ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

О. В. Сандакова,
Е. В. Кувшинова,
В. Ф. Панов

МАТЕМАТИКА

Лекции
для естественно-научных факультетов

Часть 1

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

О. В. Сандакова, Е. В. Кувшинова, В. Ф. Панов

МАТЕМАТИКА

Лекции для естественно-научных факультетов

Часть 1

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для обучающихся
естественно-научных направлений
подготовки бакалавров*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2022

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С181

Сандакова О. В.

С181 Математика. Лекции для естественно-научных факультетов [Электронный ресурс] : учебное пособие / О. В. Сандакова, Е. В. Кувшинова, В. Ф. Панов ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – Ч. 1. – 4,17 Мб ; 101 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Sandakova-Kuvshinova-Panov-Matematika-Lekcii-Dlya-Estestvennonauchnyh-Fakultetov-CHast-1.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3846-8
ISBN 978-5-7944-3847-5 (Ч. 1)

Учебное пособие разработано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика», предусмотренной учебным планом программы обучения бакалавров по естественно-научным направлениям. Данное учебное пособие включает в себя материалы лекций, которые читаются в первом триместре. Основные темы, которые охватывают лекции, это линейная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости, векторная алгебра и основы математического анализа в части, касающейся дифференциального исчисления функции одной переменной.

В соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика», пособие состоит из 14 лекций по вышеназванным темам.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра математики и физики Пермского ГАТУ (зав. кафедрой – канд. техн. наук, доцент ***В. В. Аюпов***);

профессор кафедры информационных технологий НИУ ВШЭ – Пермь, канд. физ.-мат. наук ***А. П. Иванов***.

ISBN 978-5-7944-3846-8
ISBN 978-5-7944-3847-5 (Ч. 1)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие по дисциплине «Математика» разработано для студентов геологического, географического и химического факультетов в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» по естественно-научным направлениям.

Издание включает в себя материалы четырнадцати лекций, которые читаются в первом триместре, по следующим темам: линейная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости, векторная алгебра, а также основы математического анализа в части, касающейся дифференциального исчисления функции одной переменной (пределы, производные, исследование функций и построение графиков функций).

Лекции 1–4 относятся к разделу «Линейная алгебра» и включают такие темы, как определители и методы их вычисления, матрицы и операции с ними, системы линейных уравнений и методы их решения, комплексные числа. Лекции 5–8 относятся к разделу «Аналитическая геометрия» и включают в себя такие темы, как основы векторной алгебры и уравнения прямых на плоскости, кривые второго порядка. Лекции 9–14 относятся к разделу «Основы математического анализа».

Студенты могут ознакомиться со следующими понятиями: функция, числовая последовательность, предел числовой последовательности и предел функции, производная функции и ее приложения, в частности использование дифференцирования для исследования функции и построение ее графика.

Таким образом, материалы данного учебного пособия охватывают все темы, изучаемые студентами естественно-научных факультетов в первом триместре.

ЛЕКЦИЯ 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ, ИХ СВОЙСТВА. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ, ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Определение 1.1. ***Матрицей*** называется прямоугольная таблица чисел.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения: A – матрица; a_{ij} – элемент матрицы; i – номер строки, в которой стоит данный элемент; j – номер соответствующего столбца; m – число строк матрицы; n – число ее столбцов.

Числа m и n называются ***размерностями*** матрицы и записываются $m \times n$.

Матрица называется ***квадратной***, если m = n. Число n в этом случае называют ***порядком*** квадратной матрицы.

Матрицы одинаковой размерности называются ***равными***, если у них соответственно равны элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрица называется ***нулевой***, если все ее элементы равны 0.

Квадратная матрица называется ***единичной***, если элементы, стоящие на ее главной диагонали, равны 1, а остальные равны 0.

Транспонированием матрицы называется замена ее строк столбцами с теми же номерами.

Линейные операции над матрицами

1. Сложение матриц

Суммой матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C той же размерности, каждый элемент которой равен сумме элементов матриц A и B, стоящих на тех же местах: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n.$

Свойства сложения:

1. $A + B = B + A.$
2. $(A+B)+C = A+(B+C).$

Замечание 1. Справедливость этих свойств следует из определения операции сложения матриц.

Замечание 2. Складывать можно только матрицы **одинаковой размерности.**

Пример. $A=\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. $C=A+B=\begin{pmatrix} 8-2 & -3+1 \\ 2+3 & 5+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Умножение матрицы на число

<u>Произведением матрицы на число</u> называется матрица той же размерности, что и исходная, все элементы которой равны элементам исходной матрицы, умноженным на данное число.

Свойства умножения матрицы на число:

1. $(\mathrm{km})A=k(mA)$.
2. $k(A+B)=kA+kB$.
3. $(\mathrm{k+m})A=kA+mA$.

Замечание. Назовем разностью матриц A и B матрицу C, для которой $C+B=A$, т.е. $C=A+(-1)B$.

Пример. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $-4A=\begin{pmatrix} -12 & -8 \\ 20 & -4 \end{pmatrix}$.

3. Умножение матриц

Сложение матриц накладывает условия на размерности слагаемых. Умножение матрицы на матрицу тоже требует выполнения определенных условий для размерностей сомножителей, а именно: число столбцов первого множителя должно равняться числу строк второго.

<u>Произведением матрицы</u> A ***<u>размерности</u>*** $m\times p$ ***<u>и матрицы</u>*** B ***<u>размерности</u>*** $p\times n$ называется матрица C размерности $m\times n$, каждый элемент которой c_{ij} определяется формулой: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$, $i=1,...,m,\ j=1,...,n.$ Таким образом, элемент c_{ij} представляет собой сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Пример. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Существует только произведение AB, но не существует произведение BA. Размерность матрицы $C=AB$ составляет 2×3. Найдем элементы матрицы С: $c_{11}=1\cdot 2+(-2)(-3)=8, c_{12}=1\cdot 4+(-2)\cdot 1=2, c_{13}=1\cdot(-3)+(-2)\cdot 5=-13,$

$c_{21}=3\cdot 2+5\cdot(-3)=-9, c_{22}=3\cdot 4+5\cdot 1=17, c_{23}=3\cdot(-3)+5\cdot 5=16.$

Итак, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -13 \\ -9 & 17 & 16 \end{pmatrix}$.

Замечание. Операция умножения матриц некоммутативна, т.е. $AB \neq BA$. Действительно, если существует произведение AB, то BA может вообще не существовать из-за несовпадения размерностей (см. предыдущий пример). Если существуют и AB, и BA, то они могут иметь разные размерности (если $m \neq n$).

Для квадратных матриц одного порядка произведения AB и BA существуют и имеют одинаковую размерность, но их соответствующие элементы в общем случае не равны.

Однако в некоторых случаях произведения AB и BA совпадают.

Рассмотрим произведение квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка:

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A.$$

Тот же результат получим и для произведения EA. Итак, для любой квадратной матрицы A: $AE = EA = A$.

Определители второго и третьего порядков

Каждой квадратной матрице можно поставить в соответствие число, определяемое единственным образом с использованием всех элементов матрицы. Это число называется ***определителем***.

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определителем второго порядка называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол), вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Пример. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} = 4\cdot(-8) - 12\cdot 3 = -32 - 36 = -68.$

<u>Определителем третьего порядка</u> называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Замечание. Для того чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали.

Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Пример

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot(-4)(-2) + 5\cdot 0\cdot(-3) - (-3)\cdot 3\cdot(-2) - 0\cdot(-4)\cdot(-1) - 5\cdot 2\cdot 1 = -3 + 16 + 0 - 18 + 0 - 10 = -15.$$

Основные свойства определителей

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

<u>Свойство 1.</u> Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

Свойство 2. При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{13}a_{21}a_{32} + ka_{12}a_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{12}a_{21}a_{33} - ka_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство этого свойства следует из свойства 2 при $k = 0$.

Свойство 4. Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{13}a_{11}a_{32} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{12}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{32} = 0.$$

Свойство 5. Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство следует из свойств 2 и 4.

Свойство 6. При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}a_{33} + a_{23}a_{11}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{21}a_{13}a_{32} =$$

$$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство этого свойства можно провести самостоятельно, сравнив значения левой и правой частей равенства, найденные с помощью определения 1.12.

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство следует из свойств 7 и 5.

ЛЕКЦИЯ 2

МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ, РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ). МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ. ПОНЯТИЕ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ N-ГО ПОРЯДКА. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА, ЕЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разложение определителя по строке

Минором элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: a_{ij} – выбранный элемент определителя, M_{ij} – его минор.

Пример. Для $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $a_{21}=2,\ M_{21}=\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-12+3=-9.$

Определение 2.1. ***<u>Алгебраическим дополнением</u>*** A_{ij} элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Рассмотрим еще один способ вычисления определителей третьего порядка – так называемое разложение по строке или столбцу. Для этого докажем следующую теорему:

Теорема 2.1. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij}, \text{ где } i=1,2,3.$$

Доказательство

Докажем теорему для первой строки определителя, так как для любой другой строки или столбца можно провести аналогичные рассуждения и получить тот же результат.

Найдем алгебраические дополнения к элементам первой строки:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},\ A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33},\ A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}.$$

Тогда $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, для вычисления определителя достаточно найти алгебраические дополнения к элементам какой-либо строки или столбца и вычислить сумму их произведений на соответствующие элементы определителя.

Пример. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по первому столбцу. Заметим, что A_{31} при этом искать не требуется, так как, $a_{31}=0,$ следовательно, и $a_{31}A_{31}=0.$ Найдем A_{11} и A_{21}: $A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=2, A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-4.$ Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot 2+(-1)\cdot(-4)=6.$$

Определители более высоких порядков

Определение 2.2. ***<u>Определитель n-го порядка</u>***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

есть сумма n! членов $(-1)^r a_{1k_1}a_{2k_2}...a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из n! упорядоченных множеств $k_1, k_2, ..., k_n$, полученных r попарными перестановками элементов из множества $1, 2, ..., n$.

Замечание 1. Свойства определителей 3-го порядка справедливы и для определителей n-го порядка.

Замечание 2. На практике определители высоких порядков вычисляют с помощью разложения по строке или столбцу. Это позволяет понизить порядок вычисляемых определителей и в конечном счете свести задачу к нахождению определителей 3-го порядка.

Пример

Вычислим определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ с помощью разложения по 2-му столбцу. Для этого найдем A_{32} и A_{42}:

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15, A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -15.$$ Следовательно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 + (-1)(-15) = 30.$$

Обратная матрица

Квадратная матрица A называется ***вырожденной***, если $\Delta_A = 0$, и ***невырожденной***, если $\Delta_A \neq 0$.

Квадратная матрица B называется ***обратной*** к квадратной матрице A того же порядка, если $AB = BA = E$. При этом B обозначается A^{-1}.

Рассмотрим условие существования матрицы, обратной к данной, и способ ее вычисления.

Теорема 2.2 (без доказательства). Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей.

Теорема 2.3. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной.

Доказательство

1) Необходимость: так как $A \cdot A^{-1} = E,$ то $\Delta_A \cdot \Delta_{A^{-1}} = \Delta_E = 1$ (теорема 2.2), поэтому $\Delta_A \neq 0.$

2) Достаточность: зададим матрицу A^{-1} в следующем виде:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta_A} & \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta_A} & \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta_A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta_A} & \frac{A_{2n}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta_A} \end{pmatrix}.$$

Тогда любой элемент произведения $A \cdot A^{-1}$ (или $A^{-1} \cdot A$), не лежащий на главной диагонали, равен сумме произведений элементов одного столбца матрицы A на алгебраические дополнения к элементам другого столбца и, следовательно, равен 0 (как определитель с двумя равными столбцами). Элементы, стоящие на главной диагонали, равны $\frac{1}{\Delta_A} \cdot \Delta_A = 1$. Таким образом, $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. Теорема доказана.

Замечание. Элементами обратной матрицы являются алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы A, деленные на ее определитель.

Пример. Найдем матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$\Delta_A = -6 \neq 0$, следовательно, матрица А невырожденная. Найдем алгебраические дополнения к ее элементам:

$A_{11} = -1, A_{12} = 7, A_{13} = 2, A_{21} = -1, A_{22} = -5, A_{23} = -4, A_{31} = -1, A_{32} = 1, A_{33} = 2$. Не забудем, что алгебраические дополнения к элементам **строки** матрицы А образуют в обратной матрице **столбец** с тем же номером. Итак, $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Можно убедиться, что найденная матрица действительно удовлетворяет определению A^{-1}. Найдем

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Тот же результат получим и при перемножении в обратном порядке.

Системы линейных уравнений

Определение 2.3. ***<u>Линейными операциями</u>*** над какими-либо объектами называются их сложение и умножение на число.

Определение 2.4. ***<u>Линейной комбинацией</u>*** переменных называется результат применения к ним линейных операций, т.е. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, где α_i – числа, x_i – переменные.

Определение 2.5. ***<u>Линейным уравнением</u>*** называется уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ (2.1), где a_i и b – числа, x_i – неизвестные.

Таким образом, в левой части линейного уравнения стоит линейная комбинация неизвестных, а в правой – число.

Линейное уравнение называется ***<u>однородным</u>***, если b = 0. В противном случае уравнение называется ***<u>неоднородным</u>*****.**

Определение 2.6. ***<u>Системой линейных уравнений (линейной системой)</u>*** называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, (*)$$

где a_{ij}, b_i числа, x_j – неизвестные, n – число неизвестных, m – число уравнений.

<u>Решением</u> линейной системы (*) называется **набор чисел** $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}$, которые при подстановке вместо неизвестных обращают каждое уравнение системы в верное равенство.

ЛЕКЦИЯ 3

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА. ПРАВИЛО КРАМЕРА. МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Метод Гаусса решения линейных систем

Замечание. Линейная система (*) может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Пример

1. $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-5y=-9 \end{cases}$. Единственным решением является пара чисел: x = 1, y = 2.

2. $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$. Решением этой системы будут любые два числа: x и y, удовлетворяющие условию: y = 3 – x. Например, x=1, y=2; x=0, y=3 и т.д.

3. $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$. Очевидно, что эта система не имеет решений, так как разность двух чисел не может принимать двух различных значений.

Рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \tag{3.1}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на a_{11} и вычтем полученное уравнение из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на a_{i1}, где i – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при x_1 во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \quad \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \tilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Таким же образом можно исключить x_2 из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \ldots + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ \quad x_2 + \ldots + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_n = \hat{b}_n \end{cases}. \tag{3.2}$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\hat{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы (3.2) единственным образом определяется x_n, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

Пример

1. Решим методом Гаусса систему $\begin{cases} x + 5y - 4z = -5 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$.

Вычтем из второго уравнения удвоенное первое, а из третьего – первое, умноженное на 4.

Получим: $\begin{cases} x + 5y - 4z = -5 \\ -13y + 9z = 12 \\ -19y + 13z = 16 \end{cases}$. Теперь вычтем из третьего уравнения второе, умноженное на $19/13$, а затем разделим второе уравнение на –13 (коэффициент при y), а третье – на $-2/13$ (новый коэффициент при z). Система примет вид:

$\begin{cases} x + 5y - 4z = -5 \\ y - \dfrac{9}{13}z = -\dfrac{12}{13} \\ \qquad z = 10 \end{cases}$. Отсюда z=10, y=6, x=5 – единственное решение системы.

2. Система $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=8 \end{cases}$ после исключения x из второго и третьего уравнений

примет вид: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ -y-z=-7 \end{cases}$. Если затем вычесть второе уравнение из третьего, то последнее

уравнение станет тождеством 0=0. В системе осталось два уравнения: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ y+z=7 \end{cases}$. Ее решение можно записать в виде: x = 5, y – любое число, z = 7 – y. Таким образом, система имеет бесконечно много решений.

3. $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=10 \end{cases}$. Применив к этой системе метод Гаусса, получим $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ -y-z=-5 \end{cases}$,

откуда $\begin{cases} x+y+z=5 \\ -y-z=-7 \\ 0=2 \end{cases}$. Последнее равенство является неверным при любых значениях неизвестных, следовательно, система не имеет решения.

Правило Крамера

Рассмотрим систему (3.1). Назовем **главным определителем** этой системы определитель Δ, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Предположим сначала, что $\Delta \neq 0$. Умножим каждое уравнение системы (3.1) на алгебраические дополнения $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ элементов j-го столбца Δ.

Сложив затем все уравнения, получим:

$$\sum_{i-1}^{n} x_i (a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj}) = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}. \quad (3.3)$$

Отметим, что $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1i} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2i} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots a_{nn} \end{vmatrix}$.

(Результат получен из разложения определителя по j-му столбцу). Такой определитель равен 0 при $i \neq j$ и равен Δ при $i = j$. Правая часть равенства (3.3) представляет собой определитель Δ, в котором вместо i-го столбца стоит столбец свободных членов системы (3.1). Назовем такой определитель Δ_{x_i}. Рассматривая i=1,2,…,n, получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases}. \tag{3.4}$$

Разделив все уравнения на Δ, найдем единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}.$$

Предположим теперь, что Δ=0. Тогда система (3.4) примет вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = \Delta_{x_1} \\ 0 \cdot x_2 = \Delta_{x_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_n = \Delta_{x_n} \end{cases}.$$

В этом случае, если все Δ_{x_i}=0, система выглядит так:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 = 0 \\ 0 \cdot x_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

и имеет бесконечно много решений. Если же хотя бы один из $\Delta_{x_i} \neq 0,$ система решений не имеет.

Таким образом, правило Крамера позволяет найти единственное решение системы (3.1) или сделать вывод о существовании бесконечного числа решений либо об их отсутствии:

1) Если $\Delta \neq 0,$ система (3.1) имеет единственное решение, определяемое по формулам: $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$.

2) Если $\Delta = \Delta_{x_i}$=0, система имеет бесконечно много решений.

3) Если Δ=0, а хотя бы один из $\Delta_{x_i} \neq 0,$ система не имеет решений.

Пример

1. Рассмотрим систему $\begin{cases} x+5y-4z=-5 \\ 2x-3y+z=2 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$, решенную в предыдущем разделе методом Гаусса, и применим к ней правило Крамера. Найдем все нужные определители:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$ следовательно, система имеет единственное решение.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 10,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 20.$$

Отсюда $x = \frac{10}{2} = 5,\ y = \frac{12}{2} = 6,\ z = \frac{20}{2} = 10.$

2. $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$. Здесь $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Следовательно, система не имеет единственного решения. Найдем Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$ поэтому система имеет бесконечно много решений.

3. $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=10 \end{cases}$. Для этой системы $\Delta = \Delta_x = 0,$ но $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$ следовательно, решений нет.

Решение линейных систем с помощью обратной матрицы

Рассмотрим линейную систему (3.1): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ и введем следующие обозначения:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица системы, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных,

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов. Тогда систему (3.1) можно записать в виде матричного уравнения:

$$AX=B. \qquad (3.5)$$

Пусть матрица A – невырожденная, тогда существует обратная к ней матрица A^{-1}.

Умножим обе части равенства (3.5) слева на A^{-1}. Получим $A^{-1}AX=A^{-1}B.$

Но $A^{-1}A=E,$ тогда $EX=A^{-1}B$, а поскольку $EX=X$, то $X=A^{-1}B$ (3.6).

Итак, решением матричного уравнения (3.5) является произведение матрицы, обратной к A, на столбец свободных членов системы (3.1).

Пример

Вернемся к системе $\begin{cases} x+5y-4z=-5 \\ 2x-3y+z=2 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}.$

Для нее $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $\Delta_A=2.$ Найдем A^{-1}:

$$A_{11}=8,\ A_{12}=10,\ A_{13}=14, A_{21}=11,\ A_{22}=13, A_{23}=19, A_{31}=-7, A_{32}=-9, A_{33}=-13.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 11 & -7 \\ 10 & 13 & -9 \\ 14 & 19 & -13 \end{pmatrix},\ A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8\cdot(-5)+11\cdot 2-7\cdot(-4) \\ 10\cdot(-5)+13\cdot 2-9\cdot(-4) \\ 14\cdot(-5)+19\cdot 2-13\cdot(-4) \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x=5,\ y=6,\ z=10.$

ЛЕКЦИЯ 4

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ
И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.
ФОРМУЛЫ МУАВРА

Определение комплексного числа

Определение 4.1. ***Комплексным числом*** z называется упорядоченная пара действительных чисел (a,b): $z=(a,b)$ (термин «упорядоченная» означает, что в записи комплексного числа важен порядок чисел a и b: $(a,b)\neq(b,a)$. При этом первое число a называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $a=\operatorname{Re}z$, а второе число b называется мнимой частью z: $b=\operatorname{Im}z$.

Определение 4.2. ***Два комплексных числа*** $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ ***равны*** тогда и только тогда, когда у них равны действительные и мнимые части, то есть $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.

Действия над комплексными числами

1. ***Суммой*** комплексных чисел $z_1=(a_1, b_1)$ и $z_2=(a_2, b_2)$ называется комплексное число $z=(a, b)$ такое, что $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$.

Свойства сложения:

а) $z_1+z_2=z_2+z_1$;

б) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$;

в) существует комплексное число $0=(0,0)$: $z+0=z$ для любого комплексного числа z.

2. ***Произведением*** комплексных чисел $z_1=(a_1, b_1)$ и $z_2=(a_2, b_2)$ называется комплексное число $z=(a, b)$ такое, что $a=a_1a_2-b_1b_2$, $b=a_1b_2+a_2b_1$.

