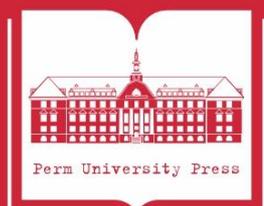


ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

И. С. Поперечный

**ВВЕДЕНИЕ
В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКУЮ
ТЕОРИЮ МАГНЕТИЗМА**



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И. С. Поперечный

ВВЕДЕНИЕ В ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ МАГНЕТИЗМА

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки магистров
«Прикладные математика и физика»*



Пермь 2024

УДК 537.6, 537.8(075.8)

ББК 22.3я73

П573

Поперечный И. С.

П573 Введение в феноменологическую теорию магнетизма [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. С. Поперечный ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2024. – 2,07 Мб ; 106 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Poperechnyj-Vvedenie-v-fenomenologicheskuyu-teoriyu-magnetizma.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4167-3

В учебном пособии излагаются элементы феноменологической теории магнетизма. Оно содержит первоначальные сведения о методах описания квазиравновесных состояний и магнитного отклика сильномагнитных веществ. Рассматриваются различные типы магнитного упорядочения, но основное внимание уделяется ферромагнетикам. Издание предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Прикладные математика и физика».

УДК 537.6, 537.8(075.8)

ББК 22.3я73

Издается по решению ученого совета физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: лаборатория Динамики дисперсных систем Института механики сплошных сред УрО РАН (филиал ПФИЦ УрО РАН) (зав. лабораторией, д-р физ.-мат. наук, доцент **А. С. Иванов**);

доцент кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» Пермского национального исследовательского политехнического университета, канд. физ.-мат. наук, доцент **П. В. Меленев**

ISBN 978-5-7944-4167-3

© ПГНИУ, 2024

© Поперечный И. С., 2024

Предисловие

Теория магнетизма — одна из наименее разработанных областей физики твёрдого тела. Исчерпывающее понимание магнетизма возможно только в рамках квантовой теории. При этом сравнительно простые приближения и методы (например, модель независимых электронов), которые корректно описывают немагнитные свойства кристаллов, при изучении магнитного упорядочения оказываются несостоятельными. Попытки же выйти за рамки известных подходов, как правило, не получают развития из-за серьёзных вычислительных трудностей. На сегодняшний день в магнетизме преобладает феноменологическая теория, в которой фигурируют только средние макроскопические характеристики состояния вещества и электромагнитного поля. Она не является вполне последовательной и строгой, однако позволяет делать выводы, которые согласуются с экспериментальными данными и намечают перспективы практического применения магнитных материалов.

Предлагаемое пособие знакомит с базовыми понятиями и методами феноменологической теории магнетизма. Оно призвано подготовить студентов к чтению специальных учебников, монографий и оригинальных статей, посвящённых магнитным свойствам физических систем. Некоторые из них приведены в списке рекомендуемой литературы. Для плодотворной работы с пособием крайне желательно знание основ электродинамики в пределах стандартного курса общей физики.

Содержание

1. Метод среднего поля в теории магнетизма	6
1.1. Слабо- и сильномагнитные вещества	6
1.2. Теорема Бора–ван Лёвен и квазиклассический подход	8
1.3. Диамагнетизм	9
1.4. Парамагнетизм	11
1.5. Ферромагнетизм	15
1.6. Антиферромагнетизм	21
1.7. Ферримагнетизм	25
1.8. Ферромагнетик вблизи точки Кюри	28
1.8.1. Теория среднего поля	28
1.8.2. Теория Ландау	30
1.9. Магнитная анизотропия	33
1.9.1. Релятивистские взаимодействия	33
1.9.2. Феноменологическое выражение	36
1.10. Модель Стонера-Вольфарта	38
1.10.1. Петли гистерезиса	38
1.10.2. Астроида	44
2. Доменная структура ферромагнетиков	47
2.1. Уравнения магнитостатики	47
2.2. Поле внутри однородно намагниченного эллипсоида	49
2.2.1. Однородно намагниченный шар	49
2.2.2. Однородно намагниченный цилиндр	53
2.2.3. Общий случай	55
2.3. Магнитостатическая энергия	56
2.3.1. Анизотропия формы	56
2.3.2. Роль магнитного дипольного взаимодействия	56
2.4. Магнитные заряды	59
2.5. Магнитные домены	60
2.6. Макроскопическая обменная энергия	66
2.7. Доменная стенка Ландау и Лифшица	67
2.8. Доменные стенки Блоха и Нееля	71

2.9. Доменная структура и конкуренция вкладов в магнитную энергию	73
2.10. Доменная структура ферромагнитной пластинки	74
2.10.1. Страйп-структура	74
2.10.2. Лабиринтные структуры и цилиндрические домены	82
2.11. Однодоменные частицы	83
3. Динамика вектора намагниченности	85
3.1. Уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта	85
3.1.1. Уравнение движения намагниченности без учёта диссипации	85
3.1.2. Учёт диссипации	87
3.2. Ферромагнитный резонанс	89
3.2.1. Собственные колебания вектора намагниченности	89
3.2.2. Вынужденные колебания вектора намагниченности. Ферромагнитный резонанс	91
3.2.3. Роль диссипации	94
3.2.4. Естественный ферромагнитный резонанс	96
3.3. Спиновые волны	99
4. Список рекомендуемой литературы	105

1. Метод среднего поля в теории магнетизма

1.1. Слабо- и сильномагнитные вещества

Электроны и атомные ядра обладают магнитным моментом, поэтому любое вещество реагирует на приложение магнитного поля. Однако большинство материалов являются слабомагнитными: их намагниченность \mathbf{M} (средний магнитный момент единицы объёма) отлична от нуля только во внешнем магнитном поле. При этом связь между намагниченностью вещества и напряжённостью \mathbf{H} постоянного внешнего поля является линейной:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}. \quad (1.1)$$

Коэффициент пропорциональности χ между \mathbf{M} и \mathbf{H} называется *статической магнитной восприимчивостью* системы. Вещества, для которых $\chi > 0$, называют парамагнитными или парамагнетиками. Вещества, для которых $\chi < 0$, называют диамагнитными или диамагнетиками.

Кроме того, существуют так называемые сильномагнитные вещества, к которым, в первую очередь, относят ферромагнетики, а также антиферромагнетики и ферримагнетики. Ферромагнетики могут быть намагничены ($\mathbf{M} \neq 0$) даже в отсутствие внешнего магнитного поля, а зависимость между векторами \mathbf{M} и \mathbf{H} является для них нелинейной. Характер этой зависимости иллюстрирует рис. 1.1. По вертикальной оси на нём отложены значения M_H проекции вектора намагниченности на направление приложенного поля — именно эта величина, как правило, измеряется в экспериментах. Если образец в исходном состоянии не намагничён, то с увеличением поля H величина M_H сначала возрастает, а затем достигает насыщения, приближаясь к максимальному значению M_s , которое называют *намагниченностью насыщения*.

Ещё одной характерной особенностью ферромагнетиков является неоднозначная связь между намагниченностью и приложенным полем: значение M_H зависит не только величины H , но и от предшествующей истории намагничивания системы. Это явление называется *магнитным гистерезисом*. Пусть образец изначально размагничён; будем увеличивать внешнее поле от нуля до некоторого значения H_1 , так что зависимость $M_H(H)$ изобразится кривой OA_1 на рис. 1.2. Если после этого уменьшать приложенное поле

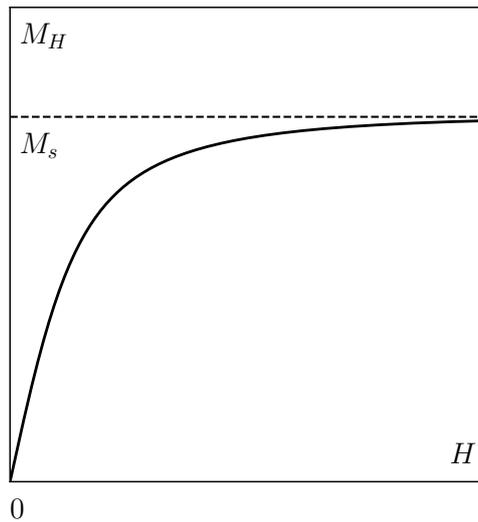


Рис. 1.1. Нелинейная зависимость между намагниченностью и приложенным полем для ферромагнетиков

от H_1 до нуля, то образец не вернётся в исходное состояние: кривая намагничивания пойдёт по пути A_1B_1 . При дальнейшем снижении поля до $-H_1$ кривая намагничивания достигнет точки C_1 . Если после этого вновь увеличивать поле от $-H_1$ до H_1 , то кривая намагничивания вернётся в точку A_1 , но не по пути $C_1B_1A_1$, а по пути $C_1D_1A_1$. Получившаяся замкнутая кривая намагничивания $A_1B_1C_1D_1A_1$ называется *петлёй гистерезиса*. Изменяя положение точки A_1 , можно получить целый набор вложенных друг в друга кривых гистерезиса. Наибольшая, или *предельная*, петля гистерезиса получится, если начальную кривую OA_1 довести до точки, где намагниченность достигает насыщения (кривая $ABCD A$ на рис. 1.2). Важными характеристиками предельной петли, помимо намагниченности насыщения M_s , являются остаточная намагниченность M_r — значение проекции M_H при $H = 0$, а также коэрцитивная сила, или коэрцитивность, H_c — абсолютная величина поля, при котором M_H обращается в нуль.

Одной из основных задач теории магнетизма является последовательное описание магнитного отклика различных веществ на приложение внешнего магнитного поля. Вообще говоря, строго она может быть решена только в рамках квантовой механики. Однако применение квантовой теории к реальным системам сталкивается с серьёзными вычислительными трудностями, для преодоления которых приходится прибегать к тем или иным модельным представлениям и упрощениям. Один из наиболее плодотворных при-

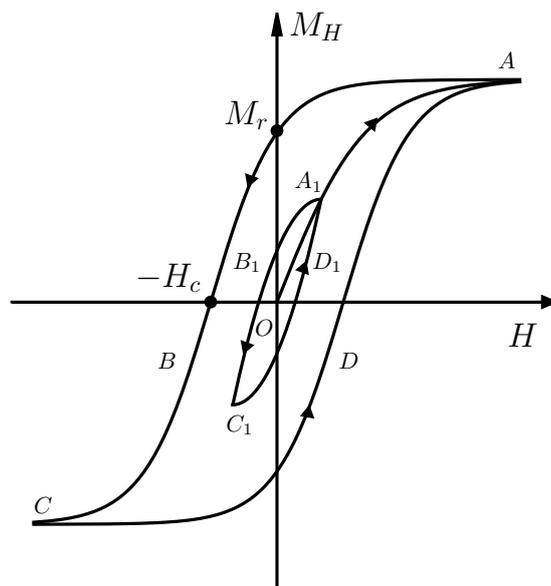


Рис. 1.2. Типичные петли гистерезиса для ферромагнетиков

ближённных подходов в теории магнетизма, получивший название квази- или полуклассического, будет рассмотрен далее.

1.2. Теорема Бора–ван Лёвен и квазиклассический подход

Нильс Бор в 1911 г. и Хендрика ван Лёвен в 1920 г. методами статистической физики показали, что в состоянии термодинамического равновесия система электрически заряженных частиц, строго подчиняющихся законам классической физики, обладает нулевым магнитным моментом, независимо от величины приложенного магнитного поля. Этот теоретический вывод, конечно, никак не согласуется с экспериментальными данными.

Противоречие между результатом Бора и ван Лёвен и опытными фактами указывает на то, что магнетизм — явление квантовое. Это, однако, не означает, что классическая физика полностью непригодна для интерпретации магнитных явлений. Теорема Бора и ван Лёвен исключает лишь применение классической физики в чистом виде. Квантовая механика вскрывает природу магнетизма, но в практическом отношении (описание процессов в реальных материалах) её методы малоэффективны ввиду многочисленных технических трудностей. Поэтому в теории магнетизма широко применяется *квазиклассический* (или *полуклассический*) подход, который заимствует представления и

выводы квантовой теории, но облакает их в классическую форму. К примеру, этот метод предполагает, что атомы устойчивы, а электроны в нём находятся на стационарных орбитах (т. е. в стационарных квантово-механических состояниях). Кроме того, он привлекает такое квантово-механическое понятие, как спин частицы, однако трактует его как классический вектор, а не как линейный оператор. Такой подход, с одной стороны, позволяет избежать противоречия с теоремой Бора–ван Лёвен, а с другой, значительно упростить математическое описание физических явлений.

1.3. Диамagnetизм

В качестве примера рассмотрим квазиклассическое описание диамagnetизма атомов и атомарных газов. Для этого из квантовой механики заимствуем представление о том, что атом устойчив: электроны вращаются вокруг ядра, не падая на него, по стационарным орбитам. В отсутствие магнитного поля на каждый электрон действуют силы со стороны ядра и других электронов. В постоянном внешнем поле \mathbf{H} к ним добавится магнитная часть силы Лоренца $-\frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$, где \mathbf{v} — скорость электрона; его заряд предполагается равным $-e$. Рассмотрим, как изменится состояние атома при наличии этой силы.

Для этого перейдём в систему отсчёта, вращающуюся с некоторой угловой скоростью Ω вокруг направления приложенного поля. Будем при этом предполагать, что величина Ω мала по сравнению с угловой скоростью ω вращения электронов вокруг ядра: $\Omega \ll \omega$. Поскольку выбранная система отсчёта не является инерциальной, в уравнении движения отдельного электрона нужно учесть силы инерции: центробежную силу $m_e\Omega^2\mathbf{r}$ и силу Кориолиса $2m_e\mathbf{v}_{\text{отн}} \times \Omega$, где $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v} - \Omega \times \mathbf{r}$ — скорость движения электрона относительно вращающейся системы отсчёта. Если $\Omega \ll \omega$, то центробежной силой, пропорциональной Ω^2 , можно пренебречь совсем, а в выражении для силы Кориолиса заменить $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ на \mathbf{v} (такая замена приведёт к появлению пренебрежимо малого слагаемого $\sim \Omega^2$). Тогда сумма сил инерции и магнитной части силы Лоренца сведётся к $2m_e\mathbf{v} \times \Omega - \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}$.

Если выбрать Ω так, чтобы указанная сумма равнялась нулю, т. е. положить

$$\Omega = \frac{e}{2m_e c}\mathbf{H}, \quad (1.2)$$

то во вращающейся системе отсчёта к силам, действующим на электрон со стороны ядра и других электронов, не добавится новых сил. Иначе говоря, при $\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \mathbf{H}$ во вращающейся системе отсчёта атом будет находиться в том же стационарном состоянии, в котором он находился до включения магнитного поля в неподвижной системе отсчёта. Этот результат известен как *теорема Лармора*: при наличии внешнего постоянного магнитного поля движение электронов остаётся тем же, но атом в целом получает дополнительное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2m_e c} \mathbf{H}$.

Убедимся в справедливости использованного нами условия $\Omega \ll \omega$. Перепишем его следующим образом:

$$H \ll \frac{2m_e c}{e} \omega. \quad (1.3)$$

В гауссовой системе единиц заряд электрона и его масса равны соответственно $e = 4.8 \times 10^{-10}$ ед. и $m_e = 9.1 \times 10^{-28}$ г, частота его вращения вокруг ядра $\omega \sim 10^{15}$ рад/с (оптический диапазон). Подстановка этих числовых данных приводит к условию $H \ll 10^8$ Э. Значение 10^8 Э отвечает очень сильному магнитному полю, даже импульсные поля в лабораторных условиях редко превосходят 10^6 Э. Поэтому условие $\Omega \ll \omega$ хорошо выполняется.

Ларморовскому вращению каждого электрона отвечает момент импульса, направленный вдоль угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ и, соответственно, внешнего поля \mathbf{H} . Если ввести декартовую систему координат с осью Oz вдоль вектора \mathbf{H} , то среднее (по времени) значение этого момента можно вычислить, умножая средний момент инерции электрона (относительно оси) на угловую скорость: $m_e \overline{(x^2 + y^2)} \Omega$. Кроме того, вращающемуся электрону отвечает ток $I = -e\Omega/2\pi$, а значит, ему присущ магнитный момент $\mu = IS/c = -e \overline{(x^2 + y^2)} \Omega/2c$. Отношение механического момента системы к магнитному принято называть *гиромагнитным отношением*; для орбитального движения электрона оно, таким образом, равно

$$\gamma = -\frac{e}{2m_e c}. \quad (1.4)$$

Средний магнитный момент атома μ_a найдётся суммированием магнитных моментов всех его Z электронов:

$$\mu_a = -\frac{e}{2c} \cdot \sum_{\alpha=1}^Z \overline{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)} \Omega = -\frac{e}{2c} \cdot \sum_{\alpha=1}^Z \overline{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)} \frac{eH}{2m_e c} = -\frac{e^2 H}{4m_e c^2} \sum_{\alpha=1}^Z \overline{(x_\alpha^2 + y_\alpha^2)}. \quad (1.5)$$

Соответственно, намагниченность газа равна

$$M = n \mu_a = -\frac{ne^2 H}{4m_e c^2} \sum_{\alpha=1}^Z \left(\overline{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \right), \quad (1.6)$$

где n — объёмная концентрация атомов. Коэффициент пропорциональности

$$\chi = -\frac{ne^2 H}{4m_e c^2} \sum_{\alpha=1}^Z \left(\overline{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} \right) \quad (1.7)$$

между величинами M и H строго отрицателен; он называется диамагнитной восприимчивостью атомарных газов. Найденное выражение для χ в точности совпадает с результатом, который следует из квантовой теории.

1.4. Парамагнетизм

Диамагнетизм наблюдается у всех веществ. Однако его вклад в статическую магнитную восприимчивость оказывается пренебрежимо малым в тех случаях, когда материал состоит из атомов, обладающих магнитным моментом даже в отсутствие внешнего поля. Рассмотрим этот случай с помощью квазиклассического подхода.

Используем известный из квантовой механики факт, что магнитный момент атома $\boldsymbol{\mu}$ связан с его механическим моментом соотношением

$$\boldsymbol{\mu} = -g\mu_B \mathbf{S}, \quad (1.8)$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 9.27 \times 10^{-21}$ эрг/Гс — так называемый магнетон Бора, а g — множитель Ландэ (g -фактор). Связь между $\boldsymbol{\mu}$ и \mathbf{S} можно также записать с помощью гиромангнитного отношения в виде $\boldsymbol{\mu} = -\gamma \mathbf{S}$. В квазиклассическом подходе величины g и γ рассматриваются как некоторые феноменологические параметры. Величина \mathbf{S} здесь представляет собой полный механический момент — сумму орбитального и спинового момента — атома в единицах постоянной Планка $\hbar = 1.05 \times 10^{-27}$ эрг \times с. Однако по традиции в квазиклассическом подходе вектор \mathbf{S} называют просто спином. Энергия взаимодействия спина с внешним полем (энергия Зеемана) равна $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H} = g\mu_B \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}$.

Выполним расчёт среднего магнитного момента \mathbf{m} ансамбля невзаимодействующих друг с другом атомов, каждый из которых обладает магнитным

моментом $-g\mu_B \mathbf{S}$. Согласно статистической механике магнитный момент системы связан с её свободной энергией F соотношением

$$\mathbf{m} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{H}}. \quad (1.9)$$

Для совокупности из N невзаимодействующих атомов

$$F = -N\Theta \ln Z, \quad (1.10)$$

где

$$Z = \sum_j \exp(U_j/\Theta) \quad (1.11)$$

есть сумма по состояниям отдельного атома с уровнями энергии U_j , а $\Theta = k_B T$ — тепловая энергия ($k_B = 1.38 \times 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана, T — температура в абсолютных единицах). В рассматриваемом случае $U_j = g\mu_B jH$, где j — величина проекции спина на направление поля. Из квантовой механики известно, что она может принимать лишь дискретный ряд значений:

$$j = -S, -S + 1, \dots, S, \quad (1.12)$$

поэтому

$$Z = \sum_{j=-S}^S \exp(g\mu_B jH/\Theta). \quad (1.13)$$

Для расчёта указанной суммы удобно ввести величину $\varepsilon = \exp\left(\frac{g\mu_B H}{\Theta}\right)$ и свести задачу к вычислению геометрической прогрессии:

$$Z = \sum_{j=-S}^S \varepsilon^j = \frac{\varepsilon^{-S} (1 - \varepsilon^{2S+1})}{1 - \varepsilon}. \quad (1.14)$$

Запишем это выражение в более симметричной форме:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\varepsilon^{-S} (1 - \varepsilon^{2S+1})}{1 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon^{-S} \varepsilon^{\frac{2S+1}{2}} \left(\varepsilon^{-\frac{2S+1}{2}} - \varepsilon^{\frac{2S+1}{2}} \right)}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)} = \frac{\varepsilon^{\frac{2S+1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{2S+1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{e^{\frac{2S+1}{2}\xi} - e^{-\frac{2S+1}{2}\xi}}{e^{\frac{\xi}{2}} - e^{-\frac{\xi}{2}}} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2S+1}{2}\xi\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\xi}{2}\right)}, \quad \xi = \frac{g\mu_B H}{\Theta}, \quad (1.15) \end{aligned}$$

и найдём производную от $\ln Z$ по величине поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln Z}{\partial H} &= \frac{\partial \ln Z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial H} = \frac{g\mu_B}{T} \left(\frac{2S+1}{2} \frac{\operatorname{ch} \left[\frac{2S+1}{2} \xi \right]}{\operatorname{sh} \left[\frac{2S+1}{2} \xi \right]} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ch} \frac{\xi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\xi}{2}} \right) = \\ &= \frac{g\mu_B S}{T} \left(\frac{2S+1}{2S} \operatorname{cth} \left(\frac{2S+1}{2} \xi \right) - \frac{1}{2S} \operatorname{cth} \frac{\xi}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Следовательно, магнитный момент системы (он направлен вдоль приложенного поля) и её намагниченность соответственно равны

$$\mathbf{m} = Ng\mu_B S \left(\frac{2S+1}{2S} \operatorname{cth} \left(\frac{2S+1}{2} \xi \right) - \frac{1}{2S} \operatorname{cth} \frac{\xi}{2S} \right), \quad (1.17)$$

$$M = \frac{\mathbf{m}}{V} = ng\mu_B S \left(\frac{2S+1}{2S} \operatorname{cth} \left(\frac{2S+1}{2} \xi \right) - \frac{1}{2S} \operatorname{cth} \frac{\xi}{2S} \right), \quad (1.18)$$

где n — число атомов в единице объёма. При заданной величине спина S выражение в скобках является функцией только параметра ξ . Для этой функции вводят обозначение

$$B_S(x) = \frac{2S+1}{2S} \operatorname{cth} \left[\frac{2S+1}{2S} x \right] - \frac{1}{2S} \operatorname{cth} \frac{x}{2S} \quad (1.19)$$

и называют *функцией Бриллюэна* S -го порядка. Графики зависимости $B_S(x)$ при различных значениях S показаны на рис. 1.3.

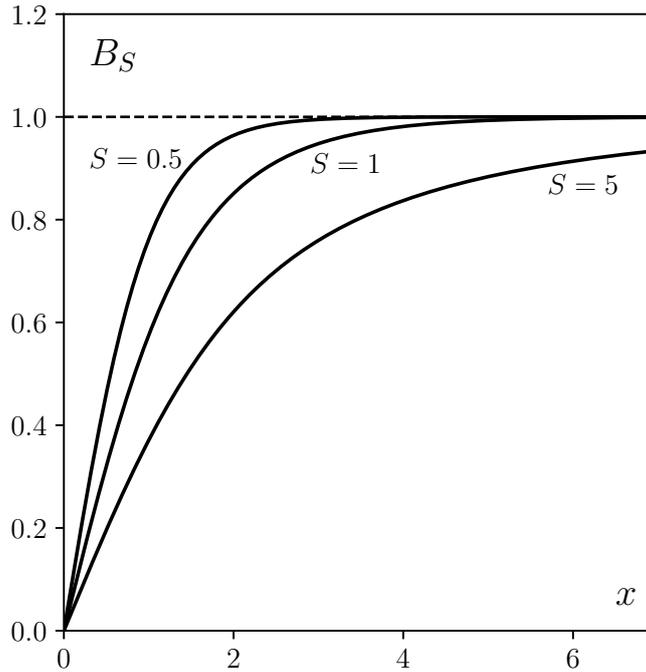


Рис. 1.3. Графики функций Бриллюэна различных порядков S

Таким образом, в компактном виде намагниченность парамагнитной системы записывается согласно

$$M = ng\mu_B SB_S \left[\frac{Sg\mu_B H}{T} \right]. \quad (1.20)$$

Любопытно отметить, что в специальном случае $S = 1/2$ функция Бриллюэна сводится к гиперболическому тангенсу: $B_{1/2}(x) = \text{th } x$. В самом деле, по определению

$$B_{1/2}(x) = 2 \text{cth } 2x - \text{cth } x. \quad (1.21)$$

Но

$$\text{cth } 2x = \frac{\text{ch } 2x}{\text{sh } 2x} = \frac{\text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x}{2 \text{sh } x \text{ch } x} = \frac{1}{2} (\text{th } x + \text{cth } x), \quad (1.22)$$

поэтому

$$B_{1/2}(x) = 2 (\text{th } x + \text{cth } x) \frac{1}{2} - \text{cth } x = \text{th } x. \quad (1.23)$$

Соответственно, намагниченность системы при $S = 1/2$ равна

$$M = ng\mu_B SB_{1/2} \left(\frac{Sg\mu_B H}{T} \right) = ng\mu_B S \text{th} \left(\frac{Sg\mu_B H}{T} \right). \quad (1.24)$$

Найдём статическую магнитную восприимчивость парамагнитного газа. Для этого выполним разложение функции Бриллюэна с точностью с линейных членов. Учитывая ряды Тейлора

$$\text{sh } \xi = \xi + \frac{1}{6}\xi^3 + \frac{1}{120}\xi^5 + \dots; \quad \text{ch } \xi = 1 + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{24}\xi^4 + \dots, \quad (1.25)$$

находим

$$\text{cth } \xi = \frac{\text{ch } \xi}{\text{sh } \xi} \approx \frac{1 + \frac{1}{2}\xi^2}{\xi + \frac{1}{6}\xi^3} = \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{1}{2}\xi^2 \right) \left(1 - \frac{1}{6}\xi^2 \right) \approx \frac{1}{\xi} \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2 \right) = \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{3}. \quad (1.26)$$

Значит,

$$\begin{aligned} B_s(x) &\approx \frac{2S+1}{2S} \left[\frac{2S}{2S+1} \frac{1}{x} + \frac{2S+1}{2S} \frac{x}{3} \right] - \frac{1}{2S} \left[\frac{2S}{x} + \frac{1}{2S} \frac{x}{3} \right] = \\ &= \left[\left(\frac{2S+1}{2S} \right)^2 - \left(\frac{1}{2S} \right)^2 \right] \frac{x}{3} = \frac{S+1}{S} \frac{x}{3}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Таким образом, в линейном приближении по полю намагниченность системы равна

$$M = n g \mu_B S \frac{S+1}{3S} \frac{g \mu_B S H}{T} = \frac{n (g \mu_B)^2 S(S+1)}{3T} H. \quad (1.28)$$

Отсюда следует выражение для парамагнитной восприимчивости

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{n (g \mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B T} = \frac{C}{T}, \quad C = \frac{n (g \mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B}. \quad (1.29)$$

Как видно, она обратно пропорциональна абсолютной температуре T . Этот вывод, известный как закон П. Кюри, полностью согласуется с экспериментальными данными.

При больших значениях аргумента функция Бриллюэна асимптотически стремится к единице в силу того, что $\text{cth } x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому в сильных полях, когда $\frac{g \mu_B S H}{\Theta} \gg 1$, намагниченность достигает предельного значения $M_s = n g \mu_B S$. Насыщению намагниченности, очевидно, отвечает ситуация, когда магнитные моменты всех атомов устанавливаются вдоль приложенного поля.

1.5. Ферромагнетизм

А. Модель Гейзенберга: квазиклассический подход

Перейдём к рассмотрению веществ с сильными магнитными свойствами. Начнём с ферромагнетиков, для которых характерна спонтанная (т. е. даже в отсутствие внешнего поля) намагниченность, возникающая из-за стремления элементарных магнитных моментов ориентироваться в одном и том же направлении. Типичными представителями ферромагнетиков являются такие металлы, как железо, кобальт и никель. Но ферромагнитными могут быть и неметаллические соединения, например, монооксид европия EuO . Ферромагнитных жидкостей и газов не существует: сильный магнетизм наблюдается только у веществ с кристаллической решёткой (так называемые магнитные жидкости — искусственные дисперсии твёрдых ферромагнитных наночастиц в жидкой матрице — попытка устранить этот “пробел”). Кроме того, сильный магнетизм наблюдается только в тех случаях, когда в составе кристаллической решётки есть атомы с недостроенными внутренними электронными оболочками. Однако наличие таких атомов не является достаточным условием

сильных магнитных свойств. В табл. показаны электронные конфигурации атомов $3d$ -металлов группы железа.

