ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

М. В. Мулюков

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М. В. Мулюков

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки бакалавров
«Прикладная математика и информатика»*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2022

УДК 330.4+517.9+519.86](075.8)
ББК 65-5+22.16я73
М901

М901 **Мулюков М. В.**

Динамические модели экономики. Дифференциальные и разностные уравнения [Электронный ресурс] : учебное пособие / М. В. Мулюков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – 1,28 Мб ; 118 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Mulyukov-Dinamicheskie-Modeli-Ekonomiki-Differencialnye-I-Raznostnye-Uravneniya.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3824-6

Рассматриваются динамические модели экономических процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений в непрерывном времени и разностных уравнений в дискретном времени. Изложение материала сопровождается примерами аналитического исследования данных систем и упражнениями для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов направлений «Прикладная математика и информатика», «Бизнес-информатика», «Информационные системы и технологии».

Ил. 8. Библиогр. 16 назв.

УДК 330.4+517.9+519.86](075.8)
ББК 65-5+22.16я73

Издаётся по решению ученого совета экономического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: кафедра информационных технологий и цифровой экономики Ивановского государственного химико-технологического университета (зав. кафедрой – д-р экон. наук ***И. А. Астраханцева***);

ведущий научный сотрудник Пермского национального исследовательского политехнического университета, д-р физ.-мат. наук ***Е. И. Бравый***

ISBN 978-5-7944-3824-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

> Дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение
>
> *Фридрих Энгельс*

Классическая политическая экономика описывала равновесные состояния экономики. Хотя вопросы изменения численности населения занимали умы мыслителей XIX в., но именно кризисные явления XX в. бросили экономической науке вызов количественного и качественного описания динамических процессов, происходящих в экономике.

Инструментарий дифференциального исчисления, блестяще зарекомендовавший себя для прогнозирования процессов в естественных науках, широко применяется и в экономических задачах. В то же время многие процессы в экономике принципиально дискретны, что обусловливает использование аппарата разностных уравнений в математических моделях экономики.

Настоящее издание посвящено простейшим классам дифференциальных и разностных уравнений, используемых в моделировании процессов экономической динамики. Рассматриваются вопросы аналитического построения решений и качественного исследования асимптотических свойств решений уравнений и их систем.

Выбор классов изучаемых дифференциальных и разностных уравнений обусловлен тем, что для каждого класса приведена экономическая модель. Качественное исследование этих моделей служит иллюстрационным примером применения общих подходов и методов, изложенных в данном учебном издании.

Учебное издание включает в себя основные вопросы итогового экзамена по курсам «Динамические модели экономики» и «Динамические модели экономики II», читаемых для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Бизнес-информатика», «Информационные системы и технологии» и «Прикладная математика и информатика».

Учебное издание из четырёх глав. Первая и вторая главы посвящены теоретическим вопросам качественного исследования решений дифференциальных и разностных уравнений первого и второго порядков соответственно, а так же их применению к задачам микроэкономики и макроэкономики. Теоретический материал дан в сжатой форме, доступной для студентов других направлений с математической подготовкой в рамках стандартных курсов «Высшая математика» и «Дифференциальные уравнения».

Третья и четвёртая главы содержат задачи, предлагаемые студентам для самостоятельной работы, и краткие ответы на них. Данные задачи могут быть использованы в качестве контрольно-измерительного материала для проведения контрольных точек.

Глава I. Уравнения первого порядка

Материал учебного издания изложен на уровне, достаточном для первоначального знакомства с темой и решения задач для выполнения самостоятельной работы. Объём учебного издания не позволяет рассмотреть каждую из рекомендуемых тем в достаточной полноте и с достаточной строгостью, поэтому для дальнейшего изучения затронутых вопросов рекомендуем источники из списка литературы, указанного в конце учебного издания.

1.1. Основные сведения об ОДУ первого порядка

Дифференциальное уравнение — это уравнение, связывающее неизвестную функцию и её производные. Эти уравнения используются в естествознании с XVII в. (например, уравнение второго закона Ньютона) и широко используются для моделирования процессов во всех науках, в том числе и в экономике.

Математические модели, представляющие собой дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений, называется *дифференциальной моделью* или *непрерывной моделью*. Последний термин обозначает, что аргумент неизвестной функции изменяется непрерывно (без скачков).

Мы будем рассматривать простейший класс дифференциальных уравнений — *обыкновенные дифференциальные уравнения* (ОДУ). Эти уравнения характеризуются двумя особенностями:

- во-первых, неизвестные функции в этих уравнениях зависят от одной переменной[1];
- во-вторых, уравнение включает в себя функцию и её производные в один и тот же момент времени[2].

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

[1]Если переменных несколько, то возникает *дифференциальное уравнение в частных производных*.

[2]Если уравнение включает в себя производную и функцию в разные моменты времени, то такое уравнение называется *функционально-дифференциальным*.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка
$$\dot{x}(t) = f\bigl(x(t), t\bigr). \tag{1.1}$$

Решением уравнения (1.1) называется такая функция $x = x(t)$, которая удовлетворяет функции (1.1) на интервале $t_1 < t < t_2$. Под символом t_1 мы можем понимать $-\infty$, а под символом t_2 — $+\infty$. Интервал (t_1, t_2) называется *интервалом определения* функции x.

Помимо ограничений на аргумент t функция f может быть определена не для любых значений x. Кроме того, по каким-то иным соображениям практического характера значения моделируемой величины могут быть ограничены[3], поэтому решение дифференциального уравнения рассматривают в некоторой области Ω плоскости Otx[4]. Не исключается случай, что Ω — это вся область Otx.

Для того чтобы функция x была решением уравнения (1.1), необходимо, чтобы эта функция была дифференцируемой в каждой точке интервала определения. Любая дифференцируемая функция непрерывна, поэтому решение дифференциального уравнения представляет собой непрерывную кривую в области Ω. Эта кривая называется *интегральной кривой*.

Совокупность всех решений дифференциального уравнения в области Otx называется *общим решением дифференциального уравнения*.

В математике важную роль играет вопрос о количестве возможных решений того или иного уравнения. Относительно дифференциального уравнения (1.1) возникает два вопроса:

- могут ли интегральные кривые пересекаться?
- существует ли точки области Ω, через которые не проходит ни одна интегральная кривая?

Оказывается, что на оба вопроса можно ответить отрицательно при некоторых разумных ограничениях на функцию f. А именно, справедлива следующая теорема [1, с 10].

[3]Например, занятость не может быть отрицательной или больше единицы.

[4]Координатная плоскость, у которой горизонтальная и вертикальная оси обозначаются через t и x соответственно.

Теорема 0.1. *Если функция f непрерывна и непрерывно дифференцируема по первому аргументу*[5] *в области Ω, то через каждую точку (t_0, x_0) области Ω проходит ровно одна интегральная кривая.*

Иными словами, интегральные прямые плотно заполняют область Ω, не оставляя «дыр» и без пересечений. Задав условие $x(t_0) = x_0$, мы однозначно выбираем интегральную кривую.

Если условие задано на левом конце интервала определения, то задача отыскания соответствующего решения уравнения (1.1) называется *задачей Коши.*

Когда решён вопрос о существовании решения, возникает вопрос о его нахождении. Решение можно искать либо в замкнутой аналитической форме, либо приближённо, используя численные методы. Аналитическое решение, как правило, предпочтительнее, однако его получение возможно далеко не для всех уравнений.

Если функция f имеет вид

$$f(x,t) = X(x)T(t),$$

то уравнение (1.1) называется *уравнением в разделяющихся переменных*, а его решение можно построить следующим образом.

1. Представляем производную в виде отношения дифференциалов $\dot{x}(t) = dx/dt$.

2. Преобразуем уравнения к такому виду, когда с одной стороны от знака равенства остаётся функция и дифференциал от единственной переменной, т. е. к следующему виду[6].

$$\frac{dx}{X(x)} = T(t)dt. \tag{1.2}$$

3. Интегрируем левую и правую части уравнения (1.2):

$$\int \frac{dx}{X(x)} = \int T(t)dt.$$

[5]То есть частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ тоже непрерывна.

[6]Обратите внимание на то, что при таком преобразовании мы обязаны потребовать, что $X(x)$ не обращается в ноль.

4. В результате интегрирования получаем зависимость между переменными, куда входит ещё и произвольная константа интегрирования. Желательно выразить из этого выражения x в явном виде, если это возможно.