Свойства умножения:

а) $z_1z_2=z_2z_1$;

б) $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

в) $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

Замечание. Подмножеством множества комплексных чисел является множество действительных чисел, определяемых как комплексные числа вида $(a,0)$. Можно убедиться, что при этом определение операций над комплексными числами сохраняет известные правила соответствующих операций над действительными числами. Кроме того, действительное число $1=(1,0)$ сохраняет свое свойство при умножении на любое комплексное число: $1\cdot z=z$.

Определение 4.3. Комплексное число (0, b) называется ***<u>чисто мнимым</u>***. В частности, число (0,1) называют ***<u>мнимой единицей</u>*** и обозначают символом i.

Свойства мнимой единицы:

1) $i \cdot i = i^2 = -1$;

2) чисто мнимое число (0,b) можно представить как произведение действительного числа (b,0) и i : (b,0) = $b \cdot i$.

Следовательно, любое комплексное число $z = (a, b)$ *можно представить в виде:*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}.$$

Определение 4.4. *Запись вида* $z = a + ib$ *называют* алгебраической формой *записи комплексного числа.*

Замечание. Алгебраическая запись комплексных чисел позволяет производить операции над ними по обычным правилам алгебры.

Определение 4.5. Комплексное число $\bar{z} = a - ib$ называется ***<u>комплексно сопряженным</u>*** числу $z = a + ib$.

Операция комплексного сопряжения и ее свойства

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + (b)^2} = |z| \rightarrow |\bar{z}| = |z|.$$

a) $\bar{z} + z = 2a$;

b) $\bar{z} - z = 2bi$;

c) $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2(-i)^2 = a^2 + b^2$;

d) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \geq 0$ есть действительное число;

e) $\left(\bar{\bar{z}}\right) = z$;

f) дано: $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$;

$$\left(\overline{z_1 + z_2}\right) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \left(\overline{z_1 \cdot z_2}\right) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2;$$

$$\left(\overline{z_1 - z_2}\right) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,\ \left(\overline{z_1 : z_2}\right) = \bar{z}_1 : \bar{z}_2,\ z_2 \neq 0.$$

3. ***<u>Вычитание</u>*** комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению:

z =(a,b) называется разностью комплексных чисел z_1 = (a_1 , b_1) и z_2 = (a_2 , b_2), если $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$.

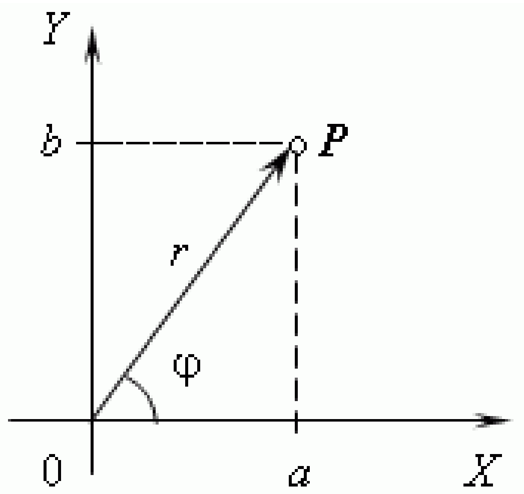
4. ***<u>Деление</u>*** комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению: число $z = a + ib$ называется частным от деления $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ ($z_2 \neq 0$), если $z_1 = z \cdot z_2$. Следовательно, действительную и мнимую части частного можно найти из решения системы уравнений: $a_2 a - b_2 b = a_1$, $b_2 a + a_2 b = b_1$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексные числа двумя способами изображаются на декартовой плоскости. При этом используется специфическая терминология. Сама декартова плоскость называется при этом ***комплексной плоскостью***, ось абсцисс − ***действительной осью***, ось ординат − ***мнимой осью***, начало координат обозначается не буквой *O*, а числом 0. Оси координат обозначаются $\operatorname{Re} z$ – действительная ось OX, $\operatorname{Im} z$ – мнимая ось OY.

Первая интерпретация. Каждому комплексному числу $z = a + bi$ поставим в соответствие точку $(a; b)$. Ясно, что это соответствие взаимно однозначно.

Вторая интерпретация. На этот раз каждому комплексному числу $z = a + bi$ поставим в соответствие вектор $\{a; b\}$. Это соответствие также взаимно однозначно.



Определение 4.6. Модулем комплексного числа называется длина радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$, изображающего комплексное число на координатной (комплексной) плоскости.

Модуль комплексного числа $a+bi$ обозначается $|a+bi|$ или буквой r, или $\operatorname{mod} z$, и вычисляется по формуле:

$$\operatorname{mod} z = r = |z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

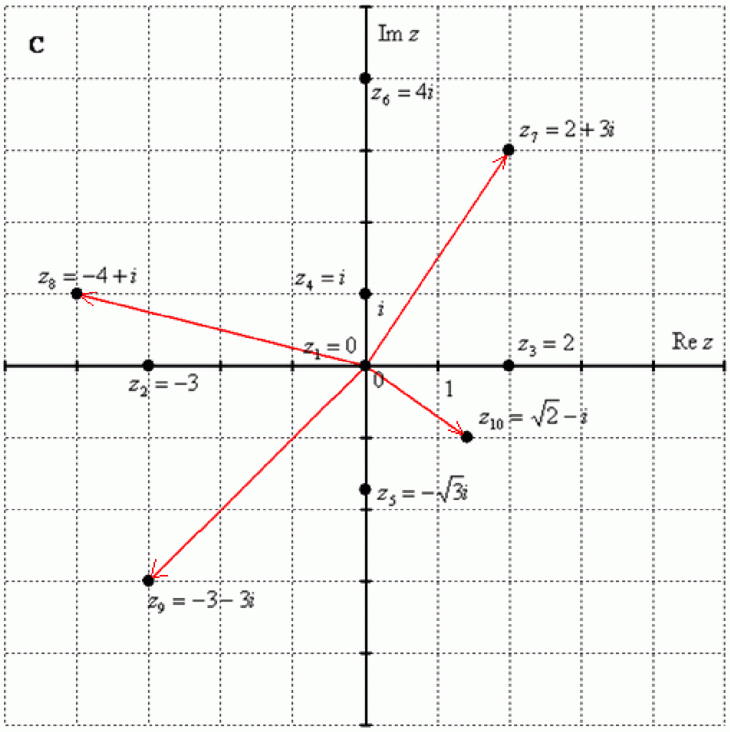
Сопряжённые комплексные числа имеют одинаковый модуль.

Определение 4.7. Аргументом ненулевого комплексного числа называется угол, образованный положительным направлением действительной оси и направлением вектора, изображающего данное комплексное число.

Если комплексное число **равно нулю**, то его изображает нулевой вектор, угол которого с действительной осью является неопределённым (любое действительное число можно считать значением этого угла). Поэтому будем считать, что аргумент нуля никак не определён (не существует).

Аргумент ненулевого комплексного числа z не определён однозначно (как и любой угол, определён с точностью до $2k\pi$). Любое значение этого угла можно считать аргументом. Вся бесконечная совокупность этих углов обозначается **Arg z,** любое конкретное значение – **arg z**. Иногда из всей этой бесконечной совокупности углов выделяют какой-нибудь угол по определённому правилу, например, лежащий в полуинтервале $(-\pi; \pi]$. Тогда аргумент будет определён однозначно, это число называется *главным значением* аргумента и также обозначается arg z.

Пример



Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

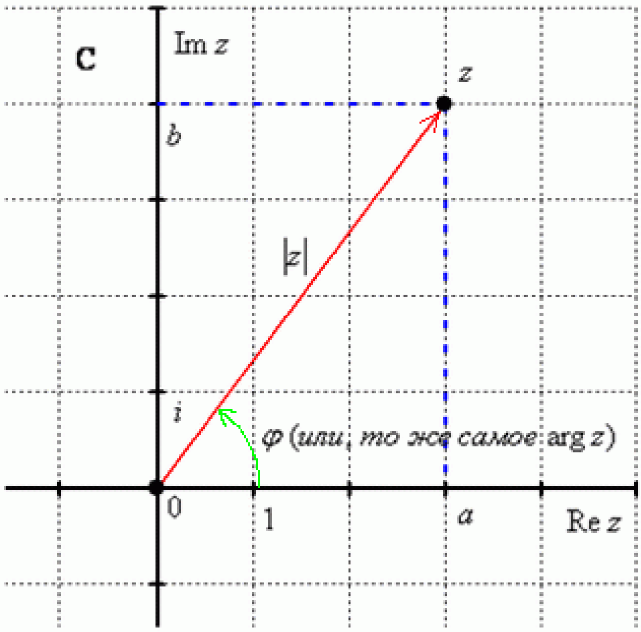
$z_1 = 0,\ z_2 = -3,\ z_3 = 2,$

$z_4 = i,\ z_5 = -\sqrt{3}i,\ z_6 = 4i,$

$z_7 = 2+3i,\ z_8 = -4+i,$

$z_9 = 4i,\ z_{10} = \sqrt{2} - i.$

Пусть теперь дано произвольное комплексное число $z = a + bi$, не равное нулю. Обозначим его модуль через r ($|z| = r$), а аргумент (любое его значение) через φ. Пусть наше число z изображается вектором $\overrightarrow{0z}$. Из определения тригонометрических функций получаем:



$a = r\cos φ;$

$b = r\sin φ.$

Преобразуем теперь алгебраическую форму данного числа следующим образом:

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4.1}$$

Форма записи комплексного числа (4.1) называется его ***<u>тригонометрической формой</u>***.

Легко убедиться, что операция сложения комплексных чисел соответствует операции сложения векторов.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию умножения.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$ тогда

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$
$$r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Следовательно, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент – сумме их аргументов. Соответственно, при делении модуль частного равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.

Частным случаем операции умножения является возведение в степень:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \quad (4.2)$$

Формулу (4.2) называют **формулой Муавра.**

Извлечение корня из комплексного числа

Определение 4.8. Комплексное число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ называется ***<u>корнем n-й степени</u>*** из z, если $z = z_1^n$.

Из определения следует, что $r_1 = \sqrt[n]{r}$, $\varphi_1 = \dfrac{\varphi}{n}$. Так как аргумент комплексного числа определен не однозначно, можно получить n различных значений для аргумента z_1: $\varphi_k = \dfrac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}$, где φ_0 φ_0 – одно из значений arg z, а k = 1, 2,…, n-1. Окончательно формулу, задающую все значения $\sqrt[n]{z}$, можно записать в виде:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right),\ k = 1, 2, ..., n-1. \quad (4.3)$$

Пример

Число z = 16 можно представить в тригонометрической форме следующим образом: z = 16(cos0 + $i$sin0). Найдем все значения $\sqrt[4]{16}$:

$$z_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2, z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i, z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$
$$z_3 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i.$$

Показательная форма комплексного числа

Введем еще одну форму записи комплексного числа. На множестве комплексных чисел существует связь между тригонометрическими и показательными функциями, задаваемая **формулой Эйлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad (4.4)$$

Используя эту формулу, можно получить из (4.1) еще один вид комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}. \tag{4.5}$$

Определение 4.9. Запись вида (4.5) называется ***показательной формой*** записи комплексного числа.

Представление (4.5) позволяет легко интерпретировать, с геометрической точки зрения, операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, используя известные свойства показательной функции.

ЛЕКЦИЯ 5

ВЕКТОРЫ. ЧАСТЬ 1

Понятие вектора. Операции над векторами

Определение 5.1. ***<u>Вектор</u>*** – это направленный отрезок прямой, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Обозначается вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. У вектора $\overrightarrow{AB}$ есть A – начало вектора, B – конец вектора.

Аналитическая геометрия – это раздел высшей математики, который занимается решением геометрических задач с помощью сведения их к задачам алгебраическим. При этом используется метод координат.

Величины можно подразделить на векторные и скалярные. Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются ***<u>скалярными</u>***. Например, площадь, длина, объем, работа и т.д. Другие величины определяются не только своим числовым значением, нои направлением. Например, сила, скорость и т.д. Такие величины называют ***<u>векторными</u>***.

В аналитической геометрии рассматриваются вектора ***<u>свободные</u>***, т.е. каждый вектор можно переносить параллельно самому себе, и он от этого не меняется.

Определение 5.2. Вектор называется ***<u>нулевым</u>*** (обозначается $\vec{0}$), если его начало и конец совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю, а направление не определено.

Определение 5.3. ***<u>Коллинеарные вектора</u>*** – это два вектора ($\vec{a}$ и $\vec{b}$), если после приведения к одному началу они лежат на одной прямой (параллельные).

Замечание. Согласно этому определению, нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Определение 5.4. ***<u>Равные вектора</u>*** – это два вектора, которые коллинеарны, у них одинаковые длины и они направлены в одну сторону.

Примечание. Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 5.5. ***<u>Противоположные вектора</u>*** – это два вектора, которые коллинеарны, одинаковой длины, направлены в противоположные стороны.

Линейные операции над векторами

1. **Сложение двух векторов**. Суммой двух векторов является такой третий вектор, у которого началом является начало первого вектора, а концом – конец второго вектора, при условии, что конец первого вектора совпадает с началом второго.

2. **Вычитание двух векторов**. Чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{c}$ нужно прибавить противоположный вектор вектору $\vec{c}$.

3. **Умножение вектора на число**. Рассмотрим умножение числа α на вектор $\vec{a}$. Под произведением понимается такой вектор $\vec{d}$, который характеризуется произведением числа α на $\vec{a}$.

$$\left|\vec{d}\right| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|.$$

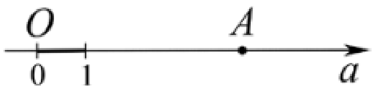
Вектора $\vec{a}$ и $\vec{d}$ являются коллинеарными. Если $\alpha > 0$, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{d}$ направлены в одну сторону, если $\alpha < 0$, то вектор $\vec{d}$ направлен в противоположную сторону по отношению к вектору $\vec{a}$.

Направленный отрезок оси

Осью называется прямая, которой придано направление одно из двух возможных.

ось

Числовой осью называется прямая, которой придано положительное направление, на данной прямой выбрано начало, на данной прямой выбрана линейная единица.



числовая ось

Направленным отрезком оси называется любой вектор, лежащий на данной оси.

Величиной направленного отрезка оси называется его длина, взятая со знаком «+», если направление этого отрезка и оси одинаковое.

Величиной направленного отрезка оси называется его длина, взятая со знаком «-», если направление этого отрезка и оси противоположно.

Величина направленного отрезка оси **– это число со знаком.**

Введение координат на прямой

Координатной прямой называется прямая, на которой выбраны точка, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление (она становится осью)

Пусть M – произвольная точка координатной прямой. ***Координатой точки*** M называется вещественное число x, равное величине OM направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$: $x = OM$. Число x называется *координатой точки* M. Символ $M(x)$ означает, что точка M имеет координату x.

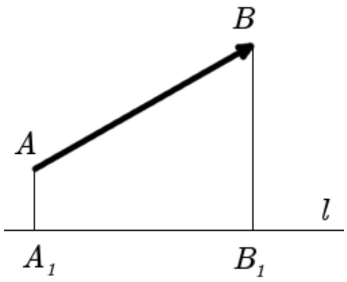
Итак, вещественные числа изображаются точками координатной прямой. Поэтому множество всех вещественных чисел называют ***<u>числовой прямой</u>***, а любое число – ***<u>точкой этой прямой</u>***.

Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ – две произвольные точки числовой прямой, то формула

$$M_1M_2 = x_2 - x_1$$

выражает величину отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, формула $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$ выражает его длину.

Понятие проекции вектора на ось



Проекцией точки A на ось l называется основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось l. Проекцией точки B на ось l называется основание перпендикуляра, опущенного из точки B на ось l. Введем в рассмотрение вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ – это **не** проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l.

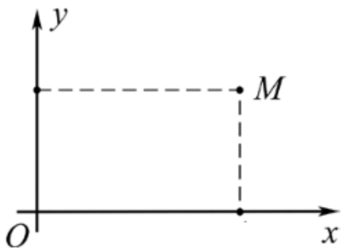
Проекция $\overrightarrow{AB}$ на ось l – это величина направленного отрезка $\overrightarrow{A_1B_1}$.

$np\overrightarrow{AB} = A_1B_1$ – ***это число со знаком.***

Проекция вектора на ось равняется разности координат проекции его конца и начала $x_{b1} - x_{a1}$.

Введение декартовых координат на плоскости

Рассмотрим две взаимно перпендикулярные числовые оси на некоторой плоскости.



предположим, что у этих числовых осей общее начало и общая линейная единица. Причем эти числовые оси упорядочены. Первая ось – ось Ох (абсцисс), вторая – ось Оу (ординат).

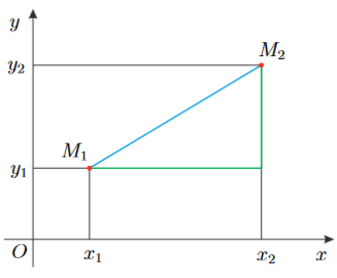
Рассмотрим произвольную точку M на нашей плоскости.

$$M(x_m; y_m)$$

Введем вектор $\overrightarrow{OM}$. Дадим определение координат точки M.

Координата x точки называется проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось Ох.

Координата y точки называется проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось Оу.



Формула расстояния между двумя точками на плоскости

Пусть заданы в декартовой системе координат две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$.

Используя теорему Пифагора, можно доказать, что расстояние между двумя точками на плоскости вычисляется по следующей формуле

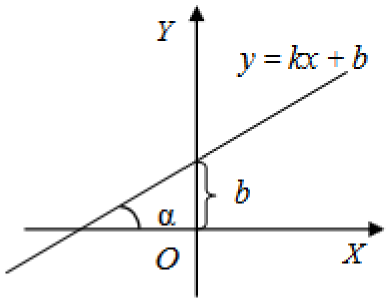
$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Формула для координат середины отрезка: в декартовой системе координат заданы начало и конец отрезка M_1M_2. Пусть точка $C(x_c; y_c)$ – середина M_1M_2, тогда

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Рассмотрим на координатной плоскости некоторую прямую. Угол наклона заданной прямой к оси ОХ понимается угол, на который надо повернуть против часовой стрелки ось ОХ вокруг начала координат, чтобы эта ось стала параллельна данной прямой или совпала с ней.

Уравнение вида $y = kx + b$ называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом.***

$k = tg\alpha$ – угловой коэффициент прямой, b – величина направленного отрезка, отсекаемого данной прямой от оси ординат.

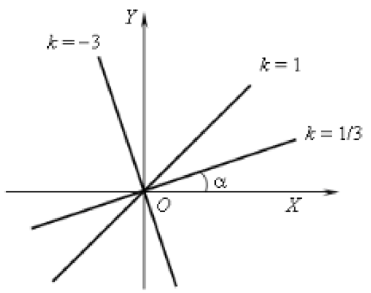
Очевидно, что условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

Заметим, что уравнение с угловым коэффициентом не охватывает случая, когда прямая параллельна оси ординат. В этом случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $tg\alpha$ не существует и уравнение прямой имеет вид $x = x_0$, где $x = x_0$ – абсцисса точки пересечения прямой с осью ОХ.

Уравнение прямой проходящей через заданную точку (уравнение пучка прямых)

За основу возьмем уравнение с угловым коэффициентом $y = kx + b$. Пусть в этом уравнении известен угловой коэффициент k, b – неизвестно, но известно, что прямая проходит через точку $M(x_m; y_m)$. Вместо x *и* y подставим координаты точки $M(x_m; y_m)$, получим $y_m = kx_m + b.$

Вычтем полученное уравнение из уравнения с угловым коэффициентом, получим уравнение ***пучка прямых*** $y - y_m = k(x - x_m).$



Уравнение пучка прямых задает любую прямую на плоскости, кроме прямых, параллельных оси ординат. Поэтому его еще называют уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Уравнение прямой, проходящей через две заданной точки

Пусть прямая проходит через две точки $N_1(x_1; y_1)$, $N_2(x_2; y_2)$. Будем считать эти точки отличными друг от друга.

Уравнение прямой, проходящей через одну точку $N_1(x_1; y_1)$ записывается следующим образом:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Подставим координаты точки $N_2(x_2; y_2)$ в наше уравнение и получим

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow \mathrm{k} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ \mid \ :(y_2 - y_1) \ \Rightarrow$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, при этом $x_1 \neq x_2$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку А (−2; −3) и начало координат.

Решение: уравнение прямой имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

где $x_1 = y_1 = 0;\ x_2 = -2;\ y_2 = -3$. Подставляя значения в уравнения прямой, получим

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0};\quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3};\quad 3x - 2y = 0.$$

Общее уравнение прямой на плоскости

Любую прямую в декартовых координатах можно изобразить уравнением первой степени следующего вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0,\ A, B, C$ – некоторые постоянные .

Этим уравнение можно описать не только наклонные к оси X прямые, но и перпендикулярные к ней.

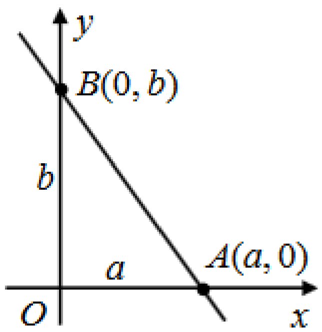
Теорема. В декартовой прямоугольной системе координат любая прямая определяется уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$ и, наоборот, любое уравнение первой степени определяет прямую на плоскости.

Покажем, что прямую x=1 можно описать общим уравнение:

$A = 1, B = 0, C = -1,$

$1x + 0y + (-1) = 0.$

Уравнение прямой в отрезках



Рассмотрим прямую, не проходящую через начало координат и не параллельную координатным осям. Положение такой прямой полностью определяется координатами точек пересечения ее с координатными осями.