Табл. Электронная конфигурация атомов $3d$ -металлов группы железа.

Химический элемент	Обозначение	Электронная конфигурация
Скандий	Sc	$3d^1 4s^2$
Титан	Ti	$3d^2 4s^2$
Ванадий	V	$3d^3 4s^2$
Хром	Cr	$3d^5 4s^1$
Марганец	Mn	$3d^5 4s^2$
Железо	Fe	$3d^6 4s^2$
Кобальт	Co	$3d^7 4s^2$
Никель	Ni	$3d^8 4s^2$

Как видно, у всех этих атомов не достроена $3d$ -оболочка, которая является внутренней по отношению к $4s$ -оболочке. Тем не менее кристаллы Sc, Ti и V парамагнитны и не проявляют сильного магнетизма (хром и марганец относятся к антиферромагнетикам).

Достаточные условия наличия у кристалла сильных магнитных свойств в полной мере не сформулированы. Однако не вызывает сомнения, что причиной ориентационного упорядочения спинов в веществах с сильными магнитными свойствами является так называемое *обменное взаимодействие*, или обменные силы, между электронами. Это взаимодействие является чисто квантовым эффектом, которому нельзя дать последовательное классическое истолкование. Согласно квантовой механике энергия кулоновского взаимодействия системы одинаковых заряженных частиц включает в себя слагаемое, которое зависит не только от расстояния между частицами, но и взаимной ориентации их спинов. Эту часть энергии и называют энергией обменного взаимодействия, или просто обменной энергией. Обменные силы действуют на расстояниях порядка атомных, т. е. являются короткодействующими, но при определённых условиях они стремятся упорядочить направления спинов атомов вещества. В квазиклассическом подходе энергия обменного взаимодействия i -го и j -го спинов записывается в виде

$$E_{\text{обм}} = -2J_{ij}\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (1.30)$$

Коэффициент J_{ij} здесь имеет размерность энергии и называется *обменным интегралом*. В принципе, его можно рассчитать методами квантовой механики, но в квазиклассическом подходе он является феноменологическим параметром. Если $J_{ij} > 0$, то спинам энергетически выгодно ориентироваться в одном направлении, а если $J_{ij} < 0$ — в противоположном.

В теории магнетизма широко применяется модель, предложенная В. Гейзенбергом. В этой модели ферромагнитный кристалл представляется системой из неподвижных спинов, расположенных в узлах решётки и связанных друг с другом обменным взаимодействием. При этом энергия системы во внешнем магнитном поле \mathbf{H} при квазиклассическом истолковании записывается в виде

$$E = - \sum_i \sum_{j \neq i} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j - \sum_i g \mu_B \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{H}, \quad (1.31)$$

где первое слагаемое отвечает за взаимодействие спинов друг с другом (полная энергия обменного взаимодействия), а второе — за их взаимодействие с внешним полем (энергия Зеемана). Каждый член в первой сумме встречается дважды и не содержит двойки в качестве множителя. Для ферромагнетиков обменные интегралы J_{ij} положительны.

Б. Метод среднего поля

В реальных макроскопических образцах число спинов огромно (порядка числа Авогадро), поэтому выполнить количественное описание магнитного состояния ферромагнетиков затруднительно даже с помощью сравнительно простой гейзенберговской модели. Одним из наиболее известных подходов к преодолению вычислительных трудностей в задаче многих тел является так называемый метод среднего поля. Его суть заключается в том, что взаимодействие каждой частицы со всеми остальными рассматривается как действие на эту частицу некоторого среднего (самосогласованного) поля, свойства которого не чувствительны к нумерации частиц. Применительно к магнитной системе это означает следующее.

Сначала выбирается один из спинов \mathbf{S}_i с номером i и посредством замены всех остальных спинов их статистическими средними его энергия записывается в виде

$$E_i = -2 \sum_{j \neq i} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \langle \mathbf{S}_j \rangle - g \mu_B \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{H}. \quad (1.32)$$

В этом выражении первая сумма отвечает энергии взаимодействия выбранно-

го i -го спина со всеми остальными, а вторая — его взаимодействию с внешним полем. Необходимо подчеркнуть, что энергия всей системы $E \neq \sum_i E_i$. Если ввести эффективное магнитное поле

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H} + \frac{2}{g\mu_B} \sum_{j \neq i} J_{ij} \langle \mathbf{S}_j \rangle, \quad (1.33)$$

то выражение для E_i можно представить следующим образом:

$$E_i = -g\mu_B \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{H}_i. \quad (1.34)$$

При такой форме записи видно, что в рассматриваемом подходе обменное взаимодействие спинов друг с другом моделируется взаимодействием каждого из них со средним полем $\frac{2}{g\mu_B} \sum_{j \neq i} J_{ij} \langle \mathbf{S}_j \rangle$. Это позволяет свести задачу к рассмотрению изолированного парамагнитного атома, находящегося в магнитном поле \mathbf{H}_i , и записать для средней проекции магнитного момента $\langle \mu_{iz} \rangle$ в i -м узле на направление внешнего поля (на ось z) формулу

$$\langle \mu_{iz} \rangle = g\mu_B S B_S \left(\frac{g\mu_B S H_i}{k_B T} \right); \quad (1.35)$$

здесь учтено, что все статистические средние $\langle \mathbf{S}_j \rangle$ направлены вдоль приложенного поля (проекции на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{H} , в среднем равны нулю).

Следующим шагом в методе эффективного поля является утверждение, что после статистического усреднения разница между выбранным i -м спином и всеми остальными полностью исчезает. Индекс i убирается, и средний магнитный момент, связанный с отдельным спином, записывается как

$$\begin{aligned} \langle \mu_z \rangle &= g\mu_B S B_S \left[\frac{g\mu_B S}{k_B T} \left(H + \frac{2\langle S_z \rangle}{g\mu_B} \sum_{j \neq i} J_{ij} \right) \right] = \\ &= g\mu_B S B_S \left[\frac{g\mu_B S}{T} \left(H + \frac{2\langle \mu_z \rangle}{(g\mu_B)^2} \sum_{j \neq i} J_{ij} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Отсюда сразу следует уравнение для намагниченности кристалла $M = n\langle \mu_z \rangle$:

$$M = n g\mu_B S B_S \left[\frac{g\mu_B S}{T} \left(H + \frac{2M}{n(g\mu_B)^2} \sum_j J_{ij} \right) \right]. \quad (1.37)$$

Вообще говоря, это соотношение содержит некоторую неопределённость, связанную с тем, что сумма $\sum_{j \neq i} J_{ij}$ зависит от i , т. е. “метка” с i -го спина снята не полностью. От этой неопределённости можно избавиться, если учесть, что обменные интегралы крайне быстро (экспоненциально) уменьшаются с увеличением расстояния между спинами. Это позволяет считать, что для спинов, которые не являются ближайшими соседями, все обменные интегралы равны нулю. В таком приближении $\sum_{j \neq i} J_{ij} = pJ$, где J — величина обменного интеграла для ближайших соседей, а p — их число. В результате для намагниченности получается уравнение

$$M = n g \mu_B S B_S \left(\frac{g \mu_B S}{k_B T} (H + \lambda M) \right), \quad \lambda = \frac{2pJ}{n (g \mu_B)^2}. \quad (1.38)$$

Оно является трансцендентным, однако его численное решение не встречает особых трудностей. Полезно также выполнить его графический анализ. Для этого преобразуем его в систему уравнений

$$\begin{cases} M = M_s B_S(x) \\ M = \frac{n k_B T}{\lambda M_s} x - \frac{H}{\lambda}, \end{cases} \quad (1.39)$$

введя переменную $x = \frac{g \mu_B S}{k_B T} (H + \lambda M) = \frac{M_s}{n T} (H + \lambda M)$ и обозначив через $M_s = n g \mu_B S$ максимальное значение намагниченности. Построим графики этих функций, откладывая по оси абсцисс значения x , а по оси ординат — намагниченности M . Если по оси абсцисс откладывать значения x , а по оси ординат — значения M , то первое уравнение изобразится функцией Бриллюэна, а второе — прямой, пересекающей вертикальную ось в точке с ординатой $-H/\lambda$ (рис. 1.4).

Точка пересечения графиков определяет значение намагниченности ферромагнетика при заданном значении поля. Если последнее отсутствует, то указанная точка имеет отличную от нуля ординату только в том случае, когда наклон прямой не превышает наклона кривой Бриллюэна в начале координат. Иначе говоря, при $H = 0$ ферромагнетик обладает намагниченностью при условии

$$\frac{n k_B T}{\lambda M_s} < M_s \frac{S + 1}{3S}. \quad (1.40)$$

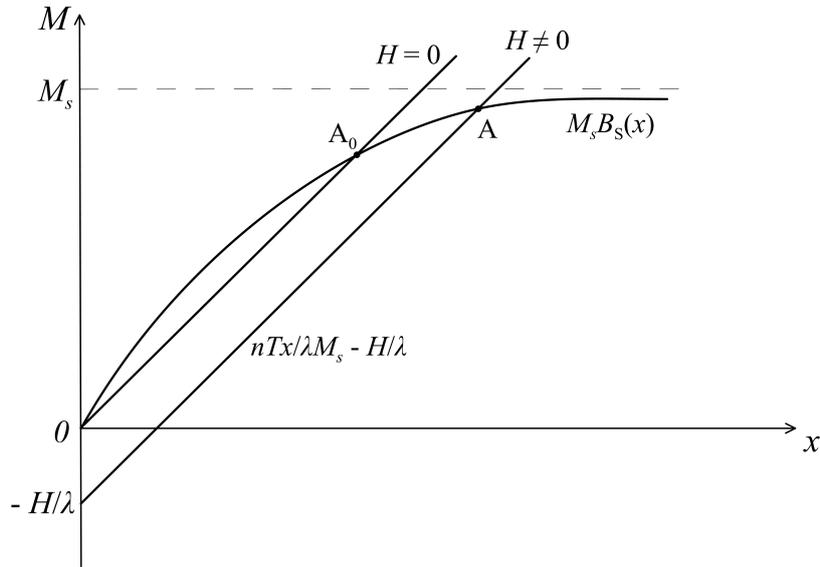


Рис. 1.4. Графическое решение уравнения для намагниченности

Если ввести критическую температуру

$$T_C = \frac{(S+1)M_s^2}{3Sk_B\lambda} = \frac{2pJS(S+1)}{3k_B}, \quad (1.41)$$

то его можно записать в виде

$$T < T_C. \quad (1.42)$$

Величину T_C называют температурой или *точкой Кюри*. Предсказание спонтанной намагниченности ферромагнетика при $T < T_C$ является наиболее важным результатом теории среднего поля.

Если $T > T_C$, то тепловое движение атомов разрушает ориентационный порядок их спиновых моментов, и спонтанная намагниченность не возникает. В этом случае величина индуцированной внешним полем намагниченности может быть найдена посредством решения уравнения для M в линейном приближении, поскольку аргумент функции Бриллюэна мал. Учитывая, что при малых x указанная функция $B_S(x) = \frac{S+1}{3S}x$, находим

$$M = ng\mu_B S \frac{S+1}{3S} \frac{g\mu_B S}{k_B T} (H + \lambda M) = \frac{n(g\mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B T} H + \frac{2pJS(S+1)}{3k_B T} M. \quad (1.43)$$

Отсюда следует, что

$$M = \frac{C}{T - T_C} H, \quad (1.44)$$

где

$$C = \frac{n(g\mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B}. \quad (1.45)$$

Таким образом, выше температуры Кюри ферромагнетик превращается в парамагнетик с магнитной восприимчивостью

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{C}{T - T_C}. \quad (1.46)$$

Выражаемое этой формулой температурное поведение магнитной восприимчивости известно как *закон Кюри – Вейсса*.

1.6. Антиферромагнетизм

Существуют вещества, в которых обменные интегралы для ближайших соседей не положительны, а отрицательны, $J < 0$. В этом случае обменные силы вызывают *антипараллельную* ориентацию соседних спинов. Магнитное упорядочение такого рода называют *антиферромагнитным*. В простейшем варианте кристалл содержит две вставленные друг в друга пространственные подрешётки с противоположно направленными спинами. Если величины спинов в подрешётках одинаковы, то спонтанный (в отсутствие подмагничивающего поля) магнитный момент любой макроскопической области такого тела равен нулю. Вещества с антиферромагнитным упорядочением, спонтанная намагниченность которых равна нулю, называют *антиферромагнетиками*. К ним, в частности, относят многие оксиды и соли редкоземельных и переходных металлов: MnO, MnS, NiO, FeCl₂, Cr₂O₃, CoCO₃ и др.

Первая теория антиферромагнетизма была создана Неелем ещё до экспериментального подтверждения существования антиферромагнитных материалов. Он рассмотрел кристалл с двумя магнитными подрешётками, образующими “шахматную” структуру: для каждого спина ближайшими соседями являются спины, принадлежащие другой подрешётке. Таким магнитным упорядочением обладает, например, тетрагональный кристалл MnF₂ (рис. 1.5). Магнитным моментом обладают только ионы марганца. Они расположены в узлах объёмно-центрированной решётки, причём ионы в вершинах элементарной ячейки и в её центре имеют антипараллельные спины.

Вообще говоря, “шахматная” антиферромагнитная структура не является единственно возможной. К примеру, для кубических кристаллов MnO характерно “слоистое” упорядочение, когда одинаково направленные спины объединены в слои, и в каждом последующем слое спины антипараллельны спинам из предыдущего слоя.

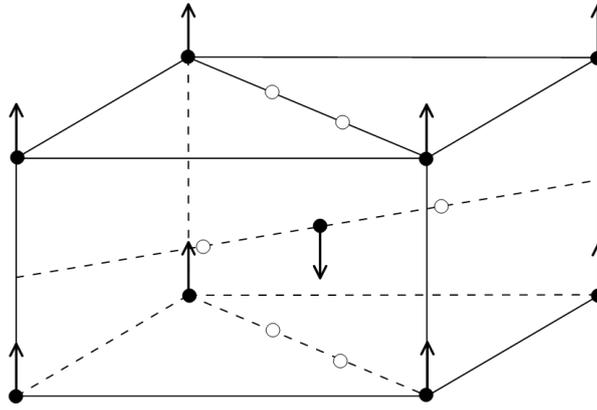


Рис. 1.5. Магнитная структура MnF_2 ; чёрные кружки — ионы марганца, светлые — ионы фтора.

Выполним с помощью теории среднего поля описание магнитных свойств антиферромагнетиков, предполагая, что ближайшие соседи принадлежат разным магнитным подрешёткам, и обменный интеграл для них отрицателен. Обозначим его через $-J$, считая, что $J > 0$. Для спинов, принадлежащих одной и той же магнитной подрешётке, обменный интеграл, напротив, положителен: $J' > 0$. Антиферромагнитному упорядочению отвечает ситуация, когда $J' < J$ (отметим, однако, что существует вещество EuSe , для которого $J' \approx J$, и с помощью небольших возмущений или примесей его состояние можно менять с антиферромагнитного на ферромагнитное и обратно).

Применяя метод среднего поля к ферромагнетикам, мы учитывали взаимодействие только между ближайшими соседями и записывали эффективное поле, действующее на каждый спин, в виде суммы $\mathbf{H} + \frac{2pJ}{n(g\mu_B)^2}\mathbf{M}$, где \mathbf{H} — внешнее магнитное поле, а \mathbf{M} — намагниченность образца. При рассмотрении антиферромагнетиков учтём взаимодействие и между ближайшими спинами из разных подрешёток (обозначим их число через p), и между ближайшими спинами из одной и той же магнитной подрешётки (обозначим их число через p'). Тогда эффективные поля, действующие на спины из первой и второй подрешёток, будут соответственно равны

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \frac{4p'J'}{n(g\mu_B)^2}\mathbf{M}_1 - \frac{4pJ}{n(g\mu_B)^2}\mathbf{M}_2, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} + \frac{4p'J'}{n(g\mu_B)^2}\mathbf{M}_2 - \frac{4pJ}{n(g\mu_B)^2}\mathbf{M}_1, \quad (1.48)$$

где \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 — намагниченности первой и второй подрешёток; появление

четвёрки в этих формулах связано с тем, что в единице объёма образца число сонаправленных спинов равно $\frac{n}{2}$. Введение этих полей позволяет сразу записать уравнения

$$M_1 = \frac{n}{2} g\mu_B S B_S \left(\frac{g\mu_B S H_1}{k_B T} \right), \quad (1.49)$$

$$M_2 = \frac{n}{2} g\mu_B S B_S \left(\frac{g\mu_B S H_2}{k_B T} \right) \quad (1.50)$$

для продольных (вдоль приложенного поля) составляющих векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 ; поперечные же компоненты этих векторов равны нулю. В отсутствие внешнего поля ($H = 0$) указанные равенства устроены совершенно одинаково:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{n}{2} g\mu_B S B_S \left[\frac{g\mu_B S}{k_B T} \left(\frac{4p'J'}{n(g\mu_B)^2} M_1 - \frac{4pJ}{n(g\mu_B)^2} M_2 \right) \right], \\ M_2 = \frac{n}{2} g\mu_B S B_S \left[\frac{g\mu_B S}{k_B T} \left(\frac{4p'J'}{n(g\mu_B)^2} M_2 - \frac{4pJ}{n(g\mu_B)^2} M_1 \right) \right] \end{cases}, \quad (1.51)$$

и при замене $M_2 = -M_1$ переходят друг в друга, так как функция Бриллюэна нечётна (решение $M_1 = M_2$ тоже допустимо, но оно отвечает ферромагнитному упорядочению). Следовательно, полная намагниченность кристалла при $H = 0$, как и должно быть, равна нулю: $M = M_1 + M_2 = 0$, а намагниченности отдельных подрешёток определяются равенствами

$$M_1 = \frac{n}{2} g\mu_B S B_S \left[\frac{4S}{ng\mu_B k_B T} (p'J' + pJ) M_1 \right], \quad M_2 = -M_1. \quad (1.52)$$

Записанное уравнение полностью эквивалентно уравнению для намагниченности ферромагнетика и не требует дополнительного анализа. В частности, из него следует, что существует температура

$$T_N = \frac{2S(S+1)(p'J' + pJ)}{3k_B}, \quad (1.53)$$

при которой намагниченности M_1 и M_2 обращаются в нуль (в отсутствие внешнего поля): магнитное упорядочение в антиферромагнетике разрушается, и он превращается в парамагнетик. Эта критическая температура называется точкой Нееля, или антиферромагнитной температурой Кюри. Исчезновение магнитного порядка при $T > T_N$ связано с тем, что тепловая энергия спинов превосходит энергию их обменного взаимодействия, т. е. интенсивные тепловые флуктуации спинов разрушают их ориентационный порядок.

Найдём магнитную восприимчивость системы в высокотемпературной области $T > T_N$. Для этого запишем систему уравнений для M_1 и M_2 в линейном по внешнему полю H приближении:

$$\begin{cases} M_1 = \frac{n}{2} g\mu_B S \cdot \frac{g\mu_B S}{k_B T} \cdot \frac{S+1}{3S} \left(\frac{4p'J'}{n(g\mu_B)^2} M_1 - \frac{4pJ}{n(g\mu_B)^2} M_2 + H \right), \\ M_2 = \frac{n}{2} g\mu_B S \cdot \frac{g\mu_B S}{k_B T} \cdot \frac{S+1}{3S} \left(\frac{4p'J'}{n(g\mu_B)^2} M_2 - \frac{4pJ}{n(g\mu_B)^2} M_1 + H \right), \end{cases} \quad (1.54)$$

учтя, что $B_S(x) \approx \frac{S+1}{3S}x$ при $x \ll 1$.

Сложив два уравнения, получим равенство для полной намагниченности $M = M_1 + M_2$:

$$M = \frac{n(g\mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B T} H - \frac{2S(S+1)(p'J' + pJ)}{3k_B T} M. \quad (1.55)$$

Введём обозначения $C = \frac{n(g\mu_B)^2 S(S+1)}{3k_B}$ и $\tilde{T} = \frac{2S(S+1)(pJ - p'J')}{3k_B}$ и запишем

$$M = \frac{C}{T} H - \frac{\tilde{T}}{T} M. \quad (1.56)$$

Отсюда,

$$M = \frac{C}{T + \tilde{T}} H. \quad (1.57)$$

Соответственно, магнитная восприимчивость системы равна

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{C}{T + \tilde{T}}. \quad (1.58)$$

Полученное выражение имеет вид закона Кюри-Вейсса, установленного при рассмотрении ферромагнетиков. Его важным отличием, однако, является положительный, а не отрицательный знак в знаменателе.

Отметим, что с помощью линеаризованной системы для M_1 и M_2 можно найти температуру Нееля. Во всей области $T < T_N$ линейная аппроксимация функции Бриллюэна некорректна, однако её можно использовать непосредственно вблизи перехода от парамагнитного к антиферромагнитному состоянию, где намагниченности M_1 и M_2 близки к нулю (они не испытывают скачка при переходе через точку $T = T_N$). Линеаризованная система уравне-

ний

$$\begin{cases} M_1 = \frac{S(S+1)}{3k_B T} (2p' J' M_1 - 2p J M_2), \\ M_2 = \frac{S(S+1)}{3k_B T} (2p' J' M_2 - 2p J M_1) \end{cases} \quad (1.59)$$

однородна, и если её определитель не равен нулю, то она имеет только тривиальное решение $M_1 = M_2 = 0$, соответствующее парамагнитному состоянию образца. Появлению антиферромагнитного упорядочения отвечает обращение определителя в нуль при $T = T_N$. Решение уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{2p' J' S(S+1)}{3k_B T_N} & \frac{2p J S(S+1)}{3k_B T_N} \\ \frac{2p J S(S+1)}{3k_B T_N} & 1 - \frac{2p' J' S(S+1)}{3k_B T_N} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.60)$$

даёт

$$T_N = \frac{2S(S+1)(p' J' + p J)}{3k_B}. \quad (1.61)$$

Эта формула для T_N совпадает с написанной выше. Сравнение T_N и \tilde{T} показывает, что они равны только при $J' = 0$, т. е. когда не учитывается обменное взаимодействие спинов, принадлежащих одной и той же подрешётке. Поэтому измерение температур T_N и \tilde{T} позволяет оценить величины обменных интегралов J и J' .

1.7. Ферримагнетизм

В антиферромагнетиках спины атомов или ионов, принадлежащих различным подрешёткам, равны друг другу по величине. Именно поэтому в отсутствие внешнего поля магнитный момент этих материалов равен нулю. Существуют вещества, магнитное упорядочение которых является антиферромагнитным, но спонтанная намагниченность тем не менее отлична от нуля. Это может быть связано либо с различным количеством атомов или ионов в подрешётках, либо с тем, что они составлены из неэквивалентных атомов или ионов, либо и с тем, и с другим. Материалы с подобным нескомпенсированным антиферромагнетизмом называют *ферримагнетиками*. Если при этом они являются полупроводниками, то их принято называть *ферритами*. Типичными примерами ферритов являются MnFe_2O_4 , NiFe_2O_4 , CoFe_2O_4 , $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$ (иттрий-железный гранат), $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ (маггемит), Fe_3O_4 (магнетит).

Рассчитаем намагниченность ферромагнетиков в приближении среднего поля. Будем учитывать взаимодействие только ближайших соседей, предполагая, что все они относятся к другой подрешётке; взаимодействие же спинов, принадлежащих к одной и той подрешётке, рассматривать не будем. Величины спинов в подрешётках и соответствующие им g -факторы будем считать различными. В этом случае удобно записать систему уравнений не для намагниченностей M_1 и M_2 , как в случае антиферромагнетиков, а средних значений спинов $\langle S_1 \rangle$ и $\langle S_2 \rangle$.

Согласно теории среднего поля

$$\langle S_1 \rangle = S_1 B_{S_1} \left(\frac{g_1 \mu_B S_1 H_1}{k_B T} \right), \quad (1.62)$$

$$\langle S_2 \rangle = S_2 B_{S_2} \left(\frac{g_2 \mu_B S_2 H_2}{k_B T} \right), \quad (1.63)$$

где эффективные поля суть

$$H_1 = H - \frac{2pJ\langle S_2 \rangle}{g_1 \mu_B}, \quad (1.64)$$

$$H_2 = H - \frac{2pJ\langle S_1 \rangle}{g_2 \mu_B}; \quad (1.65)$$

здесь p — число ближайших соседей, $J > 0$ — величина обменного интеграла с обратным знаком. В высокотемпературной области допустимы линейаризация уравнений и приведение их к виду

$$\langle S_1 \rangle = S_1 \frac{S_1(S_1 + 1)}{3k_B T} (g_1 \mu_B H - 2pJ\langle S_2 \rangle), \quad (1.66)$$

$$\langle S_2 \rangle = S_2 \frac{S_2(S_2 + 1)}{3k_B T} (g_2 \mu_B H - 2pJ\langle S_1 \rangle). \quad (1.67)$$

Введём обозначения

$$C'_1 = \frac{(g_1 \mu_B)^2 S_1(S_1 + 1)}{3k_B}, \quad (1.68)$$

$$C'_2 = \frac{(g_2 \mu_B)^2 S_2(S_2 + 1)}{3k_B}, \quad (1.69)$$

$$\tilde{T}_1 = \frac{2pJS_1(S_1 + 1)}{3k_B}, \quad (1.70)$$

$$\tilde{T}_2 = \frac{2pJS_2(S_2 + 1)}{3k_B} \quad (1.71)$$

и запишем уравнения согласно

$$\begin{cases} \langle S_1 \rangle + \frac{\tilde{T}_1}{T} \langle S_2 \rangle = \frac{C'_1}{g_1 \mu_B} \frac{H}{T}, \\ \frac{\tilde{T}_2}{T} \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle = \frac{C'_2}{g_2 \mu_B} \frac{H}{T}. \end{cases} \quad (1.72)$$

Рассуждая точно так же, как и в случае антиферромагнетиков, с помощью этих уравнений можно найти критическую температуру T_C , при которой магнитное упорядочение в кристалле исчезает и он превращается в парамагнетик. Для этого нужно приравнять к нулю определитель системы уравнений:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\tilde{T}_1}{T_C} \\ \frac{\tilde{T}_2}{T_C} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.73)$$

что даёт $T_C = \sqrt{\tilde{T}_1 \tilde{T}_2}$; эту температуру называют *ферримагнитной точкой Кюри*.

