2x+12y-8z+23=0$ б). $x^2-2y^2+z^2+xy-2xz-yz+6x-15y-6z-27=0$
8	а). $2x^2+4y^2-z^2+2x-4y-8z-3=0$ б). $3x^2-2y^2+8z^2+5xy-14xz+24x-15y-6z-27=0$
9	а). $3x^2-4y^2-6z^2-18x-18y-12z+17=0$ б). $3x^2-2y^2+8z^2+5xy-14xz+27x-9y-18z=0$
10	а). $x^2-2y^2+6x+4y-8z+47=0$ б). $3x^2-5y^2-4z^2-2xy-11xz+21yz+24x-48y+21z-27=0$
11	а). $3x^2+2z^2+6x+4y-8z-1=0$ б). $3x^2-10y^2+4z^2+xy-13xz+18yz+24x-51y+3z-27=0$
12	а). $-2x^2+3y^2+4z^2+4x+12y+8z+22=0$ б). $-6x^2-8y^2-2z^2+16xy+7xz-10yz+31x-34y-19z-35=0$
13	а). $x^2-2y^2-4z^2-x+4y-8z-10=0$ б). $-2x^2-10y^2+9xy+4xz-10yz+17x-39y-14z-35=0$
14	а). $2x^2+y^2-2z^2+16x-2y+4z+17=0$ б). $-10y^2+4xy+4xz-10yz+2x-19y-14z-7=0$
15	а). $3x^2-4y^2+6z^2-18x-8y+12z+29=0$ б). $-2z^2-10xy-2xz-10yz-14x-5y-15z-7=0$
16	а). $-4x^2+3y^2+2z^2+12x-6y+8z+2=0$ б). $-z^2-10xy-5xz-2yz-5x-14y-8z-7=0$
17	а). $-2y^2+z^2-8x-4y-2z+23=0$ б). $10y^2+z^2-5xy+xz-7yz-5y+z=0$

18	а). $y^2 - 2z^2 + 2y + 4z - 5 = 0$ б). $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 3xy + 4xz - 3yz - x + y - z = 0$
19	а). $2y^2 + z^2 - 8x - 4y + 2z - 13 = 0$ б). $-2x^2 + y^2 - z^2 + xy + 3xz - 3x + 3y + 3z = 0$
20	а). $x^2 - 2z^2 - y^2 + 2x + y + 4z - 15 = 0$ б). $-x^2 + y^2 - 3z^2 - 4xz - 2yz + 3x + y + 5z - 2 = 0$
21	а). $y^2 - 2z^2 + 2y + 4z + 5 = 0$ б). $x^2 - 5y^2 - 4xy - xz + 5yz - x - 7y + 2z - 2 = 0$
22	а). $x^2 + 2z^2 + 2x + 4z - 15 = 0$ б). $x^2 - 5y^2 - 4xy - xz + 5yz + 2x - 16y + z - 3 = 0$
23	а). $3x^2 - 4y^2 - 6z^2 - 18x - 18y - 12z - 3 = 0$ б). $x^2 + 3y^2 + 4xy - xz - 3yz + 4x + 18y + 3z - 21 = 0$
24	а). $x^2 + 2z^2 - y^2 + 2x + y + 4z - 15 = 0$ б). $x^2 + 4y^2 + 5xy - xz - 4yz + 3x + 18y + 2z - 10 = 0$

Задание 3. Для поверхности, заданной каноническими уравнениями относительно ПДСК, найти общий вид уравнений прямолинейных образующих, и уравнения прямолинейных образующих, проходящих через указанную точку. В пакете *geogebra* построить поверхность и найденные прямолинейные образующие и визуально убедиться, что они целиком принадлежат данной поверхности.