Пусть прямая пересекается с координатными осями в точках $A(a;0)$ и $B(0;b)$. Пользуясь уравнением прямой, проходящей через две заданные точки, получим

$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$, или после преобразований $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

Полученное уравнение прямой носит название ***уравнение прямой в отрезках***.

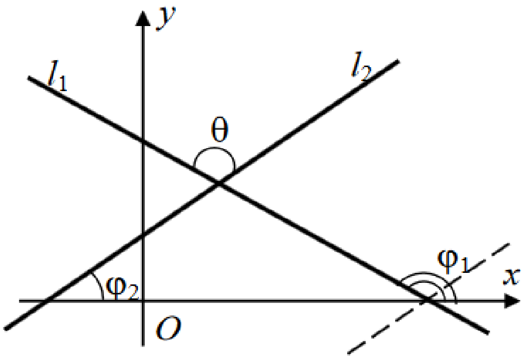
Заметим, что в уравнении «в отрезках» числа a и b имеют простой геометрический смысл: они равны величинам отрезков, которые отсекает прямая на осях Ox и Oy соответственно (отрезки отсчитываются от начала координат).

Заметим еще раз, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках: прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнением в отрезках.

Вычисление угла между прямыми на плоскости

Пусть две прямые заданы своими уравнениями с угловыми коэффициентами: $l_1: y = k_1x + b_1;\ l_2: y = k_2x + b_2.$

Найдем угол θ между этими прямыми.



Очевидно, что $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$, тогда

$$tg\theta = tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{tg\varphi_1 - tg\varphi_2}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2}.$$

Заметим, что $tg\varphi_1 = k_1,\ tg\varphi_2 = k_2$, получим

$$tg\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Обращаем внимание на то, что в полученной формуле находится угол поворота против часовой стрелки от прямой с угловым коэффициентом k_2 до прямой с угловым коэффициентом k_1. Для определения угла между прямой l_1 и прямой l_2 необходимо в числителе дроби взять $k_2 - k_1$.

Условие параллельности $(\theta = 0,\ tg\theta = 0)$ очевидно: $k_1 = k_2$.

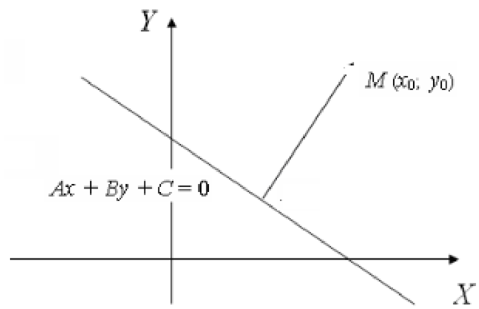
Для получения условия перпендикулярности прямых $\left(\theta = \frac{\pi}{2},\ ctg\theta = 0\right)$ перепишем формулу для угла между прямыми в следующем виде: $ctg\theta = \frac{1 + k_1k_2}{k_1 - k_2}$.

Поэтому ***условие перпендикулярности*** имеет вид $k_1k_2 = 1$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Формула расстояния от точки до прямой

Дана прямая на координатной плоскости $Ax + By + C = 0$ и точка $M(x_0; y_0)$.

Задача: вычислить расстояние от точки M до данной прямой.



Можно доказать, что данное расстояние вычисляется по следующей формуле:

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ЛЕКЦИЯ 6

ВЕКТОРЫ. ЧАСТЬ 2

Свойства линейных операций над векторами

К линейным операциям над векторами относятся следующие:

1) Сложение векторов.
2) Вычитание векторов.
3) Умножение вектора на действительное число.

Свойства линейных операций над векторами

1) Переместительный закон для суммы векторов $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{b}+\vec{a}\right)$.

2) Сочетательный закон для суммы векторов $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

3) Распределительный закон по отношению к скалярному множителю $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

4) Распределительный закон по отношению к векторному множителю $\vec{a}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\vec{a}\vec{\alpha}+\vec{a}\vec{\beta}$.

5) Сочетательный закон по отношению к скалярному множителю $\alpha\cdot\beta\cdot\vec{a}=\left(\alpha\cdot\beta\right)\vec{a}=\alpha\left(\beta\vec{a}\right)$.

Два замечания о векторах
(понятие орт, необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов)

Определение 6.1. ***<u>Ортом</u>*** для данного вектора $\vec{a}$ называется вектор единичной длины и имеющий направление данного вектора.

Лемма 1:

Можем доказать, что новый вектор $\vec{a}$ равняется произведению длины этого вектора на его орт: $\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\vec{a}_0$.

Лемма 2:

Можем доказать, что для коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно существования такого числа λ, что $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

Если данное равенство выполняется, то вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Декартовы координаты в пространстве

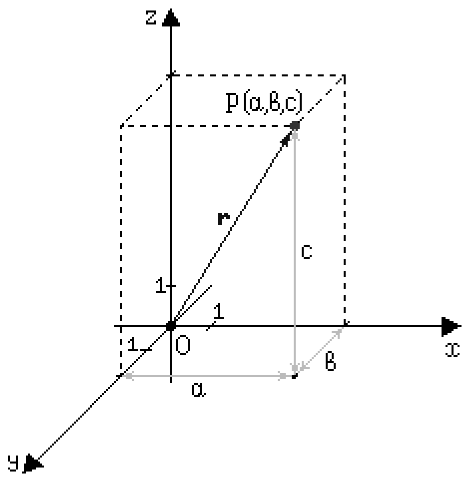
<u>Декартовы координаты в пространстве</u> образуют три взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом, точкой О и общей линейной единицей.

Декартовая система координат в пространстве определяется общим началом и линейной единицей. Оси системы координат упорядочены. Первая ось – ось «иксов» (абсцисс), вторая – ось «игреков» (ординат), третья – ост «зет» (аппликат).

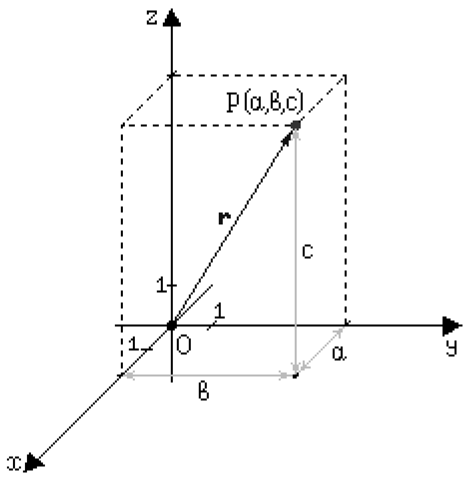
В зависимости от направления координатных осей различают правую и левую прямоугольные системы координат в трехмерном пространстве.

Если смотреть с положительного направления оси Oz и кратчайший поворот от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy происходит против хода часовой стрелки, то система координат называется ***<u>правой</u>***.

Если смотреть с положительного направления оси Oz и кратчайший поворот от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy происходит по ходу часовой стрелки, то система координат называется ***<u>левой</u>***.



Левая система координат



Правая система координат

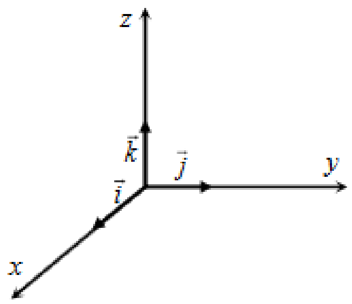
Пусть задана правая система координат и имеется некоторая точка P в пространстве. Обозначим будущие координаты точки $P(a;b;c)$. Введем в рассмотрение вектор $\overrightarrow{OP}$. Координата a – это проекция вектора $\overrightarrow{OP}$ на ось Ox, координата b – это проекция вектора $\overrightarrow{OP}$ на ось Oy, а координата c – это проекция вектора $\overrightarrow{OP}$ на ось Oz.

Разложение вектора в координатном базисе

Предположим, что у нас в пространстве задана правая декартова система координат. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей Ox, Oy, Oz, т.е. это единичные векторы,

$|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1, |\vec{k}| = 1,$ направление каждого из которых совпадает с положительным направлением соответствующей оси: $\vec{i} = \{1,0,0\}$, $\vec{j} = \{0,1,0\}$, $\vec{k} = \{0,0,1\}$.

Эти три вектора образуют базис декартовой системы координат.



Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ в пространстве. Раз есть вектор, то можно определить проекцию этого вектора на оси координат

$$a_x = np_x\vec{a},$$
$$a_y = np_y\vec{a},$$
$$a_z = np_z\vec{a}.$$

Можно доказать, что вектор $\vec{a}$ может быть разложен через вектора координатного базиса следующим образом: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$ Такое разложение вектора единственное (в заданной системе координат). Потому что единственным образом определяются проекции вектора на ось.

$\left(a_x, a_y, a_z\right)$ – с одной стороны, проекции вектора $\vec{a}$, с другой стороны, их называют еще координатами вектора.

Используя пространственную теорему Пифагора, можно получить

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

Пусть имеются два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, разложенных через заданный координатный базис (через вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$): $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$.

Сумма:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) + \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

Используя свойство линейных операций над векторами, можно получить

$$= \left(a_x + b_x\right)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} + \left(a_z + b_z\right)\vec{k}.$$

Чтобы сложить два вектора нужно сложить их соответствующие проекции.

Совершенно аналогично можно показать

Разность:

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) - \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) =$$

$$= \left(a_x + b_x\right)\vec{i} + \left(a_y + b_y\right)\vec{j} + \left(a_z + b_z\right)\vec{k}.$$

Чтобы из $\vec{a}$ вычесть $\vec{b}$ нужно вычесть соответствующие проекции этих векторов.

Умножение вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ

$\lambda\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)=(\lambda a_x)\vec{i}+\left(\lambda a_y\right)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$.

Чтобы умножить вектор на вещественное число λ нужно каждую проекцию этого вектора умножить на вещественное число λ.

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов в координатной форме

Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ записаны через единичные векторы $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Для того чтобы два векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно существование такого числа λ, чтобы выполнялось следующее равенство: $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

$$a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\lambda\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right),$$

$$a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(\lambda b_x)\vec{i}+\left(\lambda b_y\right)\vec{j}+(\lambda b_z)\vec{k}.$$

Учтем, что разложение вектора в заданном координатном базисе единственно, т.е. два вектора равны тогда и только тогда, когда у них равны соответствующие проекции. Из нашего последнего равенства можно получить:

$$a_x=\lambda b_x, \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{a_x}{b_x},$$

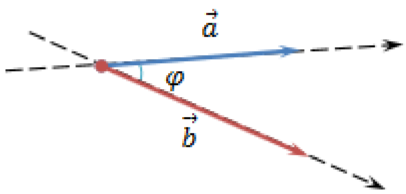
$$a_y=\lambda b_y, \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{a_y}{b_y},$$

$$a_z=\lambda b_z, \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{a_y}{b_y}.$$

Получаем необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов в координатной форме:

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

Скалярное произведение векторов



Определение 6.2. ***<u>Углом</u>*** φ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется тот из углов, образованных этими векторами, отложенными от единого начала, который лежит в пределах от 0 до π.

Если хотя бы один из векторов нулевой, то угол между ними не определён.

Определение 6.3. ***<u>Скалярным произведением</u>*** (СП) двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **число**

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a\cdot b=\begin{cases}|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi, & \text{если } \vec{a}\neq 0,\vec{b}\neq 0,\\ 0, & \text{если } \vec{a}=0 \text{ или } \vec{b}=0,\end{cases}$$

где φ – угол между векторами.

Замечание 1. Из определения скалярного произведения следует, что $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=|\vec{a}|^2$.

Замечание 2. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедлива формула $\varphi=\arccos\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}$.

Замечание 3. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\varphi-$ прямой,

2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)>0\Leftrightarrow\varphi-$ острый или нулевой,

3) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)<0\Leftrightarrow\varphi-$ тупой или развёрнутый.

Определение 6.4. Векторы называются ***<u>ортогональными</u>*** (обозначение $\vec{a}\perp\vec{b}$), если их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и для любого вещественного числа λ.

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$,

2) $\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b}\right)$,

3) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$, $\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$,

4) $\left(\vec{a},\vec{a}\right)>0,$ если $\vec{a}\neq\vec{0}$; $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=0,$ если $\vec{a}=\vec{0}$.

Скалярное произведение в координатной форме

Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены через единичные вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, тогда $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Покажем, что это так. Рассмотрим, чему равняется скалярное произведение орты

$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos 0=1,$

$\vec{j}\cdot\vec{j}=|\vec{j}||\vec{j}|\cos 0=1,$ учитывая, что $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы.

$\vec{k}\cdot\vec{k}=|\vec{k}\cdot||\vec{k}|\cos 0=1,$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos 90^0=0,$ если векторы разные, то их скалярное произведение равно нулю.

Используя свойства скалярного произведения, можно заключить, что два вектора можно умножать как многочлены (при скалярном умножении)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_x\vec{i}\cdot b_x\vec{i}+a_y\vec{j}\cdot b_y\vec{j}+a_z\vec{k}\cdot b_z\vec{k}+....$$

Применяя выводы, сделанные выше, получаем искомую формулу

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\,.$$

Определение 6.5. ***<u>Скалярное произведение</u>*** в координатной форме равно сумме произведений одноименных проекций.

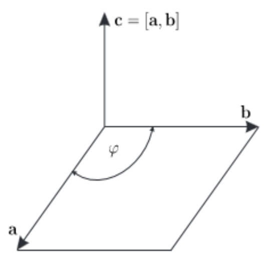
Из определения скалярного произведения выразим $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

В координатной форме эта формула будет записана в следующем виде

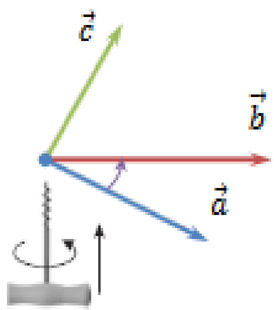
$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

С помощью скалярного произведения можно вычислить углы между векторами, углы треугольника.

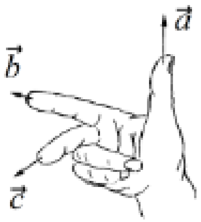
Векторное и смешанное произведения



Определение 6.6. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***<u>правой (левой) тройкой векторов</u>*** в том случае, если, отложив векторы от общего начала и глядя из конца третьего вектора, мы будем наблюдать кратчайший поворот от первого вектора ко второму совершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке).



Определение 6.7. (правило буравчика или правило правого винта). Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***<u>правой тройкой векторов</u>*** в том случае, если, отложив векторы от общего начала и вращая винт в направлении от первого вектора ко второму, острие винта будет двигаться в направлении третьего вектора. В противном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется левой.



Определение 6.8. (правило правой/левой руки). Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется ***<u>правой (левой) тройкой векторов</u>*** в том случае, если векторы, отложенные от общего начала, можно совместить с большим, указательным и средним пальцем правой (левой) руки соответственно.

Эти три определения эквивалентны.

Определение 6.9. Прямоугольная система координат в пространстве называется ***<u>правой (левой)</u>***, если её базис является правой (левой) тройкой векторов.

Определение 6.10. Прямоугольная система координат на плоскости называется ***<u>правой (левой)</u>***, если кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму осуществляется против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Определение 6.11. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. ***<u>Векторным произведением</u>*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$,

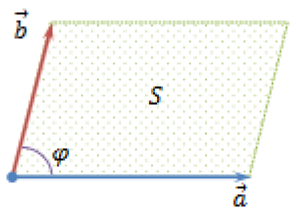
3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка векторов.

Обозначение: $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{a} \times \vec{b}$.

Если же хотя бы один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ нулевой, то $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 0$.

Свойства векторного произведения

1. Необходимое и достаточное условие коллинеарности. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$. (Следует из определения векторного произведения.)



2. Если $\vec{a} \nparallel \mathrm{b}$, то длина векторного произведения $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$ равна площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

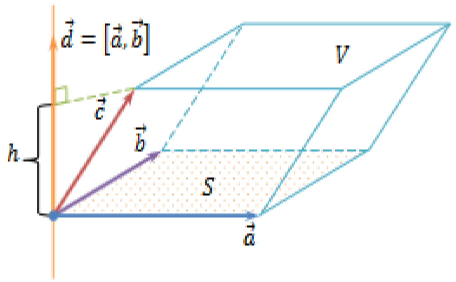
3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$

1) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ (следует из определения векторного произведения),

2) $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$ (следует из определения векторного произведения).

Определение 6.12. ***<u>Смешанным произведением</u>*** $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ (скалярному произведению вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ и вектора $\vec{c}$).

Теорема 6.1. Смешанное произведение $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ равно объёму V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ отложенных от общего начала, взятому со знаком «+», если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая тройка, или со знаком «–», если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – левая тройка. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ = 0:



Свойства смешанного произведения

1. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняется $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)$.

2. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняется $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$.

3. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю их смешанного произведения (это следует из теоремы 6.1.).

Формулы для вычисления векторного произведения в координатном виде

Пусть $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$, $b=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}$. Тогда

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

$$\text{т.е. } \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

Формулы для вычисления смешанного произведения в координатном виде

Пусть $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$, $b=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}$, $c=\left\{c_x,c_y,c_z\right\}$. Тогда

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

ЛЕКЦИЯ 7

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЭЛЛИПС. ГИПЕРБОЛА. ПАРАБОЛА

Определение кривой второго порядка

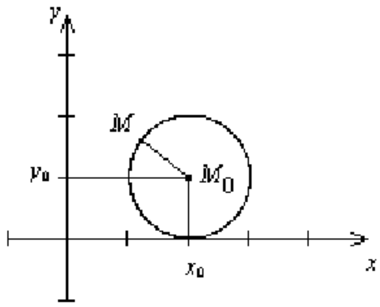
Определение 7.1. ***<u>Кривой второго порядка</u>*** называется линия, которая в декартовой системе координат описывается уравнением вида (1), где A, B, C, D, E, F – постоянные.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \text{ , (7.1)}$$

причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Самая простая кривая второго порядка – это <u>окружность</u>.

Составим уравнение окружности, зададим в системе декартовых координат следующие характеристики: пусть центром окружности будет точка с координатами $M_0(x_0; y_0)$, а радиус окружности – некоторое число R. Пусть точка $M(x, y)$ – произвольная точка окружности.



Выразим MM_0 :

$$|MM_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2} = R$$

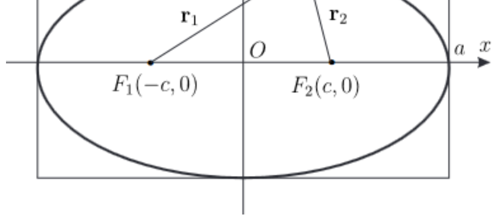
Получим уравнение окружности:

$$(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2.$$

Определение 7.2. ***<u>Окружностью</u>*** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой фиксированной точки плоскости, называемой ее центром.

Каноническое уравнение эллипса

Определение 7.3. ***<u>Эллипсом</u>*** называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), большая чем расстояние между фокусами.



Определение 7.4. ***<u>Канонической системой координат</u>*** Oxy называется такая прямоугольна декартова система координат, что ось абсцисс Ox проходит через фокусы F_1 и F_2 эллипса, а ось ординат Oy делит отрезок F_1F_2 пополам.

В канонической системе координат Оху фокусы F_1 и F_2 эллипса имеют следующие координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Пусть точка $M(x,y)$ – это точка эллипса. Согласно определению эллипса, имеем

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=2a>0, \ (7.2)$$

где

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}, \ \left|\overrightarrow{F_2M}\right|=\sqrt{\left(x-c\right)^2+y^2}.$$

После избавления от радикалов мы получим такое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1, \ (7.3)$$

причем $a>c$. Введем обозначение $b=\sqrt{a^2-c^2}$, тогда уравнение (7.3) примет окончательный вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ a>b>0. \ 7.4)$$

Уравнение (7.4) называется **каноническим уравнением эллипса.**

Нам нужно теперь доказать, что все точки $M(x,y)$, удовлетворяющие уравнению (7.4), удовлетворяют уравнению (7.2). Введем эксцентриситет

$$\varepsilon=\frac{c}{a}<1. \ (7.5)$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\sqrt{\left(x+c\right)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2xc+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2}.$$

$$b^2=a^2-c^2\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=\varepsilon^2.$$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2}=\sqrt{\varepsilon^2x^2+2\varepsilon ax+a^2}=\left|\varepsilon x+a\right|=\varepsilon x+a>0, \quad (7.6)$$

поскольку $|x|\le a$ и $0<\varepsilon<1$. Аналогичным образом получаем равенство

$$\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=a-\varepsilon x>0. \quad (7.7)$$

Поэтому

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=\varepsilon x+a+a-\varepsilon x=2a.$$

Форма эллипса. Заметим, что из уравнения (7.4) вытекает

$$|x|\le a, \ |y|\le b.$$

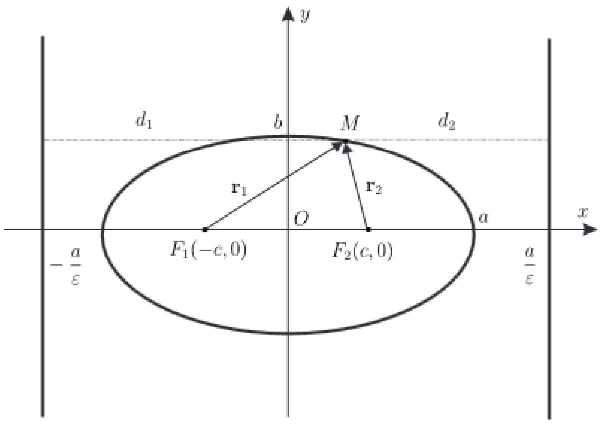
Следовательно, эллипс расположен в этом прямоугольнике.