5. Полученную в результате интегрирования произвольную константу нужно найти, используя начальные условия.

6. Получая выражение (1.2), мы делили на $X(x)$, однако это допустимо только в случае $X(x) \neq 0$. Таким образом, мы могли упустить некоторые решения. Если $\bar{x}$ — нуль функции X, то функция $x(t) \equiv \bar{x}$ тоже является решением дифференциального уравнения (1.2), так как $\dot{x}(t) \equiv 0$.

1.2. Логистическое уравнение

Рассмотрим модель влияния технологического новшества на экономический рост [2].

Рассмотрим уравнение

$$\dot{y}(t) = k(t)\big(y(t) - L\big)\big(H - y(t)\big), \tag{1.3}$$

где t — параметр, отражающий затраты на развитие данной технологии (для простоты можем считать, что этот параметр — время), y — величина, отражающая технологически значимое влияние уровня развития технологии на экономику, $k(t)$ — положительный (вообще говоря, переменный) коэффициент пропорциональности.

Параметр L задаёт нижнюю границу y, отражающую первоначальную, предельно низкую возможность технологии; параметр H задаёт технологический предел и отражает наибольшие возможности технологии.

Будем рассматривать задачу на отрезке $[t_1, t_2]$.

Прежде всего заметим, что уравнение (1.3) содержит 3 параметра. При исследовании любой модели в первую очередь нужно попытаться уменьшить количество независимых параметров.

Проведём замену переменных:

$$z(t) = y(t) - L,$$

тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\dot{z}(t) = k(t)z(t)\big(H - L - z(t)\big).$$

Если мы обозначим $(H - L)$ через новую константу, то останется всего 2 параметра! Однако в данном случае на этом можно не останавливаться и провести ещё одну замену:

$$x(t) = z(t)/(H - L).$$

Дифференциальное уравнение принимает вид

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t)\big(1 - x(t)\big), \tag{1.4}$$

где

$$a(t) = k(t)(H - L).$$

Итак, a — единственный коэффициент, включающий в себя все коэффициенты исходной модели.

В нашем случае область Ω включает в себя такие точки (t, x), что $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 1).

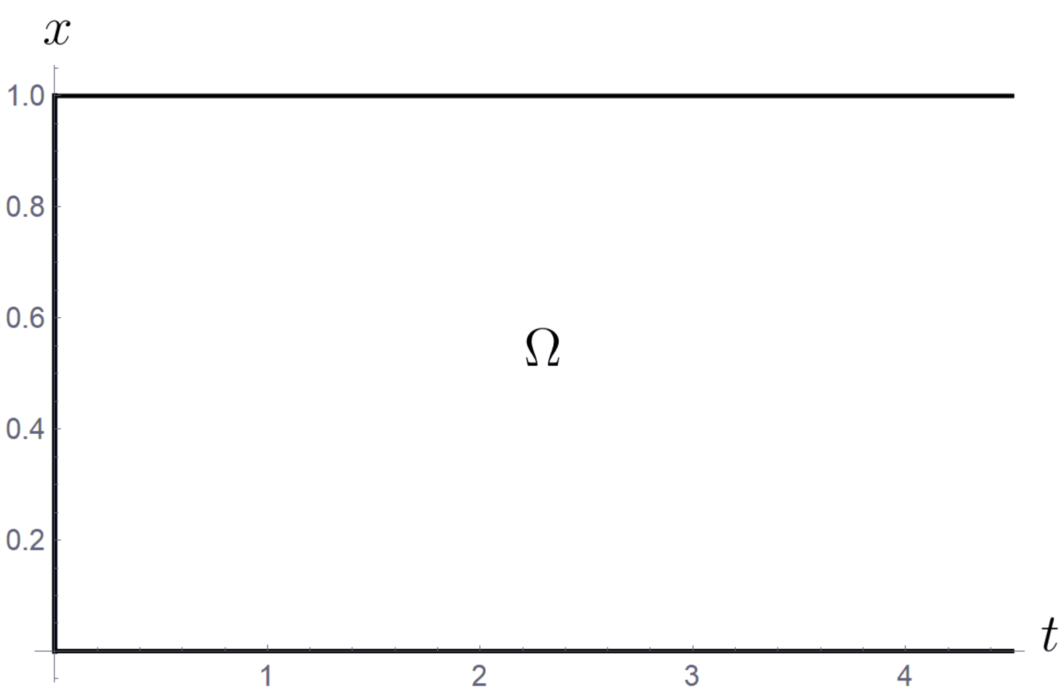

Рис. 1. Область, в которой рассматривается уравнение (1.3)

Положительный коэффициент пропорциональности $a = a(t)$ может меняться со временем. Если $a = const$, то уравнение (1.4) принимает вид

$$\dot{x}(t) = ax(t)\big(1 - x(t)\big). \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется *логистическим*, оно впервые было рассмотрено бельгийским математиком Пьером Франсуа Ферхюльстом в XIX в. для описания динамики изменения численности населения. Логистическое уравнение нашло широкое применение в моделировании биологических, экономических, социальных и физических процессов.

Дифференциальное уравнение (1.1) называется *автономным*, если все его коэффициенты постоянны (не зависят от времени). Логистическое уравнение (1.5) является автономным, а уравнение (1.4) — неавтономным.

Рассмотрим логистичское уравнение (1.5). Предположим, что $x \neq 0$, $x \neq 1$. Воспользуемся методом разделения переменных:

$$\frac{dx}{x(1-x)} = adt.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int adt. \tag{1.6}$$

Справа имеем

$$\int adt = at + C.$$

Интеграл, стоящий справа в выражении (1.6), несколько более сложный. Для того, чтобы его вычислить, разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x}.$$

Найдём коэффициенты A и B, приведя выражения слева и справа от знака равенства в последней формуле к одному знаменателю:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+Bx}{x(1-x)} =$$
$$= \frac{A+(B-A)x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Знаменатели выражений равны, поэтому должны быть равны и числители, следовательно,

$$1 = A + (B-A)x. \tag{1.7}$$

Выражение (1.7) — не уравнение, а тождество, т. е. оно должно выполняться для любых значений x, а это имеет место в том и только том случае, если

$$\begin{aligned} &A = 1, \\ &B - A = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы алгебраических уравнений элементарно:

$$A = B = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

Разложив таким образом выражение, его уже легко проинтегрировать:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(1-x)} &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} = \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(1-x)}{1-x} = \\ &= \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|. \end{aligned}$$

Итак, выражение (1.6) принимает вид

$$\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = at + C.$$

Заметим, что мы опустили модуль, так как в области Ω подмодульное выражение неотрицательно.

Наша цель — выяснить, как зависит уровень влияния технологии от времени, то есть найти функцию $x = x(t)$, поэтому преобразуем полученное выражение:

$$\left(\frac{x(t)}{1-x(t)}\right) = e^{at+C} = e^C e^{at}.$$

Обозначим через C_1 выражение e^C. Следует иметь в виду, что $C_1 > 0$.

Итак,

$$\frac{x(t)}{1-x(t)} = C_1 e^{at}.$$

Разрешим последнее выражение относительно x:

$$x(t) = 1 - \frac{1}{1 + C_1 e^{at}}. \tag{1.8}$$

Выражение (1.8) описывает семейство интегральных кривых в области Ω, однако это ещё не все решения дифференциального уравнения (1.5). Дело в том, что мы предполагали $x(t) \neq 0$ и $x(t) \neq 1$. Если же существует число t^* такое, что $x(t^*) = 0$ (или $x(t^*) = 1$), то $x(t) \equiv 0$ (или $x(t) \equiv 1$).

Если x тождественно равно одному из этих значений, то такая постоянная функция тоже является решением дифференциального уравнения.

Решение $x(t) \equiv 0$ получается из формулы (1.8) подстановкой $C_1 = 0$, поэтому этот случай формально можно включить в семейство (1.8), приняв $C_1 \in [0, \infty)$.

На рис. 2 изображены некоторые интегральные кривые уравнения (1.6) при $a = 2$.