Получим с помощью линеаризованных уравнений для $\langle S_1 \rangle$ и $\langle S_2 \rangle$ магнитную восприимчивость ферримагнитного тела при $T > T_C$. Выражая $\langle S_2 \rangle$ из второго равенства и подставляя в первое, находим

$$\langle S_1 \rangle (T^2 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2) = H \left(\frac{C'_1 T}{g_1 \mu_B} - \frac{\tilde{T}_1 C'_2}{g_2 \mu_B} \right), \quad (1.74)$$

$$g_1 \mu_B \langle S_1 \rangle (T^2 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2) = H \left(C'_1 T - \frac{g_1 \tilde{T}_1 C'_2}{g_2} \right). \quad (1.75)$$

Поскольку

$$\frac{C'_1 \tilde{T}_2}{g_1^2} = \frac{C'_2 \tilde{T}_1}{g_2^2}, \quad (1.76)$$

то

$$\frac{g_1}{g_2} = \sqrt{\frac{C'_1 \tilde{T}_2}{C'_2 \tilde{T}_1}}. \quad (1.77)$$

Значит,

$$g_1 \mu_B \langle S_1 \rangle (T^2 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2) = H \left(C'_1 T - \sqrt{C'_1 C'_2 \tilde{T}_1 \tilde{T}_2} \right), \quad (1.78)$$

$$\langle S_1 \rangle = H \frac{C'_1 T - \sqrt{C'_1 C'_2 \tilde{T}_1 \tilde{T}_2}}{g_1 \mu_B (T^2 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2)}, \quad (1.79)$$

и, соответственно,

$$\langle S_2 \rangle = H \frac{C_2' T - \sqrt{C_1' C_2' \tilde{T}_1 \tilde{T}_2}}{g_2 \mu_B (T^2 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2)}. \quad (1.80)$$

Таким образом, намагниченность системы при $T > T_C$ равна

$$M = \frac{n}{2} \mu_B g_1 \langle S_1 \rangle + \frac{n}{2} \mu_B g_2 \langle S_2 \rangle = \frac{(C_1 + C_2) \cdot T - 2\sqrt{C_1 C_2 \tilde{T}_1 \tilde{T}_2}}{T^2 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2} H, \quad (1.81)$$

где $C_1 = \frac{n}{2} C_1'$, $C_2 = \frac{n}{2} C_2'$, а магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{(C_1 + C_2) \cdot T - 2\sqrt{C_1 C_2 \tilde{T}_1 \tilde{T}_2}}{T^2 - \tilde{T}_1 \tilde{T}_2}. \quad (1.82)$$

Вообще говоря, найденное выражение не соответствует закону Кюри-Вейсса. Последний получается только асимптотически при $T \gg T_C$. В самом деле, если обозначить

$$\tilde{T} = \frac{2\sqrt{C_1 C_2 \tilde{T}_1 \tilde{T}_2}}{C_1 + C_2}, \quad (1.83)$$

то в указанном пределе можно записать

$$\chi = \frac{(C_1 + C_2) T \left(1 - \frac{\tilde{T}}{T}\right)}{T^2 \left(1 - \left(\frac{T_C}{T}\right)^2\right)} \approx \frac{(C_1 + C_2) \left(1 - \frac{\tilde{T}}{T}\right)}{T} \approx \frac{C_1 + C_2}{T \left(1 + \frac{\tilde{T}}{T}\right)} = \frac{C_1 + C_2}{T + \tilde{T}}. \quad (1.84)$$

В знаменателе полученной формулы Кюри-Вейсса стоит положительный знак, как и в случае антиферромагнетиков.

1.8. Ферромагнетик вблизи точки Кюри

1.8.1. Теория среднего поля

Как было показано выше, теория среднего поля приводит к выводу, что для ферромагнетиков существует критическая температура Кюри, при которой магнитный порядок в веществе пропадает и оно становится парамагнитным. Более того, в рамках этого подхода можно установить, как именно намагниченность стремится к нулю при $T \rightarrow T_C$.

Рассмотрим случай, когда внешнего магнитного поля нет, $H = 0$. Согласно теории среднего поля спонтанная намагниченность ферромагнетика при заданной температуре T подчиняется уравнению

$$M = ng\mu_B S B_S \left(\frac{g\mu_B S}{k_B T} \lambda M \right), \quad \lambda = \frac{2pJ}{n(g\mu_B)^2}. \quad (1.85)$$

Её максимальное значение обозначим через $M_s = ng\mu_B S$. Аргумент функции Бриллюэна запишем как

$$\frac{g\mu_B S}{k_B T} \lambda M = \frac{g\mu_B M}{n(g\mu_B)^2} \times \frac{2pJS(S+1)}{3} \times \frac{3}{S+1} = \frac{M}{ng\mu_B S} \frac{T_C}{T} \frac{3S}{S+1} = \frac{M}{M_s} \frac{T_C}{T} \frac{3S}{S+1}, \quad (1.86)$$

учтя, что температура Кюри равна $T_C = \frac{2pJS(S+1)}{3k_B}$. В результате уравнение для намагниченности примет вид

$$\frac{M}{M_s} = B_s \left(\frac{M}{M_s} \frac{T_C}{T} \frac{3S}{S+1} \right). \quad (1.87)$$

При $T \rightarrow T_C$ намагниченность ферромагнетика мала, поэтому можно использовать ряд Тейлора для функции Бриллюэна с небольшим количеством членов. Ограничимся разложением с точностью до слагаемых третьего порядка. Поскольку

$$\begin{aligned} \text{cth } x &= \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} \approx \frac{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}{x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5} \approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \left(1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{36}x^4 \right) = \\ &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{36}x^4 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{24} \right) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 \right), \end{aligned} \quad (1.88)$$

то

$$\begin{aligned} B_s(x) &= \frac{2S+1}{2S} \text{cth} \frac{2S+1}{2S} x - \frac{1}{2S} \text{cth} \frac{x}{2S} \approx \frac{2S+1}{2S} \left[\frac{2S}{2S+1} \frac{1}{x} + \frac{2S+1}{2S} \frac{x}{3} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{45} \left(\frac{2S+1}{2S} \right)^3 x^3 \right] - \frac{1}{2S} \left[\frac{2S}{x} + \frac{1}{3} \frac{x}{2S} - \frac{1}{45} \frac{x^3}{(2S)^3} \right] = \frac{1}{x} + \frac{(2S+1)^2}{(2S)^2} \frac{x}{3} - \\ &\quad - \left(\frac{2S+1}{2S} \right)^4 \frac{x^3}{45} - \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{25} \right)^2 \frac{x}{3} + \frac{1}{(2S)^4} \frac{x^3}{45} = \frac{(2S+1)^2 - 1}{(2S)^2} \frac{x}{3} - \frac{(2S+1)^4 - 1}{(2S)^4} \frac{x^3}{45}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

С помощью этого соотношения уравнение для спонтанной намагниченности приводится к виду

$$\frac{M}{M_s} = \frac{S+1}{3S} \frac{T_C}{T} \frac{3S}{S+1} \frac{M}{M_s} - \frac{(2S+1)^4 - 1}{(2S)^4} \left(\frac{T_C}{T}\right)^3 \left(\frac{3S}{S+1}\right)^3 \left(\frac{M}{M_s}\right)^3 \frac{1}{45}, \quad (1.90)$$

$$\frac{M}{M_s} = \frac{T_C}{T} - \frac{3}{10} \frac{(S+1)^2 + S^2}{(S+1)^2} \left(\frac{T_C}{T}\right)^3 \left(\frac{M}{M_s}\right)^3. \quad (1.91)$$

Ферромагнитному состоянию кристалла отвечает отличное от нуля при $T < T_C$ решение этого уравнения

$$\left(\frac{M}{M_s}\right)^2 = \frac{10}{3} \frac{(S+1)^2}{(S+1)^2 + S^2} \frac{T}{T_C} \left(1 - \frac{T}{T_C}\right). \quad (1.92)$$

Величина спина $S \sim 1$, поэтому вблизи точки Кюри, когда $(T_C - T)/T_C \ll 1$, можно написать

$$\frac{M}{M_s} = A \sqrt{\left(1 - \frac{T}{T_C}\right)}, \quad (1.93)$$

где A — коэффициент порядка 1. Этот результат согласуется с экспериментальными данными лишь качественно: измерения показывают, что вблизи точки Кюри $\frac{M}{M_s} \sim \left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^\beta$, где $\beta \approx 0.33 \div 0.37$. Таким образом, для количественного описания перехода из ферромагнитного в парамагнитное состояние возможностей теории среднего поля недостаточно.

1.8.2. Теория Ландау

Анализ температурной зависимости спонтанной намагниченности вблизи точки Кюри можно также выполнить, используя общий подход, предложенный Л. Ландау для описания фазовых переходов второго рода. Введём безразмерный параметр порядка $\sigma = \frac{M(T)}{M_s}$, где $M(T)$ — намагниченность материала при температуре T . Её максимальное значение M_s достигается, когда все спины сонаправлены; величина σ при этом равна единице (полное упорядочение). Выше точки Кюри намагниченность, а следовательно, и параметр σ равны нулю (полное разупорядочение). В области же перехода $T \sim T_C$ параметр σ мал, но отличен от нуля, поэтому согласно Ландау его можно использовать в качестве параметра разложения объёмной плотности свободной энергии системы:

$$F(T, \sigma) = F_0(T) + A\sigma^2 + B\sigma^4 + \dots \quad (1.94)$$

Ряд содержит только чётные степени намагниченности, так как потенциал F должен быть инвариантным по отношению к обращению времени, а намагниченность при замене $t \rightarrow -t$ меняет знак, будучи пропорциональной линейной скорости движения носителей электрического заряда.

Величина $\sigma(T)$ не является независимой термодинамической переменной. Её значение может быть найдено из условия минимума свободной энергии системы в состоянии термодинамического равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \sigma (2A + 4B\sigma^2) = 0; \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma^2} = 2A + 12B\sigma^2 > 0. \end{cases} \quad (1.95)$$

Из первого уравнения следует, что $\sigma = 0$ либо $\sigma^2 = -\frac{A}{2B}$. Подстановка же этих решений в неравенство даёт $A > 0$ либо $A < 0$.

Найденные решения для $\sigma(T)$ уместно отнести к температурным областям $T > T_C$ и $T < T_C$ соответственно:

$$\begin{cases} \sigma = 0, A > 0, & \text{при } T > T_C, \\ \sigma \neq 0, A < 0, B > 0, & \text{при } T < T_C. \end{cases} \quad (1.96)$$

Отсюда следует, что если $A(T)$ и $B(T)$ являются непрерывными функциями температуры, то $A(T = T_C) = 0$. Тогда в области перехода $T \sim T_C$ можно считать, что

$$A(T_C + \Delta T) = a\Delta T \quad \left(a = \left. \frac{dA}{dT} \right|_{T=T_C} > 0 \right), \quad (1.97)$$

$$B(T_C + \Delta T) = B(T_C) + B'(T_C)\Delta T \approx B(T_C) = b > 0 \quad (1.98)$$

и записать

$$\sigma(T) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{2b}} (T_C - T), & T < T_C; \\ 0, & T > T_C. \end{cases} \quad (1.99)$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что при $T \rightarrow T_C$ намагниченность ферромагнетика изменяется как $\frac{M(T)}{M_s} \sim (T_C - T)^{1/2}$. Этот результат полностью совпадает с полученным выше с помощью теории среднего поля.

Важными достоинствами представленной теории являются её простота и наглядность. Вместе с тем нужно отметить свойственную ей противоречивость. Именно, учёт только первых членов в разложении потенциала F по степеням параметра порядка σ предполагает, что более высокие степени дают малые поправки к предыдущим. Однако члены $A\sigma^2$ и $B\sigma^4$, фактически, оказались одного порядка. Включение же в рассмотрение следующих членов разложения сразу приводит к существенному усложнению теории и появлению дополнительных феноменологических параметров.

Применим теперь теорию Ландау к ферромагнетику, который помещён во внешнее магнитное поле. С учётом найденных выше выражений для $A(T)$ и $B(T)$ часть свободной энергии такого образца, зависящая от состояния его намагниченности, может быть записана согласно

$$F(T, \sigma, H) = a(T - T_C)\sigma^2 + b\sigma^4 - M_s\sigma H; \quad (1.100)$$

последнее слагаемое отвечает энергии взаимодействия системы с внешним полем. Параметр порядка σ находится из условия минимума потенциала F . Условие $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ приводит к уравнению

$$2a(T - T_C)\sigma + 4b\sigma^3 - M_s H = 0. \quad (1.101)$$

Его общее решение может быть записано с помощью громоздких формул для корней полинома третьей степени. Для общего понимания роли внешнего магнитного поля достаточно рассмотреть отдельные случаи.

А. При $T > T_C$ и $H \rightarrow 0$ в левой части уравнения можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым, получив закон Кюри-Вейсса:

$$\sigma = \frac{M_s}{2a(T - T_C)} H. \quad (1.102)$$

Б. В точке перехода $T = T_C$ параметр порядка равен $\sigma_c = \sqrt[3]{\frac{M_s H}{4b}}$ (любопытно отметить, что соответствующая намагниченность $M_c \sim H^{1/3}$ не пропорциональна первой степени H).

В. В области $T < T_C$ представим решение в виде $\sigma(T, H) = \sigma(T, 0) + \delta\sigma(T, H)$. Предполагая $H \rightarrow 0$, найдём добавку $\delta\sigma(T, H)$ в линейном по H приближении. Записывая

$$(\sigma_0 + \delta\sigma)^3 \approx \sigma_0^3 + 3\sigma_0^2\delta\sigma \quad (\sigma_0 = \sigma(T, 0)), \quad (1.103)$$

получаем равенство

$$\delta\sigma [2a(T - T_C) + 12b\sigma_0^2] = M_s H - 2a(T - T_C)\sigma_0 - 4b\sigma_0^3. \quad (1.104)$$

С учётом того, что $\sigma_0^2 = \frac{a}{2b}(T_C - T)$, находим

$$\delta\sigma = \frac{M_s H}{4a(T_C - T)}. \quad (1.105)$$

Таким образом,

$$\sigma(T \rightarrow T_C, H) \approx \sqrt{\frac{a}{2b}(T_C - T)} + \frac{M_s H}{4a(T_C - T)}. \quad (1.106)$$

Полученные результаты позволяют построить график решения $\sigma(T)$ вблизи точки Кюри (рис. 1.6). Как видно, при $H \neq 0$ все особенности перехода в

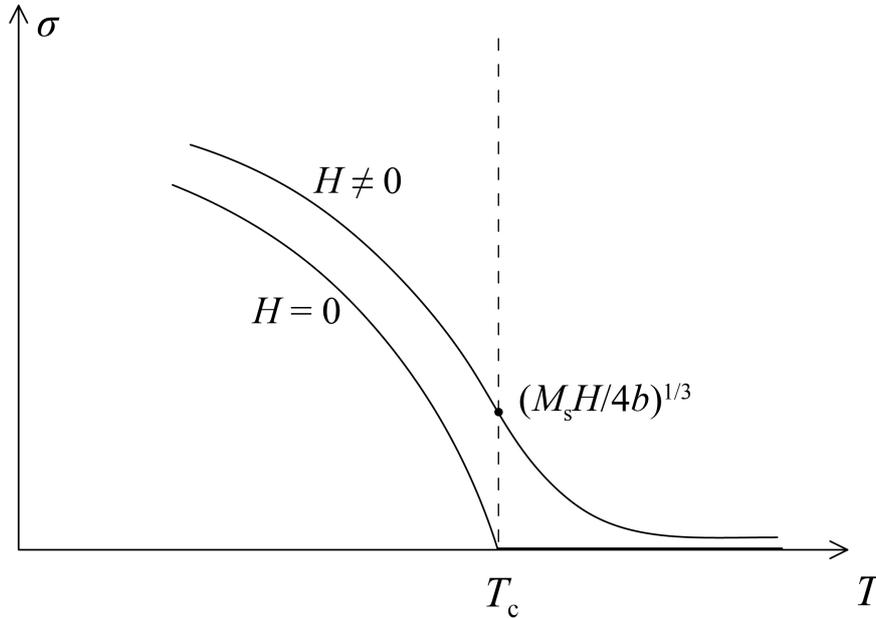


Рис. 1.6. Поведение намагниченности ферромагнетика вблизи точки Кюри
точке $T = T_C$ оказываются размытыми.

1.9. Магнитная анизотропия

1.9.1. Релятивистские взаимодействия

До сих пор при описании состояний материалов с сильными магнитными свойствами мы учитывали только обменное взаимодействие спинов. Это взаимодействие является изотропным: соответствующая ему энергия не изменится, если все спины образца повернуть на один и тот же угол. Если бы

между спинами существовали только обменные силы, то энергия магнитных кристаллов никак не зависела бы от ориентации вектора намагниченности. Однако из опытных данных хорошо известно, что такая зависимость существует: вектор намагниченности ориентируется вдоль определённых направлений в образце, и для его поворота необходимо прикладывать магнитное поле. Оказывается, что указанная анизотропия магнитных свойств связана с так называемыми релятивистскими взаимодействиями: магнитным диполь-дипольным и спин-орбитальным.

Магнитным диполем принято называть систему движущихся электрических зарядов, которая обладает магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}_1$ и создаёт вокруг себя магнитное поле

$$\mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \frac{3(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}_1}{r^3}, \quad (1.107)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения поля; предполагается, что начало координат находится где-то внутри системы, а её размер пренебрежимо мал по сравнению с расстоянием r . Соответственно, энергия взаимодействия двух диполей с магнитными моментами $\boldsymbol{\mu}_1$ и $\boldsymbol{\mu}_2$ равна

$$U_{12} = -\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{H}_1 = \frac{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \boldsymbol{\mu}_2}{r_{12}^3} - \frac{3(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}, \quad (1.108)$$

где $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ — вектор, соединяющий точки расположения диполей. Для оценки энергии U_{dd} магнитного дипольного взаимодействия двух рядом расположенных атомов в кристалле в качестве значений μ_1 и μ_2 можно взять магнетон Бора $\mu_B = e\hbar/2m_e c$, а в качестве расстояния r_{12} — боровский радиус $a_0 = \hbar^2/m_e e^2 = 0.53 \times 10^{-8}$ см:

$$U_{\text{dd}} \sim \frac{\mu_B^2}{a_0^3} \sim \frac{e^2}{a_0} \cdot \left(\frac{\hbar}{ma_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{c^2}. \quad (1.109)$$

Отношение $\hbar/m_e a_0$ служит оценкой скорости электронов в атоме: $v \sim \hbar/m_e a_0 \sim 10^8$ см/с, поэтому

$$U_{\text{dd}} \sim \frac{e^2}{a_0} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim U_e \left(\frac{v}{c}\right)^2, \quad U_e = \frac{e^2}{a_0}. \quad (1.110)$$

Величина U_e является мерой кулоновского взаимодействия атомов в кристалле. Как уже говорилось в разделе, посвящённом модели Гейзенберга, обменная энергия двух атомов имеет тот же порядок, что и энергия их кулоновского

взаимодействия. Это означает, что энергия магнитного дипольного взаимодействия атомов в образце с сильными магнитными свойствами оказывается в $\left(\frac{c}{v}\right)^2 \sim 10^3 - 10^4$ раз меньше энергии обменного взаимодействия.

Спин-орбитальное взаимодействие представляет собой эффект того же порядка. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим с помощью полуклассического подхода атом водорода. Выберем систему отсчёта, в которой электрон покоится, а ядро (протон) движется и создаёт не только электрическое \mathbf{E} , но и магнитное поле \mathbf{H} . Скорость этого движения равна $\mathbf{v}_p = -\mathbf{v}$, где \mathbf{v} — скорость вращения электрона вокруг ядра, оценка для которой дана выше. Она много меньше скорости света ($v/c \sim 10^{-2}$), и векторы \mathbf{H} и \mathbf{E} связаны сравнительно простым соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{v}_p \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (1.111)$$

Электрон обладает спином \mathbf{s} и, соответственно, спиновым магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}_s = g_s \mu_B \mathbf{s}$, причём, как показывают измерения, $g_s = -2$. Поэтому магнитное поле \mathbf{H} воздействует на электрон, и последний приобретает энергию

$$U_{sl} = -\boldsymbol{\mu}_s \mathbf{H} = -\frac{2\mu_B}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \frac{2\mu_B}{m_e c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}), \quad (1.112)$$

где $\mathbf{p} = m_e \mathbf{v}$ — импульс электрона. Если учесть, что электрическое поле ядра равно $\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{r}}{r^3}$, и использовать определение магнетона Бора, то полученный результат можно записать в виде

$$U_{sl} = \frac{e\hbar}{m_e c^2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \frac{e^2 \hbar}{m_e^2 c^2} \frac{1}{r^3} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{e^2 \hbar^2}{m_e^2 c^2 r^3} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{l}); \quad (1.113)$$

величина \mathbf{l} здесь определяет орбитальный момент импульса электрона в единицах постоянной Планка: $\hbar \mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Найденная энергия зависит от взаимной ориентации спинового \mathbf{s} и орбитального \mathbf{l} моментов электрона, поэтому рассмотренное взаимодействие называют спин-орбитальным. Для оценки U_{sl} заметим, что произведение $\mathbf{s} \cdot \mathbf{l} \sim 1$, а радиус атома r имеет порядок боровского. Значит,

$$U_{sl} \sim \frac{e^2}{a_0} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\hbar}{m_e a_0} \right)^2 \sim \left(\frac{v}{c} \right)^2 U_e, \quad U_e = \frac{e^2}{a_0}. \quad (1.114)$$

Таким образом, спин-орбитальное взаимодействие, как и магнитное дипольное взаимодействие, оказывается значительно слабее обменного. Обычно при

рассмотрении макроскопических магнитных свойств кристаллов магнитное дипольное и спин-орбитальное взаимодействия объединяют и говорят просто о релятивистских взаимодействиях.

1.9.2. Феноменологическое выражение

Обменные силы формируют магнитное упорядочение в ферромагнитном кристалле, именно они определяют длину вектора намагниченности \mathbf{M} . Релятивистские взаимодействия являются слишком слабыми, чтобы изменить величину указанного вектора, однако они устанавливают его направление. Дело в том, что эти взаимодействия, в отличие от обменного, не являются изотропными. Из формулы для U_{dd} видно, что энергия взаимодействия двух спинов зависит не только от их взаимной ориентации, но и от того, как они направлены по отношению к соединяющему их радиус-вектору. Применительно к кристаллу это означает, что общая энергия магнитных дипольных взаимодействий в нём зависит от направления спинов атомов или ионов относительно кристаллографических осей.

Спин-орбитальная связь также приводит к анизотропии магнитных свойств кристаллов. Одна из причин этого заключается в том, что при наличии такой связи поворот спинов ионов относительно кристаллической решётки приводит к изменению состояния электронных оболочек. Между тем, от конфигурации электронных оболочек ионов зависит энергия кулоновского, а значит, и обменного взаимодействия. Иначе говоря, спин-орбитальное взаимодействие приводит к тому, что обменная энергия оказывается зависимой от ориентации спинов относительно кристаллографических осей.

Вклад релятивистских взаимодействий в энергию образца принято называть энергией магнитной анизотропии. В принципе, величину этой энергии U_a можно рассчитать с помощью микроскопической теории, учитывающей малость релятивистских поправок. Однако на практике такой расчёт, как правило, осуществить крайне трудно, поэтому для U_a используют феноменологические разложения по компонентам единичного вектора $\mathbf{e} = \mathbf{M}/M$, который задаёт направление вектора намагниченности. Важным требованием к любому выражению для энергии анизотропии является его инвариантность относительно обращения времени, поэтому U_a должна быть чётной функцией компонент вектора \mathbf{e} . Кроме того, формулы для U_a могут включать только

те члены, которые удовлетворяют всем преобразованиям симметрии кристаллической решётки.

Для одноосных кристаллов разложение U_a по компонентам единичного вектора намагниченности \mathbf{e} начинается с членов 2-го порядка:

$$U_a = K_1 (e_x^2 + e_y^2) = K_1 \sin^2 \vartheta, \quad (1.115)$$

где ϑ — угол между вектором \mathbf{e} и главной осью симметрии, совпадающей с осью z . Если феноменологическая константа анизотропии $K_1 > 0$, то энергия анизотропии минимальна, когда кристалл намагничен вдоль или против оси z . Её называют *осью лёгкого намагничивания*, а анизотропию относят к типу “*лёгкая ось*”. Если же $K_1 < 0$, то кристаллу энергетически выгодно быть намагниченным в так называемой базисной плоскости, перпендикулярной оси z . В этом случае говорят, что магнетик обладает анизотропией типа “*лёгкая плоскость*”.

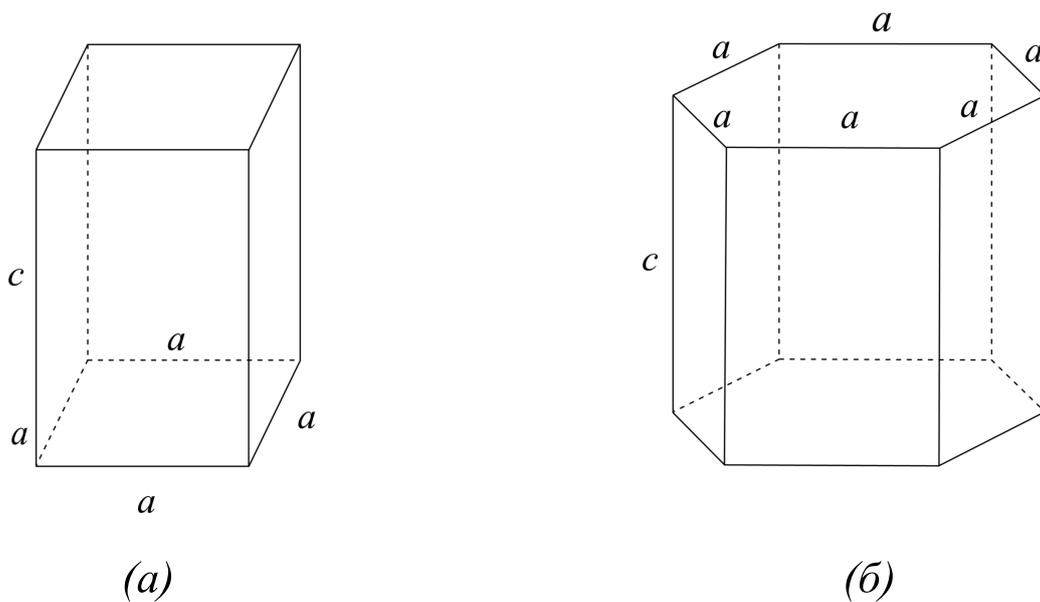


Рис. 1.7. Ячейки: a — тетрагонального кристалла; b — гексагонального кристалла

Энергетически выгодные направления вектора \mathbf{e} в базисной плоскости определяются следующими членами разложения функции U_a . Для тетрагональных кристаллов (рис. 1.7, a) с точностью до членов 4-го порядка оно

имеет вид

$$\begin{aligned} U_a &= K_1 (e_x^2 + e_y^2) + K_2 (e_x^2 + e_y^2)^2 + K_2' e_x^2 e_y^2 = \\ &= K_1 \sin^2 \vartheta + K_2 \sin^4 \vartheta + K_2' \sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \end{aligned} \quad (1.116)$$

последнее слагаемое описывает анизотропию в базисной плоскости. Для гексагональных кристаллов (рис. 1.7, б) анизотропия в базисной плоскости появляется только в слагаемых 6-го порядка:

$$U_a = K_1 \sin^2 \vartheta + K_2 \sin^4 \vartheta + K_3 \sin^6 \vartheta + K_3' \sin^6 \vartheta \cdot \cos^6 \varphi. \quad (1.117)$$

Среди констант анизотропии K_1, K_2, \dots первая, как правило, значительно превышает (по модулю) все остальные.

Рассмотрим также кристаллы с кубической симметрией. Для них член второго порядка, удовлетворяющий условию эквивалентности осей x, y и z , пропорционален сумме $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ и не описывает свойств анизотропии. Первым отличным от константы слагаемым является член 4-го порядка:

$$U_a = K_1 (e_x^2 e_y^2 + e_x^2 e_z^2 + e_y^2 e_z^2). \quad (1.118)$$

Часто энергию анизотропии для кубических кристаллов записывают также в виде

$$U_a = -\frac{1}{2} K_1 (e_x^4 + e_y^4 + e_z^4), \quad (1.119)$$

принимая во внимание, что это выражение отличается от написанного выше на постоянную величину, не зависящую от ориентации вектора \mathbf{e} . Отметим, что в кубических кристаллах с $K_1 > 0$ (к ним относится, например, железо) энергия анизотропии минимальна, когда вектор намагниченности направлен вдоль одного из ребёр куба ($e_x = 1, e_y = e_z = 0$ и т. п.). Если же $K < 0$ (например, в случае никеля), то указанная энергия минимальна при ориентации вектора намагниченности вдоль одной из главных диагоналей куба ($e_x^2 = e_y^2 = e_z^2 = \frac{1}{3}$).

1.10. Модель Стонера-Вольфарта

1.10.1. Петли гистерезиса

Рассмотрим ферромагнетик с анизотропией типа “лёгкая ось” и установим связь между его намагниченностью и величиной приложенного магнитного

поля \mathbf{H} . Будем считать, что при всех значениях внешнего поля образец намагничен однородно, т. е. все его спины строго сонаправлены. Вообще говоря, это предположение оправдано только для достаточно мелких частиц, размером от нескольких нанометров до нескольких десятков нанометров. Кривая намагничивания таких частиц впервые была рассчитана Э. К. Стонером и Э. П. Вольфартом.

Приложение внешнего поля в рассматриваемому ферромагнетику не меняет абсолютной величины вектора намагниченности \mathbf{M} и приводит лишь к его поворотам. Равновесное направление \mathbf{M} в заданном внешнем поле определяется минимумом магнитной энергии, приходящейся на единицу объёма образца. В рассматриваемом случае только два вклада в неё зависят от ориентации вектора \mathbf{M} : энергия анизотропии и энергия Зеемана. Введя единичный вектор \mathbf{n} вдоль оси лёгкого намагничивания, представим плотность энергии анизотропии в виде $U_a = -K (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})^2$ ($\mathbf{e} = \mathbf{M}/M$ — единичный вектор намагниченности). Плотность энергии Зеемана запишем с помощью единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, задающего направление внешнего поля, согласно $U_Z = -MH (\mathbf{e} \cdot \mathbf{h})$. Таким образом, задача сводится к поиску ориентаций вектора \mathbf{e} , при которых функция

$$U(\mathbf{e}) = -K (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})^2 - MH (\mathbf{e} \cdot \mathbf{h}) \quad (1.120)$$

минимальна.