ВОПРОСЫ К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ КОНТРОЛЮ

1. Выведите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{a} = \{m, n, p\}$. Сформулируйте и докажите условие параллельности прямой, заданной параметрическими уравнениями, и прямой, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$.
2. Выведите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{a} = \{m, n, p\}$. Сформулируйте и докажите условие перпендикулярности прямых, заданных параметрическими уравнениями.
3. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм исследования взаимного расположения прямых в пространстве.
4. Выведите уравнения плоскости, заданной координатами трех неколлинеарных точек в аффинной системе координат.
5. Сформулируйте и обоснуйте алгоритм исследования взаимного расположения плоскостей.
6. Сформулируйте и докажите условие параллельности прямой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$, и плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.
7. Сформулируйте и докажите условие перпендикулярности прямой, заданной каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.
8. Выведите формулу вычисления расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
9. Сформулируйте определение гиперболы как геометрического места точек, опишите выбор канонической системы координат, связанной с гиперболой, и выведите каноническое уравнение гиперболы.
10. Сформулируйте определение эллипса как геометрического места точек, опишите выбор канонической системы координат, связанной с эллипсом, и выведите каноническое уравнение эллипса.
11. Сформулируйте определение параболы как геометрического места точек, опишите выбор канонической системы координат, связанной с параболой, и выведите каноническое уравнение параболы.
12. Сформулируйте определение эллипса как геометрического места точек, опишите выбор полярной системы координат, связанной с эллипсом, и выведите уравнение эллипса в полярной системе координат.

13. Сформулируйте определение гиперболы как геометрического места точек, опишите выбор полярной системы координат, связанной с гиперболой, и выведите уравнение гиперболы в полярной системе координат.

14. Сформулируйте определение параболы как геометрического места точек, опишите выбор полярной системы координат, связанной с параболой, и выведите уравнение параболы в полярной системе координат.

15. Запишите общий вид канонического уравнения параболического цилиндра. Опишите все виды сечений параболического цилиндра, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

16. Запишите общий вид канонического уравнения эллиптического цилиндра. Опишите все виды сечений эллиптического цилиндра, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

17. Запишите общий вид канонического уравнения гиперболического цилиндра. Опишите все виды сечений гиперболического цилиндра, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

18. Запишите общий вид канонического уравнения конуса. Опишите все виды сечений конуса, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

19. Запишите общий вид канонического уравнения однополостного гиперболоида. Опишите все виды сечений однополостного гиперболоида, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

20. Запишите общий вид канонического уравнения двуполостного гиперболоида. Опишите все виды сечений двуполостного гиперболоида, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

21. Запишите общий вид канонического уравнения эллиптического параболоида. Опишите все виды сечений эллиптического параболоида, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

22. Запишите общий вид канонического уравнения гиперболического параболоида. Опишите все виды сечений гиперболического параболоида, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

23. Запишите общий вид канонического уравнения эллипсоида. Опишите все виды сечений эллипсоида, заданного каноническим уравнением, координатными плоскостями и плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

ЗАДАЧИ К ИТОГОВОМУ КОНТРОЛЮ

1. Найдите общий вид уравнений прямолинейных образующих поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{16}=1$, укажите координаты направляющих векторов этих образующих и найдите те прямолинейные образующие, которые параллельны плоскости $2x-4y+z+1=0$.
2. Найдите общий вид уравнений прямолинейных образующих поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=2y$, укажите координаты направляющих векторов этих образующих и найдите те прямолинейные образующие, которые перпендикулярны плоскости $3x-24y-4z+1=0$.
3. Для поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$, определите вид сечения плоскостью $y=3\sqrt{3}$. Для линии, получившейся в сечении, найти эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис.
4. Для поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, определите вид сечения плоскостью $z=2$. Для линии, получившейся в сечении, найти эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис.
5. Для поверхности, заданной уравнением $z^2=18y$, определите вид сечения плоскостью $x=3\sqrt{2}$. Для линии, получившейся в сечении, найти эксцентриситет, координаты вершин и фокусов, уравнения директрис.
6. Найдите уравнение прямолинейной образующей поверхности $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=0$, проходящей через точку $A(-2,\ 3,\ 0)$, и уравнение прямой, проходящей через точку $B(3,-5,\ 1)$ параллельно данной образующей.
7. Найдите общий вид уравнений прямолинейных образующих поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{16}=1$, укажите координаты направляющих векторов этих образующих и найдите те прямолинейные образующие, которые параллельны плоскости $2x-4y+z+1=0$.
8. Найдите общий вид уравнений прямолинейных образующих поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=2y$, укажите координаты направляющих векторов этих образующих и найдите те прямолинейные образующие, которые перпендикулярны плоскости $3x-24y-4z+1=0$.
9. Найдите общий вид уравнений прямолинейных образующих поверхности, заданной уравнением $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=2y$, укажите координаты направляющих векторов этих образующих и найдите те прямолинейные образующие, которые перпендикулярны плоскости $3x-24y-4z+1=0$.
10. Найдите уравнение прямолинейной образующей поверхности $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=0$, проходящей через точку $A(-2,\ 3,\ 0)$, и уравнение прямой, проходящей через точку $B(3,-5,\ 1)$ параллельно данной образующей.

ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ВИДЕ ЗАКОНЧЕННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ

Необходимо реализовать один из изученных алгоритмов исследования взаимного расположения прямых и плоскостей в евклидовом пространстве в виде законченной компьютерной программы, а также составить отчет.

Объекты оценивания:

- Реализация алгоритма – компьютерная программа в виде исходного текста и исполняемый файл.
- Отчет по программе (текст).

Техническое задание.

- Получить задание (формулировку задачи) у преподавателя.
- Описать и обосновать выбранный алгоритм решения.
- Реализовать алгоритм в виде компьютерной программы на одном из языков программирования высокого уровня (Pascal, Delphi, C, C++, C#). Все входные данные должны считываться из текстового файла «input.txt», результат должен записываться также в текстовый файл «output.txt». Файлы располагаются в текущем каталоге. Формат входных и выходных данных должен соответствовать указанному в задании. Все входные данные корректны.
- Протестировать программу на наборе тестов и отладить ее.
- Составить отчет по программе, содержащий следующую информацию: краткое название решаемой задачи, полное описание задачи, описание алгоритма решения задачи, укрупнённый алгоритм на псевдокоде или в виде блок-схемы, описание используемых структур данных, результаты тестов и экспериментов по сравнению скорости работы программы.

Варианты заданий

1 вариант

Взаимное расположение двух прямых. Постановка задачи: обе прямые заданы координатами двух своих точек относительно прямоугольной декартовой системы координат. Требуется выяснить взаимное расположение прямых (совпадают, параллельны и различны, пересекаются, скрещиваются).

Входные данные: В первой строке записаны шесть чисел – координаты двух точек, задающих первую прямую, во второй – шесть чисел, – координаты точек, задающих вторую прямую.

Выходные данные:

- слово «coincide», если прямые совпадают;
- слово «parallel», если прямые параллельны и различны;
- слово «intersect», если прямые пересекаются;
- слово «interbreed», если прямые скрещиваются.

Пример входных и выходных данных.

input.txt	output.txt
3 -1 2 1 0 -1 -1 1 -4 -5 3 -10	coincide
1 0 -1 3 -1 2 7 1 -2 5 2 -5	parallel
-6 8 -7 4 10 4 1 -2 0 7 22 8	intersect
7 3 9 9 3 8 8 1 1 1 1 4	interbreed

2 вариант

Скрещивающиеся прямые. Постановка задачи: обе прямые заданы координатами двух своих точек относительно прямоугольной декартовой системы координат. Требуется выяснить, являются ли данные прямые скрещивающимися. Если да, то найти расстояние и угол между ними.

Входные данные: В первой строке записаны шесть чисел – координаты двух точек, задающих первую прямую, во второй – шесть чисел, – координаты точек, задающих вторую прямую.

Выходные данные: В первой строке NO, если прямые не скрещивающиеся, YES, если они скрещиваются. В случае положительного ответа во второй строке – число, равное углу между двумя прямыми в градусах (с точностью до одного знака после запятой). В третьей строке – величина расстояния между прямыми (с точностью до одного знака после запятой).

Пример входных и выходных данных.

input.txt	output.txt
3 -1 2 1 0 -1 -1 1 -4 -5 3 -10	NO
1 0 -1 3 -1 2 7 1 -2 5 2 -5	NO
-6 8 -7 4 10 4 1 -2 0 7 22 8	NO
7 3 9 9 3 8 8 1 1 1 1 4	YES 21.8 2

3 вариант

Взаимное расположение прямой и плоскости. Постановка задачи: прямая задана координатами двух своих точек относительно прямоугольной декартовой системы координат, а плоскость – коэффициентами *A, B, C, D* общего уравнения плоскости. Требуется выяснить взаимное расположение прямой и плоскости (прямая лежит в плоскости, прямая пересекает плоскость, прямая параллельна плоскости и не лежит в ней).