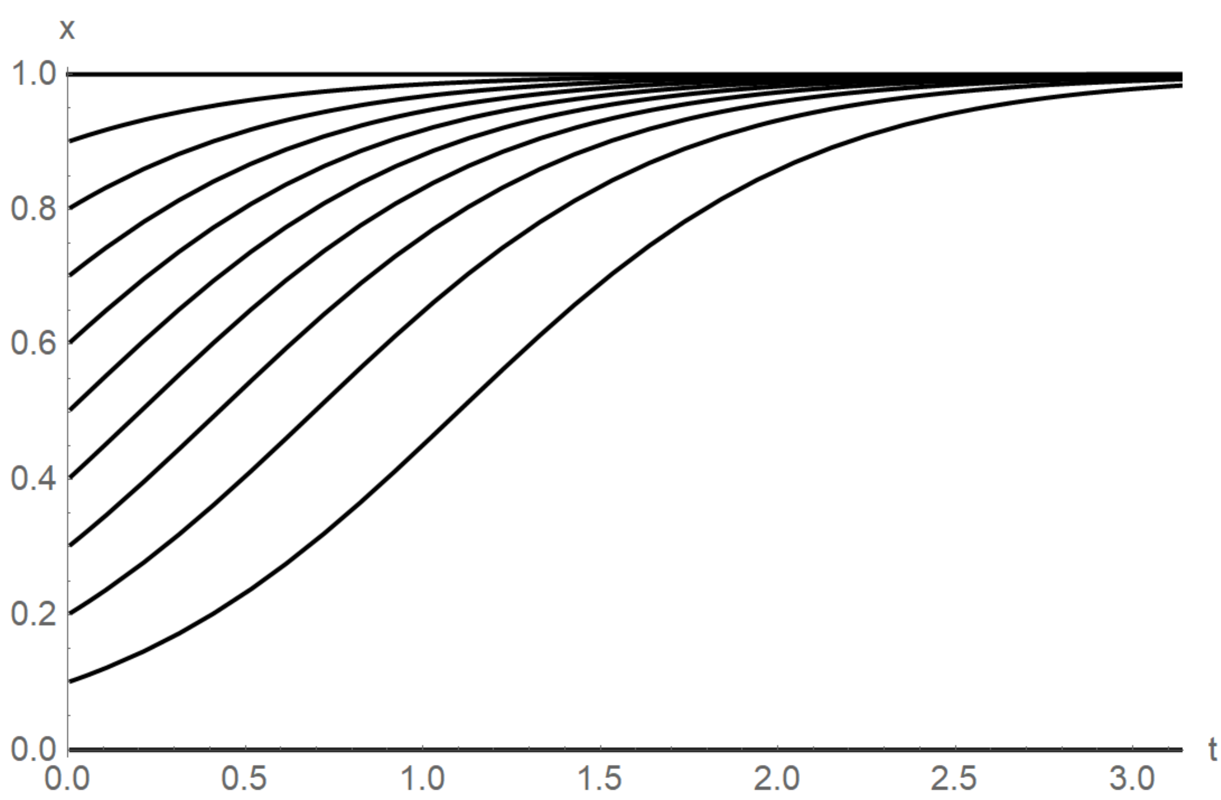

Рис. 2. Интегральные кривые логистического уравнения

Проведём обратную замену переменных и запишем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y(t) = H - \frac{H-L}{1+C_1e^{\frac{kt}{H-L}}}, \tag{1.9}$$

где $C_1 \geqslant 0$ и $y(t) \equiv H$.

Пример 1.1. Пусть $L = 10$, $H = 90$, $k = 2$.

Поставим задачу Коши: отыскать решение этого дифференциального уравнения при условии $y(0) = 50$.

Во-первых, заметим, что постановка задачи корректна, так как $x(0)$ принадлежит отрезку $[L, H]$. Более того, начальное значение не совпадает ни с верхней, ни с нижней границей отрезка, поэтому решение ищется в виде (1.9)

$$50 = y(0) = 90 - \frac{80}{1+C_1},$$

следовательно, $C_1 = 1$.

Нахождение решения неавтономного уравнения (1.4) не имеет принципиальных отличий. Вместо (1.6) имеем

$$\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int a(t)dt,$$

поэтому единственное усложнение заключается в том, что нужно вычислить ещё и правый интеграл.

1.3. Основные сведения о разностных уравнениях

Если моделируемая величина $y = y(t)$ изменяется через фиксированный промежуток времени h, то целесообразно рассматривать функцию не на всей числовой оси, а лишь в фиксированных точках:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = h, \quad t_2 = 2h, \quad \ldots \quad t_n = nh, \quad \ldots$$

Обозначим $x(n) = y(nh)$ при $n \in \mathbb{N}_0$.

Разностное уравнение (РУ) представляет собой уравнение, связывающее значения неизвестной функции в разные дискретные моменты времени.

Рассмотрим уравнение

$$x(n) = f\bigl(x(n-1), x(n-2), x(n-k), n\bigr). \tag{1.10}$$

Обратите внимание на то, что первые k переменных функции f — это значение неизвестной функции в предыдущие k моментов времени, а последняя переменная n играет роль времени.

Если функция f не зависит от n, то разностное уравнение называется *автономным*.

В отличие от дифференциальных уравнений начальные условия разностного уравнения, вообще говоря, невозможно задать в один момент времени: для того, чтобы найти $x(n)$ по формуле (1.10), нужно знать значения этой функции в предыдущих k точках. Таким образом, число k характеризует степень свободы уравнения (строго говоря, — это размерность базиса решения), поэтому число k называется *порядком разностного уравнения*.

Кроме того, k характеризует ещё и «глубину памяти» уравнения, т. е. то, насколько отдалённое прошлое процесса может влиять на его эволюцию в настояшем. Здесь мы видим ещё одно ключевое отличие от обыкновенного дифференциального уравнения: использование разностных уравнений позволяет учитывать эффект запаздывания.

В экономике, биологии, теории автоматического регулирования реакция многих систем на изменение величин её показателей происходит не мгновенно, поэтому уравнения, учитывающие эффект запаздывания, более адекватно описывают такие процессы. С математической точки зрения разностные уравнения — наиболее простой объект, включающий в себя запаздывание, поэтому эти уравнения нашли широкое применение в этих отраслях знания.

1.4. Задача о процентах по вкладу

Простейшим примером применения разностных уравнений в экономике является задача о начислениях процентов по вкладу. Как правило, начисление процентов проходит ежемесячно, а в период между двумя начислениями сумма вклада не изменяется.

Предположим, что клиент банка сделал вклад на сумму 1 млн. рублей 1-ого января 2020-го года. Банк увеличивает сумму вклада на 3%

10-го числа каждого месяца. Требуется найти аналитическую зависимость суммы вклада от количества прошедших с момента оформления вклада месяцев.

Обозначим через $x(n)$ сумму вклада спустя n месяцев, тогда по определению $x(0) = 1\,000\,000$ р.

Условимся считать, что $x(n)$ — это сумма вклада 2-го числа каждого месяца. То есть каждый месяц в один и тот же день мы обращаемся в банк для того, чтобы узнать сумму вклада. Между двумя такими обращениями происходит пополнение вклада на 3% , т. е.

$$x(n) = q \cdot x(n-1), \tag{1.11}$$

где $q = 1,03$.

Мы видим, что $\{x(n)\}$ — это последовательность, каждый член которой в q раз больше предыдущего. Иными словами, $\{x(n)\}$ — это геометрическая прогрессия со знаменателем q. Общий член[7] геометрической прогрессии имеет вид

$$x(n) = x_0 \cdot q^n. \tag{1.12}$$

Если мы хотим вычислить размер вклада на 17-е августа 2025 г., то достаточно вычислить количество прошедших месяцев и применить формулу (1.12). На 2-е августа 2025 г. прошло 68 месяцев, начиная с даты 2-е января 2020 г., однако между 2-м и 17-м числом произошло ещё одно повышение процента, поэтому $n = 69$. Получаем ответ

$$x(69) = 10^6 \cdot (1,03)^{69} \approx 7\,687\,205,74.$$

Усложним задачу и предположим, что 20-го числа клиент пополняет свой счёт на 10 тыс. р. Как изменится решение? Во-первых, изменится формула (1.11)

$$x(n) = q \cdot x(n-1) + a, \tag{1.13}$$

где $a = 10\,000$.

Обратите внимание на то, что в нашем примере сначала происходит выплата процента банком, а только потом — увеличение суммы вкладчиком. В противном случае формула была бы другой:

$$x(n) = q \cdot (x(n-1) + a).$$

[7] Термин *общий член последовательности* означает формулу, согласно которой можно вычислить любой элемент последовательности по его номеру.