Обозначим через ψ угол между внешним полем и осью лёгкого намагничивания и введём декартовую систему координат, направив ось z вдоль вектора \mathbf{n} , а ось x — в плоскости, образованной векторами \mathbf{n} и \mathbf{h} . При таком выборе составляющие вектора \mathbf{h} будут равны $h_x = \sin \psi$, $h_y = 0$, $h_z = \cos \psi$. Поскольку анизотропию образца в базисной плоскости (т. е. в плоскости xy) мы не учитываем, то в состоянии равновесия вектор намагниченности будет лежать в плоскости xz . Принимая это во внимание и обозначая угол между вектором \mathbf{e} и осью z через ϑ , запишем выражение для плотности магнитной энергии U в виде

$$\begin{aligned} U &= -K (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})^2 - MH (e_x h_x + e_z h_z) = \\ &= K \sin^2 \vartheta - MH (\sin \psi \sin \vartheta + \cos \psi \cos \vartheta) - K. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Постоянная добавка в этом выражении не играет роли и может быть опущена.

Удобно перейти к безразмерному потенциалу

$$u = \frac{U}{K} = \sin^2 \vartheta - 2q \cos (h_x \sin \vartheta + h_z \cos \vartheta) = \sin^2 \vartheta - 2q \cos (\vartheta - \psi), \quad (1.122)$$

введя безразмерное внешнее поле $q = \frac{MH}{2K}$. Будем считать, что угол ψ может принимать только значения из интервала $[0; \pi/2]$, но величина q при этом может быть и положительной, и отрицательной. Знак q совпадает со знаком z -проекции поля: если $h_z < 0$, то $q < 0$, и $q > 0$, если $h_z > 0$.

Условие экстремальности энергии $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0$ даёт уравнение для полярного угла ϑ :

$$\sin \vartheta \cos \vartheta + q \sin (\vartheta - \psi) = 0. \quad (1.123)$$

При заданных значениях q и ψ этому уравнению всегда удовлетворяет более одного угла ϑ в силу многозначности обратных тригонометрических функций. Поэтому возможна ситуация, когда минимуму энергии отвечает не одно, а несколько направлений вектора намагниченности. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим важный частный случай, когда внешнее поле направлено вдоль оси анизотропии (так называемое продольное намагничивание). Если угол $\psi = 0$, то магнитная энергия равна

$$u = \sin^2 \vartheta - 2q \cos \vartheta, \quad (1.124)$$

а условие экстремума выглядит согласно

$$\sin \vartheta (\cos \vartheta + q) = 0. \quad (1.125)$$

Решениями этого уравнения являются углы $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$ и $\vartheta_m = \pi - \arccos q$, но последнее решение существует только при $|q| < 1$; соответствующие им значения потенциала равны $u_1 = u(\vartheta_1) = -2q$, $u_2 = u(\vartheta = \vartheta_2) = 2q$ и $u_m = u(\vartheta = \vartheta_m) = 1 + q^2$.

Каждый из перечисленных углов отвечает либо минимуму, либо максимуму энергии системы. Чтобы определить тип экстремума, нужно выполнить анализ второй производной

$$u'' = 2 \cos 2\vartheta + 2q \cos \vartheta \quad (1.126)$$

от потенциала u по переменной ϑ . Очевидно, $u''(\vartheta = \vartheta_1) = 2(1 + q)$; при $q < -1$ эта величина отрицательна, при $q > -1$ — положительна, а при $q = -1$

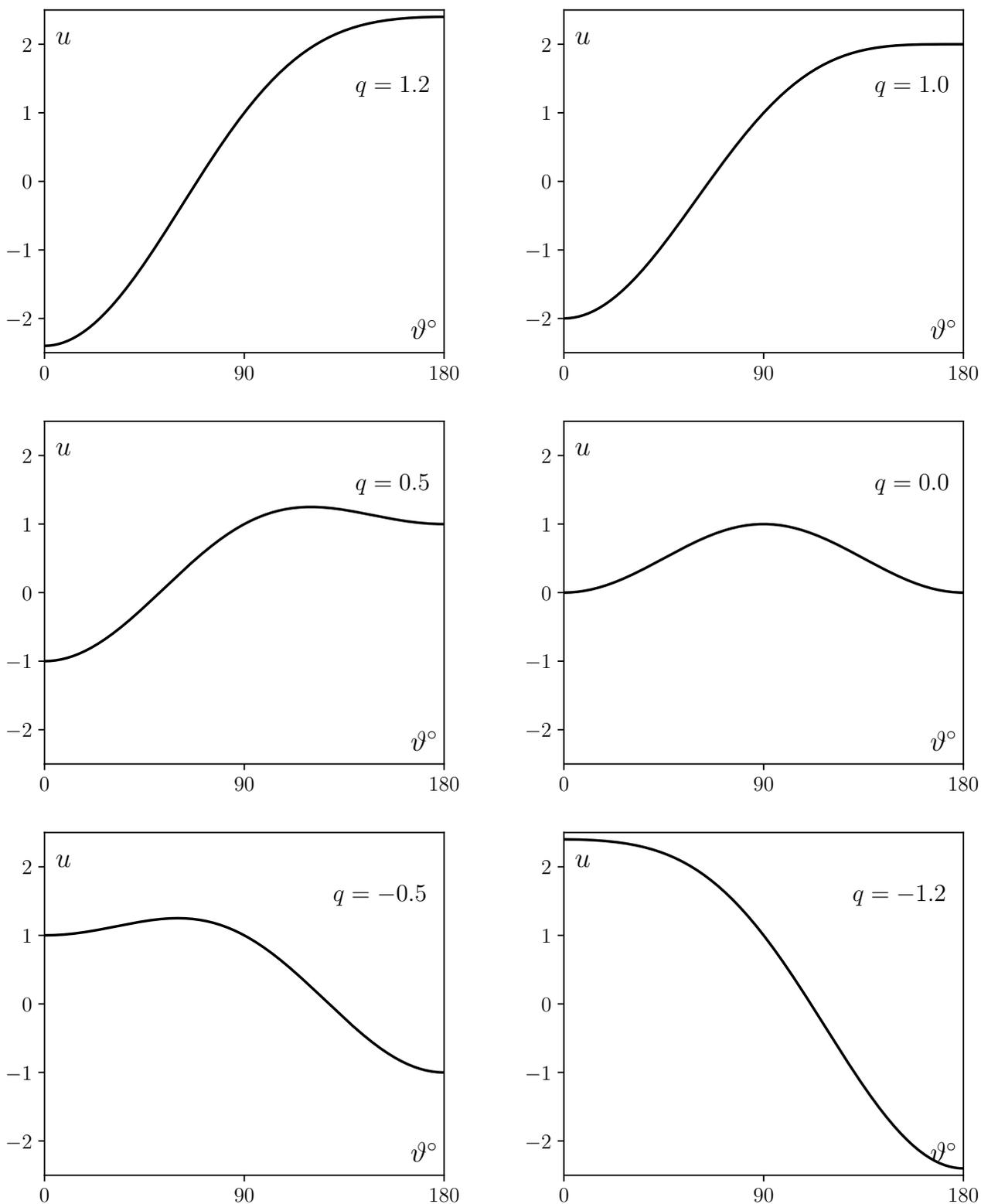


Рис. 1.8. Профили энергии однородно намагниченого одноосного ферромагнетика при различных значениях q приложенного магнитного поля

обращается в нуль. При $\vartheta = \vartheta_2$ вторая производная $u''(\vartheta = \vartheta_2) = 2(1 - q)$; при $q < 1$ она отрицательна, при $q > 1$ — положительна, а при $q = -1$ обращается в нуль. Наконец, $u''(\vartheta = \vartheta_m) = 2(q^2 - 1)$; при $|q| < 1$ эта величина отрицательна, а при $|q| = 1$ обращается в нуль. Таким образом, при $q > 1$ рассматриваемая система обладает одним минимумом энергии (в точке $\vartheta = \vartheta_1$) и одним максимумом энергии (в точке $\vartheta = \vartheta_2$). При $-1 < q < 1$ имеются два минимума энергии (в точках $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \vartheta_2$) и один максимум — в точке $\vartheta = \vartheta_m$. Указанные минимумы разделены энергетическим барьером, а их глубина зависит от величины поля q . При $q > 0$ основным (более глубоким) является минимум в точке $\vartheta = \vartheta_1$, а метастабильным (менее глубоким) — в точке $\vartheta = \vartheta_2$. При $q < 0$ ситуация является обратной: основному минимуму отвечает угол $\vartheta = \vartheta_2$, а метастабильному — $\vartheta = \vartheta_1$. Профили энергии одноосного ферромагнетика при $\psi = 0$ и различных величинах приложенного поля показаны на рис. 1.8.

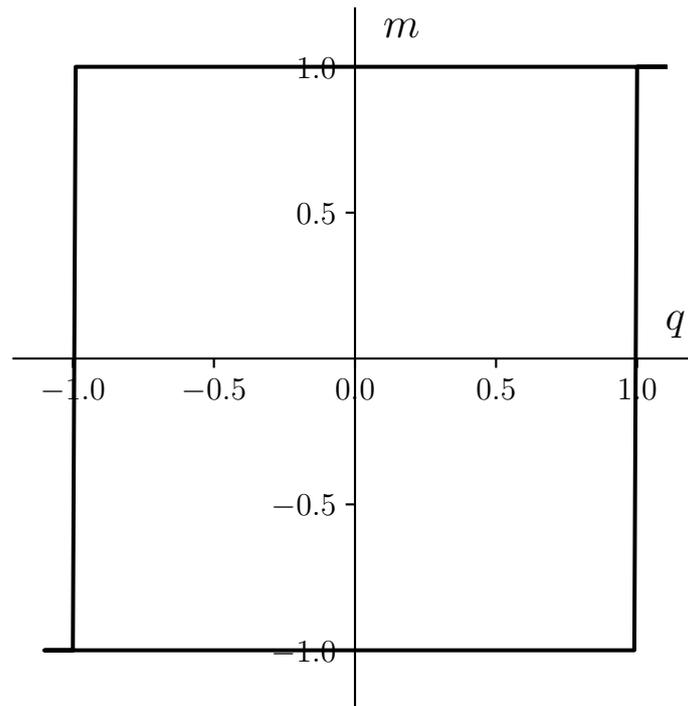


Рис. 1.9. Кривая продольного (угол $\psi = 0$) намагничивания одноосного ферромагнетика

Из-за наличия метастабильных минимумов намагничивание системы происходит *гистерезисным* образом. В самом деле, пусть изначально образец находится во внешнем поле (мы по-прежнему считаем, что оно направлено

вдоль оси лёгкого намагничивания), причём значение $q > 1$. Из энергетических соображений следует, что проекция намагниченности на направление поля будет при этом равна $m = \mathbf{e} \cdot \mathbf{h}|_{\vartheta=\vartheta_1} = \cos \vartheta_1 = 1$. Будем уменьшать величину приложенного поля. При $q = 1$ появится второй минимум энергии в точке $\vartheta = \vartheta_2 = \pi$. Глубина первого минимума (в точке $\vartheta = \vartheta_1 = 0$) будет уменьшаться со снижением q , а второго (в точке $\vartheta = \pi$), наоборот, увеличиваться, и при $q = 0$ они сравняются. При $-1 < q < 0$ основным будет минимум энергии в точке $\vartheta = \pi$, однако система будет оставаться в прежнем состоянии $\vartheta = 0$, не имея возможности совершить переход в основное состояние из-за энергетического барьера. Исчезновение последнего при $q = -1$ будет сопровождаться переворотом вектора намагниченности: скачкообразным увеличением угла ϑ от 0 до π и изменением проекции m от 1 до -1 (рис. 1.9). После этого ни дальнейшее уменьшение поля q , ни его увеличение вплоть до значения $q = 1$ никак не изменит направление указанного вектора. Несмотря на то, что при $q > 0$ основным будет состояние с углом $\vartheta = 0$, система не сможет в него перейти из-за потенциального барьера. Он исчезнет только при $q = 1$, после чего проекция намагниченности на направление поля снова станет равной $m = 1$. Таким образом, кривая намагничивания представляет собой раскрытую петлю. Её называют *петлёй гистерезиса*, подчёркивая тем самым, что ориентация вектора намагниченности зависит не только от текущего значения поля, но и от того, как оно менялось ранее, т. е. от истории процесса намагничивания,

При углах $\psi \neq 0$ для построения кривой намагничивания требуется численный расчёт. Он показывает (рис. 1.10), что качественно картина остаётся той же, что и при нулевом угле наклона поля: зависимость $m(q)$ не является однозначной. Единственным исключением является ситуация перпендикулярного намагничивания, когда угол $\psi = \pi/2$ (кривая 4 на рис. 1.10). В этом случае плотность магнитной энергии

$$u = \sin^2 \vartheta - 2q \sin \vartheta \quad (1.127)$$

имеет два равных по глубине минимума в точках $\vartheta_1 = \arcsin q$ и $\vartheta_2 = \pi - \arcsin q$ при всех значениях поля из интервала $-1 < q < 1$. Независимо от того, в какой из энергетических ям находится система, проекция её намагниченности на направление поля будет равна $m = \sin \vartheta = q$. При $q > 1$ единственный минимум энергии находится в точке $\vartheta_1 = \pi/2$, так что намагни-

ченность равна $m = 1$, а при $q < -1$ — в точке $\vartheta_2 = -\pi/2$, поэтому $m = -1$. Таким образом, при перпендикулярном намагничивание зависимость $m(q)$ является однозначной, и магнитный гистерезис отсутствует.

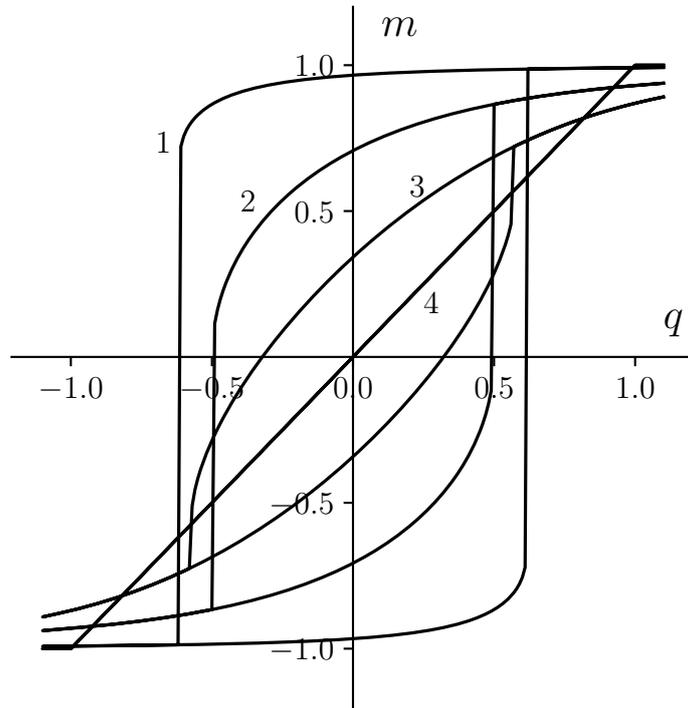


Рис. 1.10. Кривая намагничивания одноосного ферромагнетика при различных углах ψ наклона поля: $\psi = 15^\circ$ (1), 30° (2), 45° (3) и 90° (4)

1.10.2. Астроида

Как видно из рис. 1.10, для каждого угла ψ (кроме $\psi = \pi/2$) существует критическое значение поля q_K , при котором вектор намагниченности скачком меняет своё направление. Этой ситуации отвечает слияние метастабильного минимума с максимумом и исчезновение энергетического барьера. Таким образом, при $q = q_K$ существует такое направление вектора намагниченности ϑ_K , что и первая, и вторая производные от потенциала u для него обращаются в нуль. Иначе говоря, критическое поле q_K может быть найдено из двух условий:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 2 \sin \vartheta_K \cos \vartheta_K - 2q_K (h_x \cos \vartheta_K - h_z \sin \vartheta_K) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 2 \cos 2\vartheta_K + 2 (h_x \sin \vartheta_K + h_z \cos \vartheta_K) = 0. \end{cases} \quad (1.128)$$

Выражая отсюда h_x и h_z , находим

$$q_K h_x = \sin^3 \vartheta_K, \quad q_K h_z = -\cos^3 \vartheta_K. \quad (1.129)$$

Применение основного тригонометрического тождества позволяет исключить угол ϑ_K и получить связь компонент критического поля:

$$q_K^{2/3} \left(h_x^{2/3} + h_z^{2/3} \right) = 1, \quad (1.130)$$

или в размерном виде:

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = \left(\frac{2K}{M} \right)^{2/3}. \quad (1.131)$$

Кривая в плоскости (H_x, H_z) , описываемая этим уравнением, называется *астроидой* (рис. 1.11). Если компонентам приложенного к образцу поля соответствует точка, лежащая внутри области, ограниченной астроидой, то в системе есть метастабильное состояние. Если же такая точка находится в области, которая является внешней по отношению к астроиде, то метастабильное состояние отсутствует.

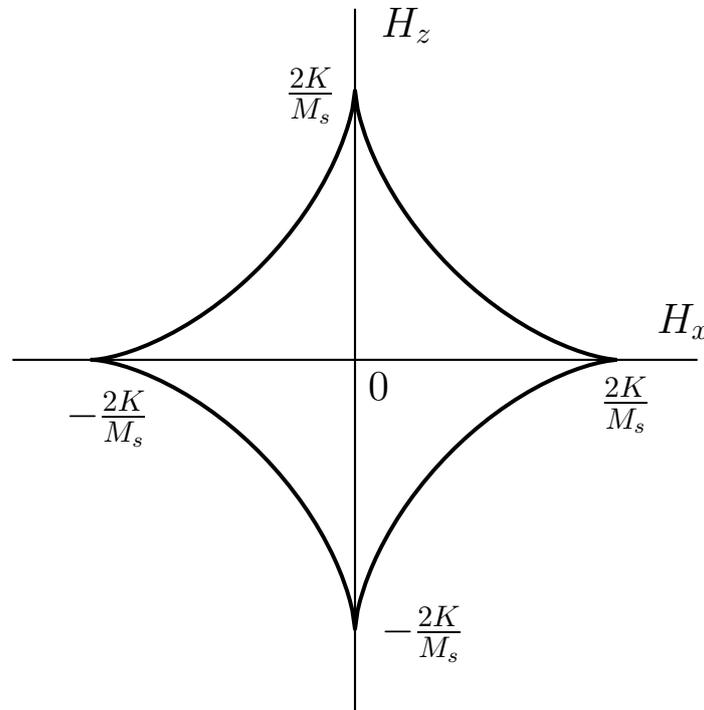


Рис. 1.11. Астроида

Заметим также, что абсолютная величина критического поля q_K может

быть выражена через угол ψ согласно

$$q_K = \frac{1}{\left(\sin^{2/3} \psi + \cos^{2/3} \psi\right)^{3/2}}. \quad (1.132)$$

Это следует из безразмерного уравнения астроида при учёте того, что $h_x = \sin \psi$ и $h_z = \cos \psi$.

2. Доменная структура ферромагнетиков

2.1. Уравнения магнитостатики

В веществе магнитное поле возбуждается токами проводимости и заряженными частицами, движущимися внутри атомов или ионов. Напряжённость \mathbf{h} этого поля резко меняется на расстояниях ядерного и атомного масштабов, и его детальное задание крайне трудоёмко из-за огромного (порядка числа Авогадро) числа частиц в реальных телах. Поэтому для описания магнитных свойств материальных сред используют так называемое *макроскопическое* поле, которое получается из микроскопического посредством усреднения по физически бесконечно малым объёмам вещества. Напряжённость этого сглаженного поля принято обозначать буквой \mathbf{B} и называть *магнитной индукцией*. Таким образом, $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{h}}$, где черта означает усреднение по физически бесконечно малому объёму.

Уравнения для макроскопического поля можно получить путём усреднения микроскопических уравнений Максвелла для вектора \mathbf{h} :

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \rho \mathbf{v}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{e} — микроскопическая напряжённость электрического поля, ρ — микроскопическая плотность электрических зарядов в точке наблюдения поля, а \mathbf{v} — их скорость. Если макроскопические условия неизменны, то среднее значение от производной по времени во втором уравнении равно нулю, и результатом усреднения являются равенства $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \overline{\rho \mathbf{v}}$. Величина $\overline{\rho \mathbf{v}}$ есть ничто иное, как средняя плотность тока; можно показать, что она представима в виде

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = \mathbf{j} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{j} — плотность тока проводимости, \mathbf{M} — вектор намагниченности среды, а c — скорость света в вакууме. Наличие здесь двух слагаемых связано с тем, что в веществе магнитное поле создаётся не только текущими по проводам токами, но и движением электронов и ядер внутри атомов. Величину $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ иногда называют плотностью *молекулярных токов*.

Если ввести вспомогательный вектор $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$, то уравнения для

макроскопического магнитного поля примут вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.3)$$

По историческим причинам именно вектор \mathbf{H} , а не \mathbf{B} , принято называть *напряжённостью магнитного поля в веществе*. При этом под напряжённостью приложенного магнитного поля в заданной точке вещества понимают напряжённость того поля, которое создавали бы внешние источники поля в отсутствие у среды магнитных свойств.

Если токи проводимости в среде отсутствуют, то базовые уравнения магнитостатики принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (2.4)$$

Из второго уравнения следует, что вектор \mathbf{H} можно представить в виде градиента от некоторой скалярной функции: $\mathbf{H} = -\nabla\Psi$. Функцию Ψ называют скалярным потенциалом магнитостатического поля. Уравнение для неё можно получить с помощью уравнения для вектора \mathbf{B} . Поскольку дивергенция от градиента представляет собой оператор Лапласа, то

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{H} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} = -\Delta\Psi + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M} = 0, \quad (2.5)$$

следовательно,

$$\Delta\Psi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (2.6)$$

Уравнение такого типа называется *уравнением Пуассона*. Если среда однородно намагничена или же не обладает магнитными свойствами ($\mathbf{M} = 0$), то уравнение принимает вид уравнения Лапласа: $\Delta\Psi = 0$.

Полученные уравнения следует дополнить граничными условиями, которые заключаются в непрерывности нормальной к поверхности раздела двух сред компоненты вектора \mathbf{B} :

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (2.7)$$

и непрерывности (в отсутствие токов проводимости) тангенциальной составляющей вектора \mathbf{H} :

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (2.8)$$

Используя эти равенства, запишем соотношения, которым должен подчиняться магнитный потенциал на границе магнитной ($\mathbf{M} \neq 0$) и немагнитной

($\mathbf{M} = 0$) сред. Из условия $B_{1n} = B_{2n}$ следует, что $H_{1n} + 4\pi M_n = H_{2n}$ и, соответственно,

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial n} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} = 4\pi M_n, \quad (2.9)$$

здесь $M_n = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ есть проекция намагниченности на единичный вектор нормали \mathbf{n} , проведённый от среды 1 (магнитной) к среде 2 (немагнитной), а $\partial/\partial n$ означает производную его направлению (нормальную производную). В свою очередь, условие $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ означает непрерывность на границе раздела сред тангенциальных производных потенциала, что эквивалентно условию непрерывности самого потенциала:

$$\Psi_1 = \Psi_2. \quad (2.10)$$

Решение уравнения Пуассона (или Лапласа) с указанными граничными условиями позволяет однозначным образом найти магнитное поле во всём пространстве при заданном распределении вектора намагниченности.

2.2. Поле внутри однородно намагниченного эллипсоида

Рассмотрим простые примеры решения уравнений магнитостатики. Сначала найдём магнитное поле внутри и вне однородно намагниченного шара, а затем решим такую же задачу для однородно намагниченного бесконечного цилиндра. После этого обсудим поле внутри эллипсоида с произвольным соотношением полуосей.

2.2.1. Однородно намагниченный шар

Обозначим через R радиус шара и введём сферическую систему координат с началом в центре шара и осью z , направленной вдоль вектора намагниченности \mathbf{M} (рис. 2.1). При таком выборе положение каждой точки пространства задаётся тройкой чисел (r, ϑ, φ) , где r — расстояние от центра шара, ϑ — полярный угол, отсчитываемый от оси z , а φ — азимутальный угол, отсчёт которого ведётся от оси x . В силу однородного распределения вектора \mathbf{M} его дивергенция равна нулю, поэтому магнитный потенциал подчиняется уравнению

$$\Delta \Psi = 0 \quad (2.11)$$

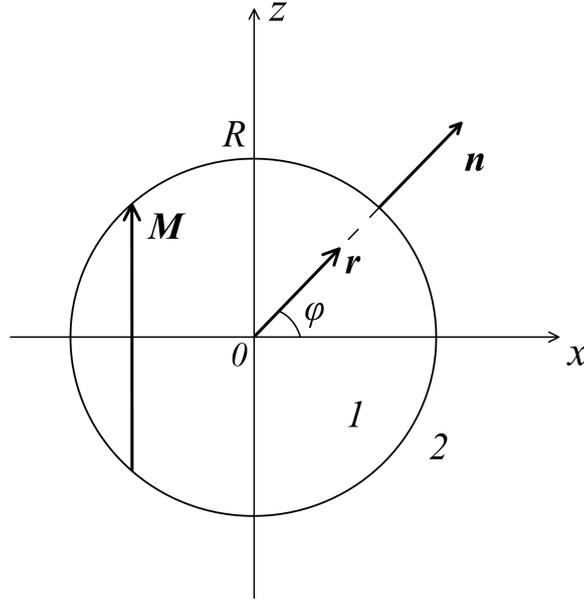


Рис. 2.1. К нахождению магнитного поля однородно намагниченного шара

и внутри, и вне шара. Оператор Лапласа в сферических координатах равен

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right). \quad (2.12)$$

Запишем граничные условия. Отметим, что любой отличный от нуля радиус-вектор, проведённый из центра шара к точке наблюдения, равен $\mathbf{r} = r\mathbf{n}$, где \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности шара. Поэтому в рассматриваемом случае нормальная $\partial/\partial n$ сводится к производной $\partial/\partial r$ по переменной r . Соответственно, на границе шара потенциал должен подчиняться соотношениям

$$\Psi_1|_{r=R} = \Psi_2|_{r=R}, \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right|_{r=R} = 4\pi M_n, \quad (2.13)$$

здесь индекс 1 относится к области внутри образца, а индекс 2 — снаружи. Проекция вектора намагниченности на направление нормали равна $M_n = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M \cos \vartheta$, поэтому первое из равенств может быть записано согласно

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} \right|_{r=R} = 4\pi M \cos \vartheta. \quad (2.14)$$

Любой поворот шара вокруг направления вектора намагниченности (вокруг оси z), очевидно, не меняет распределения магнитного поля в пространстве. Это означает, что потенциал Ψ не зависит от азимутального угла φ ,

являясь функцией только переменных r и ϑ . Учитывая это, разделим переменные и будем искать решение уравнения Лапласа в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от расстояния r , а другая — только от полярного угла ϑ : $\Psi(r, \vartheta) = f(r)\Theta(\vartheta)$. Принимая во внимание граничные условия, вид функции $\Theta(\vartheta)$ можно предугадать сразу: $\Theta(\vartheta) = \cos \vartheta$, так что $\Psi(r, \vartheta) = f(r) \cos \vartheta$, где функция $f(r)$ подлежит определению.