Директориальное свойство эллипса. Из уравнений (7.6) и (7.7) вытекают равенства:

$$|r_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = a + x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} + x\right) = \varepsilon d_1 \Rightarrow \frac{|r_1|}{d_1} = \varepsilon,$$

$$|r_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = a - x\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right) = \varepsilon d_2 \Rightarrow \frac{|r_2|}{d_2} = \varepsilon.$$

Очевидно, что d_1 – это расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $x = -a/\varepsilon$, а d_2 – это расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $x = a/\varepsilon$.



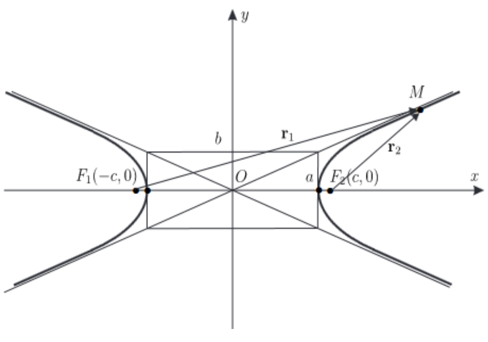
Определение 7.5. Прямые, в канонической системе координат имеющие уравнения $x = \pm a/\varepsilon$, называются ***<u>директрисами</u>***.

Теорема 1. Отношение расстояния $|r_j|$ от фокуса F_1 до точки $M(x, y)$ эллипса к расстоянию d_j от этой точки до соответствующей директрисы при $j = 1, 2$ есть величина постоянная, равная ε.

Каноническое уравнение гиперболы

Определение 7.6. <u>Гиперболой</u> называется геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний каждой из которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная ($2a$), меньшая чем расстояние между фокусами.

Определение 7.7. <u>Канонической системой декартовых прямоугольных координат</u> Оху называется такая система координат, в которой ось абсцисс Ох проходит через оба фокуса, а ось ординат Оу проходит через середину отрезка F_1F_2.



Согласно определению 7.7., координаты фокусов имеют вид $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Тогда расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ гиперболы до фокусов имеют следующий вид: $|r_1| = \left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|r_2| = \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Тогда, согласно определению 7.6., имеем

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a > 0,\ a < c. \quad (7.8)$$

Уничтожив радикалы, мы получим такое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1. \quad (7.9)$$

Введем обозначение $b^2=c^2-a^2$ и получим искомое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \quad (7.10)$$

Уравнение (7.10) называется **каноническим уравнением гиперболы.**

Обратно покажем, что из канонического уравнения (7.10) вытекает уравнение (7.8).

Введем эксцентриситет

$$\varepsilon=\frac{c}{a}>1.$$

$$\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{c^2}{a^2}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}+1=\varepsilon^2.$$

$$|r_1|^2=\left|\overrightarrow{F_1M}\right|^2=(x+c)^2+y^2=x^2+2xc+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2=\varepsilon^2x^2+2a\varepsilon x+a^2=|\varepsilon x+a|^2. \quad (7.11)$$

Аналогичным образом для фокуса $F_2(c,0)$ получаем равенство

$$|r_2|^2=\left|\overrightarrow{F_2M}\right|^2=|\varepsilon x-a|^2. \quad (7.12)$$

Заметим, что $|\varepsilon x|>|x|\geq a$, и поэтому из формул (7.11) и (7.12) вытекают равенства

$$|r_1|=\begin{cases}x\varepsilon+a, & \text{если } x>0;\\ -x\varepsilon-a, & \text{если } x<0,\end{cases} \quad |r_2|=\begin{cases}x\varepsilon-a, & \text{если } x>0;\\ -x\varepsilon+a, & \text{если } x<0.\end{cases} \quad (7.13)$$

Следовательно, во всех случаях

$$\big||r_1|-|r_2|\big|=2a.$$

Анализ формы гиперболы. Из уравнения гиперболы (7.10) вытекает равенство

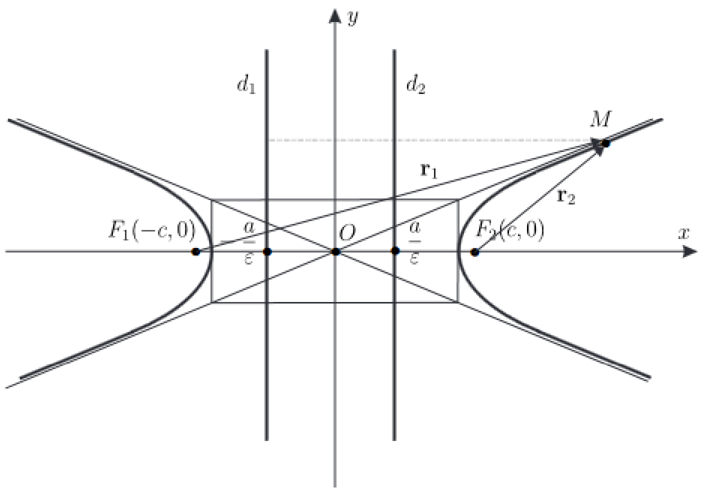
$$|x|\geq a \text{ и } |y|=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=b\frac{|x|}{a}\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}<\frac{b}{a}|x|.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$-\frac{b}{a}x<y<\frac{b}{a}x, \quad |x|\geq a,$$

т.е. обе ветви гиперболы лежат внутри области, заключенной между двумя прямыми

$$y=-\frac{b}{a}x, \; y=\frac{b}{a}x, \text{ при } |x|\geq a. \quad (7.14)$$



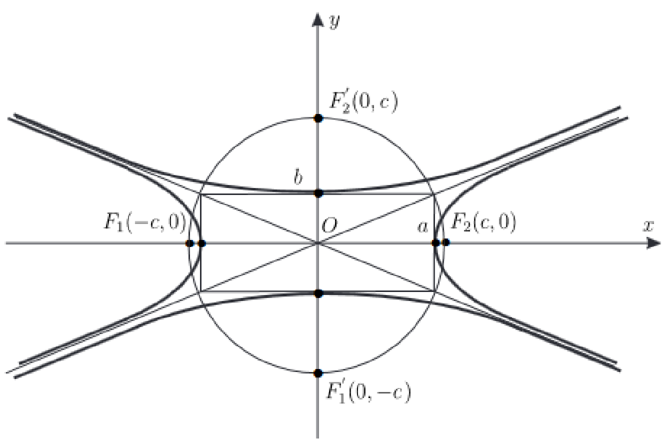
Эти прямые ***являются асимптотами гиперболы.***

Определение 7.8. Прямые, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon},$$

называются <u>асимптотами гиперболы</u>.

Теорема 2. Отношение расстояния $\left|r_j\right|$ от фокуса F_1 до точки $M(x, y)$ гиперболы к расстоянию d_j от этой точки до соответствующей директрисы при $j = 1, 2$ есть величина постоянная, равная ε.



Определение 7.9. Две гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \;\; c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

называются ***<u>взаимно сопряженными</u>.***

Каноническое уравнение параболы

Определение 7.10. <u>Параболой</u> называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой и не проходящей через фокус.

Определение 7.11. <u>Канонической декартовой прямоугольной системой координат</u> Oxy называется такая система координат, что ось абсцисс Ox проходит через фокус F и перпендикулярна директрисе, а ось ординат проходит через середину перпендикуляра, опущенного на директрису из фокуса F.

Из определения 7.11. вытекает, что в канонической системе координат

$F\left(p/2, 0\right)$ – фокус,

$x = -\dfrac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы. Тогда

$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

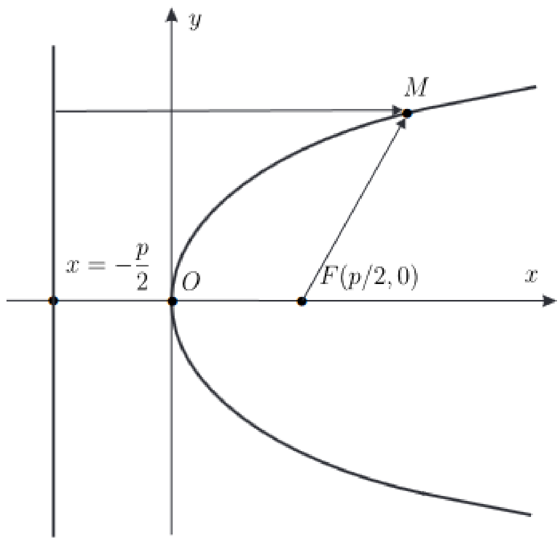
Согласно определению параболы 7.10, её уравнение имеет следующий вид:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

из которого вытекает уравнение.

Это каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px.$$



ЛЕКЦИЯ 8

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. МНОЖЕСТВА

Введение в математический анализ

Математический анализ – раздел математики, который в отличие от других математических дисциплин, таких как алгебра, геометрия, дискретная математика и т.п., связан с понятием бесконечности. В современной теории анализа понятие бесконечности рассматривается сквозь призму четырех основополагающих понятий: предел, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость. В данном методическом пособии мы рассмотрим такие понятия, как предел, непрерывность и производная функции одной переменной.

Используемые обозначения и символы

В дальнейшем изложении курса математического анализа мы будем использовать язык теории множеств и формальной логики. ***Множество*** является одним из неопределяемых понятий математики. Под множеством понимают совокупность некоторых объектов, объединенных общим признаком, свойством. Например, множество натуральных чисел, множество действительных чисел, множество функций, непрерывных на отрезке, множество многочленов с действительными коэффициентами степени, не превышающей n. Объекты, составляющие множество, называются его ***элементами***.

Как правило, для обозначения множеств используют прописные буквы латинского алфавита: $A, B, C, ..., X, Y, Z$, а для обозначения их элементов − строчные буквы латинского алфавита $a, b, c, ..., x, y, z$. То, что элемент a принадлежит множеству A, обозначается как $a \in A$. Запись $a \notin A$ говорит о том, что элемент a не принадлежит множеству A. ***Пустое множество*** (множество, не содержащее ни одного элемента) принято обозначать символом ∅.

В математике повсеместно используются символы для упрощения и сокращения текста. Приведём наиболее часто встречающиеся математические обозначения и примеры их использования.

Логические операции

$\Rightarrow$ − следование (импликация). $A \Rightarrow B$ означает «если верно A, то B также верно», или «из утверждения A следует утверждение B». Например, ($x = 2$) $\Rightarrow$ ($x^3 = 8$). Скобки, содержащие утверждения, в простейших случаях, таких как этот, можно опустить.

$\Leftrightarrow$ − равносильность. $A \Leftrightarrow B$ означает «A верно тогда и только тогда, когда B верно». Например, $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

$\wedge$ − логическое «и» (конъюнкция). Значение операции: $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда A и B оба истинны. Например, $(x > -2) \wedge (x < 2) \Leftrightarrow x^2 < 4$.

$\vee$ − логическое «или» (дизъюнкция). Значение операции: $A \vee B$ истинно, когда хотя бы одно из условий A и B истинно. Например, $(x = 2) \vee (x = -2) \Leftrightarrow x^2 = 4$.

Кванторы

$\exists$ − квантор существования (перевернутая первая буква англ. «Exists» − существует). Запись $\exists\, x \in X$ означает: «существует (найдется) хотя бы один элемент x из множества X».

$\forall$ − квантор всеобщности (перевернутая первая буква англ. «All» − все). Запись $\forall\, x \in X$ означает: «для всех (любых) элементов x из множества X».

Если некоторое утверждение записано с помощью кванторов, то для записи отрицания этого утверждения необходимо все кванторы и последнее высказывание заменить на противоположные.

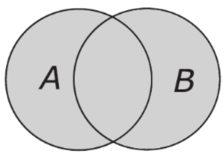
Некоторые операции над множествами

$A \subset B$ − множество A является подмножеством B. Это означает, что каждый элемент из A также является элементом из B, т. е. $A \subset B \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$.

$A \not\subset B$ − множество A не является подмножеством B. Значит, существует элемент множества A, не принадлежащий множеству B, т. е. $A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists\, a,\ (a \in A) \wedge (a \notin B))$.

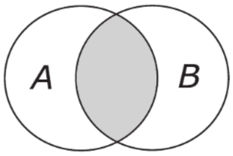
$A = B$ − равенство множеств. $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

$A \cup B$ − ***объединение множеств*** A и B. Элементы этого множества принадлежат или множеству A, или множеству B: $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$. Множество удобно изображать в виде кругов на плоскости. Такой подход нагляден и позволяет легко устанавливать многие свойства операций объединения, пересечения и т.д. Например, операция объединения наглядно выглядит следующим образом:



Пример 1. Если A={1,3,5} и B={2,4,6}, то $A \cup B$={1,2,3,4,5,6}.

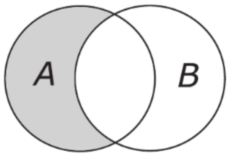
$A \cap B$ − ***пересечение множеств*** A и B. Элементы этого множества одновременно принадлежат и множеству A, и множеству B: $A \cap B = \{x: (x \in A) \wedge (x \in B)\}$. Наглядно операция пересечения выглядит так:



.

Пример 2. Если A={1,3,5} и B={2,3,4}, то $A \cap B$={3}.

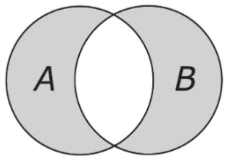
$A \setminus B$ − ***разность множеств*** A и B. Элементы этого множества принадлежат только множеству A и не принадлежат множеству B, т.е. $A \setminus B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$. Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называют дополнением множества B до множества A. Операцию вычитания множеств с помощью кругов на плоскости можно изобразить так:



.

Пример 3. Если A={1,3,5} и B={2,3,4}, то $A \setminus B$={1,5}.

$A \Delta B$ – это ***симметрическая разность*** двух множеств A и B. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Соответствующая диаграмма выглядит следующим образом:



.

Свойства операций над множествами

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
4. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;
5. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;
6. Законы де Моргана: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Приведем примеры числовых множеств:

$\mathbb{N}$={1,2,3,…n,…} – множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$={…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…} – множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$={$\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$} – множество рациональных чисел;

I – множество иррациональных чисел (чисел, не являющихся рациональными);

$\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ – множество действительных чисел.

Пример 4. На плоскости Oxy построить множества A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, если $A = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$, $B = \{(x, y) : 1 < |x| < 2\}$.

Решение. На рис. 1–3 представлены множества A, B и их пересечение $A \cap B$; на рис. 4–6 представлены объединение $A \cup B$ и разности $A \setminus B$, $B \setminus A$, а на рис. 7 – симметрическая разность $A \Delta B$:

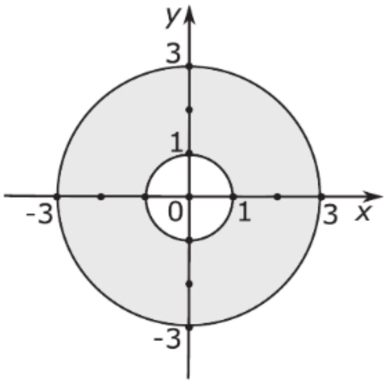


Рис. 1

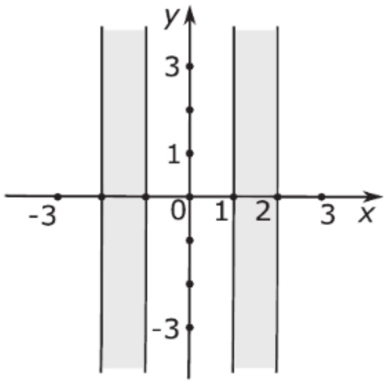


Рис. 2

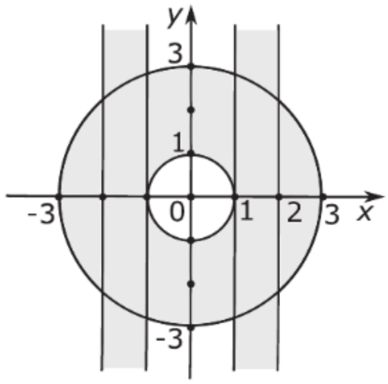


Рис. 3

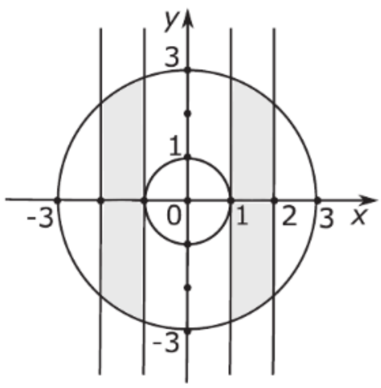


Рис. 4

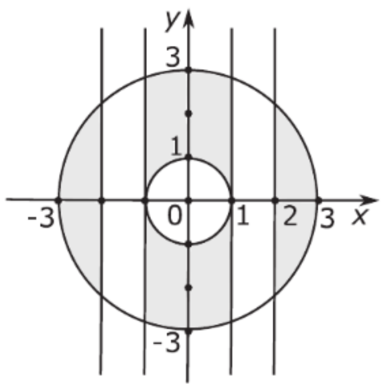


Рис. 5

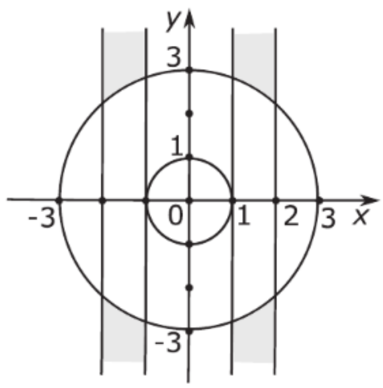


Рис. 6

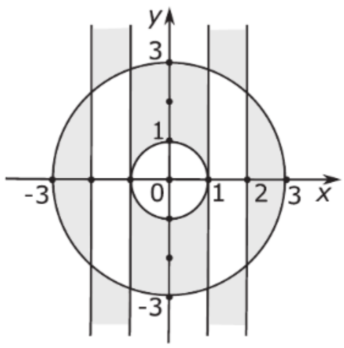


Рис. 7

Вопросы к размышлению

1) Закончите рассказ.

Когда Ахиллес догнал Черепаху и удобно расположился на ее спине, она ему сказала:

– Итак, вы все-таки догнали меня, несмотря на то что это невозможно?

– Как это невозможно? Ведь я вас догнал!

– Но вы не могли догнать меня, поскольку это невозможно…

Пока Ахиллес обдумывал услышанное, Черепаха продолжала:

– Конечно, если вы не в ладах с логикой, я могу представить свое рассуждение в более отчетливой форме. Рассмотрим два утверждения: первое – Ахиллес не догонит Черепаху, второе – оба этих утверждения ложны.

Судите сами: второе утверждение не может быть истинным, поскольку тогда ложным было бы само второе утверждение, и оно было бы одновременно и истинным, и ложным. Значит, второе утверждение ложно. Поэтому неверно, что оба утверждения ложны, следовательно, первое утверждение истинно. Значит, Ахиллес не догонит Черепаху.

Ахиллес подумал и сказал: «…»

2) На плоскости Оху построить множества A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$, где

а) $A=\{(x,y): x^2+4y^2\le 4\}$, $B=\{(x,y): x^2+y>1\}$;

б) $A=\{(x,y): |x|+|y|\le 2\}$, $B=\{(x,y): y\ge |x-1|\}$;

в) $A=\{(x,y): |x-y|\le 1\}$, $B=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$;

г) $A=\{(x,y): |2x+3|\le 4\}$, $B=\{(x,y): 1\le |y|\le 2\}$.

Некоторые ответы с решениями

1. «Рассмотрим два утверждения», – сказал Ахиллес.
2. Ахиллес догонит Черепаху.
3. Оба эти утверждения ложны.

Тогда с тем же успехом из их рассмотрения следует, что Ахиллес догонит Черепаху. «И, кроме того, я ведь действительно догнал Вас!»

ЛЕКЦИЯ 9

ФУНКЦИИ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Функция

Для математического описания многих явлений природы потребовалось ввести понятие ***переменной величины***. Например, движение материальной точки можно охарактеризовать двумя переменными величинами: временем t и длиной пути S, пройденного точкой за время t. Величины t и S между собой взаимосвязаны. Каждому значению переменной t ставится в соответствие единственное значение переменной S. Принято говорить, что переменная S является функцией переменной величины t. Кратко записывают: $S = f(t)$. В математике не учитывают конкретное содержание переменных величин и изучают функции в общем виде: $y = f(x)$. Величину x называют ***независимой переменной*** или ***аргументом***, а величину y – ***зависимой переменной*** или ***функцией*** от x. Для каждой теоретической и прикладной науки характерны свои классы функций. Например, при изучении процессов в экономике появляется целый ряд функций: производственная функция, функция потребления, функция полезности и многие другие. В теории вероятностей наиболее важными являются функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей. В математическом анализе изучают функции с общей точки зрения, не связывая их с конкретным содержанием. Поэтому выводы, получаемые в математике, применимы во всех областях, где возникает необходимость в использовании понятия функции.

Определение 9.1. ***<u>Функция</u>*** – это соответствие между двумя множествами (областью определений и областью значений), при котором каждому x из области определений соответствует единственный $y = f(x)$ из области значений.

Определение 9.2. ***<u>Область определения функции</u>*** – это множество, обычно обозначаемое через X (или $D(f)$), в котором происходит изменение величины x (аргумента функции); это подмножество принято располагать на оси Ox, оси абсцисс. А ***<u>область значений</u>*** – это множество Y (или $E(f)$), в котором изменяется величина $y = f(x)$ (функция). Данное подмножество принято располагать на оси Oy, оси ординат.