Теперь последовательность $\{x(n)\}$ уже не является геометрической прогрессией. Вычислим первые несколько членов этой последовательности:

$$\begin{gathered}
x(1) = qx_0 + a, \\
x(2) = qx_1 + a = q^2x(0) + a(q+1), \\
x(3) = qx_2 + a = q^3x(0) + a(q^2+q+1), \\
x(4) = qx_3 + a = q^4x(0) + a(q^3+q^2+q+1), \\
\dots
\end{gathered}$$

Угадывается формула

$$x(n) = q^n x(0) + a\sum_{m=0}^{n-1} q^m. \tag{1.14}$$

Оставим в стороне вопрос о том, правильно ли мы угадали общий член. Преобразуем (1.14), использовав формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Тогда согласно нашим предположениям общий член последовательности имеет вид[8]

$$x(n) = q^n x_0 + a\frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.15}$$

Теперь докажем, что последовательность, вычисленная по формуле (1.15), действительно является решением уравнения (1.13).

Во-первых, формула (1.15) справедлива при $n = 1$. Действительно,

$$x(1) = qx(0).$$

Во-вторых, докажем, что если числа

$$x(1), \quad x(2), \quad \dots \quad x(n-1),$$

вычисленные по формуле (1.15), являются решением уравнения (1.13), то и число $x(n)$, вычисленное по той же формуле, тоже является решением данного уравнения.

[8]Следует напомнить, что эти рассуждения справедливы только при $q \neq 1$, поэтому далее будем предполагать выполнение этого неравенства.

Для этого подставим выражение (1.15) и выражение

$$x(n-1) = q^{n-1}x_0 + a\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$

в формулу (1.13):

$$q^n x(0) + a\frac{q^n-1}{q-1} = q\left(q^{n-1}x(0) + a\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right) + a,$$

$$q^n x(0) + a\frac{q^n-1}{q-1} = q^n x(0) + a\frac{q^n-q}{q-1} + a,$$

$$q^n x(0) + a\frac{q^n-1}{q-1} = q^n x(0) + a\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Полученное тождество доказывает истинность формулы (1.15)[9].

Заметим, что формулу (1.15) можно получить иначе. Для этого задамся вопросом: при каких начальных данных решение уравнения (1.13) — стационарная последовательность?[10] Предположим, что $x(n) = x^*$ при любом неотрицательном целом n, тогда согласно формуле (1.13) имеем

$$x^* = qx^* + a,$$

следовательно,

$$x^* = \frac{a}{1-q}.$$

Полученное нами значение называется *неподвижной точкой* оператора F, действующего в $\mathbb{R}$ по правилу $F(x) = qx + a$, или *положением равновесия* уравнения (1.13). Смысл этого термина заключается в том, что если x_0 равняется этому значению, то система, моделируемая уравнением (1.13), находится в равновесном состоянии, и в ней отсутствуют изменения во времени.

Произведём замену переменных

$$\overline{x}(n) = x(n) - x^*$$

[9] Использованный нами метод называется *методом математической индукции*. Подробное описание этого метода можно найти в [3].

[10] Под *стационарной* последовательностью в математике называют последовательность, состоящую из одинаковых членов.

в выражении (1.13):

$$\overline{x}(n) + \frac{a}{1-q} = q \cdot \left(\overline{x}_{n-1} + \frac{a}{1-q}\right) + a,$$
$$\overline{x}(n) = q\overline{x}(n-1). \tag{1.16}$$

Итак, $\{\overline{x}(n)\}$ — геометрическая прогрессия с общим членом:

$$\overline{x}(n) = \left(x_0 - \frac{q}{1-q}\right) q^n,$$

поэтому

$$x(n) = \left(x_0 - \frac{a}{1-q}\right) q^n + \frac{a}{1-q} = q^n x_0 + a\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

Итак, вернёмся к ответу на поставленную задачу.

Согласно формуле (1.13) 17-го августа 2025 г. вклад будет равен

$$x(69) = 10^6 \cdot (1,03)^{69} + 10^4 \frac{(1,03)^{69} - 1}{1,03 - 1} \approx 9\,916\,274,32.$$

1.5. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t). \tag{1.17}$$

Линейные дифференциальные уравнение выделяются в особый класс. Почему таким уравнениям уделяется такое внимание? Одна из причин заключается в том, что линейные уравнения — инструмент исследования нелинейных уравнений.

Основная идея заключается в том, чтобы представить уравнение (1.1) в виде

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t) + g\big(x(t), t\big). \tag{1.18}$$

Если значения функции g достаточно малы при определённых условиях, тогда некоторые свойства решения уравнения (1.18) будут совпадать со свойствами более простого уравнения (1.17). Этот подход называется *линеаризация*. Рассмотрим его на простейшем случае логистического уравнения (1.5)

$$\dot{x}(t) = ax(t)\big(1 - x(t)\big).$$

В параграфе 1.2 показано, что логическое уравнение имеет два постоянных решения:

$$x(t) \equiv 0,$$

$$x(t) \equiv 1.$$

На рис. 2 видно, что все интегральные кривые (за исключением тривиального решения) при $t \to \infty$ удаляются от первого постоянного решения и приближаются ко второму. Доказать этот факт легко, имея явное представление решения (1.8), однако для большинства дифференциальных уравнений, которые можно встретить в приложениях, невозможно найти аналитическое представление решения.

Сначала рассмотрим постоянное решение $x(t) \equiv 0$. Представим логистическое уравнение в виде

$$\dot{x}(t) = ax(t) - ax^2(t).$$

Если $x(t)$ достаточно близко к нулю, то слагаемое

$$-ax^2(t)$$

значительно меньше слагаемого

$$ax(t)$$

, поэтому естественно ожидать, что отбрасывание этого, меньшего из двух слагаемых, незначительно отразится на поведении решения. Линеаризованная система принимает вид

$$\dot{x}(t) = ax(t). \tag{1.19}$$

Решение уравнения (1.19) имеет вид

$$x(t) = x(0)e^{at},$$

поэтому любое решение (кроме нулевого) обладает свойством

$$\lim_{t\to\infty} \left| x(t) \right| = \infty.$$

Решения нелинейного уравнения не стремятся к бесконечности, однако участки интегральных кривых, расположенные достаточно близко к нулевому решению, ведут себя похожим образом и удаляются от нулевого решения.

Теперь рассмотрим постоянное решение $x(t) \equiv 1$. Проведём замену переменных:

$$y(t) = x(t) - 1,$$

тогда логистическое уравнение примет вид

$$\dot{y}(t) = -a\big(1 - y(t)\big)y(t).$$

Линеаризация этого уравнения имеет вид

$$\dot{y}(t) = -ay(t).$$

Все решения этого уравнения имеют вид

$$y(t) = y(0)e^{-at}$$

и стремятся к нулю, и

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$$

и для логистического уравнения.

Приведённые рассуждения не являются доказательством и носят иллюстративный характер. Точные формулировки теорем с доказательствами можно найти в [4].

Перейдём к вопросу о поиске решения уравнения (1.17). Для решения этой задачи воспользуемся методом вариации произвольной постоянной (метод Бернулли).

Мы будем полагать, что функции $a = a(t)$ и $b = b(t)$ непрерывны на интервале определения дифференциального уравнения (1.17).

Однородным линейным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = 0. \tag{1.20}$$

Легко видеть, что от уравнения (1.17) уравнение (1.20) отличается тем, что $b(t) \equiv 0$.

Метод вариации произвольной постоянной заключается в последовательной реализации следующих этапов.

1. Находим общее решение однородного уравнения (1.20). Это уравнение в разделяющихся переменных (см. параграф 1.1), его решение имеет вид

$$x(t) = Ce^{-\int_{t_1}^{t} a(s)ds}. \tag{1.21}$$

2. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде (1.21), однако вместо произвольной константы C подставим неизвестную функцию $C = C(t)$. В результате такой подстановки имеем:

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = \left(C(t)e^{-\int_{t_1}^{t} a(s)ds}\right)' + a(t)C(t)e^{-\int_{t_1}^{t} a(s)ds} =$$

$$= C'(t)e^{-\int_{t_1}^{t} a(s)ds} = b(t),$$

следовательно,

$$C'(t) = b(t)e^{\int_{t_1}^{t} a(s)ds},$$

$$C(t) = \int \left(b(t)e^{\int_{t_1}^{t} a(s)ds}\right)dt.$$

3. Проинтегрируем последнее выражение, константу интегрирования C_1 найдём из начальных условий.