Определим действие оператора Лапласа на искомый магнитный потенциал:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi = \Delta (f(r) \cos \vartheta) &= \cos \vartheta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \right) + \frac{f(r)}{r^2} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \vartheta} \right) = \\ &= \frac{\cos \vartheta}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - 2f(r) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Приравнивая найденный результат к нулю, получаем уравнение для функции $f(r)$:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) - 2f(r) = 0. \quad (2.16)$$

Соотношения, которым подчиняется эта функция на границе шара, следуют из граничных условий для магнитного потенциала:

$$f_1(r = R) = f_2(r = R), \quad \left. \frac{df_1}{dr} \right|_{r=R} - \left. \frac{df_2}{dr} \right|_{r=R} = 4\pi M. \quad (2.17)$$

При решении уравнения для $f(r)$ области внутри и вне шара следует рассмотреть по отдельности, так как на поверхности образца производная функции $f(r)$ терпит разрыв. В области $r \leq R$ будем искать функцию $f(r)$ в степенном виде: $f(r) = Ar^s$ (A — некоторая константа), предполагая, что $s \geq 0$. Указанное ограничение на показатель s диктуется физически оправданным требованием конечности магнитного поля в центре шара. Подстановка пробной функции $f = Ar^s$ в уравнение даёт:

$$\frac{d}{dr} (r^2 \cdot sr^{s-1}) - 2r^s = 0, \quad (2.18)$$

$$(s(s+1) - 2)r^2 = 0. \quad (2.19)$$

Это уравнение имеет два корня: $s_1 = 1$ и $s_2 = -2$, однако условию $s \geq 0$ удовлетворяет только первый из них, следовательно, $f_1(r) = f(r \leq R) = Ar$.

Вне шара неизвестную функцию следует искать в том же виде $f(r) = Br^s$ (константа может быть другой), но считать, что $s \leq 0$: только в этом случае потенциал Ψ на бесконечности ограничен. Повторяя выкладки, получаем $s = -2$ и, соответственно, $f_2(r) = f(r \geq R) = B/r^2$.

Постоянные A и B находятся из граничных условий. Требование непрерывности функции $f(r)$ на поверхности шара приводит к равенству

$$f_1(r = R) = f_2(r = R) \Rightarrow A = \frac{B}{R^3}, \quad (2.20)$$

а условие, накладываемое на производную df/dr , даёт

$$\frac{d}{dr}(Ar) \Big|_{r=R} - \frac{d}{dr}\left(\frac{B}{r^2}\right) \Big|_{r=R} = 4\pi M, \quad A + \frac{2B}{R^3} = 4\pi M. \quad (2.21)$$

Полученные соотношения позволяют установить, что

$$A = \frac{4\pi}{3}M, \quad B = \frac{4\pi M}{3}R^3. \quad (2.22)$$

Таким образом, искомый магнитный потенциал оказывается равным

$$\Psi(r, \vartheta) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}M \cos \vartheta r, & r \leq R, \\ \frac{4\pi}{3}M \cos \vartheta \frac{R^3}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (2.23)$$

Потенциал магнитного поля вне шара можно записать в виде

$$\Psi(r \geq R) = \frac{4\pi}{3}M \cos \vartheta \frac{R^3}{r^2} = V \frac{Mr \cos \vartheta}{r^3} = V \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad \left(V = \frac{4\pi R^3}{3} \right), \quad (2.24)$$

где $\boldsymbol{\mu} = MV$ — магнитный момент шара. Соответствующая напряжённость поля равна

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}. \quad (2.25)$$

Отметим, что такое же поле создавал бы вокруг себя магнитный диполь с моментом $\boldsymbol{\mu}$, расположенный в точке, где находится центр шара.

Потенциал внутри шара равен $\Psi = \frac{4\pi}{3}Mr \cos \vartheta = \frac{4\pi}{3}\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$, а напряжённость магнитного поля

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{M}. \quad (2.26)$$

Таким образом, магнитное поле внутри рассмотренного шара однородно и направлено противоположно вектору намагниченности.

2.2.2. Однородно намагниченный цилиндр

Рассмотрим теперь бесконечный однородно намагниченный цилиндр радиуса R , вектор намагниченности \mathbf{M} которого перпендикулярен оси симметрии. Введём цилиндрическую систему координат с осью z вдоль оси цилиндра. Азимутальный угол φ будем отсчитывать от направления, задаваемого вектором \mathbf{M} , через ρ обозначим расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения (рис. 2.2).

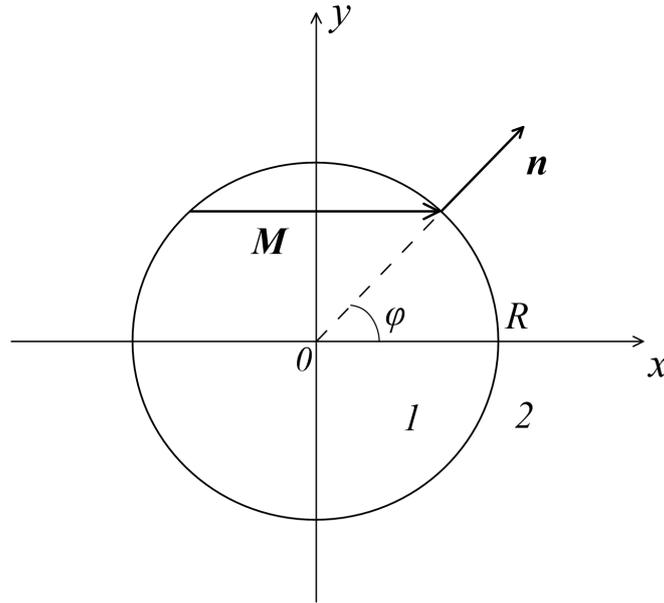


Рис. 2.2. Поперечный разрез бесконечного цилиндра, намагниченного перпендикулярно оси симметрии

Поскольку намагниченность распределена однородно, то $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$, и магнитный потенциал Ψ всюду подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta \Psi = 0. \quad (2.27)$$

В цилиндрических координатах оператор Лапласа равен

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (2.28)$$

В рассматриваемом случае нормальная производная совпадает с производной по расстоянию до оси симметрии z : $\partial/\partial n = \partial/\partial \rho$, а составляющая вектора намагниченности, перпендикулярная поверхности цилиндра, равна $M_n = M \cos \varphi$. Поэтому граничные условия для потенциала имеют вид

$$\Psi_1|_{\rho=R} = \Psi_2|_{\rho=R}, \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} - \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 4\pi M \cos \varphi. \quad (2.29)$$

Как и прежде, индекс 1 здесь обозначает область внутри образца, а индекс 2 — вне его.

Из-за того, что цилиндр предполагается бесконечно длинным, функция Ψ не зависит от координаты z . Исходя из вида граничных условий будем искать её в виде $\Psi(\rho, \varphi) = f(\rho) \cos \varphi$, где $f(\rho)$ — подлежащая определению функция расстояния ρ . При таком выборе лапласиан от магнитного потенциала равен

$$\Delta \Psi = \cos \varphi \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) - \frac{f}{\rho^2} \right], \quad (2.30)$$

и уравнение Лапласа приводит к равенству

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) = f(\rho). \quad (2.31)$$

При этом искомая функция $f(\rho)$ подчиняется соотношениям

$$f_1(\rho = R) = f_2(\rho = R), \quad \left. \frac{df_1}{d\rho} \right|_{\rho=R} - \left. \frac{df_2}{d\rho} \right|_{\rho=R} = 4\pi M. \quad (2.32)$$

Построим решение уравнения для функции $f(\rho)$ в областях $\rho \leq R$ и $\rho \geq R$, а затем свяжем полученные результаты посредством граничных условий. При $\rho \leq R$ ищем функцию в виде $f = A\rho^s$, предполагая, что магнитное поле на оси цилиндра конечно и $s \geq 0$. Подстановка в уравнение приводит к уравнению $s^2 - 1 = 0$, только один корень которого $s = 1$ удовлетворяет требованию неотрицательности. Значит, внутри цилиндра $f(\rho \leq R) = A\rho$.

В диапазоне $\rho \geq R$ решение в виде $f = B\rho^s$ следует ограничить значениями $s \leq 0$, чтобы магнитное поле образца на бесконечном удалении от него было конечным. Подстановка пробной функции такого вида в уравнение для функции f даёт $s = -1$, поэтому вне цилиндра $f(\rho \geq R) = B/\rho$.

Из непрерывности функции f в точке $\rho = R$ следует равенство $B = AR^2$, а из условия на скачок нормальной производной $A + B/R^2 = 4\pi M$. Следовательно,

$$A = 2\pi M; \quad B = 2\pi MR^2. \quad (2.33)$$

В итоге, для искомого магнитного потенциала получаем

$$\Psi(\rho, \varphi) = \begin{cases} 2\pi M \cos \varphi \rho & \rho \leq R, \\ 2\pi M \cos \varphi \frac{R^2}{\rho}, & \rho \geq R. \end{cases} \quad (2.34)$$

Этот результат означает, что внутри цилиндра существует магнитное поле $\mathbf{H} = -2\pi\mathbf{M}$, направленное, как и в случае с шаром, противоположно вектору намагниченности.

Отметим, что если бесконечный цилиндр намагничен вдоль оси, то единственным решением уравнения Лапласа при условии $M_n =$ является функция $\Psi = 0$, так что магнитное поле всюду равно нулю.

2.2.3. Общий случай

Вообще говоря, магнитное поле внутри однородно намагниченного ферромагнитного тела *не является* однородным. Оно будет таковым только в том случае, когда образец имеет форму эллипсоида. Можно показать, что напряжённость магнитного поля внутри непроводящего *однородно намагниченного* эллипсоида, помещённого в магнитное поле \mathbf{H}_0 , равна

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \hat{N}\mathbf{M}. \quad (2.35)$$

Второе слагаемое $\mathbf{H}_M = -\hat{N}\mathbf{M}$ часто называют *размагничивающим* полем, а \hat{N} — тензором размагничивающих факторов. Последний зависит только от соотношений между полуосями эллипсоида (если внешняя среда немагнитна), а сумма его диагональных элементов равна 4π . Если оси системы координат совпадают с главными осями эллипсоида, то тензор \hat{N} является диагональным, и размагничивающее поле имеет компоненты

$$H_x = -N_x M_x, \quad H_y = -N_y M_y, \quad H_z = -N_z M_z; \quad (2.36)$$

числа N_x , N_y и N_z называют при этом размагничивающими факторами.

Шар и цилиндр являются частными случаями эллипсоида, поэтому результаты, которые были получены для них ранее путём решения магнито-статической задачи, следуют из написанных здесь соотношений. В самом деле, для шара размагничивающие факторы N_x , N_y и N_z равны друг другу и, поскольку $N_x + N_y + N_z = 4\pi$, то $N_x = N_y = N_z = \frac{4\pi}{3}$. Следовательно, $H_x = -\frac{4\pi}{3}M_x$, $H_y = -\frac{4\pi}{3}M_y$ и $H_z = -\frac{4\pi}{3}M_z$, т. е. напряжённость магнитного поля внутри шара равна $\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{M}$, что в точности совпадает с найденным выше ответом. Для бесконечно длинного цилиндра, ось симметрии которого

совпадает с осью z , размагничивающий фактор $N_z = 0$, так как в соответствующем направлении нет ограничивающих образец поверхностей. Кроме того, $N_x = N_y$ из-за аксиальной симметрии и, значит, $\mathbf{H} = -2\pi\mathbf{M}$.

2.3. Магнитостатическая энергия

2.3.1. Анизотропия формы

С размагничивающим полем \mathbf{H}_M , созданным намагниченностью \mathbf{M} эллипсоида, связана так называемая *магнитостатическая энергия*, равная

$$E_M = -\frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_M dV. \quad (2.37)$$

В отличие от формулы для энергии ферромагнитного тела во внешнем поле (энергии Зеемана) здесь перед интегралом стоит коэффициент $1/2$. Его появление связано с тем, что поле \mathbf{H}_M само является функцией (линейной) от намагниченности \mathbf{M} . С помощью размагничивающих факторов указанная энергия записывается согласно

$$E_M = \frac{1}{2} V (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2), \quad (2.38)$$

где V — объём образца. Это выражение имеет структуру энергии анизотропии. В данном случае говорят об анизотропии формы, поскольку размагничивающие факторы зависят от формы образца. Для эллипсоидов вращения два из трёх размагничивающих фактора равны друг другу, и подобная анизотропия является одноосной. В самом деле, если, к примеру, $N_x = N_y$, то $E_M = \frac{1}{2} [N_x (M_x^2 + M_y^2) + N_z M_z^2] = \frac{1}{2} (N_z - N_x) M_z^2 + \text{const}$. К какому именно типу в данном случае принадлежит анизотропия — “лёгкая ось” или “лёгкая плоскость” — зависит от соотношения между N_z и N_x .

2.3.2. Роль магнитного дипольного взаимодействия

С микроскопической точки зрения магнитостатическая энергия обусловлена диполь-дипольными взаимодействиями атомов или ионов, входящих в состав кристалла. Чтобы убедиться в этом, обратимся к совокупности спинов, расположенных в узлах решётки. Форму образца при этом будем предполагать произвольной, не ограничивая рассмотрение только эллипсоидальными

частицами. Если через \mathbf{h}_i обозначить напряжённость магнитного поля, создаваемого в месте расположения i -го спина всеми остальными спинами, то энергию диполь-дипольных взаимодействий в системе можно записать в виде

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{h}_i, \quad (2.39)$$

здесь $\boldsymbol{\mu}_i$ — элементарный магнитный момент i -го узла, а сумма выполняется по всем спинам. Каждая пара спинов при таком суммировании учитывается дважды, поэтому в правой части стоит множитель $1/2$.

Выразим энергию E через макроскопические величины. Для этого воспользуемся методом, разработанным Х. А. Лоренцом при построении микроскопической теории диэлектриков. Опишем вокруг i -го спина физически бесконечно малую сферу S , радиус R которой значительно больше расстояния между узлами решётки. Обозначим через \mathbf{H}_M напряжённость среднего макроскопического (т. е. усреднённого по объёму) поля внутри сферы S , создаваемого *всеми* магнитными диполями, а через $\tilde{\mathbf{H}}$ — теми из них, которые расположены *вне* указанной сферы. Так как сфера S физически бесконечно мала, то её окрестность намагничена однородно. Поэтому разность величин \mathbf{H}_M и $\tilde{\mathbf{H}}$ можно считать равной напряжённости поля равномерно намагниченного шара:

$$\mathbf{H}_M - \tilde{\mathbf{H}} = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \quad (2.40)$$

Микроскопическое поле \mathbf{h}_i является векторной суммой двух полей, одно из которых создаётся спинами, расположенными *внутри* сферы, а другое — *вне* её. Второе из указанных полей можно считать равным своему среднему по объёму сферы ввиду малости последней. Другими словами, можно предполагать, что это поле равно макроскопическому полю $\tilde{\mathbf{H}}$. Таким образом,

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{h}'_i + \mathbf{H}_M + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}, \quad (2.41)$$

где \mathbf{h}'_i — общий вклад магнитных диполей, находящихся внутри сферы S . Он определяется выражением

$$\mathbf{h}'_i = \sum_j \left(\frac{3(\boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{r}_{ij}) \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}_j}{r_{ij}^3} \right), \quad (2.42)$$

в котором суммирование выполняется по тем спинами, которые удалены от i -го узла на расстояние $r_{ij} < R$. Все магнитные моменты $\boldsymbol{\mu}_j$ внутри физически

бесконечной малой сферы S можно считать сонаправленными (вследствие обменного взаимодействия между ними) и равными одному и тому же вектору $\boldsymbol{\mu}_i$. Это позволяет записать намагниченность образца в окрестности i -го спина в виде $\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\mu}_i}{v_0}$, где v_0 — объём ячейки кристаллической решётки, приходящейся на один атом. Следовательно, магнитное поле \mathbf{h}'_i можно записать в виде

$$\mathbf{h}'_i = \hat{\beta} \mathbf{M}, \quad (2.43)$$

где тензор $\hat{\beta}$ определяется типом решётки.

Таким образом, энергия диполь-дипольных взаимодействий в рассматриваемой системе может быть представлена в виде

$$E = -\frac{1}{2} \sum_i \left(\mathbf{H}_M + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} + \hat{\beta} \mathbf{M} \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_i, \quad (2.44)$$

где \mathbf{M} — намагниченность магнетика в окрестности i -го узла. Последним шагом в переходе от микроскопического описания к макроскопическому является замена суммы в этой формуле интегралом по объёму образца V . В пределах бесконечно малого объёма dV в окрестности i -го узла указанная сумма сводится к

$$dE = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{H}_M + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} + \hat{\beta} \mathbf{M} \right) \cdot \boldsymbol{\mu}_i \frac{dV}{v_0} = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{H}_M + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} + \hat{\beta} \mathbf{M} \right) \cdot \mathbf{M} dV, \quad (2.45)$$

поэтому для всего магнетика

$$E = -\frac{1}{2} \int_{(V)} \left(\mathbf{H}_M + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} + \hat{\beta} \mathbf{M} \right) \cdot \mathbf{M} dV. \quad (2.46)$$

Первый из вкладов в полученную энергию

$$E_M = -\frac{1}{2} \int_{(V)} \mathbf{H}_M \cdot \mathbf{M} dV \quad (2.47)$$

есть ничто иное, как магнитостатическая энергия, которая была введена выше для однородно намагниченного эллипсоида. Как мы видим, общая формула для E_M остаётся верной при любой форме образца, но вычисление размагничивающего поля \mathbf{H}_M в каждом конкретном случае требует решения

уравнений Максвелла с заданными граничными условиями. Второй вклад равен

$$E_M = -\frac{2\pi}{3} \int_{(V)} M^2 dV = -\frac{2\pi}{3} M^2 V. \quad (2.48)$$

Возможность сразу выполнить здесь интегрирование объясняется тем, что длина M вектора намагниченности, устанавливаемая обменными взаимодействиями, предполагается постоянной. При поиске пространственного распределения намагниченности путём минимизации полной магнитной энергии этот вклад может быть опущен — он определяет только начало отсчёта магнито-статической энергии.

Наконец, последнее слагаемое

$$E_M = -\frac{1}{2} \int_{(V)} \mathbf{M} \cdot \hat{\beta} \mathbf{M} dV \quad (2.49)$$

отвечает энергии магнитной анизотропии, речь о которой шла в разделе 1.9. Там уже говорилось, что наряду со спин-орбитальным взаимодействием её источником являются магнитные диполь-дипольные взаимодействия атомов. Выполненный расчёт подтверждает это.

2.4. Магнитные заряды

Как известно, в природе есть электрические заряды, но, по-видимому, нет магнитных: до настоящего времени их существование экспериментально не установлено несмотря на многочисленные попытки. Тем не менее в теории магнетизма широко применяется понятие магнитных зарядов. Основанием для него служит аналогия уравнения $\Delta\Psi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{M}$ для магнитного потенциала Ψ с известным уравнением Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ для скалярного электрического потенциала φ , правая часть которого пропорциональна плотности электрических зарядов. Как видно, основные уравнения магнито- и электростатики формально будут полностью эквивалентными, если ввести фиктивные магнитные заряды с объёмной плотностью $\rho_M = \operatorname{div} \mathbf{M}$. Кроме того, продолжая аналогию, можно говорить и о поверхностных магнитных зарядах. Для уточнения этого понятия рассмотрим границу раздела двух сред, одна из которых является магнитной, а другая — нет (рис. 2.3). Возьмём физически бесконечно малый цилиндр, основания которого находятся

по разные стороны от границы. Полный магнитный заряд внутри цилиндра равен

$$q_M = \int \rho_M dV = - \int \operatorname{div} \mathbf{M} dV. \quad (2.50)$$

По теореме Гаусса от интегрирования по объёму цилиндра можно перейти к интегрированию по всей его поверхности:

$$q_M = - \oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.51)$$

Высота цилиндра предполагается бесконечно малой по сравнению с размером его оснований. С одной стороны, это позволяет ввести поверхностную плотность магнитных зарядов σ_m , записав $q_m = \sigma_m \Delta S$, где ΔS — площадь основания цилиндра. С другой стороны, при указанном условии вклад боковых поверхностей цилиндра в интеграл мал, так что

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = (M_{1n} - M_{2n}) \Delta S = M_n \Delta S \quad (2.52)$$

(вне магнетика, очевидно, $M_n = 0$). Таким образом, плотность фиктивных магнитных зарядов на поверхности магнетика, погружённого в немагнитную среду, определяется формулой $\sigma_m = M_n$.

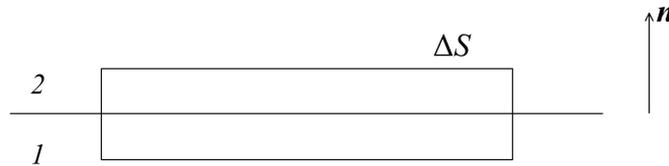


Рис. 2.3. Граница раздела магнитной (1) и немагнитной (2) сред; единичный вектор нормали \mathbf{n} проведён от магнетика.

2.5. Магнитные домены

Обменное взаимодействие способствует упорядочению всех спинов в ферромагнетиках в одном направлении. Однако зачастую ферромагнитные тела в отсутствие внешнего поля оказываются полностью размагниченными. Как показывает опыт, это связано с тем, что в магнитном отношении ферромагнитные кристаллы распадаются на множество малых макроскопических областей, которые называют *доменами*. Спонтанная намагниченность каждого

домена имеет максимальное при заданной температуре значение M . Но намагниченность образца в целом может оказаться значительно меньше M или даже равной нулю из-за того, что разные домены намагничены в различных направлениях.

Гипотеза о магнитных доменах была высказана П. Вейссом в 1907 г. ещё до понимания роли обменных сил. А первое экспериментальное доказательство их существования было представлено Г. Баркгаузенем в 1919 г. При помощи электронного усилителя он обнаружил, что магнитный момент ферромагнитного тела при изменении внешнего поля изменяется скачками. Каждый скачок отвечает перемагничиванию одного или нескольких доменов.

Разбитие ферромагнитных тел на домены понижает их магнитостатическую энергию. Убедимся в этом с помощью простого примера. Найдём магнитостатическую энергию бесконечного цилиндра радиуса R , состоящего из двух доменов (рис. 2.4), а затем сравним полученную величину с энергией его однородно намагниченного аналога.

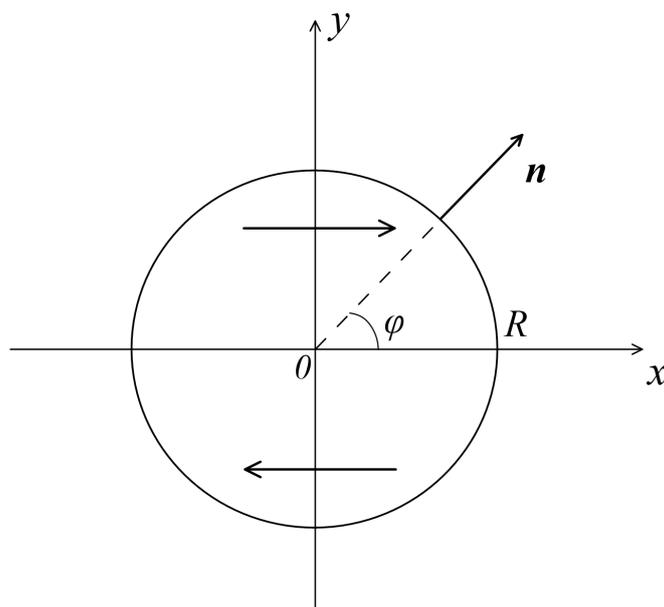


Рис. 2.4. Поперечный разрез бесконечного цилиндра, включающего два домена. Стрелками показаны направления векторов намагниченности в доменах.

Для указания положения точки в пространстве будем использовать декартовую и цилиндрическую системы координат с общей осью z , направленной вдоль оси цилиндра. Азимутальный угол φ будем отсчитывать от оси x , параллельной вектору намагниченности в доменах, а расстояние ρ — от оси z . В рассматриваемом случае $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ всюду, поэтому задача сводится к

решению уравнения Лапласа $\Delta\Psi = 0$ для магнитного потенциала Ψ с заданными граничными условиями. На поверхности раздела доменов потенциал и его нормальная производная непрерывны. На границе цилиндра потенциал также непрерывен, но его производная по нормали терпит разрыв, величина которого определяется соответствующей проекцией $M_n = M_x \cos \varphi$ вектора намагниченности:

$$\Psi_1(\rho = R) = \Psi_2(\rho = R), \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} - \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 4\pi M_n = 4\pi M_x \cos \varphi; \quad (2.53)$$

индекс 1 здесь относится к области внутри цилиндра, 2 — вне его, а нормаль проводится из области 1 в область 2.

В выбранной декартовой системе координат проекции $M_y = M_z = 0$, а проекция M_x является периодической ступенчатой функцией азимутального угла φ :

$$M_x(\varphi) = \begin{cases} +M, & 0 < \varphi < \pi \\ -M, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (2.54)$$

Представим её в виде разложения в ряд Фурье:

$$M_x(\varphi) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{2\pi n}{T} \varphi + \beta_n \sin \frac{2\pi n}{T} \varphi \right), \quad (2.55)$$

коэффициентами которого являются числа

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T M_x(\varphi) d\varphi, \quad \alpha_n = \frac{2}{T} \int_0^T M_x(\varphi) \cos \frac{2\pi n}{T} \varphi d\varphi, \quad (2.56)$$

$$\beta_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n}{T} \varphi d\varphi, \quad (2.57)$$

а период $T = 2\pi$. Поскольку функция $M_x(\varphi)$ нечётна, то $\alpha_n = 0$ для любого n , в том числе для $n = 0$. Вычисление же β_n даёт

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin n\varphi d\varphi - \int_{\pi}^{2\pi} \sin n\varphi d\varphi \right) = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n). \quad (2.58)$$

Таким образом,

$$\beta_{2n} = 0, \quad \beta_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)} \quad (2.59)$$

и, значит,

$$M_x = M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \sin(2n+1)\varphi}{\pi(2n+1)}. \quad (2.60)$$

Отсюда следует, что нормальная к границе цилиндра компонента намагниченности M_n равна:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos \varphi = \frac{4M}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \sin(2n+1)\varphi \cos \varphi}{\pi(2n+1)} = \frac{2M}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+2)\varphi + \sin 2n\varphi}{2n+1} = \\ &= \frac{2M}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\varphi}{2(n-1)+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\varphi}{2n+1} \right) = \frac{8M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \sin 2n\varphi \end{aligned} \quad (2.61)$$

(здесь применена формула $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$). Соответственно, условия на боковой поверхности цилиндра могут быть записаны следующим образом:

$$\Psi_1(\rho = R) = \Psi_2(\rho = R), \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} - \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 32M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \sin 2n\varphi. \quad (2.62)$$

Исходя из вида граничных условий будем искать решение уравнения $\Delta \Psi = 0$ в виде

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\rho) \sin 2n\varphi, \quad (2.63)$$

где $f_n(\rho)$ — неизвестные функции расстояния ρ . С учётом того, что в цилиндрических координатах лапласиан равен

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.64)$$

подстановка ряда для функции Ψ в уравнение Лапласа приводит к равенству

$$\Delta \Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n'' + \frac{1}{\rho} f_n' - \frac{4n^2}{\rho^2} f_n \right) \sin 2n\varphi = 0, \quad (2.65)$$

из которого следует, что

$$\frac{d^2 f_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_n}{\partial \rho} - \frac{4n^2}{\rho^2} f_n = 0. \quad (2.66)$$

В области $\rho \leq R$ решение этого уравнения, которое является конечным на оси цилиндра, имеет вид $f_n = A_n \rho^{2n}$, где A_n — некоторая константа. В области

же $\rho \geq R$ от решения следует требовать конечности на бесконечности. Этому условию удовлетворяет функция $f_n = B_n \rho^{-2n}$, где B_n — постоянная величина. Значит,

$$\Psi(\rho, \varphi) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{2n} \sin 2n\varphi, & \rho \leq R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{-2n} \sin 2n\varphi, & \rho \geq R. \end{cases} \quad (2.67)$$

Из условия непрерывности потенциала при $\rho = R$ следует, что $B_n = A_n R^{4n}$, поэтому, вводя константы $C_n = A_n R^{2n}$, найденную функцию Ψ можно задать равенствами

$$\Psi(\rho, \varphi) = C_n \times \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n} \sin 2n\varphi, & \rho \leq R, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{-2n} \sin 2n\varphi, & \rho \geq R \end{cases} \quad \left(C_n = A_n R^{2n} = \frac{B_n}{R^{2n}} \right). \quad (2.68)$$

Константы C_n находятся из граничного условия для нормальной производной от потенциала, из которого следует, что

$$C_n \left(\frac{2n\rho^{2n-1}}{R^{2n}} \right) \Big|_{\rho=R} + \left(\frac{2nR^{2n}}{\rho^{2n+1}} \Big|_{\rho=R} \right) = 32M \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}, \quad (2.69)$$

$$C_n = \frac{8MR}{(2n-1)(2n+1)}. \quad (2.70)$$

Таким образом, магнитный потенциал бесконечного цилиндра с двумя доменами равен

$$\Psi(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{8MR}{(2n-1)(2n+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n} \sin 2n\varphi, & \rho \leq R, \\ \frac{8MR}{(2n-1)(2n+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{-2n} \sin 2n\varphi, & \rho \geq R. \end{cases} \quad (2.71)$$

Вычислим магнитостатическую энергию \mathcal{E}_M , приходящуюся на единицу длины (вдоль оси z) цилиндра. По определению,

$$\mathcal{E}_M = \int_{\rho \leq R} U_M dS, \quad (2.72)$$

где $dS = \rho d\rho d\varphi$ — элемент площади поперечного сечения цилиндра, а U_M — объёмная плотность указанной энергии. Согласно общей формуле последняя

равна $U_M = -\frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_1$, где \mathbf{H}_1 — магнитное поле внутри цилиндра. Таким образом,

$$\mathcal{E}_M = -\frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} M_x H_{1x} \rho d\rho d\varphi. \quad (2.73)$$

По определению магнитного потенциала,

$$H_{1x} = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad (2.74)$$

где

$$\Psi_1 = \Psi(\rho \leq R, d\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8MR}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n} \sin 2n\varphi. \quad (2.75)$$

Запишем производную H_{1x} через переменные ρ и φ . Из соотношений

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.76)$$

связывающих декартовые и цилиндрические координаты точки пространства, следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}. \quad (2.77)$$

Значит,

$$H_x = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho}\right) = \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho}. \quad (2.78)$$

Поскольку

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8MR}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n} \cdot 2n \cdot \cos 2n\varphi, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8MR}{(2n-1)(2n+1)} \cdot 2n \cdot \frac{\rho^{2n-1}}{R^{2n}} \cdot \sin 2n\varphi, \quad (2.80)$$

то

$$\begin{aligned} H_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8M}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n-1} \cdot 2n (\cos 2n\varphi \cdot \sin \varphi - \sin 2n\varphi \cdot \cos \varphi) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16Mn}{(2n-1)(2n+1)} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2n-1} \sin(2n-1)\varphi. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Значит, энергия \mathcal{E}_M равна

$$\mathcal{E}_M = -\frac{1}{2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} H_{1x} M_x d\varphi = -\frac{M}{2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^\pi H_{1x} d\varphi + \frac{M}{2} \int_0^R \rho d\rho \int_\pi^{2\pi} H_{1x} d\varphi. \quad (2.82)$$

С учётом того, что

$$\int_0^\pi \sin(2n-1)\varphi d\varphi = -\int_\pi^{2\pi} \sin(2n-1)\varphi d\varphi = -\frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)\varphi \Big|_0^\pi = \frac{2}{2n-1}, \quad (2.83)$$

$$\int_0^R \frac{\rho^{2n}}{R^{2n-1}} d\rho = \frac{1}{2n+1} \frac{\rho^{2n+1}}{R^{2n-1}} \Big|_0^R = \frac{R^2}{2n+1}, \quad (2.84)$$

можно теперь получить окончательное выражение для энергии \mathcal{E}_M :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M &= 32M^2 R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = 32M^2 R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) \frac{1}{8} = \\ &= 4M^2 R^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = 4M^2 R^2 \frac{1}{(2n+1)^2} \Big|_{n=0} = 4M^2 R^2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Сравним эту величину с энергией, которая приходится на единицу длины однородно намагниченного цилиндра. Для него, как мы убедились ранее, $H_{1x} = -2\pi M$, поэтому плотность магнитостатической энергии равна $U_M = -M_x H_{1x}/2 = \pi M^2$. Соответственно, на единицу длины приходится энергия $\mathcal{E}_M^0 = \pi R^2 U_M = \pi^2 R^2 M^2$. Отношение

$$\frac{\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_M^0} = \frac{4}{\pi^2} < 1, \quad (2.86)$$

причём оно не зависит ни от радиуса цилиндра, ни от величины его намагниченности. Таким образом, распад ферромагнитного тела на домены действительно понижает магнитостатическую энергию.