Входные данные: В первой строке записаны шесть чисел – координаты двух точек, задающих прямую, во второй – четыре числа, – коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* общего уравнения плоскости.

Выходные данные:

- слово «in the plane», если прямая лежит в плоскости;
- слово «parallel», если прямая параллельна плоскости и не лежит в ней;
- слово «intersect», если прямая пересекает плоскость.

Пример входных и выходных данных.

input.txt	output.txt
0 1 -1 4 1 -3 1 -1 2 3	in the plane
2 -1 3 6 -1 1 1 -1 2 3	parallel
5 -4 9 6 -1 1 1 -1 2 3	intersect 6.7 1 -4.3

4 вариант

Взаимное расположение двух плоскостей.

Постановка задачи: плоскости заданы координатами трех своих точек относительно прямоугольной декартовой системы координат. Требуется выяснить взаимное расположение плоскостей (совпадают, пересекаются, параллельны и различны).

Входные данные: В первой строке записаны девять чисел – координаты трех точек, задающих первую плоскость, во второй – девять чисел, – координаты трех точек, задающих вторую плоскость.

Выходные данные:

- слово «incorrect», если какая-то тройка точек оказалась коллинеарной;
- слово «coincide», если плоскости совпадают;
- слово «parallel», если плоскости параллельны и различны;
- слово «intersect», если плоскости пересекаются.

Пример входных и выходных данных.

input.txt	output.txt
0 1 -1 4 1 -3 7 4 -3 -2 1 0 5 4 -2 4 5 -1	coincide
0 1 -1 4 1 -3 7 4 -3 -1 2 1 6 5 -1 6 0	parallel
0 1 -1 4 1 -3 7 4 -3 -2 1 0 5 4 -2 5 -4 9	intersect
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 -1 4 1 -3 1 1 1	incorrect

5 вариант

Пересекающиеся прямые. Постановка задачи: обе прямые заданы координатами двух своих точек относительно прямоугольной декартовой системы координат. Требуется выяснить, являются ли данные прямые пересекающимися. Если да, то найти координаты точки пересечения и угол между ними.

Входные данные: В первой строке записаны шесть чисел – координаты двух точек, задающих первую прямую, во второй – шесть чисел – координаты точек, задающих вторую прямую.

Выходные данные: В первой строке NO, если прямые не пересекаются, YES, если они пересекаются. В случае положительного ответа во второй строке – тройка чисел – координаты точки пересечения (с точностью до одного знака после запятой), в третьей строке – число, равное углу между двумя прямыми в градусах (с точностью до одного знака после запятой).

Пример входных и выходных данных.

input.txt	output.txt
1 0 -1 3 -1 2 7 1 -2 5 2 -5	NO
7 3 9 8 3 8 8 1 1 1 1 4	NO
-6 8 -7 4 10 4 1 -2 0 -2 -14 -4	YES 4 10 4 59.8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2008. 912 с.

2. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб.: Лань, 2021. 512 с.

3. *Андреева З.И., Поносова О.М.* Практикум по геометрии. Элементы векторной алгебры. Метод координат на плоскости. Пермь: ПГПУ, 1988. 55 с.

4. *Андреева З.И., Шеремет Г.Г.* Практикум по геометрии. Векторное и смешанное произведения векторов. Метод координат в пространстве. Пермь: ПГПУ, 2002. 24 с.

5. *Бахвалов С.В., Бабушкин Л.И., Иваницкая В.П.* Аналитическая геометрия. М.: Альянс, 2017. 376 с.

6. *Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2009. 384 с.

7. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2019. 224 с.

8. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2019. 224 с.

9. *Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2017. 574 с.

10. *Моденов П.С.* Аналитическая геометрия. М.: Альянс, 2017. 698 с.

11. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2009. 336 с.

Учебное издание

Шеремет Галина Геннадьевна
Коневских Татьяна Михайловна

Алгебра и аналитическая геометрия. Практикум по аналитической геометрии

Учебно-методическое пособие

Редактор *А. С. Серебреников*
Корректор *С. А. Вороненко*
Техническая подготовка материалов: *О. Н. Бастырева*

Объем данных 5,78 Мб
Подписано к использованию 26.07.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15