Пример 1.2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t} = 3\ln t.$$

Решение. Сначала находим решение однородного уравнения методом разделения переменных:

$$x'(t) + \frac{x(t)}{t} = 0,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t},$$

$$\ln|x(t)| = -\ln|t| + \ln C,$$

$$x(t) = C/t.$$

Теперь положим $C = C(t)$ и подставляем найденное решение в неоднородное уравнение:

$$\left(\frac{C(t)}{t}\right)' + \frac{C(t)}{t^2} = 3\ln t,$$

следовательно,

$$C'(t) = 3t\ln t.$$

Вычислим C, применив интегрирование по частям:

$$C(t) = 3\int t\ln t\,dt = 3\int \ln t\,d\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{3t^2\ln t}{2} - \int \frac{3t^2}{2}\,d(\ln t) =$$

$$= \frac{3t^2\ln t}{2} - \int \frac{3t}{2}\,dt = \frac{3t^2\ln t}{2} - \frac{3t^2}{4} + C_1.$$

Окончательно получаем решение:

$$x(t) = \frac{3t\ln t}{2} - \frac{3t}{4} + \frac{C_1}{t}. \tag{1.22}$$

1.6. Модель Харрода-Дамара

Одним из наиболее влиятельных экономистов в первой половине XX в. был Джон Мейнард Кейнс. Его идеи влияли не только на развитие экономической теории, но и на практические шаги правительств ведущих капиталистических стран в сфере макроэкономики. Простейший вариант математической модели, основанной на кейнсианской методологии, — *модель Харрода-Дамара* [5].

Эта модель описывает динамику дохода Y в закрытой экономике. Предполагается, что:

- доход Y равен сумме потребления C и инвестиций I,
- скорость роста дохода пропорциональная инвестициям, т. е. $I(t) = BY'(t)$, где B — коэффициент капиталоёмкости прироста дохода.

В этом случае имеет место уравнение

$$Y = C + BY'. \tag{1.23}$$

Если объём потребления C пропорционален доходу, т. е. $C(t) = \alpha Y(t)$ при некотором $\alpha \in (0,1)$, то уравнение (1.23) представляет собой линейное автономное однородное уравнение

$$Y'(t) = \frac{1-\alpha}{B}Y(t),$$

общее решение которого элементарно находится:

$$Y(t) = Y(0)e^{\frac{1-\alpha}{B}t}.$$

Если объём потребления C постоянен, то уравнение (1.23) — неоднородное линейное автономное уравнение, решение которого имеет вид

$$Y(t) = C + \big(Y(0) - C\big)e^{\frac{t}{B}}.$$

Заметим, что в обоих случаях

$$\lim_{t\to\infty}\big|Y(t)\big| = \infty$$

(за исключением вырожденного случая $Y(t) \equiv C$) — это означает, что у модели нет устойчивого положения равновесия. Этот факт по-разному интерпретируется исследователями: либо как преимущество, либо как недостаток в зависимости от точки зрения.

К особенностям модели относят:

- нулевой инвестиционный лаг,
- отсутствие выбытия капитала,
- затраты труда постоянны во времени или выпуск продукции не зависит от затрат труда,
- отсутствие влияния технического прогресса.

1.7. Уравнение Бернулли

Существует класс нелинейных дифференциальных уравнений, которые сводятся к линейным уравнениям достаточно простой заменой.

Уравнение вида

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)x^n(t) \tag{1.24}$$

называется уравнением Бернулли.

Разделим левую и правую части уравнения на $x^n(t)$:

$$x^{-n}(t)\dot{x}(t) + p(t)x^{1-n}(t) = q(t).$$

Проведём замену переменных:

$$x^{1-n}(t) = y(t).$$

Продифференцируем данное равенство:

$$(1-n)x^{-n}(t)\dot{x}(t) = \dot{y}(t).$$

Следовательно, уравнение (1.24) можно записать в виде

$$(1-n)\dot{y}(t) + p(t)y(t) = q(t). \tag{1.25}$$

Уравнение (1.25) линейно относительно y, поэтому его можно решить методом вариации произвольной постоянной. Затем, проведя обратную замену, можно получить решение уравнения (1.24).

Пример 1.3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(t) + \frac{x(t)}{3t} = \frac{\ln t}{x^2(t)}.$$

Домножим правую и левую части уравнения на $3x^2(t)$:

$$3x^2(t)\dot{x}(t) + \frac{x^3(t)}{t} = 3\ln t.$$

Проведём замену переменных: $y(t) = x^3(t)$:

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{t} = 3\ln t. \tag{1.26}$$

Решение уравнения (1.26) найдено выше (1.22). Проведя обратную замену, получаем ответ:

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{3t\ln t}{2} - \frac{3t}{4} + \frac{C_1}{t}}.$$

1.8. Модель Солоу

Лауреат нобелевской премии Роберт Солоу в 1956-ом г. предложил модель экономического роста:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = bx^k(t), \tag{1.27}$$

где через $x(t)$ обозначена фондовооружённость труда. Параметры a и b положительны, параметр k принадлежит интервалу $(0, 1)$.

Модель Солоу позволяет учитывать:

- влияние на рост национального доходов как трудовых ресурсов, так и уже созданных производственных фондов,
- выбытие капитала,

- повышение эффективности труда вследствие научно-технического прогресса.

Данная модель имела огромное влияние на развитие макроэкономики, а различные её обобщения не потеряли актуальность и по сей день.

В уравнении (1.27) слагаемое $ax(t)$ обусловлено выбытием капитала, а слагаемое $bx^k(t)$ — ростом капиталовооружённости вследствие технического прогресса. Вид последнего слагаемого обусловлен использованием производственной функции Кобба-Дугласа.

Подробный вывод уравнения (1.27) можно найти в [5].

Проведём замену переменных

$$x(t) = \sqrt[1-k]{\frac{b}{a}} y(at)$$

в уравнении (1.27):

$$\dot{y}(t) + y(t) = y^k(t). \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) относится к классу дифференциальных уравнений Бернулли, поэтому его аналитическое решение можно найти указными выше методами — предлагаем читателю найти его самостоятельно в качестве упражнения.

Общее решение уравнения (1.28) имеет вид

$$y(t) = \sqrt[1-k]{1 + Ce^{-(1-k)t}}$$

или $y(t) \equiv 0$.

Проведя обратную замену переменных, получаем решение дифференциального уравнения (1.27):

$$x(t) = \sqrt[1-k]{\frac{a}{b} + Ce^{-\frac{(1-k)t}{a}}}$$

или $x(t) \equiv 0$.

Отметим, что ограничения модели можно снять или ослабить. Так, например, в работе [6] учтён инвестиционный лаг.