2.6. Макроскопическая обменная энергия

Магнитные домены в ферромагнетиках отделены друг от друга переходным слоем, в котором происходит поворот вектора намагниченности. Этот слой

называют *доменной стенкой* или *доменной границей*. Толщина границы между двумя доменами, или, как говорят, различными фазами ферромагнетика, намного меньше линейных размеров доменов. Тем не менее она значительно больше межатомного расстояния: плавное изменение направления вектора намагниченности \mathbf{M} позволяет избежать существенного различия направлений соседних спинов и, соответственно, значительного увеличения энергии обменного взаимодействия.

Последнее обстоятельство даёт возможность записать макроскопическое выражение для обменной энергии через производные от \mathbf{M} по координатам. Обозначим через U_e объёмную плотность указанной энергии, причём отсчитывать её будем от величины, соответствующей однородному распределению намагниченности. Иначе говоря, под U_e будем понимать плотность энергии магнитной неоднородности. Для одноосного кристалла с осью z вдоль выделенной оси её можно записать в виде

$$U_e = \frac{1}{2}q_1 \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}q_2 \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2; \quad (2.87)$$

здесь q_1 и q_2 — характеристики материала, значения которых определяются путём сравнения выводов теории и эксперимента. Отсутствие в этом выражении линейных по пространственным производным членов обусловлено требованием инвариантности энергии относительно обращения времени (намагниченность при замене $t \rightarrow -t$ меняет знак). Для кубического кристалла плотность обменной энергии записывается с помощью единственного феноменологического параметра:

$$U_e = \frac{1}{2}q \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (2.88)$$

Отметим, что эту сравнительно простую формулу часто применяют и для кристаллов произвольной симметрии.

2.7. Доменная стенка Ландау и Лифшица

Определим структуру переходного слоя между двумя магнитными доменами в бесконечном одноосном кристалле с анизотропией типа “лёгкая ось”. Вдали от границы вектор намагниченности \mathbf{M} ориентирован вдоль оси анизотропии

(оси z), но в разных доменах направления противоположны. Впервые эта задача была решена Ландау и Лифшицем в 1935 г. с помощью энергетических соображений.

Выберем ось x в направлении изменения намагниченности, т. е. перпендикулярно доменной стенке. Тогда составляющие вектора \mathbf{M} будут функциями x :

$$M_x = M_x(x), \quad M_y = M_y(x), \quad M_z = M_z(x), \quad (2.89)$$

и, соответственно, объёмная плотность магнитных зарядов будет вычисляться как $\rho_M = \operatorname{div} \mathbf{M} = \partial M_x / \partial x$. Отличие этой величины от нуля привело бы к возникновению магнитного поля и дополнительной магнитостатической энергии. Вместе с тем для рассматриваемого одноосного кристалла обменная энергия и энергия анизотропии совсем не зависят от того, в какой плоскости совершается поворот вектора намагниченности. Поэтому, требуя минимальности полной магнитной энергии, следует считать, что значение M_x не зависит от x и равно нулю не только в глубине доменов, но и внутри разделяющего их переходного слоя.

Обозначим через $\mathbf{e} = \mathbf{M}/M$ единичный вектор, задающий направление вектора намагниченности. Объёмная плотность энергии одноосной анизотропии определяется углом отклонения ϑ вектора \mathbf{e} от оси анизотропии (оси z):

$$U_a = -K e_z^2 = -K \cos^2 \vartheta = K \sin^2 \vartheta - K. \quad (2.90)$$

Введём безразмерную константу анизотропии $\beta = \frac{2K}{M^2}$ и, отбросив несущественную постоянную добавку, запишем U_a в виде

$$U_a = \frac{1}{2} \beta M^2 \sin^2 \vartheta. \quad (2.91)$$

Плотность обменной энергии для рассматриваемого кристалла равна

$$U_e = \frac{q_1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 = \frac{q_1 M^2}{2} \left[\left(\frac{\partial e_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial e_z}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (2.92)$$

С учётом того, что

$$e_y = \sin \vartheta, \quad e_z = \cos \vartheta; \quad \frac{\partial e_y}{\partial x} = \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \quad \frac{\partial e_z}{\partial x} = -\sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad (2.93)$$

можно записать

$$U_e = \frac{q_1 M^2}{2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2. \quad (2.94)$$

Таким образом, объёмная плотность магнитной энергии системы равна

$$U = \frac{1}{2}q_1 M^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2}\beta M^2 \sin^2 \vartheta. \quad (2.95)$$

Интеграл от неё по всем значениям координаты x даёт энергию, приходящуюся на единицу площади рассматриваемого магнетика в плоскости yz :

$$\mathcal{W} = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\vartheta, \vartheta') dx = \frac{M^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (q_1 \vartheta'^2 + \beta \sin^2 \vartheta) dx, \quad (2.96)$$

где штрих означает дифференцирование по координате x . Итоговое распределение намагниченности в кристалле сводится к нахождению такой функции $\vartheta = \vartheta(x)$, при которой величина \mathcal{W} минимальна.

Поиск экстремума интегрального функционала приводит, как известно, к уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta U}{\delta \vartheta} = 0, \quad (2.97)$$

где

$$\frac{\delta}{\delta \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta'} \right) \quad (2.98)$$

есть так называемая вариационная производная. Подставляя в уравнение Эйлера-Лагранжа выражение для плотности энергии U , получаем

$$q_1 \vartheta'' - \beta \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \quad (2.99)$$

Умножим это уравнение на производную ϑ' :

$$q_1 \vartheta' \vartheta'' - \vartheta' \beta \sin \vartheta \cos \vartheta = 0. \quad (2.100)$$

Далее, заметив, что

$$\vartheta' \vartheta'' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2, \quad \vartheta' \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\sin^2 \vartheta), \quad (2.101)$$

перепишем равенство в виде

$$\frac{1}{2} q_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \beta \frac{d}{dx} \sin^2 \vartheta = 0 \quad (2.102)$$

и проинтегрируем

$$q_1 \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)^2 - \beta \sin^2 \vartheta = C_1 = \text{const}. \quad (2.103)$$

С помощью граничных условий

$$\vartheta(+\infty) = 0, \quad \vartheta(-\infty) = \pi, \quad \vartheta'(+\infty) = \vartheta'(-\infty) = 0 \quad (2.104)$$

можно заключить, что постоянная интегрирования $C_1 = 0$. Значит,

$$\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 - \frac{\beta}{q_1} \sin^2 \vartheta = 0. \quad (2.105)$$

Извлекая здесь квадратный корень, отметим, что в рассматриваемой конфигурации угол ϑ уменьшается от π до нуля, поэтому производная $\vartheta' \leq 0$; следовательно,

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\kappa \sin \vartheta, \quad \kappa = \sqrt{\frac{\beta}{q_1}}. \quad (2.106)$$

Для интегрирования полученного уравнения сделаем подстановку $t = \cos \vartheta$.

Из равенства

$$\frac{dt}{dx} = -\sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dx} = \kappa \sin^2 \vartheta = \kappa (1 - t^2), \quad (2.107)$$

находим

$$\int \frac{dt}{1 - t^2} = \kappa \int dx, \quad \frac{1 + t}{1 - t} = C_2 e^{2\kappa x}. \quad (2.108)$$

Постоянную C_2 положим равной единице, тогда середина переходного слоя будет находиться в начале координат: $\vartheta(x = 0) = \pi/2$. При таком выборе

$$1 + t = (1 - t)e^{2\kappa x}, \quad t = \frac{e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}}{e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}} = \text{th } \kappa x. \quad (2.109)$$

Таким образом, направление вектора намагниченности в переходном слое определяется равенством

$$\cos \vartheta = \text{th } \sqrt{\frac{\beta}{q_1}} x. \quad (2.110)$$

Из него следует, что оценкой ширины δ доменной стенки является величина

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\beta}{q_1}}. \quad (2.111)$$

К примеру, для одноосного кобальта

$$q_1 M^2 \sim 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/см}, \quad \beta M^2 \sim 9 \cdot 10^5 \text{ эрг/см}^3, \quad (2.112)$$

так что $\delta \sim 10^{-6}$ см.

Рассчитаем теперь, какая плотность энергии $w_{\text{гр}}$ отвечает найденному распределению намагниченности. Для него $q_1 \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 = \beta \sin^2 \vartheta$, поэтому

$$w_{\text{гр}} = \int_{-\infty}^{+\infty} U dx = \frac{M^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(q_1 \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)^2 + \beta \sin^2 \vartheta \right) dx = M^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \sin^2 \vartheta dx. \quad (2.113)$$

Соотношения

$$-\sin \vartheta d\vartheta = \sqrt{\frac{\beta}{q_1}} \frac{dx}{\text{ch}^2 \sqrt{\frac{\beta}{q_1}} x}, \quad dx = -\sqrt{\frac{q_1}{\beta}} \sin \vartheta \text{ch}^2 \sqrt{\frac{\beta}{q_1}} x d\vartheta, \quad (2.114)$$

и

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta = 1 - \text{th}^2 \sqrt{\frac{\beta}{q_1}} x = \frac{1}{\text{ch}^2 \sqrt{\frac{\beta}{q_1}} x} \quad (2.115)$$

позволяют свести интеграл к табличному:

$$w_{\text{гр}} = M^2 \sqrt{q_1 \beta} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta = 2M^2 \sqrt{q_1 \beta} = 2M \sqrt{q_1 K}. \quad (2.116)$$

Подставляя приведённые выше значения параметров, получаем оценку $w_{\text{гр}} \sim 1$ эрг/см².

2.8. Доменные стенки Блоха и Нееля

Предполагаемая бесконечность кристалла во всех направлениях позволила нам при расчёте доменной стенки Ландау и Лифшица отвлечься от каких-либо поверхностных эффектов и считать, что магнитостатическая энергия равна нулю. Реальные ферромагнитные образцы, разумеется, имеют конечную толщину, поэтому для них поиск равновесного распределения намагниченности в переходном слое невозможен без учёта магнитостатической энергии поверхностных магнитных зарядов.

В случае одноосной ферромагнитной плёнки (рис. 2.5) можно представить себе две ситуации:

1. Как и в стенке Ландау–Лифшица, разворот намагниченности происходит в плоскости yz , так что всюду $M_x = 0$.

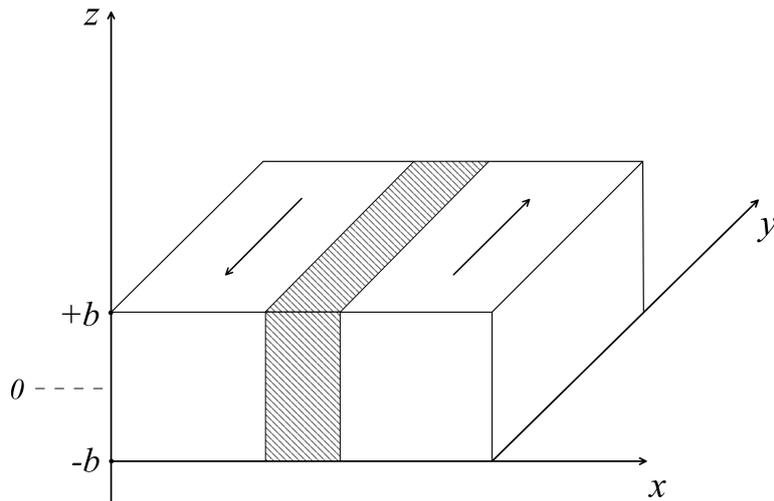


Рис. 2.5. Тонкая ферромагнитная пластинка конечной толщины b . Заштрихована стенка, разделяющая два магнитных домена

В этом случае $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$, и переходный слой между доменами не содержит объёмных магнитных зарядов. Однако при этом оказывается отличной от нуля нормальная компонента вектора намагниченности на верхней и нижней гранях ($y = \pm b$), т. е. возникают поверхностные магнитные заряды и связанные с ними энергия. Границу такого типа называют *стенкой Блоха*, или *блоховской*.

2. Поворот намагниченности происходит в плоскости xz , так что $M_y = 0$. При такой магнитной конфигурации поверхностный магнитный заряд на плоскостях $y = \pm b$ не возникает. Однако из-за того, что $\operatorname{div} \mathbf{M} \neq 0$, отличными от нуля оказываются объёмные магнитные заряды и связанная с ними магнитостатическая энергия. Границу такого типа называют *стенкой Нееля*, или *неелевской*.

При конечных значениях толщины ферромагнитной пластины структуру доменной границы следует искать, минимизируя полную магнитную энергию, которая включает не только обменную энергию и энергию анизотропии, но и магнитостатическую энергию. Получить конкретные результаты удастся лишь с помощью численного расчёта. Они показывают, что доменные стенки неелевского типа энергетически выгодны только в случае очень тонких плёнок, толщина которых — порядка 100 нм и менее.

Отметим, что переход от блоховской стенки к неелевской при уменьшении толщины образца не является резким, а сопровождается образованием в

плёнке доменной границы со сложной структурой — так называемой *стенки с перетяжками* (cross-tie wall).

2.9. Доменная структура и конкуренция вкладов в магнитную энергию

Равновесные размеры и форма доменов в ферромагнитных телах определяются минимумом полной магнитной энергии, являющейся функцией намагниченности. Эта энергия складывается из энергии Зеемана, обменной энергии, энергии магнитной анизотропии, магнитостатической энергии и магнитоупругой энергии. Последний из перечисленных вкладов связан с явлением *магнитострикции* — изменением формы и размеров образца при внесении его во внешнее магнитное поле. Как правило, энергия магнитострикции много меньше энергии анизотропии, и деформациями образца, связанными с изменениями состояния намагниченности, можно пренебречь.

Добиться ситуации, когда все вклады в магнитную энергию одновременно принимают наименьшее значение, нельзя: условия минимальности обменной энергии, энергии анизотропии и магнитостатической энергии противоречивы. В самом деле, энергия анизотропии и обменная энергия достигают минимума, когда ферромагнетик намагничен однородно вдоль одной из выделенных осей. Однако магнитостатическая энергия (энергия размагничивающих полей) при такой магнитной конфигурации достигает большой величины из-за возникновения магнитных зарядов на поверхности образца. Для уменьшения этой энергии образцу выгодно разбиться на домены, причём снижение будет тем значительнее, чем больше будет доменов. Но, с другой стороны, большему числу доменов отвечает большее число доменных стенок, энергия которых складывается как раз из энергии анизотропии и обменной энергии. Поэтому магнитные конфигурации, подобные изображённым на рис. 2.6, могут реализоваться только в так называемых магнитомягких материалах, в которых энергия анизотропии пренебрежимо мала.

Таким образом, для нахождения доменной структуры ферромагнетика необходима вариация (поиск минимума) суммы энергии размагничивающих полей и полной энергии доменных границ. При этом важными оказываются и свойства кристаллической решётки (в том числе наличие в ней дефектов

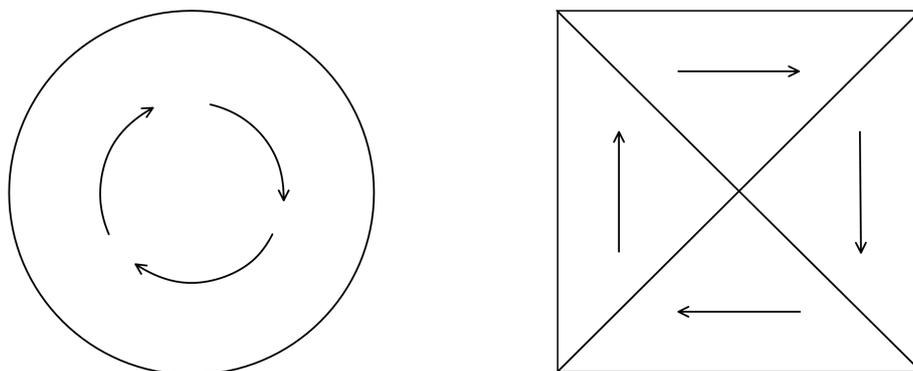


Рис. 2.6. Варианты распределения намагниченности в ферромагнетике

и других неоднородностей), и геометрические характеристики тела. Кроме того, конфигурация доменов сильно зависит от величины приложенного к образцу магнитного поля.

2.10. Доменная структура ферромагнитной пластинки

2.10.1. Страйп-структура

Как правило, определить размеры и форму доменов в магнетике можно только с помощью численного расчёта. Аналитические решения могут построены только в самых простых случаях, например, при рассмотрении ферромагнетика в виде плоскопараллельной пластины. Наиболее простая магнитная конфигурация такого образца — так называемая *страйп-структура* — показана на рис. 2.7: плоскопараллельные домены ориентированы перпендикулярно поверхности пластины вдоль оси лёгкого намагничивания.

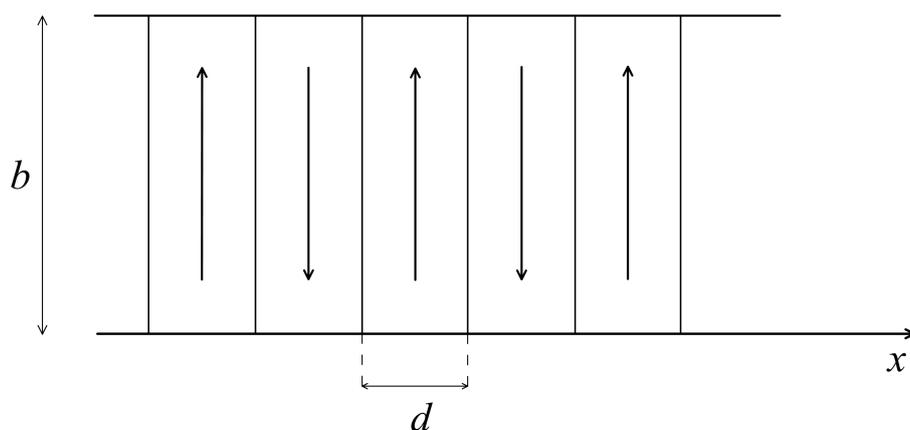


Рис. 2.7. Плоскопараллельная ферромагнитная пластинка с одноосной анизотропией

Если анизотропия ферромагнетика достаточно мала, то могут образоваться и более сложные структуры, отличающиеся отсутствием поверхностных магнитных зарядов и связанной с ними магнитостатической энергии; один из возможных вариантов показан на рис. 2.8.

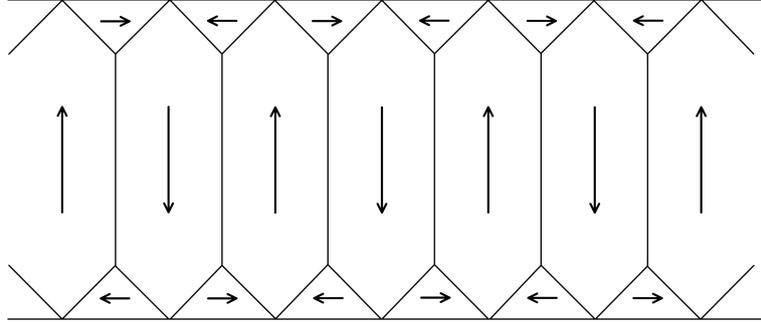


Рис. 2.8. Возможное усложнение доменной структуры ферромагнетика вблизи поверхности

Найдём равновесную ширину d доменов в страйп-структуре. Эта величина определяется конкуренцией магнитостатической энергии и энергии доменных границ. С одной стороны, магнитостатическая энергия уменьшается при увеличении числа доменов и, соответственно, их утончении. С другой, дробление доменов сопровождается возникновением доменных стенок и повышением связанной с ними энергии. Для получения количественного результата вычислим, прежде всего, магнитный потенциал Ψ во всех точках пространства. Направим ось x перпендикулярно плоскости доменных границ, а ось z — вдоль оси анизотропии. Ширину доменных стенок будем полагать пренебрежимо малой по сравнению с шириной d доменов. При таком подходе, традиционном для теории доменов, можно считать, что функция Ψ всюду подчиняется уравнению Лапласа $\Delta\Psi = 0$. По определению, поверхностная плотность магнитных зарядов равна нормальной компоненте вектора намагниченности: $\sigma_m = M_n$, причём нормаль проводится от магнетика. Величина σ_m является периодической функцией x с периодом $T = 2d$ и может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\sigma_m(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{2\pi nx}{T} + \beta_n \sin \frac{2\pi nx}{T} \right). \quad (2.117)$$

Выберем начало координат так, чтобы на верхней грани ($z = b$) на одном

периоде она равнялась

$$\sigma_m(x) = \begin{cases} +M, & 0 < x < d, \\ -M, & -d < x < 0. \end{cases} \quad (2.118)$$

При таком выборе коэффициенты ряда будут равны

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_m dx = 0, \quad (2.119)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sigma_m \cos \frac{2\pi nx}{T} dx = \frac{M}{d} \left(\int_0^d \cos \frac{\pi nx}{d} dx - \int_{-d}^0 \cos \frac{\pi nx}{d} dx \right) = 0, \quad (2.120)$$

$$\beta_{2n} = \frac{2}{T} \int_0^T \sigma_m \sin \frac{4\pi nx}{T} dx = \frac{M}{d} \left(\int_0^d \sin \frac{2\pi nx}{d} dx - \int_{-d}^0 \sin \frac{2\pi nx}{d} dx \right) = 0, \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} \beta_{2n+1} &= \frac{2}{T} \int_0^T \sigma_m \sin \frac{2\pi(2n+1)x}{T} dx = \\ &= \frac{M}{d} \left(\int_0^d \sin \frac{(2n+1)\pi x}{d} dx - \int_{-d}^0 \sin \frac{(2n+1)\pi x}{d} dx \right) = \frac{4M}{\pi(2n+1)}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Таким образом, на верхней грани пластины поверхностная плотность магнитных зарядов равна

$$\sigma_m(x) = \frac{4M}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{\pi(2n+1)}{d} x. \quad (2.123)$$

Предполагается, что вдоль оси y рассматриваемый кристалл бесконечен, а его свойства в этом направлении однородны. В этом случае магнитный потенциал не зависит от y , а является функцией только координат x и z : $\Psi = \Psi(x, z)$. Следовательно, уравнение Лапласа для него сводится к

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.124)$$

При этом функция Ψ должна быть непрерывной как на верхней, так и на нижней гранях магнетика:

$$\Psi_1(x, z = 0) = \Psi_2(x, z = 0), \quad \Psi_1(x, z = b) = \Psi_2(x, z = b); \quad (2.125)$$

индекс 1 относится к области внутри пластины, а 2 — вне её. Нормальная производная от Ψ на границах образца испытывает скачок, определяемый величиной намагниченности:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial n} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} = 4\pi M_n. \quad (2.126)$$

Это равенство предполагает, что нормаль проводится от магнетика. Поэтому на верхней поверхности ($z = b$) нормальная производная равна $\partial/\partial n = \partial/\partial z$, а проекция $M_n = \sigma_m(x)$, и граничное условие принимает вид

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right|_{z=b} - \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right|_{z=b} = 4\pi \sigma_m. \quad (2.127)$$

На нижней грани ($z = 0$) вектор нормали считается направленным против оси z , поэтому справедливы равенства $\partial/\partial n = -\partial/\partial z$ и $M_n = -\sigma_m$, а значит

$$-\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = -4\pi \sigma_m. \quad (2.128)$$

Исходя из этих граничных условий и принимая во внимание вид функции $\sigma_m(x)$, будем искать магнитный потенциал в виде

$$\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(z) \sin \frac{\pi(2n+1)x}{d}. \quad (2.129)$$

Подстановка этого выражения в уравнения Лапласа приводит к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(Z_n'' - \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{d^2} Z_n \right) \sin \frac{\pi(2n+1)x}{d} = 0, \quad (2.130)$$

из которого следует, что при заданном n функция $Z_n(z)$ подчиняются уравнению

$$Z_n'' - \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{d^2} Z_n = 0. \quad (2.131)$$

Общим решением этого уравнения с постоянными коэффициентами является функция вида

$$Z_n(z) = F_n e^{k_n z} + G_n e^{-k_n z}, \quad (2.132)$$

где F_n и G_n — произвольные постоянные, а

$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{d}. \quad (2.133)$$

На большом удалении от образца магнитное поле должно стремиться к нулю. Это означает, что при $z > b$ должно быть тождественно равно нулю слагаемое, пропорциональное экспоненте с положительным показателем, а при $z < 0$ — с отрицательным. С учётом этого требования функция $Z_n(z)$ в различных областях задаётся равенствами

$$Z_n(z) = \begin{cases} D_n e^{-k_n z}, & z \geq b, \\ A_n e^{-k_n z} + B_n e^{k_n z}, & 0 \leq z \leq b, \\ C_n e^{k_n z}, & z \leq 0. \end{cases} \quad (2.134)$$

Соответственно, магнитный потенциал Ψ имеет вид

$$\Psi(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-k_n z} \sin k_n x, & z \geq b, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (A_n e^{-k_n z} + B_n e^{k_n z}) \sin k_n x, & 0 \leq z \leq b, \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{k_n z} \sin k_n x, & z \leq 0. \end{cases} \quad (2.135)$$

Неизвестные постоянные A_n , B_n , C_n и D_n находятся с помощью граничных соотношений для потенциала Ψ .