Если функция f задает взаимно однозначное соответствие, то для f имеется так называемая ***<u>обратная</u>*** функция; чтобы ее найти, нужно составить уравнение $y = f(x)$ и выразить из него x как функцию y. Получится уравнение вида $x = g(y)$. Как правило, функция, обратная к f, обозначается через f^{-1}. Если у обратной функции независимую переменную обозначать, как обычно, через x, то получим, что графики ***<u>взаимно обратных</u>*** функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ в случае $f : X \subset R \to Y \subset R$ симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов $y = x$.

Определение 9.3. Функция f называется ***<u>монотонно возрастающей</u>*** или ***<u>неубывающей</u>*** на множестве X, если для любых двух точек x_1 и x_2 из X, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, и называется ***<u>строго монотонно возрастающей</u>***, если из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично определяются ***<u>монотонно убывающие</u>*** и ***<u>строго монотонно убывающие</u>*** функции. Например, функция $y = x^2$ на участке $(-\infty,0)$ строго монотонно убывает, а на участке $(0,+\infty)$ строго монотонно возрастает.

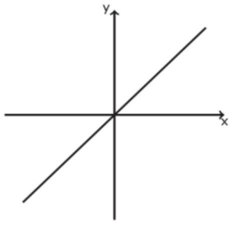
Определение 9.4. Функция f называется ***<u>ограниченной</u>***, если множество её значений $Y = \{f(x), x \in X\}$ ограничено. Например, функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ ограничены на множестве своих значений [-1,1].

Определение 9.5. Функция f называется ***<u>чётной</u>***, если область её определения X симметрична относительно точки $x = 0$ и для всех $x \in X$ выполняется соотношение $f(-x) = f(x)$, и называется ***<u>нечётной</u>***, если $f(-x) = -f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси OY, а нечётной – относительно начала координат. Например, функция $f(x) = \sin x$ нечётна, а функция $f(x) = \cos x$ чётна.

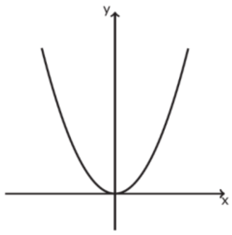
Определение 9.6. Функция f называется ***<u>периодической</u>***, если существует число $T > 0$ такое, что $\forall x \in X$ выполняется $x + T \in X$ и $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее положительное T, удовлетворяющее этому условию, называется ***<u>наименьшим периодом функции</u>*** (или просто ***<u>периодом</u>***).

Элементарные функции

1. ***Степенная функция***: $y = x^n$, n – любое действительное число. В общем случае её область определения $X = (0,+\infty)$. При некоторых значениях n область определения может быть шире, например при $n \in N$ функция $y = x^n$ определена на всей числовой оси.



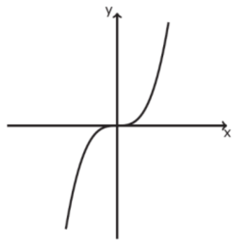
$y = x$



$y = x^n$,

n – четное

натуральное число

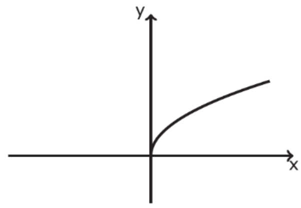


$y = x^n$,

n – нечетное

натуральное число,

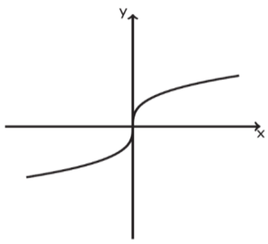
n>1



$y = \sqrt[n]{x}$,

n – четное

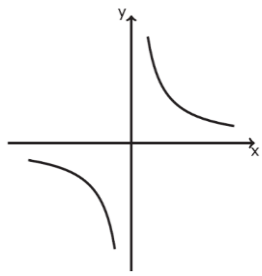
натуральное число



$y = \sqrt[n]{x}$,

n – нечетное натуральное

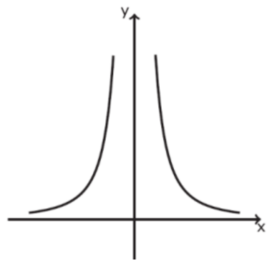
число, n>1



$y = \dfrac{1}{x^n}$,

n – нечетное натуральное

число

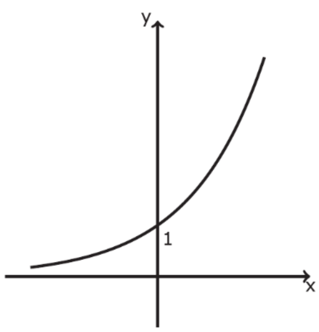


$y = \dfrac{1}{x^n}$,

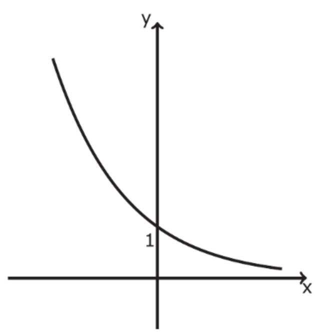
n – четное натуральное

число

2. ***Показательная функция***: $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Её область определения – вся числовая ось. При $a > 1$ показательная функция строго монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ строго монотонно убывает. В частном случае, при $a = e$ показательная функция $y = e^x$ называется *экспонентой* и иногда обозначается $y = \exp x$.

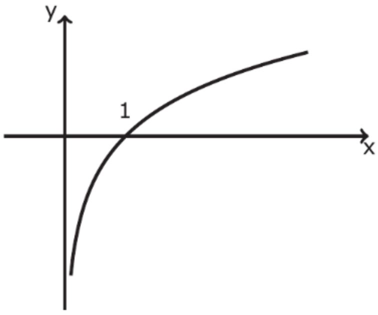


$y = a^x$, *a>1*

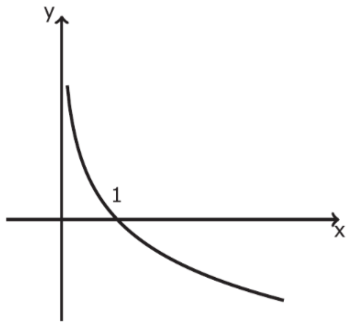


$y = a^x$, *0<a<1*

3. ***Логарифмическая функция***: $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения $X = (0, +\infty)$, область значений − вся числовая ось. При $a = e$ имеем натуральный логарифм $y = \ln x$.

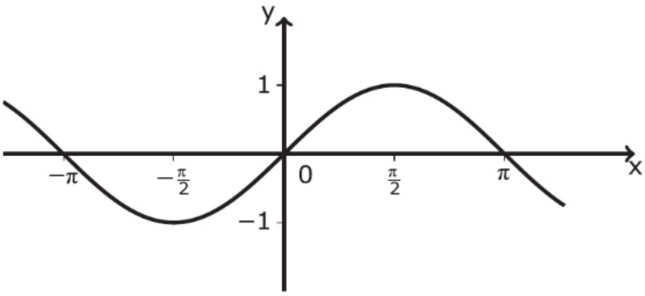


$y = \log_a x$, *a>1*

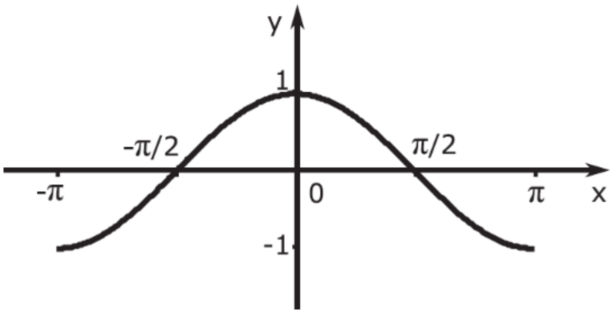


$y = \log_a x$, *0<a<1*

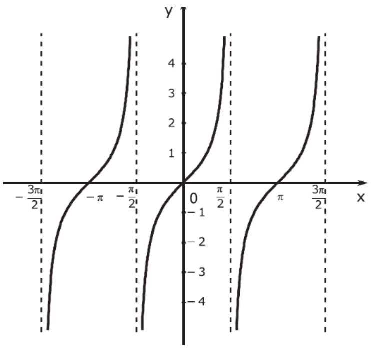
4. ***Тригонометрические функции***: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ определены на всей числовой оси, область их значений есть отрезок $[-1,1]$. Функция $y = tgx$ определена при $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, а $y = ctgx$ при $x \neq k\pi$, где k − любое целое.



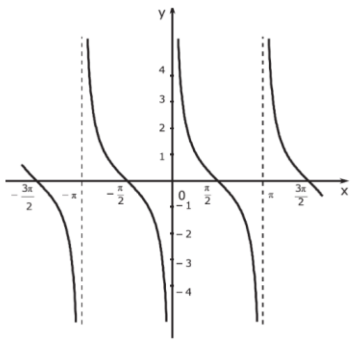
$y = \sin x$



$y = \cos x$



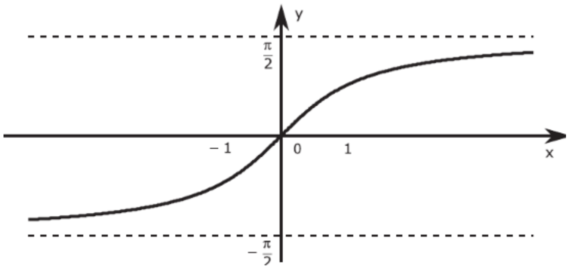
$y = tgx$



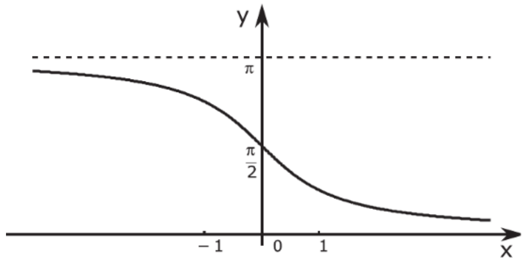
$y = ctgx$

5. ***Обратные тригонометрические функции***: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arcctgx$, $y = arctgx$. Областью определения функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ является отрезок

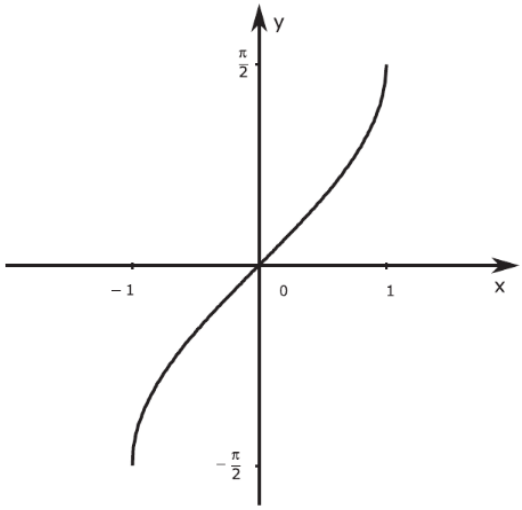
$[-1,1]$, областью значений $y = \arcsin x$ является отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а областью значений $y = \arccos x$ является отрезок $[0, \pi]$. Функции $y = arctgx$ и $y = arcctgx$ определены на всей числовой оси. Областью значений первой является промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а второй – $(0, \pi)$.



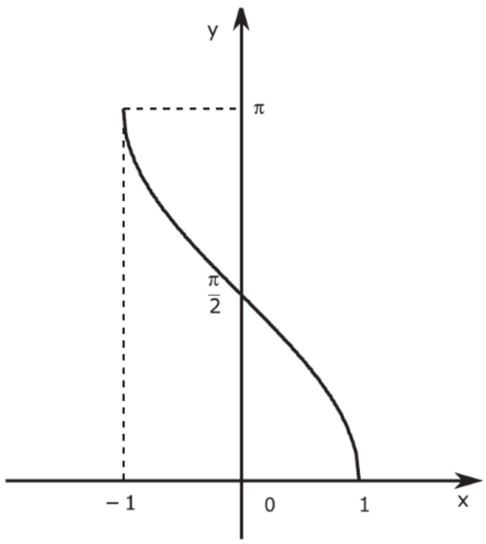
$y = arctgx$



$y = arcctgx$

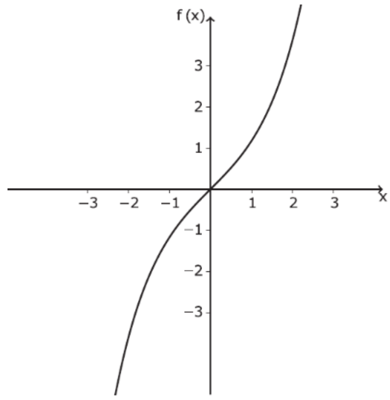


$y = \arcsin x$

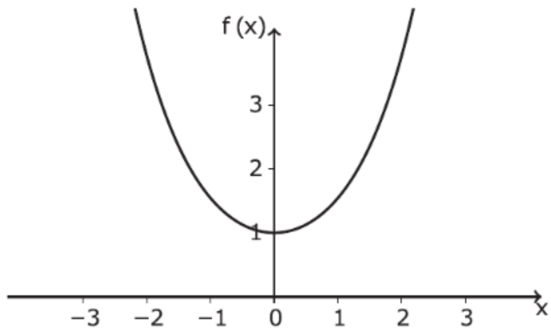


$y = \arccos x$

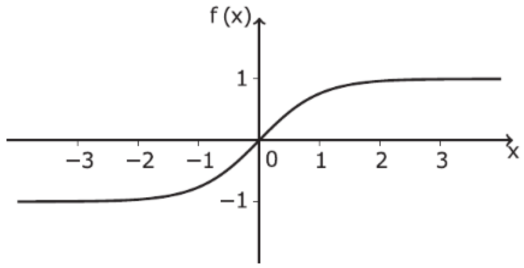
6. ***Гиперболические функции:*** $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус. Применяются также гиперболический тангенс $thx = \frac{shx}{chx}$ и гиперболический котангенс $cthx = \frac{chx}{shx}$.



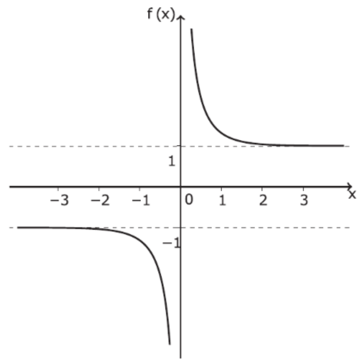
$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$thx = \frac{shx}{chx}$$



$$cthx = \frac{chx}{shx}$$

Из этих основных функций составляются следующие классы:

а) ***многочлены****:* $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$;

Пример 1. $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$.

б) ***рациональные функции****:* $y = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ – это отношение двух многочленов;

Пример 2. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

в) ***алгебраические функции****:* функции, не являющиеся рациональными, но полученные путем алгебраических действий над x;

Пример 3. $y = \dfrac{3\sqrt{x} - 2}{2x^3} - 5\sqrt[3]{x}$.

г) ***трансцендентные функции****:* функции, не являющиеся алгебраическими.

Пример 4. $y = \sin 2x - 3\ln(1 + x)$.

Если дана функция $y = f(x)$, где x мыслится не как независимая переменная, а как функция некоторой переменной t, то есть $x = g(t)$, то можно составить выражение вида $y = f(g(t))$, которое принято называть ***сложной*** функцией или ***суперпозицией*** функций

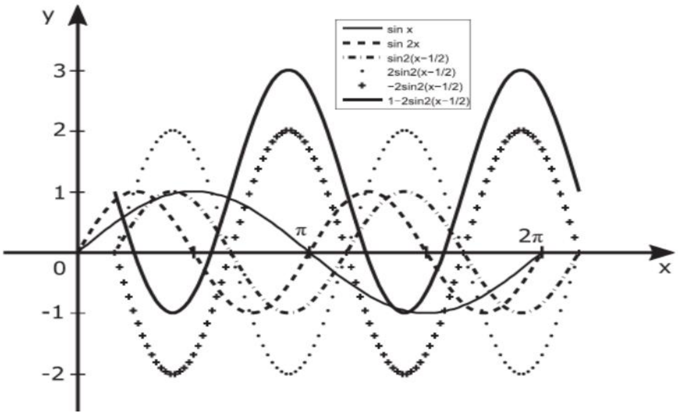
f и g. В анализе это понятие используется прежде всего для ***замены переменной*** в самых разных операциях. Иногда встречаются выражения, состоящие не из двух, а из большего количества вложенных функций.

При построении графика функции необходимо использовать свойства функции, избегая построения по точкам.

Пример 5. Построить график функции $y = 2\sin(1-2x)+1$.

Решение. Для построения функции необходимо построить шесть графиков функций.

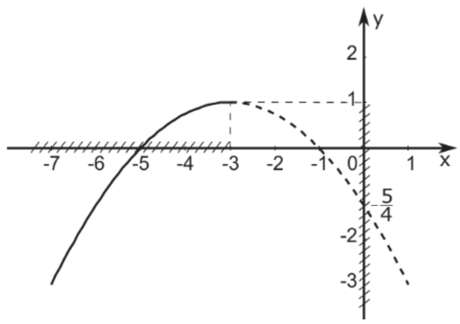
1) $y = \sin x$;
2) $y = \sin 2x$;
3) $y = \sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$;
4) $y = 2\sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$;
5) $y = -2\sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$;
6) $y = 1 - 2\sin 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$,



Пример 6. Построить график функции $x = -3 - 2\sqrt{1-y}$.

Решение

Здесь $x-$ это функция от y, $x = \phi(y)$. Область определения функции задается неравенством $1 - y \geq 0$, т.е. $y \in (-\infty;1]$. Область значения данной функции $x \in (-\infty;-3]$. Для построения графика преобразуем функцию к следующему виду: $(x+3)^2 = 4(1-y)$. Получили уравнение параболы – носителя графика функции. Вершина параболы находится в точке (-3,1), ось симметрии $x = -3$, ветви направлены вниз, точки пересечения с осями координат $(-5,0)$, $(-1,0)$, $\left(0,-\frac{5}{4}\right)$. Выполняем построение графика с учетом областей определения и значения функции:



Вопросы к размышлению

1) Выполнить построение графиков функций:

а) $y = 3\sin(2-x)+2$;

б) $y = -2 - 5\sqrt{1-x}$.

ЛЕКЦИЯ 10

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

Числовые последовательности

Определение 10.1. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие по определенному правилу число $x \in X$, то говорят, что задана ***<u>числовая последовательность</u>*** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Число x_n называют ***членом*** числовой последовательности.

Примеры последовательностей:

$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1,1,-1,1,-1,1,...\}$;

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...\right\}.$$

Определение 10.2. ***<u>Суммой</u>*** числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется числовая последовательность $\{z_n\}$, такая, что $\forall n \in \mathrm{N} : z_n = x_n + y_n$.

Определение 10.3. ***<u>Разностью</u>*** числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется числовая последовательность $\{z_n\}$, такая, что $\forall n \in \mathrm{N} : z_n = x_n - y_n$.

Определение 10.4. ***<u>Произведением</u>*** числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется числовая последовательность $\{z_n\}$, такая, что $\forall n \in \mathrm{N} : z_n = x_n \cdot y_n$.

Определение 10.5. ***<u>Частным</u>*** числовой последовательности $\{x_n\}$ и числовой последовательности $\{y_n\}$, все элементы которой отличны от нуля, называется числовая последовательность $\{z_n\}$, такая, что $\forall n \in \mathrm{N} : z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Графический способ изображения применим также и к последовательностям. При этом они изображаются точками, либо числовой прямой (рис. 1), либо координатной плоскости (рис. 2). Во втором случае хорошо видна аналогия с обычными функциями.

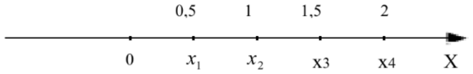


Рис. 1

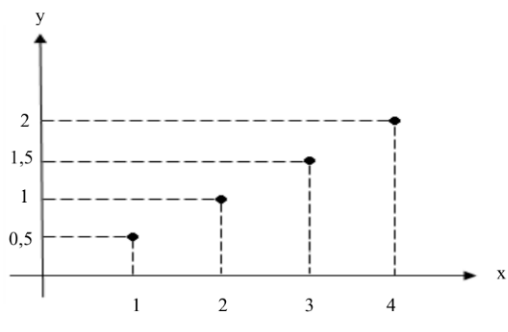


Рис. 2

По своим свойствам последовательности могут сильно отличаться друг от друга. Начнем наше изучение последовательностей с тем, множество значений которых является ограниченным.

Ограниченные последовательности. Предел последовательности

Определение 10.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число M, что выполняется $|x_n| \le M$ для всех членов числовой последовательности. Последовательность может быть ***ограниченной сверху*** и ***ограниченной снизу***.

Например, приведенные выше последовательности являются ограниченными.

Понятие ограниченности поднимает вопрос о существовании у последовательности наибольшего или наименьшего элемента. Например, у последовательности $\{x_n\} = n$ есть наименьший элемент 1, а у последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ такого элемента нет (хотя есть наибольший элемент, тоже 1). Рассматривая элементы ограниченных последовательностей, можно заметить, что они определенным образом «собираются вблизи» одной или нескольких точек. Для последовательности $\{(-1)^n\}$ это будут точки 1 и –1, для $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – по-видимому, 0. Чтобы находить такие точки, необходимо располагать критерием, который позволял бы по виду последовательности определять, можно ли ее члены считать последовательными приближениями некоторой величины? Разобраться в этом вопросе нам поможет понятие *предела* последовательности.

Определение 10.7. Последовательность $\{x_n\}$ стремится к определенному ***пределу*** a, если для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε принимаемые ею значения приближаются к a таким образом, что выполняется условие $|x_n - a| < \varepsilon$, для всех номеров $n > N(\varepsilon)$.