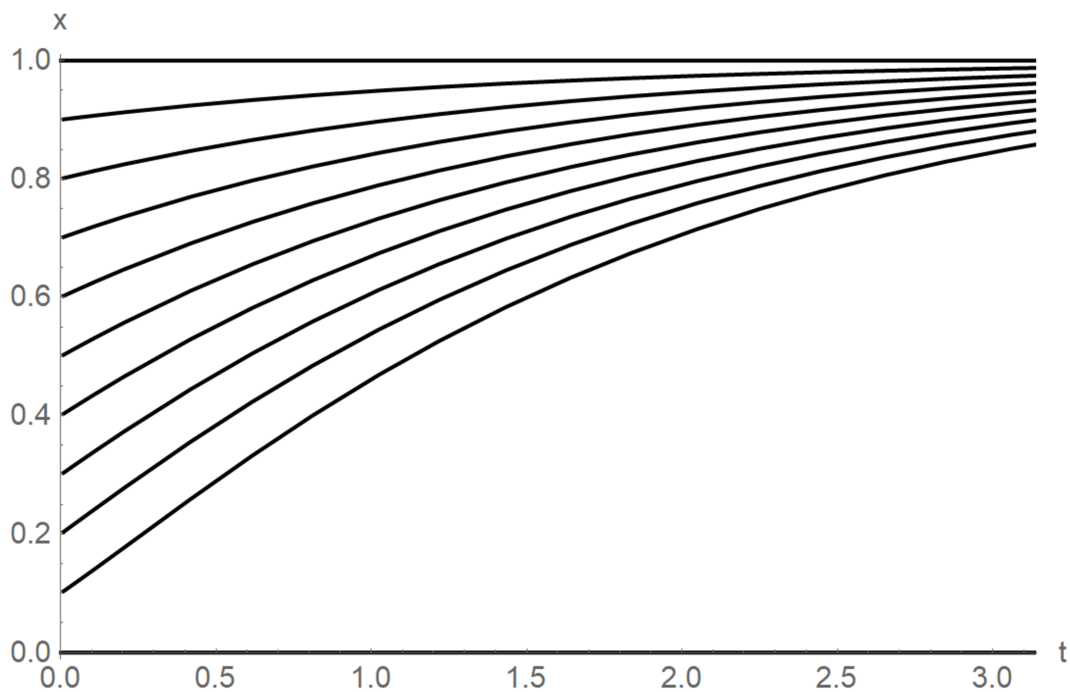

Рис. 3. Интегральные кривые уравнения (1.28) при $k = 1/3$

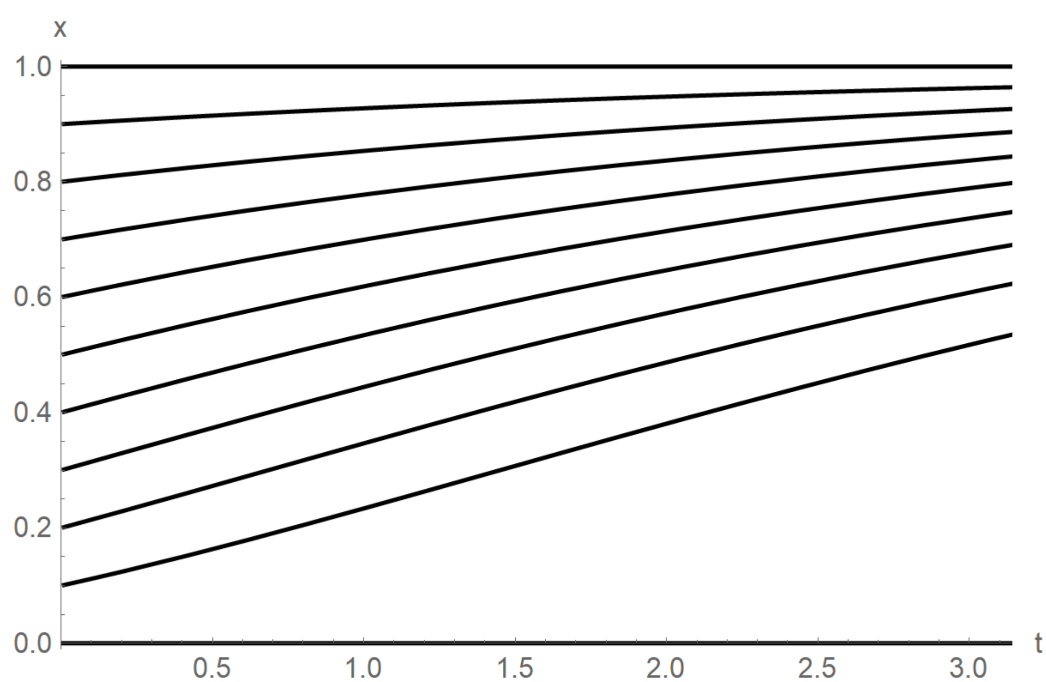

Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (1.28) при $k = 2/3$

Глава II. Уравнения высших порядков и системы уравнений

Уравнения первого порядка на практике используются сравнительно редко. Гораздо чаще рассматриваются системы уравнений или уравнения более высокого порядка. Данная глава посвящена дифференциальным и разностным уравнениям второго порядка.

2.1. Линейное автономное разностное уравнение

Линейным однородным автономным разностным уравнением второго порядка называют уравнение

$$x(n+2) + ax(n+1) + bx(n) = 0, \tag{2.1}$$

где $b \neq 0$.

Будем рассматривать решение уравнения (2.1) при $n = 0, 1, 2, \ldots$

Задача Коши заключается в том, чтобы найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$ и $x(1) = x_1$.

Как и в случае линейного однородного уравнения первого порядка решение уравнения (2.1) ищется в виде $x(n) = \lambda^n$.

Эта подстановка в уравнение (2.1) превращает данное уравнение в следующее:

$$\lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = 0.$$

Разделив обе части уравнения на ненулевое число λ^n, получаем

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется *характеристическим уравнением* уравнения (2.1).

Пусть D — дискриминант уравнения (2.2). Возможны следующие варианты:

- если $D > 0$, то уравнение имеет два разных вещественных корня: λ_1 и λ_2;

- если $D = 0$, то уравнение имеет один вещественный корень λ кратности 2;

- если $D < 0$, то уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня: λ_1 и λ_2.

Рассмотрим случай $D > 0$. Если λ_1, λ_2 — различные корни уравнения (2.2), то решение уравнения (2.1) имеет вид

$$x(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \tag{2.3}$$

где C_1, C_2 — произвольные константы.

Для того чтобы найти решение задачи Коши, нужно найти значения C_1, C_2 из начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = x_1. \end{cases}$$

Пример 2.1. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} &3x(n+2) + 2x(n+1) - x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ &x(0) = 7, \\ &x(1) = 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0. \tag{2.5}$$

Дискриминант уравнения (2.5) положителен, корни вещественные:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = -1.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (2.10) имеет вид

$$x(n) = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2(-1)^n.$$

Найдём произвольные константы:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7, \\ \dfrac{1}{3}C_1 - C_2 = 1. \end{cases}$$

Решим эту систему: $C_1 = 6$, $C_2 = 1$.

Итак, искомое решение задачи Коши:

$$x(n) = \frac{6}{3^n} + (-1)^n.$$

Теперь рассмотрим случай $D = 0$. В этом случае λ— единственный корень уравнения (2.2), поэтому последовательность $x(n) = C_1\lambda^n$ удовлетворяет данному уравнению, однако она содержит только одну произвольную константу C_1, поэтому это не общее решение уравнения. Существуют ли другие последовательности, удовлетворяющие данному уравнению?

На этот вопрос можно ответить утвердительно. Такой последовательностью является следующая: $x(n) = n\lambda^n$. Убедимся в этом.

Запишем уравнение (2.2) в виде

$$x(n+2) + ax(n+1) + bx(n) = 0.$$

Подставим в уравнение (2.2) следующие выражения:

$$x(n+1) = (n+1)\lambda^{n+1}, \quad x(n+2) = (n+2)\lambda^{n+2} :$$

$$(n+2)\lambda^{n+2} + a(n+1)\lambda^{n+1} + b\lambda^n = 0.$$

Разделив на λ^n, получаем следующее выражение:

$$n(\lambda^2 + a\lambda + b) + (2\lambda + a) = 0. \tag{2.6}$$

Степень корня λ равна двум, следовательно, это число является нулём не только функции $f(x) = x^2 - ax - b$, но и её производной: $f'(x) = 2x - a$. Иными словами, выражения в обеих скобках уравнения (2.6) равны нулю.

Таким образом, решение уравнение (2.1) имеет вид

$$x(n) = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n,$$

где C_1, C_2 — произвольные константы.

Для того, чтобы найти решение задачи Коши, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 = x_0, \\ C_1\lambda + C_2\lambda = x_1. \end{cases}$$

Пример 2.2. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} &x(n+2) - x(n+1) + \frac{1}{4}x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ &x(0) = 3, \\ &x(1) = 1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень $\lambda = 1/2$ кратности 2, следовательно, решение уравнение (2.7) имеет вид

$$x(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot n.$$

Далее,

$$\begin{cases} C_1 = 3, \\ \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1, \end{cases}$$

следовательно, $C_1 = 3$ и $C_2 = -1$.

Итак, решение задачи Коши (2.7) имеет вид

$$x(n) = \frac{3 - n}{2^n}.$$

Наконец, рассмотрим случай $D < 0$. В этом случае корни уравнения (2.2) — два комплексно-сопряжённых числа[11]: λ_1, λ_2.

В представлении решения в виде (2.3) константы C_1, C_2 будут комплексными даже в случае, если все параметры задачи вещественные, поэтому, как правило, используют другое представление. Найдём иное представление.

Воспользуемся показательной формой записи комплексных чисел:

$$\lambda_1 = \rho e^{i\varphi}, \quad \lambda_2 = \rho e^{-i\varphi},$$

где

- $\rho = \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_1)^2 + (\operatorname{Im}\lambda_1)^2}$ — модуль числа λ_1,
- φ — аргумент числа λ_1.

[11]Напомним, что два комплексных числа A и B называют сопряжёнными, если $\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$ и $\operatorname{Im} A = -\operatorname{Im} B$.