Из требования непрерывности потенциала при $z = 0$ и $z = b$ следует, что

$$A_n + B_n = C_n, \quad A_n e^{-k_n b} + B_n e^{k_n b} = D_n e^{-k_n b}. \quad (2.136)$$

Условие для скачка производной функции $\partial\Psi/\partial z$ при $z = b$ даёт равенство

$$-k_n A_n e^{-k_n b} + k_n B_n e^{k_n b} + k_n D_n e^{-k_n b} = 4\pi \frac{4M}{\pi(2n+1)}. \quad (2.137)$$

С учётом написанного выше равенства из него следует, что

$$-k_n A_n e^{-k_n b} + k_n B_n e^{k_n b} + k_n (A_n e^{-k_n b} + B_n e^{k_n b}) = \frac{16M}{2n+1}, \quad (2.138)$$

$$B_n = \frac{8M}{2n+1} \frac{e^{k_n b}}{k_n} = \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} e^{-k_n b}. \quad (2.139)$$

В свою очередь, равенство, определяющее скачок производной $\partial\Psi/\partial z$ при $z = 0$, сводится к

$$k_n A_n - k_n B_n + k_n C_n = -4\pi \frac{4M}{\pi(2n+1)}. \quad (2.140)$$

Учитывая, что $C_n = A_n + B_n$, получаем отсюда

$$A_n = -\frac{8M}{(2n+1)k_n} = -\frac{8Md}{\pi(2n+1)^2}. \quad (2.141)$$

Наконец, с помощью формул для A_n и B_n находим постоянные C_n и D_n :

$$C_n = A_n + B_n = \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} (e^{-k_n b} - 1), \quad (2.142)$$

$$D_n = A_n + B_n e^{2k_n b} = \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} (e^{k_n b} - 1). \quad (2.143)$$

Таким образом, для рассматриваемого образца магнитный потенциал равен

$$\Psi(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} (e^{-k_n(z-b)} - e^{-k_n z}) \sin k_n x, & z \geq b, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} (e^{k_n(z-b)} - e^{-k_n z}) \sin k_n x, & 0 \leq z \leq b, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} (e^{k_n(z-b)} - e^{k_n z}) \sin k_n x, & z \leq 0. \end{cases} \quad (2.144)$$

Обратим внимание, что вне пластины функция $\Psi(x, z)$ экспоненциально быстро уменьшается с ростом z и при $z \gtrsim d$ близка к нулю. Это означает, что создаваемое образцом магнитное поле $\mathbf{H} = -\partial\Psi/\partial\mathbf{r}$ существенно отлично от нуля только в тонком приповерхностном слое, толщина которого имеет порядок ширины домена.

Объёмная плотность магнитостатической энергии системы может быть найдена как $U_M = -\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{M} = -\frac{1}{2}H_z M_z$, так как x и y компоненты намагниченности равны нулю. Соответственно, величина

$$\mathcal{W}_M = \frac{1}{2d} \int_{-d}^d \int_0^b U_M dx dz = -\frac{1}{4d} \int_{-d}^d \int_0^b H_z M_z dx dz \quad (2.145)$$

определяет поверхностную плотность магнитостатической энергии (в плоскости xy): такой энергией обладает элемент пластины, имеющий единичный

размер вдоль осей x и y . Поскольку $H_z = -\partial\Psi/\partial z$ и $M_z = \sigma_m$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_M &= \frac{1}{4d} \int_{-d}^d \int_0^b \frac{\partial\Psi}{\partial z} \sigma_m(x) dx dz = \frac{1}{4d} \int_{-d}^d \sigma_m(x) dx \int_0^b \frac{\partial\Psi}{\partial z} dz = \\ &= \frac{1}{4d} \int_{-d}^d [\Psi(x, z = b) - \Psi(x, z = 0)] \sigma_m(x) dx. \quad (2.146)\end{aligned}$$

Согласно полученным выше формулам

$$\Psi(x, z = b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} (1 - e^{-k_n b}) \sin \frac{\pi(2n+1)x}{d}, \quad (2.147)$$

$$\Psi(x, z = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8Md}{\pi(2n+1)^2} (e^{-k_n b} - 1) \sin \frac{\pi(2n+1)x}{d}, \quad z \leq 0, \quad (2.148)$$

$$\Psi(x, z = b) - \Psi(x, z = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16Md}{\pi(2n+1)^2} (1 - e^{-k_n b}) \sin \frac{\pi(2n+1)x}{d}. \quad (2.149)$$

С учётом разложения для $\sigma_m(x)$ отсюда следует, что

$$\mathcal{W}_M = \frac{16M^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-k_n b}}{(2n+1)^2(2m+1)} \int_{-d}^d \sin \frac{\pi(2n+1)x}{d} \sin \frac{\pi(2m+1)x}{d} dx. \quad (2.150)$$

Интеграл в этом выражении равен d , если $n = m$, и равен нулю, если $n \neq m$, поэтому

$$\mathcal{W}_M = \frac{16M^2 d}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-k_n b}}{(2n+1)^3}. \quad (2.151)$$

Выполним расчёт этой суммы, предполагая, что ширина домена много меньше толщины пластины: $d \ll b$. Тогда

$$k_n b = \frac{\pi(2n+1)b}{d} \gg 1, \quad e^{-k_n b} \ll 1, \quad (2.152)$$

так что

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_M &= \frac{16M^2 d}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{16M^2 d}{\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} \right) = \\ &= \frac{14M^2 d}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{14M^2 d}{\pi^2} \zeta(3), \quad (2.153)\end{aligned}$$

где

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (2.154)$$

называется ζ -функцией Римана. При $s = 3$ она принимает значение $\zeta(3) = 1.2$, поэтому

$$\mathcal{W}_M = 1.7 M^2 d. \quad (2.155)$$

Как и ожидалось, магнитостатическая энергия уменьшается с падением размера отдельного домена.

Противоположным образом ведёт себя энергия переходных слоёв между доменами. На единицу длины пластины (вдоль оси x) приходится $1/d$ доменных стенок. Поэтому, если $w_{\text{гр}}$ — энергия, отнесённая к единице площади одной стенки, то полная энергия всех границ в расчёте на единицу поверхности пластины в плоскости yz равна

$$\mathcal{W}_{\text{гр}} = w_{\text{гр}} \times \frac{1}{d} \times b \times 1 = w_{\text{гр}} \frac{b}{d}, \quad (2.156)$$

т. е. $\mathcal{W}_{\text{гр}} \sim 1/d$.

Для установления равновесного значения d нужно минимизировать сумму

$$\mathcal{W} = 1.7M^2d + w_{\text{гр}}\frac{b}{d} \quad (2.157)$$

магнитостатической энергии и энергии доменных границ. Приравнивая к нулю производную от \mathcal{W} по d :

$$1,7M^2 - \frac{w_{\text{гр}}b}{d^2} = 0, \quad (2.158)$$

получаем

$$d \approx \frac{0.8}{M} \sqrt{w_{\text{гр}}b}. \quad (2.159)$$

Взяв для оценки значения

$$w_{\text{гр}} \sim 1 \text{ эрг/см}^2; \quad b \sim 10 \text{ мкм} \sim 10^{-2} \text{ см}; \quad M \sim 100 \text{ ед}, \quad (2.160)$$

находим

$$d \sim 3 \times 10^{-4} \text{ см} \quad (2.161)$$

2.10.2. Лабиринтные структуры и цилиндрические домены

Помимо рассмотренных полосовых структур, в одноосных ферромагнитных пластинках возможны и другие конфигурации магнитных доменов. К примеру, нередко наблюдаются так называемые *лабиринтные структуры* (рис. 2.9).

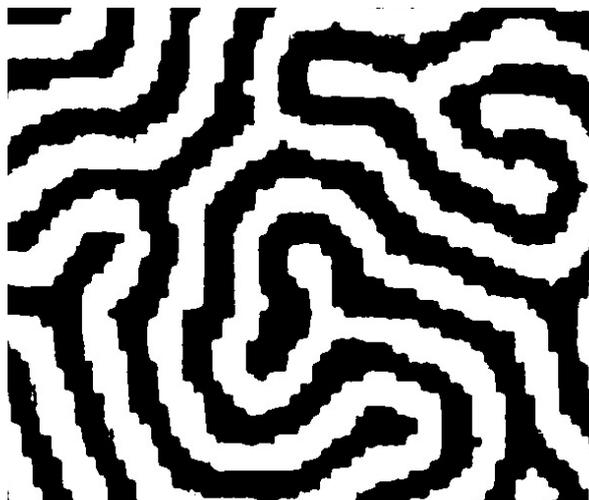


Рис. 2.9. Лабиринтная магнитная структура одноосной ферромагнитной пластинки

Их появление связано с тем, что направления доменных границ в плёнках с анизотропией типа “лёгкая ось”, вообще говоря, ничем не ограничены. Поэтому при наличии в кристалле малых неоднородностей возможны изгиб доменов и возникновение сложной доменной конфигурации, которая напоминает лабиринт.

Из-за того, что формирование доменов обусловлено сравнительно слабым магнитным дипольным взаимодействием, их размеры и распределение в образце чувствительны к внешним полям. В частности, если к плёнке не приложено внешнее поле, то доли доменов, в которых вектор намагниченности направлен вдоль и против оси анизотропии, равны друг другу. Приложение магнитного поля меняет эту ситуацию: домены, намагниченность которых сонаправлена с полем, становятся шире; домены же с противоположным направлением намагниченности соответствующим образом сужаются. При этом, как показывает опыт, в достаточно сильном поле, близком к $4\pi M$, возможна ситуация, когда страйп-доменам энергетически выгодно распасться на отдельные цилиндрические домены с круговым сечением. Эти домены равно-

мерно распределяются по пластинке, образуя, как правило, гексагональную решётку (рис. 2.10). С ростом внешнего поля их плотность падает.

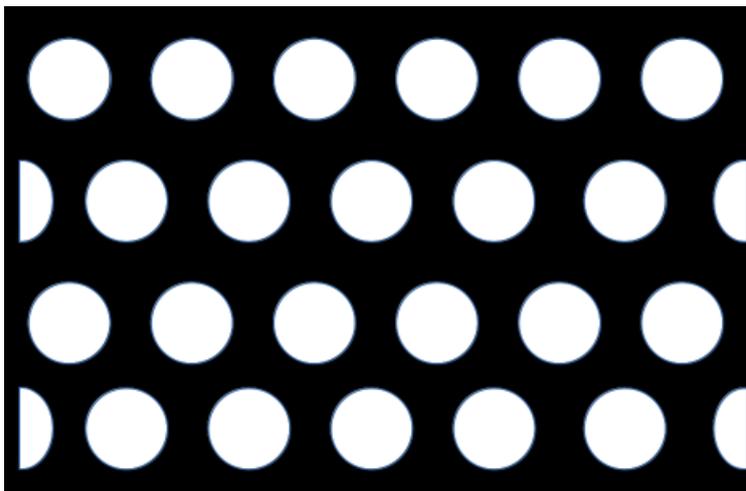


Рис. 2.10. Цилиндрические магнитные домены в ферромагнитной пластинке

2.11. Однодоменные частицы

При уменьшении размеров ферромагнитного тела образование доменов в нём становится энергетически невыгодным. В самом деле, сравним энергию однородно намагниченной однодоменной частицы и энергию частицы, распределение намагниченности в которой существенно неоднородно. Для первой частицы энергия сводится к магнитостатической, по порядку величины равной $E_M \sim H_M MV \sim M^2 d^3$. Во втором случае энергия имеет тот же порядок, что и энергия доменной стенки Ландау и Лифшица $E_W \sim M\sqrt{q_1 K} d^2$. Если

$$d \lesssim d_c, \quad d_c = \frac{\sqrt{q_1 K}}{M}, \quad (2.162)$$

то энергия однодоменного состояния меньше. Для типичных ферромагнетиков d_c находится в интервале от 10 до 60 нм.

Вообще говоря, при включении магнитного поля изначально однодоменная частица может стать неоднородно намагниченной. Впервые это было отмечено Е. И. Кондорским; чтобы подчеркнуть роль внешнего поля он ввёл понятие *абсолютной однодоменности*. Перемагничивание абсолютно однодоменных частиц происходит путём когерентного вращения всех элементарных магнитных моментов, поэтому однородность намагниченности сохраняется

при любых значениях и направлениях внешнего магнитного поля. При низких температурах процессы намагничивания абсолютно однодоменных частиц хорошо описываются с помощью модели Стонера–Вольфарта.

3. Динамика вектора намагниченности

3.1. Уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта

3.1.1. Уравнение движения намагниченности без учёта диссипации

Если внешние условия, в которых находится ферромагнитное тело, не фиксированы, то его намагниченность \mathbf{M} будет меняться с течением времени. В таком случае описание процесса перемагничивания предполагает решение эволюционного уравнения для вектора \mathbf{M} . В рамках полуклассического подхода это уравнение может быть построено следующим образом.

Рассмотрим систему элементарных магнитных моментов $\boldsymbol{\mu}$. Каждому из них отвечает механический момент (спин) \mathbf{S} , причём $\boldsymbol{\mu} = -\gamma\mathbf{S}$, где величина γ называется, как уже говорилось, гиромагнитным отношением. На систему, обладающую магнитным моментом, во внешнем поле \mathbf{H} действует момент сил $\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}$. В соответствии с уравнениями механики приложение к системе момента сил приводит к изменению её механического момента:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}. \quad (3.1)$$

Намагниченность системы равна произведению $\boldsymbol{\mu}$ на число спинов n в единице объёма. Поэтому, умножая последнее уравнение на n и учитывая связь между \mathbf{S} и $\boldsymbol{\mu}$, можно сразу получить уравнение для вектора намагниченности:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}. \quad (3.2)$$

Частная производная по времени здесь означает, что речь идёт об изменении вектора намагниченности в заданной точке образца.

При выводе этого уравнения мы предполагали, что каждый элементарный магнитный момент взаимодействует только с внешним полем, но не испытывает влияния соседей. В ферромагнетиках спины, конечно, связаны друг с другом, и корректное уравнение для намагниченности \mathbf{M} должно учитывать все существенные взаимодействия. Для построения модифицированного уравнения будем исходить из того, что в состоянии равновесия производная от намагниченности по времени равна нулю. Если бы учитывалось только

внешнее поле, то это условие было бы эквивалентно равенству $\mathbf{M} \times \mathbf{H} = 0$. В общем случае состояние устойчивого равновесия характеризуется минимумом полной магнитной энергии. Её объёмная плотность U может зависеть и от намагниченности, и от её пространственных производных:

$$U = U \left(\mathbf{M}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right), \quad (3.3)$$

поэтому при равновесном распределении намагниченности минимальное значение принимает интеграл вида

$$\int U \left(\mathbf{M}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right) dV. \quad (3.4)$$

Без наличия дополнительных условий это бы означало, что функция U является решением уравнения

$$\frac{\delta U}{\delta \mathbf{M}} = 0, \quad \frac{\delta}{\delta \mathbf{M}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_{\alpha}} \right)}, \quad (3.5)$$

где суммирование выполняется по трём декартовым координатам ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) точек пространства. Следует, однако, учесть, что в ферромагнетиках вектор намагниченности имеет одну и ту же длину во всех точках образца: $M^2 = \text{const}$. Как уже подчёркивалось, указанная длина устанавливается в результате сильного обменного взаимодействия; сравнительно слабые релятивистские взаимодействия могут приводить к неоднородному распределению вектора намагниченности, но не меняют его модуля.

Поиск условного экстремума функционала может выполнен с помощью неопределённых множителей Лагранжа. В данном случае такой множитель только один, и задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{M}} (U + \lambda M^2) = 0, \quad \lambda = \text{const}. \quad (3.6)$$

Раскрыв здесь скобки:

$$\frac{\delta U}{\delta \mathbf{M}} + 2\lambda \mathbf{M} = 0 \quad (3.7)$$

и умножив обе части равенства векторно на \mathbf{M} , получим

$$\mathbf{M} \times \frac{\delta U}{\delta \mathbf{M}} = 0 \quad (3.8)$$

(очевидно, $\mathbf{M} \times \mathbf{M} = 0$).

Введём теперь эффективное поле \mathbf{H}_{eff} согласно

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta U}{\delta \mathbf{M}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} + \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left[\frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_{\alpha}} \right)} \right] \quad (3.9)$$

и запишем полученное равенство в виде

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} = 0. \quad (3.10)$$

Из него следует, что необходимым условием равновесия является параллельность вектора намагниченности \mathbf{M} и эффективного поля \mathbf{H}_{eff} в каждой точке ферромагнетика. Сравнивая с равенством $\mathbf{M} \times \mathbf{H} = 0$, справедливым при учёте взаимодействия спинов только с внешним магнитным полем, можно предположить, что в общем случае уравнение движения вектора намагниченности следует записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}. \quad (3.11)$$

3.1.2. Учёт диссипации

Согласно найденному уравнению производная от вектора намагниченности в каждый момент времени перпендикулярна полю \mathbf{H}_{eff} . Это означает, что вектор \mathbf{M} неограниченно долго вращается вокруг эффективного поля, не приближаясь к равновесному направлению. Таким образом, это уравнение отвечает идеальному ферромагнетик, в котором отсутствует диссипация магнитной энергии. В действительности эксперименты показывают, что магнитная энергия не сохраняется, переходя в конечном итоге к кристаллической решётке.

Феноменологически, учёт диссипации энергии в магнитной подсистеме осуществляется добавлением в магнитодинамическое уравнение релаксационного члена:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \mathbf{R}. \quad (3.12)$$

При выборе формы записи \mathbf{R} наиболее простым является предположение о том, что вектор намагниченности испытывает действие “трения”, которое

можно описать с помощью эффективного магнитного поля, пропорционального скорости изменения \mathbf{M} . При выборе формы записи \mathbf{R} наиболее простым является предположение о том, что вектор намагниченности испытывает действие эффективного поля “трения”, которое тем больше, чем выше скорость изменения \mathbf{M} . Соответствующий момент сил задаётся в виде

$$\mathbf{R} = \frac{\alpha}{M} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (3.13)$$

где α — феноменологический параметр затухания. Магнитодинамическое уравнение вида

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} + \frac{\alpha}{M} \mathbf{M} \times \frac{d\mathbf{M}}{dt} \quad (3.14)$$

известно как *уравнение Т. Гильберта*.

Иной вариант для \mathbf{R} был предложен Ландау и Лифшицем:

$$\mathbf{R} = \lambda \left(\mathbf{H}_{eff} - \frac{(\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_{eff}) \mathbf{M}}{M^2} \right). \quad (3.15)$$

Релаксационный член такого вида обуславливает приближение вектора намагниченности к направлению эффективного поля \mathbf{H}_{eff} : в состоянии равновесия, когда векторы \mathbf{M} и \mathbf{H}_{eff} сонаправлены, он обращается в нуль. Феноменологическая константа λ задаёт скорость процесса релаксации. Отметим, что согласно правилу раскрытия двойного векторного произведения \mathbf{R} можно также записать в следующем виде:

$$\mathbf{R} = -\frac{\lambda}{M^2} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}). \quad (3.16)$$

Магнитодинамическое уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff} - \frac{\lambda}{M^2} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) \quad (3.17)$$

известно как *уравнение Ландау–Лифшица*.

Несмотря на кажущееся различие уравнений Гильберта и Ландау–Лифшица, они эквивалентны друг другу. Чтобы убедиться в этом, умножим уравнение Гильберта векторно на \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}) + \frac{\alpha \mathbf{M}}{M} \times \left(\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right). \quad (3.18)$$

Раскрыв здесь двойное векторное произведение и учтя, что $\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = 0$, получим:

$$\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) - \alpha M \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Теперь подставим этот результат в исходное уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) - \frac{\alpha \gamma}{M} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) - \alpha^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (3.20)$$

а затем выразим явно производную от намагниченности по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1 + \alpha^2} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}) - \frac{\alpha \gamma}{(1 + \alpha^2) M} \mathbf{M} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}). \quad (3.21)$$

Как видно, полученное уравнение будет полностью совпадать с уравнением Ландау–Лифшица, если под λ понимать величину

$$\lambda = \frac{\alpha \gamma M}{1 + \alpha^2} \quad (3.22)$$

и переопределить гиромагнитное отношение согласно

$$\gamma' = \frac{\gamma}{1 + \alpha^2}. \quad (3.23)$$

Как показывают эксперименты, для типичных ферромагнетиков параметр затухания α лежит в диапазоне $0.001 - 0.1$, поэтому уравнения Гильберта и Ландау–Лифшица полностью тождественны. По этой причине каждый из рассмотренных вариантов уравнения называют просто *уравнением Ландау–Лифшица–Гильберта*. Отметим, что умножение этого уравнения скалярно на \mathbf{M} приводит к равенству

$$\mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = 0, \quad (3.24)$$

из которого следует сохранение длины вектора \mathbf{M} при любых его поворотах:

$$\frac{\partial M^2}{\partial t} = 0, \quad M^2 = \text{const}. \quad (3.25)$$

3.2. Ферромагнитный резонанс

3.2.1. Собственные колебания вектора намагниченности

Рассмотрим однородно намагниченный ферромагнитный шар, помещённый в постоянное внешнее поле \mathbf{H}_0 . Будем предполагать, что материал, из которого изготовлен шар, обладает пренебрежимо малой магнитной анизотропией.

Магнитная энергия такого образца включает в себя только энергию Зеемана в приложенном поле и магнитостатическую энергию, так что её объёмная плотность равна

$$U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0 + \frac{2\pi}{3} M^2. \quad (3.26)$$

Будем сначала считать, что параметр затухания $\alpha = 0$ и магнитная энергия шара сохраняется. В этом случае вектор намагниченности движется согласно уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}, \quad (3.27)$$

где эффективное магнитное поле

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta U}{\delta \mathbf{M}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{M}} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_M, \quad \mathbf{H}_M = -\frac{4\pi}{3} \mathbf{M}. \quad (3.28)$$

В силу равенства $\mathbf{M} \times \mathbf{H}_M = 0$ уравнение сводится к

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_0, \quad (3.29)$$

т. е. размагничивающее поле \mathbf{H}_M никакой роли в динамике намагниченности не играет.

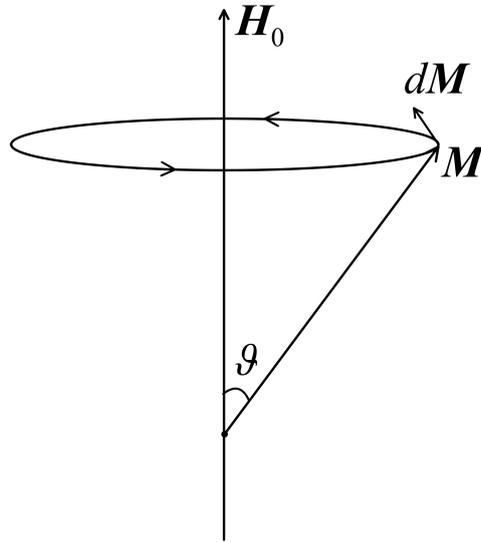


Рис. 3.1. Свободные колебания вектора намагниченности в изотропном ферромагнетике

Скалярное умножение обеих частей записанного уравнения на \mathbf{H}_0 приводит к равенству

$$\frac{\partial (\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_0)}{\partial t} = 0, \quad (3.30)$$

которое означает неизменность угла между векторами \mathbf{M} и \mathbf{H}_0 . Таким образом, конец вектора \mathbf{M} описывает вокруг направления внешнего поля окружность постоянного радиуса (рис. 3.1). Подобный колебательный процесс называется *прецессией* намагниченности. Величина γ в уравнении выше предполагается положительной, поэтому движение вектора \mathbf{M} происходит против часовой стрелки.

Для нахождения скорости вращения вектора \mathbf{M} заметим, что в каждый момент времени его приращение $d\mathbf{M}$ направлено по касательной к окружности и может быть записано в виде $d\mathbf{M} = d\varphi \times \mathbf{M}$, где бесконечно малый угол $d\varphi$ направлен вдоль оси вращения, т. е. вдоль внешнего поля \mathbf{H}_0 . Значит, производная от намагниченности по времени равна

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{M}, \quad (3.31)$$

где $\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ — вектор угловой скорости вращения конца вектора \mathbf{M} (частота прецессии). Отметим, что полученное равенство полностью эквивалентно кинематическому соотношению между линейной и угловой скоростями материальной точки. Сопоставляя два выражения для $\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$, находим

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \gamma \mathbf{H}_0. \quad (3.32)$$

Таким образом, собственные колебания вектора намагниченности в изотропном ферромагнетике сводятся к прецессии вокруг внешнего поля с угловой частотой $\omega_0 = \gamma H_0$.

3.2.2. Вынужденные колебания вектора намагниченности. Ферромагнитный резонанс

Обратимся теперь к ситуации, когда к рассматриваемой частице приложено не только постоянное поле \mathbf{H}_0 , но и переменное поле $\mathbf{h}(t)$, и уравнение движения вектора намагниченности имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t)). \quad (3.33)$$

Будем предполагать, что зондирующее поле является малым: для любого момента времени $h(t) \ll H_0$. В этом случае вектор намагниченности системы

можно представить в виде $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(t)$, где \mathbf{M}_0 — равновесная составляющая, направленная вдоль стационарного поля \mathbf{H}_0 , а $\mathbf{m}(t)$ — малая переменная добавка: $m(t) \ll M_0$ при всех t . Очевидно, что $\frac{\partial \mathbf{M}_0}{\partial t} = 0$ и $\mathbf{M}_0 \times \mathbf{H}_0 = 0$, поэтому магнитодинамическое уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}(t) - \gamma \mathbf{m}(t) \times \mathbf{H}_0 - \gamma \mathbf{m}(t) \times \mathbf{h}(t). \quad (3.34)$$

Принимая во внимание малость возмущающего поля, ограничимся решением этого уравнения в линейном приближении по $\mathbf{h}(t)$. Для этого пренебрежём в этом уравнении последним слагаемым и запишем

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}(t) - \gamma \mathbf{m}(t) \times \mathbf{H}_0. \quad (3.35)$$

Предполагая, что возбуждающее поле изменяется по гармоническому закону: $\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}_0 \cos(\omega t + \varphi)$, решим это линейризованное уравнение методом комплексных амплитуд. Введём векторы

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}e^{i\omega t}, \quad (3.36)$$

в которых \mathbf{h} и \mathbf{m} (без аргумента t) — комплексные амплитуды возмущения и отклика соответственно. Подстановка указанных векторов в уравнение даёт

$$i\omega \mathbf{m} + \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0 = -\gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}. \quad (3.37)$$

Введём декартовую систему координат, в которой ось z направлена вдоль стационарного поля. При таком выборе $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$ и $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{z}_0$, где \mathbf{z}_0 — единичный орт вдоль аппликата. Соответственно, векторное уравнение для амплитуды \mathbf{m} принимает вид

$$i\omega \mathbf{m} + \gamma H_0 \mathbf{m} \times \mathbf{z}_0 = -\gamma M_0 \mathbf{z}_0 \times \mathbf{h}. \quad (3.38)$$

Спроектируем его на оси координат, принимая во внимание, что $H_{0x} = H_{0y} = 0$, $H_{0z} = H_0$, $M_{0x} = M_{0y} = 0$, $M_{0z} = M_0$. В результате получим

$$\begin{cases} i\omega m_x + \omega_0 m_y = \gamma M_0 h_y, \\ -\omega_0 m_x + i\omega m_y = -\gamma M_0 h_x, \\ i\omega m_z = 0, \end{cases} \quad , \quad \omega_0 = \gamma H_0. \quad (3.39)$$

Решение этой системы линейных алгебраических уравнений записывается согласно

$$m_x = \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + i \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \quad (3.40)$$

$$m_y = -i \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \quad (3.41)$$

$$m_z = 0. \quad (3.42)$$

Его можно представить в виде одного тензорного равенства:

$$\mathbf{m} = \hat{\chi}_\omega \mathbf{h}. \quad (3.43)$$

Тензор χ_ω , связывающий величины \mathbf{m} и \mathbf{h} , называется *тензором динамической магнитной восприимчивости*. В рассматриваемом случае он имеет вид

$$\hat{\chi}_\omega = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_g & 0 \\ -i\chi_g & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

где компоненты χ и χ_g определены как

$$\chi = \frac{\gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \chi_g = \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.45)$$

Частотные развёртки χ и χ_g при постоянном подмагничивающем поле $H_0 = M_0$ показаны на рис. 3.2.