Если число a является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, то пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Кратко данное определение можно записать на языке ($\varepsilon - \delta$) следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n, \forall n > N(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon .$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, а не имеющая – ***расходящейся***.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, если $x_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Решение. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в нашем случае должно принять вид $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, отсюда $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. То есть, начиная с некоторого номера, наше неравенство справедливо. Например, если взять $\varepsilon = 0{,}1$, то при $n > 9$ (к примеру, $n=10$) неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ выполняется. Если же выбрать $\varepsilon = 0{,}01$, то, начиная с номера n=100, данное неравенство также выполняется. Для любого сколь угодно малого ε мы может найти номер, начиная с которого это неравенство будет выполняться. Значит, мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Определение 10.8. Числовая последовательность называется ***<u>монотонно возрастающей (убывающей)</u>***, если для $n_2 > n_1$ выполняется неравенство $x_{n_2} > x_{n_1}$ ($x_{n_2} < x_{n_1}$).

Свойства конечных пределов последовательностей

1) Изменение величины конечного числа членов последовательности или отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость и не меняет значение предела (если он есть).

2) Всякая последовательность, имеющая предел, ограничена.

3) Последовательность не может иметь более одного предела.

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a < b$, то и $x_n < b$ для почти всех членов последовательности.

Необходимое и достаточное условия существования предела последовательности

Теорема (необходимое условие существования предела последовательности):

Для того чтобы последовательность имела предел, необходимо, чтобы она была ограничена.

Данное условие не является достаточным для существования предела последовательности. Если же условие теоремы не выполняется (последовательность не ограничена), то этого достаточно, чтобы утверждать, что последовательность расходится.

Теорема Вейерштрасса (достаточное условие существования предела последовательности):

Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Теорема (о единстве предела последовательности):

Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Арифметические действия с пределами

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ последовательностей $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$. И пусть C – это постоянная величина (константа). Тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(C) = C,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(C \cdot x_n) = C \cdot A,$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{A}{B}$, где $y_n \neq 0$ для всех n.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и связь между ними

Определение 10.8. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется ***<u>бесконечно малой</u>***, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Определение 10.9. Последовательность $\{\beta_n\}$ называется ***<u>бесконечно большой</u>***, если $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

1. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, то последовательность $\{\beta_n\} = \left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ бесконечно большая.

2. Если последовательность $\{\beta_n\}$ – бесконечно большая, то последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\dfrac{1}{\beta_n}\right\}$ бесконечно малая.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3^n}$.

Решение. Подставим в предельное выражение предельное значение переменной n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^\infty} = 0.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 5n + 8}{3n^2 - 1}$.

Решение. В данном примере при $n \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, поэтому применить теорему о пределе дроби нельзя. Для вычисления преде-ла выполним в выражении, стоящем под знаком lim, следующее преобразование: вынесем за скобки множитель, содержащий старшую степень числителя и старшую степень знаменателя, и сократим дробь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+8}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2-\frac{5n}{n^2}+\frac{8}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{5}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}{\left(3-\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\left(2-\frac{5}{\infty}+\frac{8}{\infty}\right)}{\left(3-\frac{1}{\infty}\right)}=\frac{2}{3}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^4+6n^2+2}{5n^2-4}$.

Решение. Как в предыдущем примере, при $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, поэтому вынесем за скобки старшую степень числителя и старшую степень знаменателя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+6n^2+2}{5n^2-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(3+\frac{6n^2}{n^4}+\frac{2}{n^4}\right)}{n^2\left(5-\frac{4}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{6}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)}{\left(5-\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{\infty\left(3+\frac{6}{\infty}+\frac{2}{\infty}\right)}{\left(5-\frac{4}{\infty}\right)}=\frac{\infty\cdot 3}{5}=\infty.$$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^3-5n^2+1}{n^4-3n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^3-5n^2+1}{n^4-3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(7-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(1-\frac{3}{n^3}\right)}=\frac{\left(7-\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty}\right)}{\infty\left(1-\frac{3}{\infty}\right)}=\frac{7}{\infty}=0.$

В примерах 3, 4 и 5 при вычислении пределов в случаях, когда и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, можно заметить следующее:

1. Если старшие степени числителя и знаменателя имеют одинаковый порядок, то предел дроби равен отношению коэффициентов при старших степенях.

2. Если степень числителя старше степени знаменателя, то предел дроби равен ∞.

3. Если степень знаменателя старше степени числителя, то предел дроби равен 0.

Указанные закономерности позволяют вычислять пределы типа $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ устно.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-3}}{3n}$.

Решение. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби также стремятся к ∞, поэтому вынесем за скобки старшую степень числителя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{9n^2-3}}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(9-\frac{3}{n^2}\right)}}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{9-\frac{3}{n^2}}\right)}{3n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{9-\frac{3}{n^2}}}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{9-\frac{3}{\infty}}}{3}=\frac{4}{3}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{9n^2+1}-\sqrt{4n^2+5}$.

Решение. В данном случае каждое слагаемое при $n\to\infty$ также $\to\infty$, поэтому применить теорему о пределе разности нельзя (неопределённость $\infty-\infty$). Для вычисления предела умножим и разделим предельное выражение на выражение, сопряжённое с ним:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{4n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{4n^2+5n}\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+5n}\right)}{\left(\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+5n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{4n^2+5n}\right)^2}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+5n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4n^2+1\right)-\left(4n^2+5n\right)}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{4n^2+5n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-5n}{\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(4+\frac{5}{n}\right)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}-5\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}-5\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{5}{n}}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{\infty}-5\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{4+\frac{5}{\infty}}\right)}=-\frac{5}{2+2}=-\frac{5}{4}.$$

ЛЕКЦИЯ 11

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Предел функции

Пусть функция $y = y(x)$ определена во всех точках промежутка $(b;c)$, за исключением, быть может, некоторой точки $a \in (b;c)$. Составим последовательность значений аргумента функции $y = y(x)$:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \quad n \in \mathbb{N}, \ (x_n \neq a)$$

таким образом, чтобы все члены последовательности принадлежали промежутку $(b;c)$, и последовательность сходилась к точке a, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

Тогда значения функции $y = y(x)$ также образуют числовую последовательность

$$y_1 = y(x_1),\ y_2 = y(x_2),\ \ldots,\ y_n = y(x_n),\ldots$$

Определение 11.1. Число A является <u>***пределом функции***</u> $y = y(x)$ при x, стремящемся к a, если для любой последовательности аргументов, сходящейся к числу a, последовательность значений функции сходится к числу A.

Обозначение предела функции при $x \to a$: $\lim\limits_{x\to a} y(x) = A$.

Это определение предела функции называют *определением предела по Гейне*.

Определение 11.2. Число A является <u>***пределом функции***</u> $y = y(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, зависящее от ε, что при всех $x \in (b;c)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - a| < \delta$$

выполняется неравенство

$$|y(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Это определение предела функции называют *определением предела по Коши*.

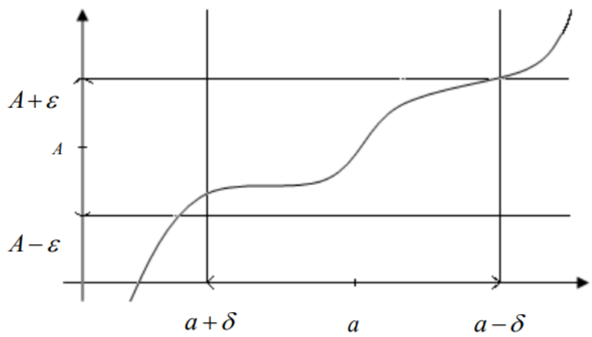


Рис. 1

Основные теоремы о пределах функции

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют пределы при при $x \to a$, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

тогда справедливы следующие **теоремы**:

1. *Предел суммы (разности) двух (или более) функций* равен сумме (разности) пределов каждой из этих функций.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B.$$

2. *Предел произведения двух (или более) функций* равен произведению пределов каждой из этих функций.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = A\cdot B.$$

Следствие: Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x\to a}\left(C\cdot f(x)\right) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x) = C\cdot A.$$

3. *Предел частного двух функций* равен частному пределов каждой из этих функций.

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(в этом случае предполагается, что функция $g(x) \neq 0$ в достаточно малой окрестности точки a и $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.)

4. Если существует $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$, и $y(\varphi(x))$– элементарная функция, то

$$\lim_{x\to a} y\left(\phi(x)\right) = y\left(\lim_{x\to a}\phi(x)\right).$$

Вычисление пределов функций

Замечание. Число, к которому в пределе функции стремится переменная x, называется *предельным значением переменной*; выражение, стоящее под знаком lim, называется *предельным выражением*.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3x + 5)$.

Решение. Для вычисления предела многочлена $f(x)$ при $x \to a$ достаточно вместо переменной x подставить значение a, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Если в результате получится конечное число или бесконечность, предел функции считается вычисленным.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+5\right)=\lim_{x\to 2}x^2-3\cdot\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-3\cdot\lim_{x\to 2}x+5=2^2-3\cdot 2+5=4-6+5=3.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+5)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-3x+5\right)=\infty^2-3\cdot\infty+5=\infty.$

В большинстве случаев при вычислении пределов функций подстановка предельного значения переменной в предельное выражение приводит к так называемым неопределённостям, т.е. не даёт в результате конечного числа или ∞. Тогда предел функции вычисляют с помощью различных специальных приёмов в зависимости от типа неопределённости.

Типы неопределённостей

$$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\left\{\frac{0}{0}\right\},\{\infty-\infty\},\{1^\infty\},\{0\cdot\infty\},\{0^\infty\}.$$

1. **Раскрытие неопределенностей типа** $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ и $\{\infty-\infty\}$.

Решение неопределенностей типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ и $\{\infty-\infty\}$ для функций ничем не отличается от решения подобных неопределенностей для числовых последовательностей. Так, для неопределенности типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ в предельном выражении выносят за скобки старшую степень числителя и старшую степень знаменателя, в результате сокращения дроби на степень переменной неопределённость уходит.

Пример 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+2}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{\left(4-\dfrac{3}{\infty}+\dfrac{2}{\infty}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{\infty}\right)}=\frac{4}{1}=4.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+2}\right)\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2+2\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)}=-\frac{2}{\infty}=0.$$

2. **Раскрытие неопределенностей типа** $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

а) В числителе и знаменателе дроби стоят многочлены.

В этом случае числитель и знаменатель дроби раскладывают на множители, в результате сокращения дроби неопределённость уходит. Часто используются формулы сокращенного умножения и разложение квадратного уравнения через его корни.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)}{(x+2)}==\dfrac{1}{4}.$

б) В числителе или (и) в знаменателе дроби присутствует иррациональность.

В этом случае числитель и знаменатель дроби умножают на выражение, сопряжённое выражению, содержащему иррациональность.

Пример 6.

$$\lim_{x\to 4}\frac{4-\sqrt{5x-4}}{3x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-\sqrt{5x-4})(4+\sqrt{5x-4})}{(3x-12)(4+\sqrt{5x-4})}=\lim_{x\to 4}\frac{16-(5x-4)}{(3x-12)(4+\sqrt{5x+6})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{20-5x}{(3x-12)(4+\sqrt{5x-4})}=\lim_{x\to 4}\frac{-5(x-4)}{3(x-4)(4+\sqrt{5x-4})}=\lim_{x\to 4}\frac{-5}{3(4+\sqrt{5x-4})}=-\frac{5}{3\cdot 8}=-\frac{5}{24}.$$

в) В предельном выражении присутствуют тригонометрические функции.

В этом случае для раскрытия неопределённости $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ используется ***I замечательный предел:***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Этот предел позволяет заменять функцию синус при достаточно малых значениях аргумента самим аргументом, т.е. x≈sinx при $x\to 0$. Для более общего случая I замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1,\ \text{где}\ \lim_{x\to 0}u(x)=0.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\sin 2x}{3\cdot 2x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{2}{3}.$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x\cdot\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\cos 4x\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\dfrac{4}{5}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 4x}=\dfrac{4}{5}\cdot 1=\dfrac{4}{5}.$

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{3x}.$

Решение. Сделаем замену переменных $\left(\begin{array}{l} t=\arcsin 4x \\ 4x=\sin t \\ x=\dfrac{1}{4}\sin t \end{array}\right)$ и получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 4x}{3x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{3}{4}\sin t}=\frac{4}{3}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{t}t}=\frac{4}{3}.$$

3. **Раскрытие неопределенностей типа** $\{1^\infty\}$.

Для раскрытия неопределённости типа $\{1^\infty\}$ применяют ***II замечательный предел*****:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{3x}=\begin{pmatrix} t=-\dfrac{1}{2x} \\ x=-\dfrac{1}{2t} \\ t\to 0 \end{pmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{3}{2t}}=\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}.$

Пример 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x-5}=\begin{pmatrix} t=\dfrac{4}{x} \\ x=\dfrac{4}{t} \\ t\to 0 \end{pmatrix}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{4}{t}-5}=\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{4}\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)\right)^{-5}=e^{4}\cdot 1=e^{4}.$

Пример 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x+2)+2}{x+2}\right)^{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+2}\right)^{x-3}=\begin{pmatrix} t=\dfrac{2}{x+2} \\ x=\dfrac{2}{t}-2 \\ t\to 0 \end{pmatrix}=$

$$=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}-5}=\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{2}\left(\lim_{t\to 0}(1+t)\right)^{-5}=e^{2}\cdot 1=e^{2}.$$

Сравнение бесконечно малых величин. Принцип замены эквивалентными величинами

Величина (функция) $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x\to 0$, если

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x)=0.$$

Теорема (связь между пределом функции и бесконечно малой).

Если функция $y=y(x)$ при $x\to a$ имеет пределом число *A*, то функцию $y=y(x)$ можно представить в виде суммы числа *A* и бесконечно малой $\alpha(x)$ при $x\to a$, т.е.

$$\lim_{x\to a}y(x)=A\Rightarrow y(x)=A+\alpha(x).$$

Свойства бесконечно малых функций:

1. Сумма или разность двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть бесконечно малая функция.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ можно сравнить между собой, вычислив предел их отношения.

4. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

5. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая низшего порядка, чем $\beta(x)$.

6. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малая того же порядка, что и $\beta(x)$.

В частности, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** ($\beta \approx \alpha$).

Вычисление некоторых пределов заметно упрощается, если пользоваться принципом замены эквивалентными: ***при нахождении предела дроби можно бесконечно малые множители, стоящие в числителе или в знаменателе, заменять эквивалентными величинами.***

Некоторые, наиболее часто применяемые эквивалентности при $x \to 0$:

$\sin x \approx x$	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \approx \dfrac{x}{n}$
$\arcsin x \approx x$	$a^x - 1 \approx x \ln a$
$tgx \approx x$	$e^x - 1 \approx x$
$arctgx \approx x$	$\log_a(x+1) \approx \dfrac{x}{\ln a}$
$1 - \cos x \approx \dfrac{x^2}{2}$	$\ln(1+x) \approx x$

Пример 13. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 3x}{1-\cos 2x}$.

Решение. В предельном выражении стоит отношение двух бесконечно малых функций. Для вычисления данного предела воспользуемся принципом замены эквивалентными:

$$arctg^2 3x = (arctg 3x)^2 \approx (3x)^2 = 9x^2, \quad 1 - \cos 2x \approx \frac{x^2}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg^2 3x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{\frac{x^2}{2}} = 18.$$

Непрерывность функции

Определение 11.3. ***<u>Функция</u>*** $f(x)$ ***<u>непрерывна в точке</u>*** a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Мы знаем, что «приближаться» к значению a возможно двумя способами: слева и справа. Очевидно, что в случае непрерывности оба этих способа должны приводить к одному и тому же результату. Тогда мы получаем второе определение непрерывности функции в точке.

Определение 11.4. ***<u>Функция</u>*** $f(x)$ ***<u>непрерывна в точке</u>*** a, если оба односторонних предела равны между собой и равны значению функции в точке a:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a).$$

Определение 11.5. ***<u>Функция</u>*** $f(x)$ ***<u>непрерывна в точке</u>*** a, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Определение 11.6. ***<u>Функция</u>*** $f(x)$ ***<u>называется непрерывной на промежутке</u>*** (a,b), если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой его точке.

Примером непрерывной функции является любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения. График любой непрерывной функции представляет собой сплошную линию.

Точки разрыва функции, их классификация

Определение 11.7. Точка $x = a$ называется ***<u>точкой разрыва</u>*** функции $y = f(x)$, если эта функция определена в некоторой окрестности точки $x = a$, но в самой этой точке не удовлетворяет условию непрерывности, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a).$$

Точки разрыва делятся на 2 типа: ***точки разрыва I рода и точки разрыва II рода***.

К ***точкам разрыва I рода*** относятся такие точки, в которых существуют ***конечные односторонние пределы***.

Точки разрыва I рода, в свою очередь, делятся на:

1) ***точки устранимого разрыва***, когда $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq f(a)$.

2) ***точки скачка функции***, когда $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. В этом случае разность $f(a+0)-f(a-0)$ называют скачком функции $y=f(x)$ в точке $x=a$.

К ***точкам разрыва II рода*** относятся точки, в которых хотя бы ***один из односторонних пределов не существует или бесконечен***.

Примером непрерывной функции является любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения. График любой непрерывной функции представляет собой сплошную линию.

Пример 14. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{x-2}$ и исследовать их характер.

Решение. Данная функция определена при всех значениях x, кроме $x=2$. Т.к. данная функция является элементарной, она непрерывна в каждой точке области своего определения, состоящей из промежутков $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Следовательно, единственной точкой разрыва является точка $x=2$. Для исследования характера разрыва найдём односторонние пределы данной функции в этой точке.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2+0-2}=\frac{1}{+0}=+\infty.$$

Так как один из односторонних пределов функции бесконечен, $x=2$ – точка разрыва II рода.

ЛЕКЦИЯ 12

ПРОИЗВОДНАЯ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Определение производной

Определение 12.1. ***Производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** $x = a$ ***называется предел*** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$***, обозначаемый*** $f'(a)$.

Взятые при всех допустимых значениях x, эти величины составляют некую ***функцию***, которую называют ***производной функции (или от функции)*** $f(x)$ и обозначают $f'(x)$ (а также просто f', y', y'_x).

Производную можно определить и так: $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Это выражение удобно своей универсальностью, предполагающей, что данный предел рассматривается в произвольной точке. Запись $f'(x)$ может означать как саму производную, то есть функцию, так и ее значение в точке x; из контекста, как правило, ясно, что имеется в виду.

Для обозначения производной используется также выражение $\dfrac{dy}{dx}$, причем пока это еще не полноценная дробь, а всего лишь символ, указывающий на происхождение производной от частного приращений $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; заметим, однако, что, после того как выражения dy и dx приобретут самостоятельный смысл и название «***дифференциал»***, станет ясно, почему функцию, имеющую производную, называют ***дифференцируемой***, а операцию нахождения производной – ***дифференцированием***.

Что касается самого термина «производная», то он объясняется тем, что из данной функции $f(x)$ при помощи предельного перехода выводится (или производится) новая функция $f'(x)$. Ньютон называл производную «флюентой», то есть «вытекающей».

Пример 1. Если, например, $f(x) = x^2$, то производная

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right) = 2x.$$

Непрерывность дифференцируемой функции

Итак, наличие производной (или ее отсутствие) определить по графику функции очень легко: график должен быть «гладким», без изломов. И, кроме того, он, конечно, должен быть … непрерывным. Попробуем установить это и аналитически, а именно, докажем, что ***если функция*** $y = f(x)$ ***имеет производную в точке*** $x = a$***, то она непрерывна в этой точке***.

Существование производной означает существование предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, из которого следует, что величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ограничена в некоторой окрестности точки a; кроме того, Δx – бесконечно малая (поскольку предел ищется при $\Delta x \to 0$). Значит, их произведение $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ – бесконечно малая, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, и функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = a$. Вообще говоря, обратное утверждение не имеет места: функция может быть непрерывной, но не иметь производной в некоторых точках. Проверим это аналитически, например, для функции $y = |x|$, график которой имеет «классический» излом в начале координат.

Непрерывность сомнений не вызывает, так как $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| \to 0$ при $\Delta x \to 0$; однако отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1$ в зависимости от того, какой знак имеет Δx. Значит, предел (двусторонний!) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, а вместе с ним – и производная.

Производные функций

Вычислим производные от основной пятерки функций и константы:

1) $y = const.$

В этом случае функция не изменяется, поэтому приращения у нее нет и $\Delta y = 0$*, значит, и* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,\ \ y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

2) $y = x^n$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = x^n \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x};$$

вспоминая, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$, получаем $(x^n)' = x^{n-1} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x / x)^n - 1}{\Delta x / x} = n x^{n-1}$.

Заметим, что эта формула выведена в предположении $x \neq 0$.

3) $y = \sin x$.

В этом случае $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Поэтому, с учетом предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$*, имеем:*

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Обратим внимание на то, что столь емкая формула получается только благодаря тому, что угол x *выражен в радианах; если же измерять* x *в градусах, то, в силу того, что углу в* x^o *отвечает дуга длиной* $\frac{\pi x}{180}$ *и, стало быть,* $\sin x^o = \sin\frac{\pi x}{180}$*, придется писать (согласно правилу дифференцирования сложной функции, которое мы выведем позже)* $\left(\sin x\right)' = \frac{\pi}{180}\cos x$.

4) *Если* $y = \cos x$*, то аналогично устанавливается формула* $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

5) *Если* $y = a^x$*, то* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$*; вспоминая, что* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$*, находим:*

$$\left(a^x\right)' = a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a.$$

Особенно поучителен частный случай этой формулы: при $a = e$, получаем $\left(e^x\right)' = e^x$, то есть производная функции e^x совпадает с самой функцией! И это единственный пример в истории!