Для того чтобы найти аргумент комплексного числа λ_1 нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho\cos\varphi = \operatorname{Re}\lambda_1, \\ \rho\sin\varphi = \operatorname{Im}\lambda_1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Система (2.8) имеет бесконечно много решений: если φ_1 удовлетворяет системе (2.8), то и число $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi n$ удовлетворяет этой же системе. Вообще говоря, целое число n можно выбрать произвольно, однако рекомендуем выбирать его так, чтобы число φ принадлежало множеству $(-\pi, \pi]$ — в этом случае число φ называется *главным значением комплексного числа*.

Модуль сопряжённого числа λ_2 равен ρ, аргумент равен $-\varphi$, поэтому на практике удобно пользоваться формулой

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\lambda_1}{\operatorname{Re}\lambda_1} + \pi k,$$

где целое число k должно быть выбрано так, чтобы знак $\cos\varphi$ совпадал со знаком числа $\operatorname{Re}\lambda_1$.

Если $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, то $\varphi = \pi/2$.

Итак, формула (2.3) примет вид

$$x(n) = C_1 \cdot \rho^n \cdot e^{i\varphi n} + C_2 \cdot \rho^n \cdot e^{-i\varphi n}.$$

Применим формулу Эйлера[12] для полученного выражения:

$$x(n) = C_1 \cdot \rho^n\big(\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)\big) + C_2 \cdot \rho^n\big(\cos(\varphi n) - i\sin(\varphi n)\big) =$$
$$= (C_1 + C_2)\rho^n\cos(\varphi n) + i(C_1 - C_2)\rho^n\sin(\varphi n).$$

Обозначив

$$K_1 = C_1 + C_2, \quad K_2 = i(C_1 - C_2),$$

окончательно получаем

$$x(n) = \rho^n(K_1 \cdot \cos(\varphi n) + K_2 \cdot \sin(\varphi n)). \tag{2.9}$$

Для того чтобы найти значения произвольных констант K_1 и K_2, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} K_1 = x_0, \\ K_1 \cdot \cos\varphi + K_2 \cdot \sin\varphi = x_1/\rho. \end{cases}$$

[12] Для любого вещественного числа φ справедливо равенство $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Пример 2.3. Найти решение задачи Коши

$$
\begin{aligned}
&x(n+2) - x(n+1) + \frac{1}{3}x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,\\
&x(0) = 1,\\
&x(1) = 1.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

У характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{3} = 0 \tag{2.11}$$

дискриминант $D = -1/3$ отрицателен, поэтому корни комплексные:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Найдём модули и аргументы корней:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \div \frac{1}{2}\right) + \pi k = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

Если k — чётно, то $\cos\varphi > 0$, а если k — нечётно, то $\cos\varphi < 0$. Имеем $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$, поэтому $\cos\varphi > 0$, следовательно, k можно положить любым чётным числом. Пусть $k = 0$, тогда $\varphi = \frac{\pi}{6}$ будет главным значением аргументом числа λ_1.

Показательная форма корней имеет вид

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Запишем общее решение уравнения (2.11):

$$x(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \left(K_1 \cos\frac{\pi n}{6} + K_2 \sin\frac{\pi n}{6}\right).$$

Найдём константы:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^0 (K_1 \cos 0 + K_2 \sin 0) = 1, \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^1 \left(K_1 \cos \dfrac{\pi}{6} + K_2 \sin \dfrac{\pi}{6}\right) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 = 1, \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\dfrac{\sqrt{3}K_1}{2} + \dfrac{K_2}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

$$K_1 = 1, \quad K_2 = \sqrt{3}.$$

Запишем решение задачи Коши:

$$x(n) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^n \left(\cos \frac{\pi n}{6} + \sqrt{3} \cdot \sin \frac{\pi n}{6}\right).$$

2.2. Асимптотические свойства линейного разностного уравнения

При исследовании моделей, описывающих тот или иной процесс, важно не только найти решение соответствующего уравнения или системы уравнений, но и изучить поведение решения на качественном уровне. Эта задача особенно актуальна в том случае, если нахождение точного решения требует больших усилий или в принципе невозможно.

Свойства решений дифференциальных или разностных уравнений, определённых на неограниченной области, называются *асимптотическими свойствами* решения.

Для частного решения линейного однородного уравнения можно выделить следующие асимптотические свойства:

- ограниченность,
- существование предела (конечного или бесконечного),
- осцилляция.

Определение 2.1. Последовательность $\{x(n)\}$ называется *ограниченной*, если существует число M такое, что для любого $n \in \mathbb{N}_0$ имеет место неравенство: $|x(n)| < M$.

Например, последовательности

$$\{\sin n\}\,, \quad \{(-1)^n\}\,, \quad \left\{\frac{1000n^2}{n^2+n+1}\right\}$$

являются ограниченным, а последовательности

$$\{\ln\ln\ln n\}\,, \quad \{(1.001)^n\}\,, \quad \left\{n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right\}$$

не являются ограниченными.

Геометрическая прогрессия $\{q^n\}$ является ограниченной в том и только в том случае, если $|q| \leqslant 1$.

Асимптотика решения разностного уравнения (2.1) определяется расположением корней характеристической функции (2.2). В частности, для того, чтобы любое решение уравнения (2.1) было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы модули корней уравнения (2.2) были не больше единицы.

Все решения уравнений в примерах 2.1, 2.2, 2.3 ограничены.

Определение 2.2. Говорят, что последовательность $\{x(n)\}$ имеет пределом число a (сходится к a), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n > N$ имеет место неравенство: $\big|x(n) - a\big| < \varepsilon$.

Например, последовательности

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad \{(0.99)^n\}\,, \quad \left\{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right\}$$

сходятся, а последовательности

$$\{(-1)^n\}\,, \quad \{\sin n\}\,, \quad \left\{n^{(-1)^n}\right\}$$

не являются сходящимися.

Геометрическая прогрессия $\{q^n\}$ сходится к нулю в том и только в том случае, если $|q| < 1$.

Для того, чтобы любое решение уравнения (2.1) стремилось к нулю, необходимо и достаточно, чтобы модули корней уравнения (2.2) были меньше единицы.

Решение уравнения (2.1) может сходиться и к другому, ненулевому числу. Это возможно в том случае, если один из корней уравнения (2.2) равен единице, а модуль второго — меньше единицы.

В примере 2.1 решение уравнения расходится, а в примерах 2.2, 2.3 — сходится к нулю.

Определение 2.3. Последовательность $\{x(n)\}$ *осциллирует*, если для любого m найдётся $n > m$ такое, что $x(n)x(n+1) \leqslant 0$.

Например, последовательности

$$\{(-2)^n, \quad \sin(3n), \quad 1-(-1)^n\}$$

являются осциллирующими, а последовательности

$$\left\{2^n, \quad \frac{1}{n}, \quad (n-1)(n-2)...(n-100)\right\}$$

не являются осциллируюшими.

Пусть q — вещественное число. Тогда геометрическая прогрессия $\{q^n\}$ является осциллирующей последовательностью в том и только в том случае, если $q < 0$.

Если q — комплексное число с ненулевой мнимой частью, то осциллирующей является как последовательность $\{\operatorname{Re} q^n\}$, так и $\{\operatorname{Im} q^n\}$.

Ненулевое решение уравнения (2.1) осциллирует в следующих случаях:

- если корни уравнения (2.2) имеют ненулевую вещественную часть,
- если оба корня уравнения (2.2) отрицательны (и вещественны),
- если один корень отрицателен, а второй — неотрицателен, но модуль отрицательного корня больше, чем неотрицательного, и коэффициент при этом корне отличен от нуля.

Последний случай требует пояснения. Пусть $\lambda_1 < 0 \leqslant \lambda_2$, тогда последовательность $\{C_1\lambda_1^n\}$ осциллирует, а последовательность $\{C_2\lambda_2^n\}$ не осциллирует. При этом последовательность

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

может как осциллировать, так и нет.

Если $|\lambda_1| > \lambda_2 \geqslant 0$ и $C_1 \neq 0$, то

$$x_n = \lambda_1^n \left(C_1 + C_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right).$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n = 0,$$

следовательно при достаточно больших значениях n знаки x_n совпадают со знаками λ_1^n, т. е. чередуются.

В примерах 2.1, 2.3 решение уравнения осциллирует, а в примере 2.2 — не осиллирует.