Как видно, при совпадении частоты приложенного переменного поля и собственной частоты прецессии вектора намагниченности ($\omega = \gamma H_0$) компоненты тензора динамической восприимчивости устремляются к бесконечности. Это явление называют *ферромагнитным резонансом*.

Нули в нижней строчке и правом столбце тензора динамической магнитной восприимчивости означают, что составляющая переменного поля, направленная вдоль подмагничивающего поля \mathbf{H}_0 , не индуцирует магнитного отклика рассматриваемой частицы. Переменная намагниченность $\mathbf{m}(t)$ возникает благодаря тому вкладу в поле $\mathbf{h}(t)$, который перпендикулярен \mathbf{H}_0 . При этом вектор $\mathbf{m}(t)$ имеет не только параллельную, но и перпендикулярную полю $\mathbf{h}(t)$ компоненту. Например, если возбуждающее поле направлено вдоль оси x , то отличной от нуля будет не только проекция переменной намагниченности m_x , но и m_y . Такое свойство магнитной системы называется *гиротропией*. Она проявляется в том, что тензор $\hat{\chi}_\omega$ имеет не только диагональные компоненты χ , но и антисимметричные компоненты $i\chi_g$ и $-i\chi_g$.

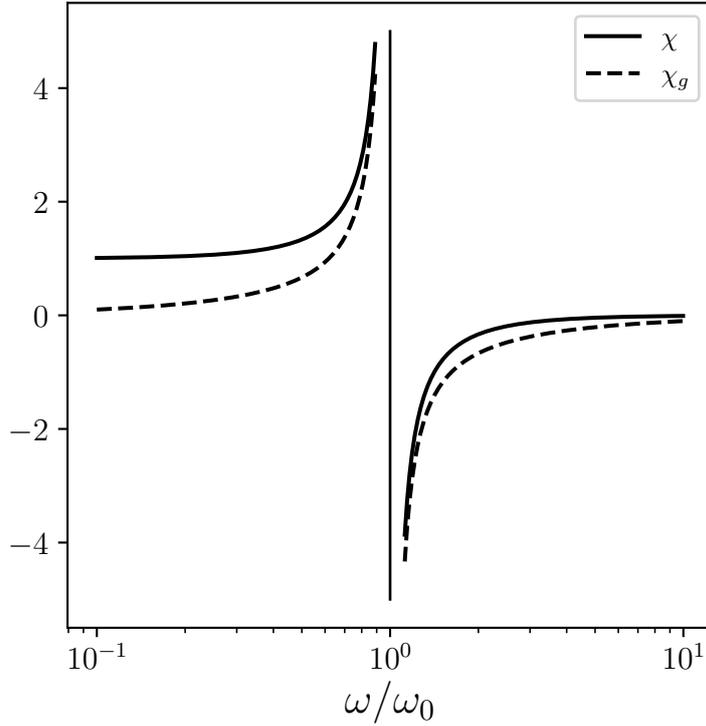


Рис. 3.2. Частотные восприимчивости компонент тензора динамической магнитной восприимчивости изотропного ферромагнетика при $\alpha = 0$ и $H_0 = M_0$

3.2.3. Роль диссипации

Определим теперь вид тензора динамической магнитной восприимчивости рассматриваемой частицы при конечных значениях параметра затухания α . Для этого обратимся к полному магнитодинамическому уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \frac{\alpha}{M} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \quad (3.46)$$

включающему релаксационный член. Как и прежде, в линейном по возбуждающему полю приближении справедливо равенство

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{m}(t) \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}(t); \quad (3.47)$$

добавочное слагаемое же

$$\frac{\alpha}{M} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{\alpha}{M} [\mathbf{M}_0 + \mathbf{m}(t)] \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} \quad (3.48)$$

с точностью до слагаемых первого порядка малости равно $\frac{\alpha}{M_0} \mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}$. Следовательно, при конечных α переменная компонента намагниченности $\mathbf{m}(t)$ в линейном приближении подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0 - \gamma \mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}(t) + \frac{\alpha}{M_0} \mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}. \quad (3.49)$$

Введём комплексные амплитуды \mathbf{h} и \mathbf{m} возбуждающего поля и магнитного отклика согласно

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h}e^{i\omega t}, \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{m}e^{i\omega t}. \quad (3.50)$$

Подстановка этих выражений в уравнение для $\mathbf{m}(t)$ даёт

$$i\omega\mathbf{m} + \gamma\mathbf{m} \times \mathbf{H}_0 - \frac{i\alpha\omega}{M_0}\mathbf{M}_0 \times \mathbf{m} = -\gamma\mathbf{M}_0 \times \mathbf{h}. \quad (3.51)$$

Вновь направим ось z вдоль подмагничивающего поля \mathbf{H}_0 и запишем $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{z}_0$, где \mathbf{z}_0 — единичный вектор. Тогда уравнение для амплитуды отклика \mathbf{m} примет вид

$$i\omega\mathbf{m} + (\omega_0 + i\alpha\omega)\mathbf{m} \times \mathbf{z}_0 = \gamma M_0\mathbf{h} \times \mathbf{z}_0. \quad (3.52)$$

Нетрудно убедиться, что оно полностью аналогично рассмотренному ранее уравнению с $\alpha = 0$. Поэтому его решение имеет ту же структуру:

$$\mathbf{m} = \hat{\chi}_\omega\mathbf{h}, \quad (3.53)$$

где

$$\hat{\chi}_\omega = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_g & 0 \\ -i\chi_g & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

причём выражения для компонент тензора $\hat{\chi}_\omega$ динамической магнитной восприимчивости следуют из полученных ранее путём замены ω_0 на $\omega_0 + i\alpha\omega$:

$$\chi = \frac{\gamma M_0 (\omega_0 + i\alpha\omega)}{\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega_0\omega}, \quad (3.55)$$

$$\chi_g = \frac{\gamma M_0\omega}{\omega_0^2 - (1 + \alpha^2)\omega^2 + 2i\alpha\omega_0\omega}, \quad (3.56)$$

Таким образом, при учёте диссипации магнитной энергии компоненты χ и χ_g становятся комплексными величинами, их действительные и мнимые части принято определять следующим образом: $\chi = \chi' - i\chi''$, $\chi_g = \chi'_g - i\chi''_g$. Частотные зависимости χ и χ_g при заданном подмагничивающем поле $H_0 = M_0$ и значении $\alpha = 0.1$ показаны на рис. 3.3. Как видно, когда параметр затухания отличен от нуля, магнитный отклик системы остаётся конечным при любой частоте перемгничивающего поля. Мнимые части компонент тензора

динамической восприимчивости имеют при этом резонансный максимум, который выражен тем сильнее, чем меньше α . При $\alpha \ll 1$ наибольшие значения величин χ'' и χ_g'' , равные

$$\chi''_{\text{res}} = \chi_g''_{\text{res}} \approx \frac{M_0}{2\alpha H_0}, \quad (3.57)$$

достигаются при $\omega \approx \omega_0$.

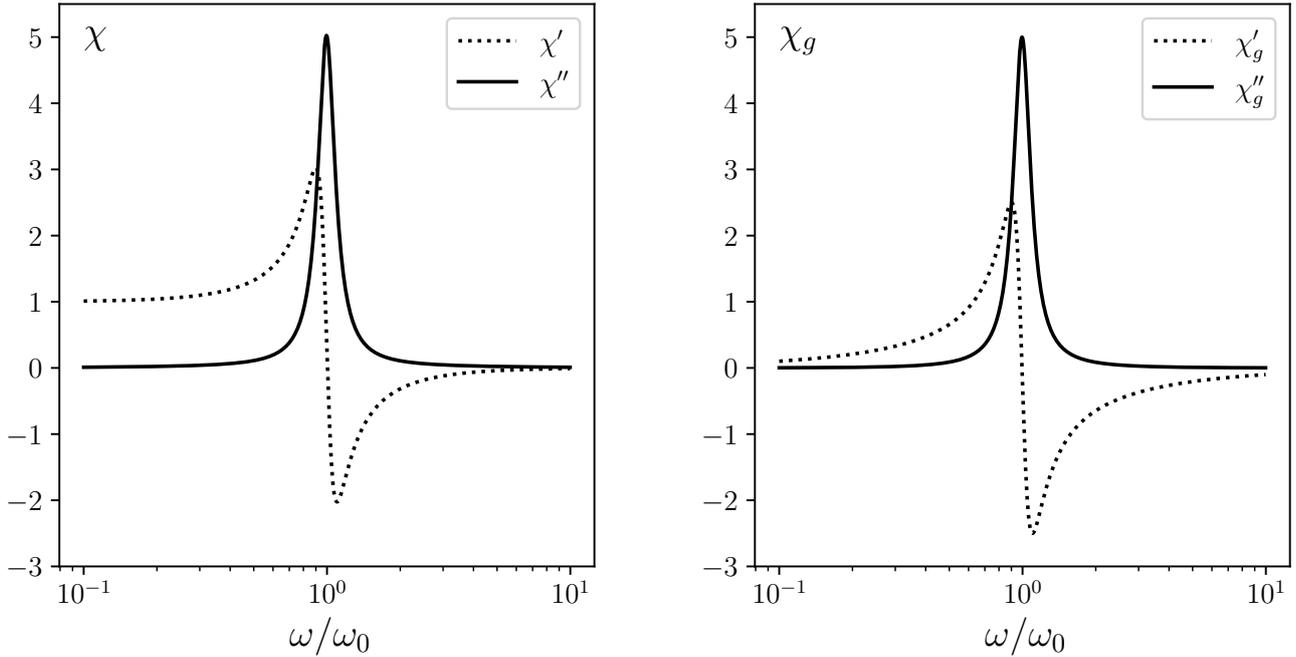


Рис. 3.3. Частотные зависимости компонент тензора динамической магнитной восприимчивости при константе затухания $\alpha = 0.1$ и подмагничивающем поле $H_0 = M_0$

3.2.4. Естественный ферромагнитный резонанс

Если рассматриваемый шар не является магнитоизотропным, необходимо учесть энергию анизотропии. В самом простом случае, когда анизотропия относится к типу “лёгкая ось”, объёмная плотность указанной энергии равна $-K(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})^2$, где K — феноменологическая константа анизотропии, а \mathbf{e} и \mathbf{n} — единичные векторы вдоль намагниченности и оси анизотропии соответственно. Тогда плотность магнитной энергии образца запишется согласно

$$U = -M(\mathbf{e} \cdot \mathbf{H}) + \frac{2\pi}{3}M^2 + K(\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})^2, \quad (3.58)$$

а эффективное магнитное поле —

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta U}{\delta \mathbf{M}} = -\frac{1}{M} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{H} - \frac{4\pi}{3} \mathbf{M} + \frac{2K}{M} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (3.59)$$

Как видно, оно складывается из внешнего поля (первое слагаемое), поля анизотропии (второе слагаемое) и размагничивающего поля (последнее слагаемое).

Как и прежде, предполагаем, что приложенное поле имеет постоянную и малую переменную составляющие: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t)$, поэтому уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \left[\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t) + \frac{2K}{M} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right] + \frac{\alpha}{M} \mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \quad (3.60)$$

Поделив его на величину намагниченности M , получим уравнение для вектора \mathbf{e} :

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{e} \times [\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t) + H_K (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \alpha \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad (3.61)$$

в котором $H_K = \frac{2K}{M}$. Предполагая, что зондирующее поле является слабым: $h(t) \ll H_0$, представим решение этого уравнения в виде суммы

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\zeta}(t), \quad (3.62)$$

равновесной компоненты \mathbf{e}_0 и малой переменной добавки $\boldsymbol{\zeta}(t)$. Подставляя в уравнение для $\mathbf{e}(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = & -\gamma (\mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\zeta}(t)) \times [\mathbf{H}_0 + \mathbf{h}(t) + H_K (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \\ & + H_K (\boldsymbol{\zeta}(t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] + \alpha (\mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\zeta}(t)) \times \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением случая, когда подмагничивающее поле \mathbf{H}_0 направлено строго вдоль оси лёгкого намагничивания: $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{n}$. В такой ситуации равновесный вектор \mathbf{e}_0 так же направлен вдоль указанной оси (других выделенных направлений в отсутствие возмущения просто нет), поэтому $\mathbf{e}_0 \times \mathbf{n} = 0$. Тогда уравнение для $\boldsymbol{\zeta}(t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = & -\gamma (H_0 + H_K (\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{n})) [\boldsymbol{\zeta}(t) \times \mathbf{n}] - \gamma \mathbf{e}_0 \times \mathbf{h}(t) + \alpha \mathbf{e}_0 \times \boldsymbol{\zeta}(t) - \\ & - \gamma \boldsymbol{\zeta}(t) \times \mathbf{h}(t) - \gamma H_K (\boldsymbol{\zeta}(t) \cdot \mathbf{n}) (\boldsymbol{\zeta}(t) \times \mathbf{n}) + \alpha \boldsymbol{\zeta}(t) \times \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Учитывая малость переменного поля, ограничимся решением этого уравнения в первом по порядку по $\mathbf{h}(t)$. Для достижения такой точности достаточно положить $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{n} = 1$ и отбросить последние три слагаемых. Результатом будет линейное относительно $\boldsymbol{\zeta}$ уравнение

$$\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} = -\gamma (H_0 + H_K) (\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{n}) - \gamma \mathbf{e}_0 \times \mathbf{h}(t) + \alpha \mathbf{e}_0 \times \boldsymbol{\zeta}. \quad (3.65)$$

Его решение, как и раньше, удобно искать методом комплексных амплитуд, считая, что

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{h} e^{i\omega t}, \quad \boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{\zeta} e^{i\omega t}. \quad (3.66)$$

Комплексные амплитуды отклика $\boldsymbol{\zeta}$ и возмущения \mathbf{h} связаны алгебраическим соотношением

$$i\omega \boldsymbol{\zeta} + (\omega_0 + \omega_K + i\alpha\omega) \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{n} = -\gamma \mathbf{e}_0 \times \mathbf{h}, \quad (3.67)$$

где $\omega_0 = \gamma H_0$, а $\omega_K = \gamma H_K = \frac{2\gamma K}{M}$. Из него видно, что в рассматриваемой соосной конфигурации, когда подмагничивающее поле направлено вдоль оси лёгкого намагничивания, роль анизотропии сводится к сдвигу собственной частоты прецессии ω_0 . Это означает, что тензор динамической магнитной восприимчивости имеет ту же структуру, что и в случае изотропной частицы:

$$\hat{\chi}_\omega = \begin{pmatrix} \chi & i\chi_g & 0 \\ -i\chi_g & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

а выражения для его компонент можно найти, заменив в полученных ранее формулах ω_0 на $\omega_0 + \omega_K$:

$$\chi = \frac{\gamma M_0 (\omega_0 + \omega_K + i\alpha\omega)}{(\omega_0 + \omega_K)^2 - (1 + \alpha^2) \omega^2 + 2i\alpha(\omega_0 + \omega_K)\omega}, \quad (3.69)$$

$$\chi_g = \frac{\gamma M_0 \omega}{(\omega_0 + \omega_K)^2 - (1 + \alpha^2) \omega^2 + 2i\alpha(\omega_0 + \omega_K)\omega}. \quad (3.70)$$

Если подмагничивающее поле отсутствует и частота $\omega_0 = \gamma H_0 = 0$, а диссипацией магнитной энергии можно пренебречь, то эти формулы принимают вид

$$\chi = \frac{2\gamma^2 K}{\omega_K^2 - \omega^2}, \quad \chi_g = \frac{\gamma M_0 \omega}{\omega_K^2 - \omega^2}. \quad (3.71)$$

Видно, что величины χ и χ_g зависят от частоты резонансным образом. Таким образом, при наличии анизотропии резонанс возможен даже в отсутствие внешнего подмагничивающего поля. Ферромагнитный резонанс, который наблюдается без подмагничивания образца, принято называть *естественным*.

3.3. Спиновые волны

Обменное взаимодействие между атомами в магнитоупорядоченных кристаллах приводит к тому, что изменение направления одного из спинов влечёт за собой переориентацию всех соседних спинов. Возникшее возмущение ориентационного упорядочения будет передаваться дальше от атома к атому, распространяясь, таким образом, в виде волны. Волны такого вида называют *спиновыми*, они могут наблюдаться и в ферромагнетиках, и в антиферромагнетиках, и в ферримагнетиках.

С макроскопической точки зрения спиновые волны следует рассматривать как распространяющиеся в кристалле колебания вектора намагниченности. Для их описания недостаточно решения магнитодинамического уравнения. Дело в том, что магнитное поле в веществе не может считаться заданной функцией координат и времени: в общем случае его можно найти, только решив уравнения Максвелла, дополненные граничными условиями.

В качестве примера кратко обсудим плоские спиновые волны в изотропном ферромагнетике, который помещён в постоянное магнитное поле. Последнее предполагается сильным: магнетик намагничен им до насыщения и не имеет доменной структуры. Будем также считать, что размеры тела много больше длины рассматриваемых волн. Это условие позволяет при описании волновых процессов отвлечься от условий на поверхности образца, трактуя его как неограниченную среду. Наконец, будем полагать, что токи проводимости и свободные электрические заряды отсутствуют. В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (3.72)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.73)$$

Интересуясь только малыми возмущениями магнитного состояния вещества, представим его намагниченность, а также напряжённость и индукцию

магнитного поля в виде суммы постоянной составляющей и малой переменной добавки, зависящей от времени t и радиус-вектора \mathbf{r} точки наблюдения:

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{M}_0 + \tilde{\mathbf{m}}(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{h}}(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{b}}(t, \mathbf{r}). \quad (3.74)$$

Нестационарное магнитное поле является источником электрического поля. Обозначив напряжённость и индукцию последнего через $\tilde{\mathbf{e}}(t, \mathbf{r})$ и $\tilde{\mathbf{d}}(t, \mathbf{r})$ соответственно, запишем уравнения Максвелла в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0, \quad (3.75)$$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{e}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{d}} = 0. \quad (3.76)$$

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{h}} = \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{b}} = 0. \quad (3.77)$$

Как видно, они распадаются на две системы, первую из которых образуют уравнения магнитостатики для постоянных величин \mathbf{H}_0 и \mathbf{B}_0 , а вторую — уравнения для переменных составляющих полей.

Решение будем искать методом комплексных амплитуд. Имея в виду плоские однородные волны, представим нестационарные компоненты поля согласно

$$\tilde{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{h}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{b}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad \tilde{\mathbf{e}}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{e}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (3.78)$$

где \mathbf{k} — волновой вектор. Тогда

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{e}} = -\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{e}}, \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{h}} = -\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{h}}, \quad (3.79)$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{b}} = -\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{b}}, \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{d}} = -\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{d}}, \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{d}}}{\partial t} = i\omega \tilde{\mathbf{d}}, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}}{\partial t} = i\omega \tilde{\mathbf{b}}, \quad (3.81)$$

и уравнения Максвелла переходят в уравнения

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{d} = 0, \quad (3.82)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{h} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{d}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{b} \quad (3.83)$$

для комплексных амплитуд.

Опыт показывает, что в магнитоупорядоченных средах возможно существование “медленных” волн намагниченности, скорость распространения которых много меньше скорости света в вакууме. При их изучении можно пренебречь в последних уравнениях правой частью, пропорциональной ω/c , в результате чего они переходят в уравнения магнитостатики. В таком *магнитостатическом* приближении комплексные амплитуды характеристик магнитного поля подчиняются равенствам

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{h} = 0. \quad (3.84)$$

Они позволяют явно выразить напряжённость поля \mathbf{h} через вектор магнитной индукции \mathbf{m} . В самом деле, по определению магнитной индукции $\mathbf{b} = \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{m}$, поэтому указанным равенствам можно придать вид

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} + 4\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{h} = 0. \quad (3.85)$$

Умножим второе соотношение векторно на \mathbf{k} и воспользуемся правилом раскрытия двойного векторного произведения:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}) - k^2 \mathbf{h} = 0. \quad (3.86)$$

Но $\mathbf{k} \cdot \mathbf{h} = -4\pi\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}$, поэтому $-4\pi (\mathbf{m} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{h} = 0$, откуда

$$\mathbf{h} = -\frac{4\pi}{k^2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}. \quad (3.87)$$

Помимо уравнений Максвелла вектор намагниченности \mathbf{M} подчиняется магнитодинамическому уравнению Ландау–Лифшица–Гильберта

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{\text{eff}} + \frac{\alpha}{M} \left(\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right). \quad (3.88)$$

Для рассматриваемого ферромагнетика эффективное поле \mathbf{H}_{eff} складывается из постоянного поля \mathbf{H}_0 *внутри* образца (оно может включать и размагничивающее поле), переменного поля $\tilde{\mathbf{h}}(t)$ *внутри* образца (предполагается, что внешнего переменного поля нет) и обменного поля $\tilde{\mathbf{h}}_e$. Последнее, по определению, равно

$$\tilde{\mathbf{h}}_e = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial U_e}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right)}, \quad (3.89)$$

где объёмная плотность магнитной энергии

$$U_e = \frac{1}{2}q \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (3.90)$$

Фактически, при нахождении обменного поля дифференцируются только компоненты переменного поля $\tilde{\mathbf{m}}$, так как \mathbf{M}_0 считается везде одной и той же, поэтому

$$\tilde{\mathbf{h}}_e = q \left(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{m}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{m}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{m}}}{\partial z^2} \right). \quad (3.91)$$

Запишем уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта в линейном по $\tilde{\mathbf{m}}$ приближении:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial t} + \gamma \tilde{\mathbf{m}} \times \mathbf{H}_0 + \gamma \mathbf{M}_0 \times (\tilde{\mathbf{h}} + \tilde{\mathbf{h}}_e) - \frac{\alpha}{M_0} \left(\mathbf{M}_0 \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{m}}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.92)$$

Из него следует, что комплексная амплитуда намагниченности \mathbf{m} подчиняется равенству

$$i\omega \mathbf{m} + \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{H}_0 + \gamma \mathbf{M}_0 \times (\mathbf{h} + \mathbf{h}_e) - i\omega \frac{\alpha}{M_0} (\mathbf{M}_0 \times \mathbf{m}) = 0. \quad (3.93)$$

Здесь \mathbf{h}_e — комплексная амплитуда обменного поля; как следует из написанного выше соотношения между $\tilde{\mathbf{h}}_e$ и $\tilde{\mathbf{m}}$, она равна $\mathbf{h}_e = -qk^2 \mathbf{m}$.

Введём систему координат, направив ось z вдоль векторов \mathbf{H}_0 и \mathbf{M}_0 . Если \mathbf{z}_0 — единичный орт этой оси, то $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{z}_0$, $\mathbf{M}_0 = M_0 \mathbf{z}_0$ и уравнение для \mathbf{m} принимает вид

$$i\omega \mathbf{m} + [\gamma H_0 + \gamma M_0 q k^2 + i\alpha\omega] (\mathbf{m} \times \mathbf{z}_0) - \gamma M_0 (\mathbf{h} \times \mathbf{z}_0) = 0. \quad (3.94)$$

Подставим в него полученное выше выражение для амплитуды \mathbf{h} переменного поля и используем обозначения $\omega_0 = \gamma H_0$, $\omega_M = 4\pi\gamma M_0$, $\eta = \gamma M_0 q$:

$$i\omega \mathbf{m} + [\omega_0 + \eta k^2 + i\alpha\omega] (\mathbf{m} \times \mathbf{z}_0) + \omega_M \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{z}_0}{k^2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{k}) = 0. \quad (3.95)$$

Ось z в рассматриваемой задаче определяет единственное выделенное направление — направление равновесной намагниченности \mathbf{M}_0 . Как из следует из написанного равенства, проекция переменной намагниченности на эту ось равна нулю: $m_z = 0$. В плоскости же xy среда полностью изотропна, поэтому ориентацию осей x и y можно задать, руководствуясь удобством вычислений. Пусть волновой вектор направлен под углом ϑ к оси z . Выберем оси x и y

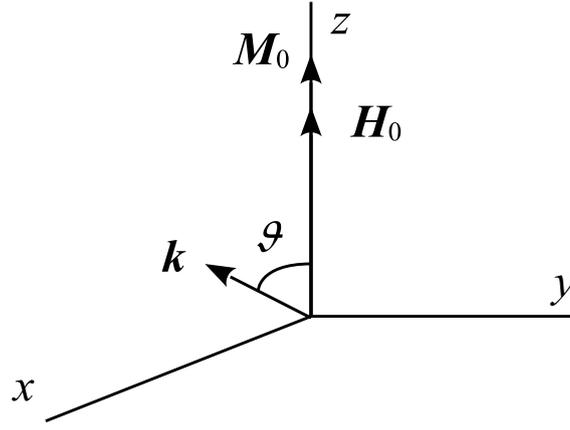


Рис. 3.4. Система координат при рассмотрении плоской спиновой волны

так, чтобы проекции указанного вектора на эти оси были равны $k_x = k \sin \vartheta$ и $k_y = 0$ (рис. 3.4). Тогда компоненты m_x и m_y амплитуды волны намагниченности будут подчиняться системе уравнений

$$\begin{cases} i\omega m_x + (\omega_0 + \eta k^2 + i\alpha\omega) m_y = 0, \\ -(\omega_0 + \eta k^2 + i\alpha\omega + \omega_M \sin^2 \vartheta) m_x + i\omega m_y = 0. \end{cases} \quad (3.96)$$

Она имеет нетривиальное решение, только если её определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} i\omega & \omega_0 + \eta k^2 + i\alpha\omega \\ -(\omega_0 + \eta k^2 + i\alpha\omega + \omega_M \sin^2 \vartheta) & i\omega \end{vmatrix} = 0. \quad (3.97)$$

Это условие приводит к *дисперсионному соотношению* (спектру) для спиновых волн в изотропном ферромагнетике

$$\omega^2 - (\omega_0 + \eta k^2 + i\alpha\omega) (\omega_0 + \eta k^2 + i\alpha\omega + \omega_M \sin^2 \vartheta) = 0. \quad (3.98)$$

Как видно, частота спиновых волн в общем случае зависит и от направления распространения, и от модуля волнового вектора (волнового числа). В пределе $\alpha = 0$ волны являются незатухающими, а их спектр имеет вид

$$\omega^2 = (\omega_0 + \eta k^2) (\omega_0 + \eta k^2 + \omega_M \sin^2 \vartheta). \quad (3.99)$$

Если при этом $\eta k^2 \ll \omega_0$ и $\eta k^2 \ll \omega_M$, то указанное выражение сводится к

$$\omega^2 = \omega_0 (\omega_0 + \omega_M \sin^2 \vartheta), \quad (3.100)$$

т. е. частота волн перестаёт зависеть от волнового числа. Фактически, этот результат справедлив для тех случаев, когда вклад обменной энергии не учи-

тывается, поэтому соответствующие волны называют *безобменными магнитостатическими*. Если же, напротив, $\eta k^2 \gg \omega_0$ и $\eta k^2 \gg \omega_M$, то закон дисперсии становится квадратичным:

$$\omega = \eta k^2. \quad (3.101)$$

4. Список рекомендуемой литературы

1. *Aharoni A.* Introduction to the theory of ferromagnetism. Second edition. Oxford University Press, 2000. 331 p.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. 5-е изд., стер. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 656 с.
3. *Гуревич А. Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 591 с.
4. *Гуревич А. Г., Мелков Г. А.* Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994. 461 с.
5. *Шаверов В. Г., Щеглов В. И.* Спиновые волны в средах с обменом и диссипацией. М.: Физматлит, 2021. 496 с.
6. *Смарт Дж.* Эффективное в поле теории магнетизма / пер.с англ. В. Т. Хозяинова; под ред. С. В. Тябликова. М.: Мир, 1968. 271 с.
7. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1032 с.
8. *Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А.* В мире магнитных доменов. Киев: Наук. думка, 1986. 158 с.
9. *Мейлихов Е. З.* Магнетизм. Основы теории: учеб. пособие. 2-е изд. Догорудный: ИД Интеллект, 2022. 184 с.
10. *Skomski R.* Simple models of magnetism. Oxford University Press, 2008. 366 p.

Учебное издание

Поперечный Игорь Сергеевич

Введение в феноменологическую теорию магнетизма

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*

Корректор *А. В. Цветкова*

Компьютерная верстка: *И. С. Поперечный*

Объем данных 1,25 Мб

Подписано к использованию 06.11.2024

Размещено в открытом доступе

на сайте www.psu.ru

в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15