6) $y = \log_a x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{(\Delta x/x)\cdot x};$$

с учетом предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$*, находим:*

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\Delta x/x\right)}{\Delta x/x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Опять же, самое компактное выражение получается в случае $a=e$, ибо $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Итак, все названные функции имеют производные в тех точках, где они определены, а значит, они и непрерывны.

Правила дифференцирования

Сразу же приступим к выводу удобных правил для работы с новым понятием, они называются ***правилами дифференцирования.***

Пусть две функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке x, тогда:

а) $(u \pm v)' = u' \pm v'$*;*

б) $(uv)' = u'v + uv'$*; в частности, для любой константы* k $\quad (ku)' = ku'$*;*

в) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ *(в предположении* $v \neq 0$*).*

Производные функций *tgx* и *ctgx*

Теперь мы имеем возможность продифференцировать такие функции, как тангенс и котангенс:

7) $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Аналогично $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Что касается правила дифференцирования произведения, то его можно обобщить на случай трех и более множителей, например

$$(uvr)' = u'vr + uv'r + uvr'.$$

Формула для приращения функции

Вернемся к определению производной. Существование предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ означает, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – некоторая бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ функция. Тогда $\Delta y = y'\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Производная сложной функции

Эта формула для приращения дифференцируемой функции имеет многочисленные применения. Используем ее для вывода **правила дифференцирования сложной функции:**

Пусть $y = f(t)$, *где* $t = g(x)$; *тогда* $y = f\left(g\left(x\right)\right)$ *и производная* $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ *во всех точках, в которых существуют производные* $y'_t = f'(t)$ *и* $t'_x = g'(x)$.

Действительно, из формулы для приращения функции $y = f(x)$ имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y'_t \Delta t + \alpha(t)\Delta t}{\Delta x} = y'_t \frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha(t)\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ первое слагаемое стремится к $y'_t \cdot t'_x$; что касается второго, то $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Но если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta t \to 0$, если функция $t = g(x)$ дифференцируема, а значит, непрерывна. Следовательно, $\alpha(t)\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \to 0$, и формула доказана.

Формулу дифференцирования сложной функции часто записывают в виде

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x).$$

Приведем некоторые примеры вычисления производных сложных функций.

Пример 1. *Если* $y = \sin 7x$, *то* $y = \sin t,\ t = 7x$; *поэтому* $y' = \cos t \cdot t' = \cos 7x \cdot 7 = 7\cos 7x$.

Пример 2. *Если* $y = \left(2x-1\right)^{10}$, *то* $y = t^{10},\ \ t = 2x-1$; *значит*

$$y' = 10t^9 \cdot t' = 10\left(2x-1\right)^9 \cdot 2 = 20\left(2x-1\right)^9.$$

Пример 3. *Производная функции, скажем,* $\sin^5\left(\ln x\right)$, *также находится «по цепочке», которую можно подробно не расписывать, а держать в голове: «производная степени* $\to$ *производная синуса* $\to$ *производная логарифма», то есть*

$$\left(\sin^5\left(\ln x\right)\right)' = 5\sin^4\left(\ln x\right) \cdot \cos\left(\ln x\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

Чтобы грамотно применять правило $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$, надо понимать, что функция – это f, а не $f(x)$ или $f(t)$, то есть функция – это $\sin,\ \ln$ («синус», «логарифм»), а не $\sin x,\ \ln x$. Последние выражения представляют собой *значения* названных функций в точке x, но мы уже по привычке считаем, что они и есть функция. Если мы пишем «дана функция $y = f(x)$», то делаем это для того, чтобы сразу указать, какой буквой обозначаем независимое переменное, какой – значение функции, но, строго говоря, это некорректно.

Логарифмическое дифференцирование

Заслуживает упоминания так называемое ***«логарифмическое дифференцирование»***, применяемое при нахождении производных от функций вида $u(x)^{v(x)}$. Удобнее данное выражение записывать в виде $e^{v\ln u}$ (то есть, фактически логарифмируя его). Тогда

$$\left(u^v\right)' = \left(e^{v\ln u}\right)' = e^{v\ln u}\left(v\ln u\right)' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Пример 4. *Пусть* $y = x^x$, *тогда* $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Пример 5. *Если* $y = x^{\sin x} + \left(\sin x\right)^x$, *то* $y = e^{\sin x \ln x} + e^{x\ln\sin x}$ *и*

$$y' = e^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right) + e^{x\ln\sin x}\left(\ln\sin x + \frac{x\cos x}{\sin x}\right) \text{ или}$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right) + \left(\sin x\right)^x\left(\ln\sin x + \frac{x\cos x}{\sin x}\right).$$

Производная обратной функции.
Производные обратных тригонометрических функций

Теперь перейдем к обратным тригонометрическим функциям.

Пусть функция $y = y(x)$ *дифференцируема в точке и имеет в окрестности этой точки обратную функцию* $x = x(y)$, *непрерывную в точке* y. *Тогда функция* $x(y)$ *дифференцируема в этой точке и* $x'(y) = \dfrac{1}{y'(x)}$ *(при условии* $y'(x) \neq 0$*) или* $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

По определению производной,

$$x'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{x\left(y+\Delta y\right) - x(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta y}{x\left(y+\Delta y\right) - x(y)}}.$$

Но $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$, а $x(y+\Delta y) - x(y) = \Delta x$. Кроме того, при $\Delta y \to 0$ одновременно и $\Delta x \to 0$ вследствие непрерывности. Поэтому последний предел можно переписать в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{y\left(x+\Delta x\right) - y(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.$$

И теперь мы в состоянии продифференцировать всю когорту обратных тригонометрических функций.

8) *Если* $y = \arcsin x$, *то* $x = \sin y$ $\left(y \in (-\pi/2; \pi/2)\right)$; *тогда*

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\left(\sin y\right)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Поскольку $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x,\ \left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9) *Если* $y = arctgx$*, то* $x = tgy$*; тогда*

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{\left(tgy\right)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Для функции $y = arcctgx$ *имеем:* $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Автор популярного учебника «Высшая математика для начинающих» Я.Б. Зельдович утверждал:

Дифференцирование функций, заданных формулами, сравнительно простое и легкое дело, чем решение алгебраических уравнений. Формулы для производных никогда не получаются более сложными (более сложного типа), чем формулы для самих функций.

Разберем еще несколько примеров на «дифференцирование по формулам».

Пример 6. *Пусть* $y = 2^{arctgx}$*; тогда* $y' = 2^{arctgx} \cdot \ln 2 \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 7. *Если* $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$*, то представив первое слагаемое в виде* $\arcsin x \cdot \left(1-x^2\right)^{-1/2}$*, и учитывая, что*

$$\left(\left(1-x^2\right)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2} \cdot (-2x) = x\left(1-x^2\right)^{-3/2},$$

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}\,,$$

находим

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1-x^2} + x\arcsin x\left(1-x^2\right)^{-3/2} - \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{x\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\,.$$

ЛЕКЦИЯ 13

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ПРОИЗВОДНЫЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
1. C	0	7. tgx	$1/\cos^2 x$
2. x^n	nx^{n-1}	8. $ctgx$	$-1/\sin^2 x$
3. a^x e^x	$a^x \ln a$ e^x	9. $\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
4. $\log_a x$ $\ln x$	$1/x\ln a$ $1/x$	10. $\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
5. $\sin x$	$\cos x$	11. $arctgx$	$1/(1+x^2)$
6. $\cos x$	$-\sin x$	12. $arcctgx$	$-1/(1+x^2)$

Геометрический смысл производной. Касательная. Уравнение касательной

Чисто алгебраическое определение производной хочется оживить геометрическим образом. Ранее мы видели, что условие $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ означает непрерывность функции в соответствующей точке. Какую дополнительную информацию о функции и кривой, заданной графиком $y = f(x)$, несет в себе этот предел? Кроме того, он может быть конечным или бесконечным; и, если он не существует, хотелось бы знать, что это означает с геометрической точки зрения.

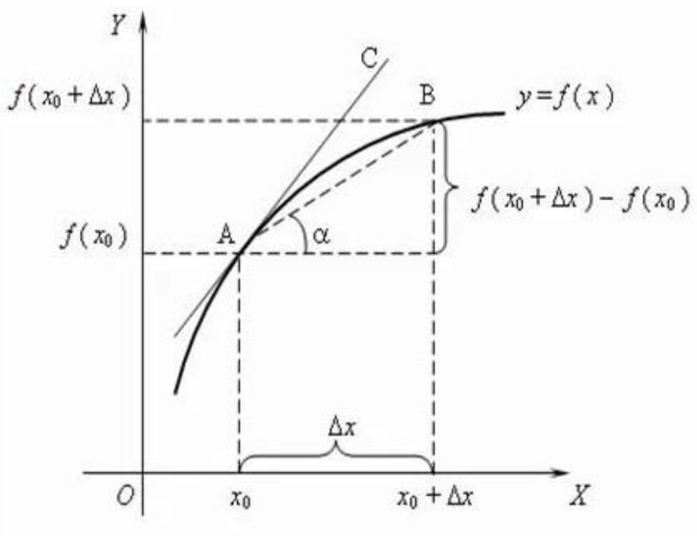


Рис. 1

Если мы представим себе график какой-либо функции $y = f(x)$, то сразу заметим (рис. 1), что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, вычисленное для произвольного $x = x_0$, равно тангенсу угла наклона прямой, проходящей через две точки графика: $A(x_0; f(x_0))$ и $B(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. (Мы предполагали, что данная прямая не расположена вертикально.) Существование предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ означает, что при неограниченном уменьшении Δx (при котором точка B вдоль кривой приближается к A) прямая AB также стремится к определенному *предельному*, положению AC. Это предельное положение принято называть ***<u>касательной</u>*** к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Таким образом, существование производной означает, что у данной кривой в данной точке имеется касательная (и производная равна тангенсу угла, который касательная образует с положительным направлением оси абсцисс). А если предела не существует, то и касательная в точке $x = x_0$ не определена. Если же предел существует, но равен бесконечности, то касательная к кривой располагается вертикально.

Рис. 1 позволяет сразу вывести уравнение касательной. Пусть $y = f(x)$ – данная функция, а (x_0, y_0) – координаты точки касания A. Поскольку угловой коэффициент касательной $k = f'(x_0) = y'(x_0)$, из формулы $y - y_0 = k(x - x_0)$, известной всем любителям аналитической геометрии, находим:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или } y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).$$

Производная и скорость. Мгновенная скорость

Понятие производной оказалось тесно связано с рассмотрением касательной к кривой. Но в самом определении производной ничего геометрического не было. С точки зрения Ньютона, производная всегда рассматривалась как скорость.

Вопрос стоит таким образом: что считать скоростью при неравномерном движении? Ведь ее нельзя находить по известной со школьной поры формуле $v = s/t$. Пусть тело движется по прямой, тогда пройденный путь описывается как функция времени $s = s(t)$. Если время t получит приращение Δt, то моменту $t + \Delta t$ будет соответствовать путь $s + \Delta s$; отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ в случае неравномерного движения не даст нам значение скорости в момент времени $t + \Delta t$: то, что получится, принято называть *средней скоростью* движения за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

Однако чем меньшие промежутки времени мы будем рассматривать, тем разумнее будет считать движение на выбранном участке равномерным; тогда предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ вполне естественно принять за определение скорости в данный момент t, то есть положить $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t)$. Значит, ***скорость – это производная***.

Возвращаясь к общему определению, можно теперь сказать, что производная $f'(x)$ произвольной функции есть скорость изменения этой функции.

Дифференциал

Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x, то для ее приращения, как мы видели, имеет место формула $\Delta y=y'\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Если $y'\neq 0$, то второе слагаемое в правой части ($\alpha\cdot\Delta x$) стремится к нулю быстрее, чем первое. По этой причине произведение $y'\Delta x$ называют *главной частью* приращения функции и обозначают специальным символом dy. Выражение $y'\Delta x=f'(x)\Delta x$ называется ***дифференциалом*** функции $y=f(x)$.

Из этого определения следует, что в случае функции $y=x$ дифференциал $dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x$, поэтому можно определить дифференциал не только функции, но и *аргумента,* обозначив его через dx и писать $dy=f'(x)dx$. Отсюда $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ и это уже настоящее частное, а не просто символ.

Дифференциал может служить неплохим средством для приближенных вычислений (в отсутствие калькулятора). Из равенства $\Delta y=y'\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$ следует, что при малых Δx величины Δy и $dy=y'dx$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому приращение функции приближенно равно дифференциалу. Выгода замены определяется тем, что дифференциал зависит от Δx линейно, тогда как приращение может выражаться через Δx сколь угодно сложным образом.

В основе вычислений лежит формула:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+df(x_0).$$

Пример 1. *Требуется вычислить приближенное значение* $\sqrt[5]{244}$.

Возьмем функцию $y=\sqrt[5]{x}$ *и положим* $x_0=243,\ \Delta x=1$. *Тогда* $f(x_0+\Delta x)$ *и есть искомое значение* $\sqrt[5]{244}$. *Получим* $f(x_0)=\sqrt[5]{243}=3,$ *а в выражение для дифференциала*

$df(x) = f'(x)\Delta x = \frac{1}{5}x^{-4/5}\Delta x$ *нужно подставить* $x = x_0 = 243,\ \Delta x = 1$, *то есть* $df(x_0) = \frac{1}{5}3^{-4/5}\cdot 1 = \frac{1}{5\sqrt[5]{3^4}}$. *Окончательно* $\sqrt[5]{244} \approx 3 + \frac{1}{5\sqrt[5]{3^4}}$.

Производные высших порядков. Формула Лейбница

Если мы нашли производную $f'(x)$, то можно рассмотреть и производную от этой производной и, если она существует, обозначить как $f''(x)$ (или y''). Это процесс можно продолжать и дальше, в результате чего придем к производной n - го порядка, обозначаемой $f^{(n)}(x)$ или $y^{(n)}$. Общее выражение для всех производных, зависящее непосредственно от n, не всегда легко установить, однако в ряде случаев это возможно. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. $y = x^n$ **.**

Несколько первых производных: $y' = ax^{a-1},\ y'' = a(a-1)x^{a-2},\ y''' = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$ *наводят на предположение* $y^{(n)} = a(a-1)...(a-n+1)x^{a-n}$, *что подтверждается методом математической индукции. Действительно, дифференцируя последнее равенство, получим* $y^{(n+1)} = a(a-1)...(a-n+1)(a-n)x^{a-n-1}$, *что согласуется с высказанным предположением.*

Пример 3. $y = \sin x$ **.**

Сделаем несколько смелых шагов: $y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(4)} = \sin x$. *Общий закон не виден. Попробуем каким-то образом объединить результаты, например, так:* $y' = \cos x,\ y'' = -\sin x = \cos(x + \pi/2),\ y''' = -\cos x = \cos(x + \pi),\ y^{(4)} = \sin x = \cos(x + 3\pi/2)$.

Остается предположить $y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$.

Продифференцируем еще раз:

$$y^{(n+1)} = (\sin x)^{(n+1)} = \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Наша гипотеза снова получила подтверждение методом индукции.

Более употребительно, однако, другое выражение для $y^{(n)}$, *которое можно получить из нашего, заменив косинус синусом по формуле приведения, а именно:*

$$(\sin x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Если $y = \cos x$, *то аналогично выводится формула*

$$(\cos x)^{(n)} = -\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Ограничимся данными примерами и попробуем получить формулу для вычисления n-й производной от произведения uv, которая носит название *формула Лейбница:*

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''...$$

Основным предположением является *бином Ньютона:*

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + ... + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + ... + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + C_n^n u v^{(n)}.$$

Методом индукции данная формула легко доказывается. Для практического применения формулу Лейбница удобно записать в явном виде:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2} u^{(n-2)} v'' + ...$$

Она особенно эффективна, если одна из функций – многочлен.

Пример 3. $y = x^2 \cos 2x$. *Найдем* $y^{(100)}$.

Положим $u = \cos 2x$, $v = x^2$. *Поскольку* $v' = 2x,\ v'' = 2,\ v''' = 0$, *выражение для* $y^{(100)}$ *будет содержать только три слагаемых – именно те, что выписаны выше. Осталось найти соответствующие значения производных второй функции. Из примера 19 следует, что* $u^{(n)} = -2^n \sin(2x + \pi(n-1)/2)$, *поэтому*

$$u^{(100)} = -2^{100} \sin(2x + 99\pi/2) = 2^{100} \cos 2x;$$

$$u^{(99)} = -2^{99} \sin(2x + 49\pi) = 2^{99} \sin 2x;$$

$$u^{(98)} = -2^{98} \sin(2x + 97\pi/2) = -2^{98} \cos 2x.$$

Окончательно $\left(x^2 \cos 2x\right)^{(100)} = 2^{100} x^2 \cos 2x + 200 \cdot 2^{99} x \sin 2x - 9900 \cdot 2^{98} \cos 2x$.

Неявные функции и их дифференцирование

Поговорим о других формах задания функции. Эти формы носят названия *неявных*, причем выделяются два основных случая:

1) параметрическое задание, при котором функция представляется парой уравнений вида $x = f(t),\ y = g(t)$;

2) собственно неявное представление – уравнение $F(x, y) = 0$.

Дело в том, что исторически неявные функции появились раньше явных. Например, если уравнение имеет вид $x^5+y^5=xy$, то нельзя выразить y через x. В этом случае приходится считать, что функциональная зависимость выражается приравниванием к нулю функции двух переменных, то есть уравнением $F(x,y)=0$. Если же x и y являются функциями третьей переменной t, то есть $x=f(t),\ y=g(t)$. Тогда если t принимает какое-либо конкретное значение, то значения x и y известны. Каждая пара таких значений определяет точку (x,y).

Равенство $F(x,y)=0$, задающее неявную функцию, предполагает, что, если бы при некоторых условиях переменная y выражалась как функция x, можно было бы поставить задачу о нахождении соответствующей производной. Это осуществляется путем дифференцирования самого равенства $F(x,y)=0$ с учетом того, что $y=y(x)$, то есть каждое дифференцирование выражения, содержащего y, следует домножать на y'.

Приведем пример.

Пример 4. *Пусть неявная функция задана уравнением* $x^5+y^5-5xy=0$*, тогда*

$$5x^4+5y^4y'-5(y+xy')=0.$$

Выражая отсюда y'*, найдем* $y'=\dfrac{y-x^4}{y^4-x}$*. Таким образом, и производная неявной функции тоже будет зависеть от* x *неявным образом.*

Если же неявная функция задана параметрически, то есть $x=f(t),\ y=g(t)$, то $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$; тогда вторая производная $y'_{xx}=\dfrac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}$ и так далее.

Вопросы к размышлению

1) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Чему равен предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$?
2) Пусть $f(x)=(x-1)\left(\sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1}+(x-1)\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}\right)$. Найдите $f'(1)$.
3) Найдите y', если: а) $y=\log_{\sin x}\cos x$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\cdot\left(x-3\right)^6}{\left(1-x\right)^3\cdot\sqrt[4]{3x-2}}$.
4) Найдите $y'(0)$, если $y=x(x-1)(x-2)...(x-2000)$.
5) Примените формулу Лейбница для нахождения

   а) $y^{(100)}(x)$ при $y=\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$; б) $y^{(50)}(0)$ при $y=\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Ответы с решениями

1) Из дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0 следует ее непрерывность в этой точке, то есть равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=0$.

2) Если $f(x)=(x-1)g(x)$ и функция $g(x)$ дифференцируема в точке $x=1$, то $f'(x)=g(x)+(x-1)g'(x)$; соответственно $f'(1)=g(1)$. В нашем случае $g(1)=1$, поэтому $f'(1)=1$.

3) а) $y=\dfrac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$, поэтому $y'=\dfrac{-tgx\cdot\ln\sin x-ctgx\cdot\ln\cos x}{\ln^2\cos x}$.

б) $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln|x+2|+6\ln|x-3|-3\ln|1-x|-\dfrac{1}{4}\ln|3x-2|$;

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{2(x+2)}+\dfrac{6}{x-3}+\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{3}{4(3x-2)}$ и так далее.

4) $y'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2000)+x(x-2)...(x-2000)+...+x(x-1)(x-2)...(x-1999)$.

Тогда $y'(0)=2000!$, так как все слагаемые, кроме первого, содержат множитель x, обращающий соответствующее произведение в нуль при $x=0$.

5) а) Проделаем следующие алгебраические преобразования:

$$\frac{x^2+1}{x^3-x}=\frac{(x^2-1)+2}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x(x^2-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

Соответственно, $y^{(100)}(x)=100!\left(-\dfrac{1}{x^{101}}+\dfrac{1}{(x+1)^{101}}+\dfrac{1}{(x-1)^{101}}\right)$.

б) Преобразуем выражение:

Поскольку $y'=-\dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, $y''=-\dfrac{6(x^2+x)}{(1+x+x^2)^3}$, $y''(0)=0$, равны нулю производные 5-го, 8-го, 11-го порядка и вообще все производные порядка $n=3k+2$. Но число 50 тоже относится к этому классу, так как 50=3*16+2; значит, $y^{(50)}(0)=0$.

ЛЕКЦИЯ 14

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Применение производной к исследованию функций

I. Условия возрастания и убывания функций

Определение 14.1. Функцию *f(x)* называют ***возрастающей (неубывающей)*** на интервале (a,b), если для любых точек $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$. В этом случае на рассматриваемом интервале меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Функцию *f(x)* называют ***убывающей (невозрастающей)*** на интервале (a,b), если для любых точек $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$. В этом случае меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции.

На рис. 1 представлены графики возрастающей и убывающей функции. Если точку $M(x,y)$ перемещать вдоль графика функции слева направо, то в первом случае она будет подниматься, а во втором – опускаться.

Определение 14.2. Функции, только убывающие или только возрастающие на некотором интервале, называют ***монотонными***.

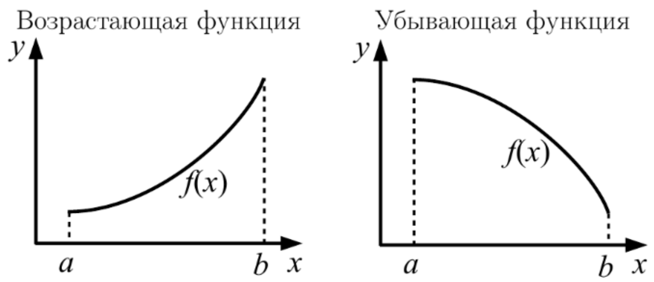


Рис. 1

Сформулируем условия возрастания и убывания функций.

Теорема: для того, чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция была возрастающей на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f'(x) \ge 0 \qquad \forall x \in (a,b).$$

Аналогичное условие

$$f'(x) \le 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы дифференцируемая на (a,b) функция была убывающей на (a,b).

Данное условие возрастания и убывания функции имеет следующую геометрическую интерпретацию:

– касательная к графику возрастающей функции в любой ее точке составляет острый угол с положительным направлением оси *Ox*;

– касательная к графику убывающей функции составляет тупой угол с положительным направлением оси *Ox*.

II. Необходимые условия экстремума

Понятие ***локального экстремума*** включает понятия ***локального максимума*** и ***локального минимума*** функции. Необходимые условия существования экстремума легко получить из **теоремы Ферма**. Согласно этой теореме, точки локального экстремума функции $f(x)$ следует искать среди тех точек области ее определения, в которых производная этой функции либо равна нулю, либо не существует.

Точки, в которых производная данной функции обращается в нуль, называют ***стационарными точками*** этой функции, а точки, в которых функция непрерывна, а ее производная либо равна нулю, либо не существует, называют ее ***критическими точками***. Поэтому все точки экстремума функции содержатся среди ее критических точек. Однако, не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Определение 14.3. Точка, в которой происходит смена характера монотонности функции, называется ***локальным экстремумом***. Если возрастание сменяется убыванием, то это точка ***максимума***, если убывание сменяется возрастанием, то это точка ***минимума***.

Рассмотрим, например, функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$ (рис.2):

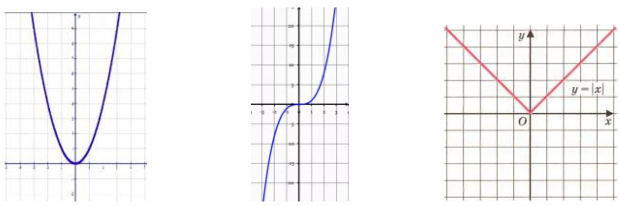


Рис. 2

Для всех этих функций точка $x = 0$ является критической. Экстремум же в точке $x = 0$ имеет только $y = x^2$.

Таким образом, чтобы из критических точек выбрать те, где функция имеет экстремум, необходимо сформулировать достаточные условия существования экстремума.

III. Первое достаточное условие экстремума

Теорема: пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда

а) если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то есть существует такое $\delta > 0$, что

$$\forall x \in (x_0 - \delta\ ,\ x_0) \to\ f'(x) < 0\ ,$$
$$\forall x \in (x_0\ ,\ x_0 + \delta) \to\ f'(x) > 0\ ,$$

то x_0 – точка минимума функции $f(x)$ (рис. 3,а);

б) если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то есть

$$\forall x \in (x_0 - \delta\ ,\ x_0) \to\ f'(x) < 0\ ,$$
$$\forall x \in (x_0\ ,\ x_0 + \delta) \to\ f'(x) > 0\ ,$$

то x_0 – точка максимума функции $f(x)$ (рис. 3,б).

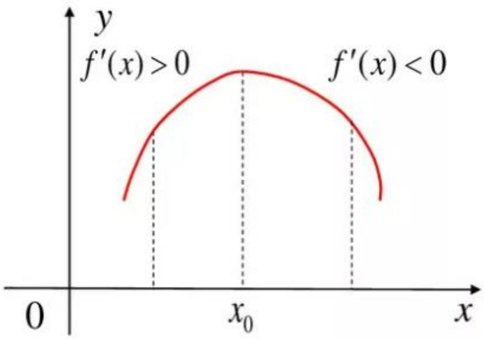


Рис. 3а

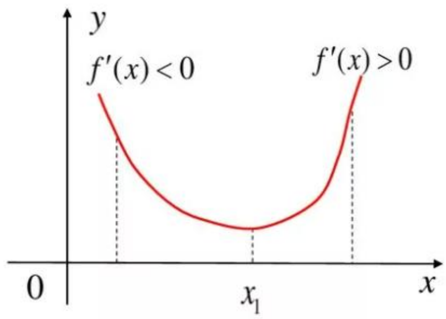


Рис. 3б

В соответствии с данной теоремой экстремальная точка функции разделяет участки монотонности функции. Если производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то слева от точки x_0 функция убывает, а справа от точки x_0 – возрастает; сама точка x_0 является точкой ***минимума*** функции.

Если же слева от точки x_0 функция возрастает, а справа убывает, то точка x_0 является точкой ***максимума***.

IV. Второе достаточное условие экстремума

Теорема: пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, то есть $f'(x_0) = 0$, и пусть существует $f''(x_0)$. Тогда:

а) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$;

б) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума функции.

Отметим, что первое достаточное условие экстремума можно использовать как в случае, когда в исследуемой точке производная обращается в нуль, так и в случае, когда производная в этой точке не существует. Второе достаточное условие можно использовать только в тех точках, где функция дифференцируема, причем $f'(x_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^2$. В точке $x_0 = 0$, $y' = 0$, $y'' = 2$, следовательно, в этой точке функция имеет минимум.

Если оказывается, что $f''(x_0)=0$ в стационарной точке, то функция *f(x)* может в этой точке иметь экстремум $(y=x^4\ ,\ x_0=0)$, а может и не иметь. В этом случае требуются дополнительные исследования поведения функции.

V. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Введем понятия ***наибольшего*** и ***наименьшего значений функции***.

Пусть существует точка $x_0\in(a,b)$, такая, что для всех $x\in(a,b)$ выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$, тогда говорят, что функция *f(x)* принимает в точке x_0 ***наибольшее*** (максимальное) ***значение на отрезке*** *(a, b)* и пишут

$$f(x_0)=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Аналогично определяется понятие ***наименьшего значения функции на отрезке***: если $\forall x\in[a,b]$ выполняется неравенство $f(x)\ge f(x_0)$, $x_0\in[a,b]$, то

$$f(x_0)=\min_{x\in[a,b]} f(x).$$

В случае, когда непрерывная на отрезке [a, b] функция *f(x)* имеет локальные максимумы в точках x_1, x_2,..., x_k и локальные минимумы в точках $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_k$, наибольшее значение функции *f(x)* на отрезке [a, b] следует искать среди чисел *f(a)*, $f(x_1)$, $f(x_2)$,..., $f(x_n)$, *f(b)*, а наименьшее значение - среди чисел $f(a)$, $f(\tilde{x}_1)$, $f(\tilde{x}_2)$, ... , $f(\tilde{x}_k)$, $f(b)$.

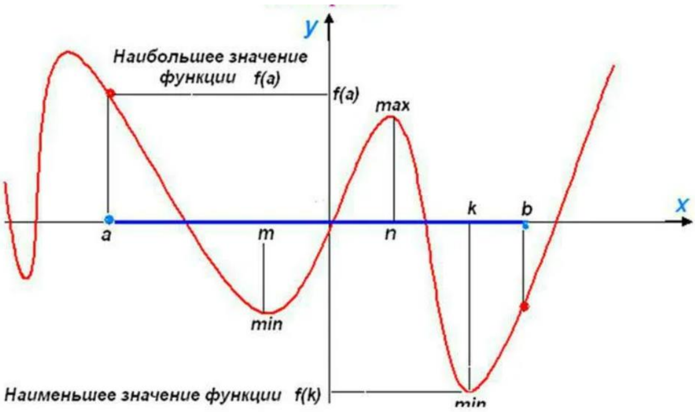


Рис. 4

В прикладных задачах для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке [a, b] необходимо найти критические точки функции *f(x)*, вычислить значения функции в этих точках, а также на концах отрезка [a, b] и выбрать из полученных значений наибольшее и наименьшее.

VI. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба функции

Определение 14.4. Дифференцируемая функция является ***выпуклой по направлению вверх*** на некотором интервале в том случае, если график данной функции располагается не выше касательной к нему в любой точке этого интервала (рис. 5,а).

Определение 14.5. Дифференцируемая функция является ***<u>выпуклой по направлению вниз</u>*** на некотором интервале в том случае, когда ее график располагается не ниже касательной к нему в любой точке этого интервала (рис. 5,б).

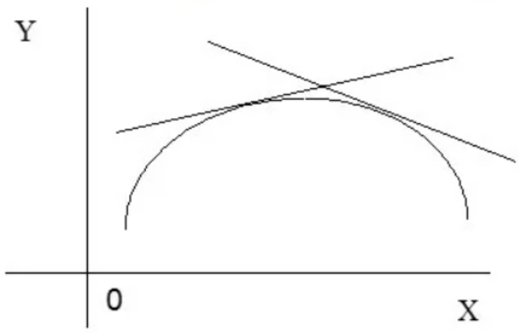


Рис. 5а

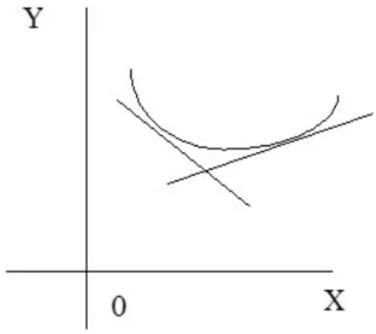


Рис. 5б

Определение 14.6. <u>Точка перегиба</u> функции – это точка $M(x_0, f(x_0))$, в которой существует касательная к графику функции, при условии существования производной в окрестности точки x_0, где с левой и правой стороны график функции принимает разные направления выпуклости.

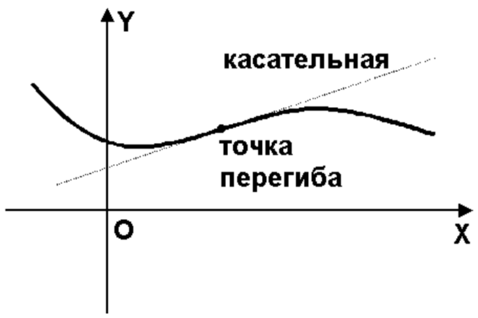


Рис. 6

VII. Достаточные условия выпуклости. Условия наличия точек перегиба

Теорема:

– если во всех точках интервала *(a, b)* вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх на этом интервале;

– если во всех точках интервала *(a, b)* вторая производная функции *f(x)* положительна, то кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью вниз на этом интервале.

Пусть точка x_0 – точка перегиба графика функции. Тогда существует такая δ-окрестность точки x_0, что в интервале $(x_0 - \delta , x_0)$ функция выпукла (вогнута), а в интервале $(x_0 , x_0 + \delta)$ функция вогнута (выпукла). Тогда слева от точки x_0 график функции лежит ниже (выше) касательной, а справа от точки x_0 график функции лежит выше (ниже) касательной к графику функции, проведенной в точке x_0. Поэтому касательная к графику функции в точке перегиба, если она существует, пересекает график.

Если точка x_0 является точкой перегиба графика функции, то в этой точке вторая производная либо равна нулю, либо не существует. Однако не всякая точка, в которой $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует, является точкой перегиба. Например, функция $y = x^4$ в точке $x_0=0$ имеет нулевую вторую производную, однако на всей области определения выпукла вниз.

Для того чтобы точка x_0 была точкой перегиба, необходимо выполнение достаточного условия.

Теорема: если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, имеет в этой точке конечную или бесконечную первую производную и если функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 – точка перегиба данной функции.

В качестве примера рассмотрим функции $y = x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$ (рис. 7а и рис. 7б).

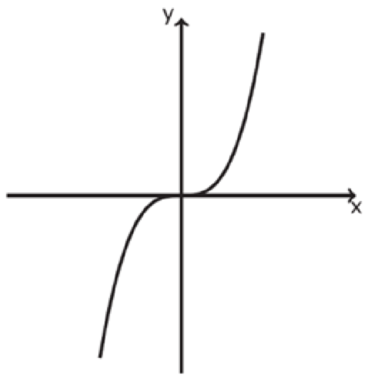


Рис. 7а

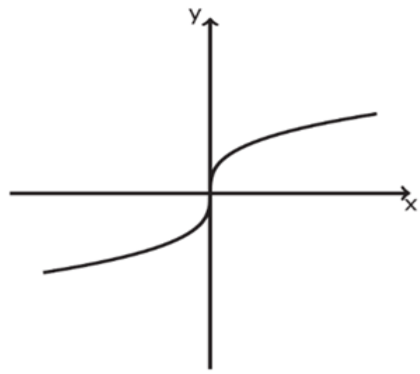


Рис. 7б

$y = x^3, y' = 3x^2, y'' = 6x\big|_{x=0} = 0$

$y''<0$ при $x<0$ – выпукла

$y''>0$ при $x>0$ – вогнута

$y=\sqrt[3]{x}, y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\bigg|_{x=0}$ – не существует

$y''<0$ при $x>0$ – выпукла

$y''>0$ при $x<0$ – вогнута

Для обеих функций вторая производная меняет знак при переходе через точку $x_0=0$. Эта точка является для них точкой перегиба.

VIII. Асимптоты графика функции

Пусть переменная точка $M(x, y)$ движется по графику функции $y = f(x)$. Исследуем поведение графика функции в том случае, когда точка M движется в бесконечность, то есть расстояние от этой точки до начала координат неограниченно возрастает. При этом наиболее важным является случай, когда кривая $y = f(x)$ неограниченно приближается к некоторой прямой.

Определение 14.7. Прямая называется ***асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменной точки M графика до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность (рис. 8) от начала координат.

Рис. 8

Различают вертикальные наклонные и горизонтальные (частный случай наклонных) асимптоты.

<u>Вертикальной асимптотой</u> графика функции $y = f(x)$ является прямая $x = a$, если выполняется одно из следующих равенств:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty\,,\ \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty\,,\ \lim_{x \to a} f(x) = \infty\,.$$

Следовательно, вертикальные асимптоты характеризуют поведение функций вблизи точек разрыва II рода.

Если график функции $y = f(x)$ имеет ***<u>наклонную асимптоту</u>***, уравнение которой имеет вид $y = kx + b$. При этом

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right].$$

Если существуют данные конечные пределы, то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$. При $k = 0$ мы получим частный случай наклонной асимптоты – горизонтальную асимптоту с уравнением $y = b$.

Пример. Найдем асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x}$.

Решение. Точка разрыва функции $x = 0$, вычислим односторонний предел функции при приближении к этой точке.

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = +\infty\,.$$

Значит, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой данной функции.

Будем искать наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-k\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=0.$$

Значит, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой данной функции.

Общая схема исследования функции и построения графиков

Общая схема исследования функций с помощью производных состоит из следующих разделов:

I. Общая характеристика функции.

1.1. Область определения функции.

1.2. Поведение функции в окрестностях точек разрыва.

1.3. Точки пересечения графика с осями координат.

1.4. Симметрия графика.

1.5. Периодичность графика.

II. Интервалы монотонности и экстремумы функции.

2.1. Нахождение первой производной функции.

2.2. Определение критических точек.

2.3. Нахождение интервалов монотонности.

2.4. Определение экстремумов функции.

III. Интервалы выпуклости и вогнутости.

3.1. Вычисление второй производной функции.

3.2. Определение точек перегиба.

3.3. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости.

IV. Наклонные асимптоты графика функции.

V. Таблица результатов исследования

VI. График функции.

Пример. Исследуем функцию $y=\frac{x^2}{1-x}$ и построим ее график.

Решение

1. Общая характеристика функции:

область определения $x\in(-\infty\ ,\ 1)\cup(1\ ,\ +\infty)$;

точка $x=1$ – точка разрыва функции;

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{1-x}=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{1-x}=-\infty\ .$$

Следовательно, прямая *x= 1* – вертикальная асимптота графика функции.

2. Интервалы монотонности и экстремумы функции:

$$y' = \frac{2x(1-x)-(-1)x^2}{(1-x)^2} = \frac{-2x^2+2x+x^2}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2} \quad .$$

Критические точки: $y' = 0$ при $x= 0$, $x= 2$, y' не существует при $x= 1$

при $-\infty < x < 0$ $\quad y' < 0$ – функция убывает,

при $0 < x < 1$ $\quad y' > 0$ – функция возрастает,

при $1 < x < 2$ $\quad y' > 0$ – функция возрастает,

при $2 < x < +\infty$ $\quad y' < 0$ – функция убывает.

y(0)= 0 – локальный минимум функции;

y(2)= -4 – локальный максимум функции.

3. Интервалы выпуклости и вогнутости: $y'' = \dfrac{2}{(1-x)^3}$.

$y'' < 0$ при $1 < x < +\infty$ – кривая выпукла;

$y'' > 0$ при $-\infty < x < 1$ – кривая вогнута.

4. Наклонные асимптоты кривой.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = -1 \ ;$$

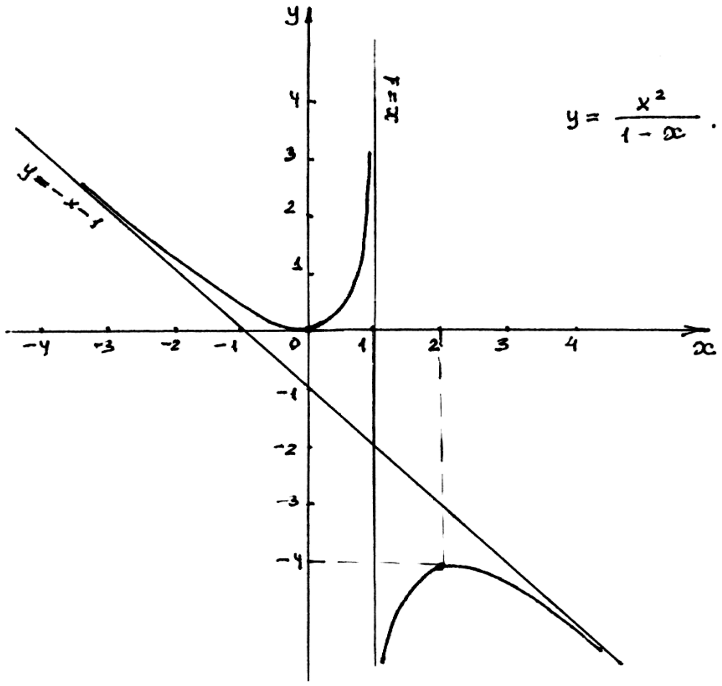
$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{1-x}+x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x} = -1 \ .$$

Прямая $y= -x-1$ – наклонная асимптота графика функции.

5. Результаты исследования:

x	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
$x\to-\infty$			$y= -x-1$
$(-\infty\ ,\ 0)$	<0	<0	$\searrow$,
0	<0	0	min, $y= 0$
$(0, 1)$	<0	>0	$\nearrow$,
1	———	———	$\to \pm\ \infty$
$(1, 2)$	>0	>0	$\nearrow$,
2	>0	0	max, $y= -4$
$(2,+\infty)$	>0	<0	$\searrow$,
$x\to+\infty$			$y= -x-1$

6. График функции:



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие по дисциплине «Математика» является расширенным изложением лекций, которые авторы читают для студентов геологического, географического и химического факультетов.

Последовательное изучение материалов позволяет студенту подготовиться ко второму триместру по курсу «Математика», а также входит в набор фундаментальных знаний специалистов естественно-научных направлений. Данный курс лекций содержит в себе базовые понятия математического анализа, а также линейной алгебры и аналитической геометрии. Основы дифференциального исчисления функции одной переменной, изучаемые в первом триместре, в дальнейшем будут необходимы при освоении таких разделов, как дифференциальное исчисление функции нескольких переменных, интегральное исчисление, основы теории дифференциальных уравнений, основы теории вероятностей.

Издание содержит все необходимые определения, аксиомы и теоремы из курса «Математика» за первый триместр первого курса, а также большое количество примеров по каждой теме, что значительно облегчает изучение представленных материалов. Также лекционный курс, представленный в учебном пособии, позволяет студентам подготовиться к практическим занятиям по курсу «Математика» и дает возможность повторить и углубить свои знания в этой сфере.

Список литературы

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учебник для втузов: в 2 т. М.: Интеграл-Пресс, 2001, Т. 1. 416 с.

2. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: Айрис-пресс, 2021. 608 с.

3. Демидович Б. П., Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики: учебное пособие для вузов. М.: ООО «Издательство Астрель»; ООО «Издательство АСТ», 2008. 656 с.

4. Шипачев В. С. Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. М.: Юрайт, 2013. 480 с.

5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2017. 492 с.

6. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 336 с.

Учебное издание

Сандакова Ольга Васильевна
Кувшинова Елена Владимировна
Панов Вячеслав Федорович

Математика. Лекции для естественно-научных факультетов

Часть 1

Учебное пособие

Редактор *А. С. Серебреников*
Корректор *С. А. Вороненко*
Компьютерная верстка: *Е. А. Шкураток*

Объем данных 4,17 Мб
Подписано к использованию 20.07.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15