2.3. Модель Самуэльсона-Хикса

Модель Самуэльсона-Хикса — основная динамическая кейнсианская модель экономических циклов. Рассмотрим дискретный вариант этой модели. Пусть выполнены следующие предположения:

- уровень национального дохода влияет на потребления с запаздыванием:

  $$C(n) = bY(n-1) + \underline{C},$$

  где $b \in (0,1)$, $\underline{C}$ — нижний уровень непроизводственного потребления,

- предприниматели осуществляют инвестиции, ориентируясь на приращение национального дохода в предыдущем отчётном периоде:

  $$I(n) = a\big(Y(n-1) - Y(n-2)\big) + \underline{I},$$

  где $a > 0$ — коэффициент пропорциональности, именуемый *акселератором*, $\underline{I}$ — инвестиции, не зависящие от национального дохода.

Тогда из равенства национального дохода сумме потребления и инвестиций вытекает уравнение

$$Y(n) - (a+b)Y(n-1) + aY(n-2) = \underline{C} + \underline{I}. \tag{2.12}$$

Найдём стационарное положение, подставив $Y(n) \equiv Y^*$ в (2.12):

$$Y^* = (k+a)Y^* - aY^* + \underline{C} + \underline{I},$$

следовательно,

$$Y^* = (\underline{C} + \underline{I})/(1 - b).$$

Проведём замену переменных $x(n) = Y(n) - Y^*$ и перепишем уравнение (2.12) в виде

$$x(n) - (a + b)x(n - 1) + ax(n - 2) = 0. \qquad (2.13)$$

Исследуем, как влияет изменение параметров a и b на асимптотические свойства решения уравнения (2.13).

Во-первых, изучим, при каких значениях параметров любое решение стремится к нулю независимо от начальных данных. Как мы знаем, решение уравнения (2.13) стремится к нулю в том и только в том случае, если оба корня характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (a + b)\lambda + a = 0 \qquad (2.14)$$

лежат внутри единичного круга.

При непрерывном изменении коэффициентов уравнения корни уравнения меняются непрерывно (т. е. малому изменению значений параметров соответствует малое изменение корней).

Нам достаточно рассмотреть область D, содержащую такие точки (a, b), что $a > 0$ и $b \in (0, 1)$. Каждая точка этой области соответствует уравнению (2.14) с заданными значениями параметров.

Допустим, мы выбрали две точки M_1 и M_2, принадлежащие области D, и соединили их простой (т. е. не имеющей петлей) непрерывной кривой C. Пусть точка M движется от точки M_1 до точки M_2 вдоль кривой C.

Предположим, что в точке M_1 оба корня уравнения (2.14) лежат в единичном круге, а в точке M_2 — нет. Это означает, что существует точка M_3, такая, что хотя бы один корень уравнения (2.14) лежит на единичной окружности. Иными словами, корни не могут «перепрыгнуть границу»: если в начале пути корень был внутри круга, а в конце оказался снаружи, то в какой-то момент он должен был пересечь границу.

Таким образом, для того чтобы понять, при каких значениях параметров a и b все корни лежат внутри единичного круга, нужно решить более простую задачу: найти условия на параметры, при которых хотя бы один корень лежит на единичном круге.

Подставим $z = e^{i\varphi}$ в уравнение (2.14):

$$e^{2i\varphi} - (a+b)e^{i\varphi} + a = 0.$$

Разделим вещественную и мнимую части полученного уравнения:

$$\begin{cases} \cos 2\varphi - (a+b)\cos\varphi + a = 0, \\ \sin 2\varphi - (a+b)\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Перепишем данную систему, используя формулы двойного угла:

$$\begin{cases} \big(2\cos\varphi - (a+b)\big)\cos\varphi = 1 - a, \\ \big(2\cos\varphi - (a+b)\big)\sin\varphi = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Второе уравнение системы (2.15) выполняется в двух случаях: если

$$\sin\varphi = 0 \tag{2.16}$$

или

$$2\cos\varphi - (a+b) = 0 \tag{2.17}$$

В случае выполнения равенства (2.16) имеем $\varphi = \pi n$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\cos\varphi = (-1)^n$, поэтому первое уравнение (2.15) принимает вид

$$b + a = (-1)^n(a+1). \tag{2.18}$$

Если n — нечётное число, то выражение (2.18) принимает вид

$$b + a = -(a+1)$$

и, следовательно, не выполняется ни при каких неотрицательных значениях a и b.

Если n — чётное число, то выражение (2.18) принимает вид $b = 1$ и, следовательно, тоже не выполняется ни при каком $b < 1$.

Рассмотрим случай выполнения равенства (2.17). Подставив это выражение в первое уравнение системы (2.15), получаем $a = 1$, следовательно, величина $b = 2\cos\varphi - 1$ принадлежит отрезку $[-1, 1]$.

Таким образом, уравнение (2.14) имеет корень на единичном круге в том и только в том случае, если $a = 1$. Иными словами, прямая $a = 1$ разделяет область D на две области: левую и правую.

Рассмотрим левую область. Эта область содержит точку $(1/4, 3/4)$. В этой точке уравнение (2.14) принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda + 1/4 = 0.$$

Это уравнение имеет корень $\lambda = 1/2$ кратности 2, следовательно, любой точке этой области соответствует характеристическое уравнение, корни которого лежат **внутри** единичного круга.

Правая область содержит точку $(9/4, 1/4)$. Этой точке соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 3\lambda + 9/4 = 0.$$

Это уравнение имеет один корень $\lambda = 3/2$ кратности 2, следовательно, любой точке области D_2 соответствует характеристическое уравнение, корни которого лежат **вне** единичного круга.

Итак, слева от прямой $a = 1$ любое ненулевое решение уравнения (2.13) стремится к нулю, а справа от этой прямой любое решение не ограничено (и, следовательно, не имеет предела).

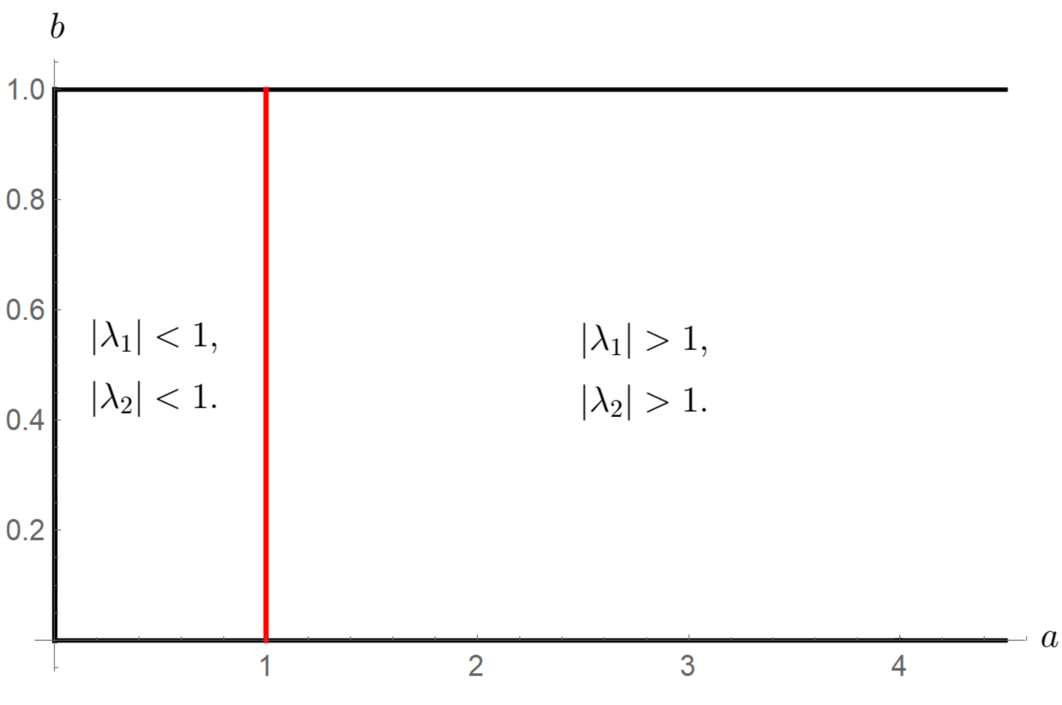

Рис. 5. Прямая $a = 1$

Как ведёт себя решение уравнения на самой прямой? Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - (1 + b)\lambda + 1 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения меньше нуля, поэтому уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня: λ_1 и λ_2. Согласно теореме Виета $\lambda_1\lambda_2 = 1$, следовательно, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Итак, на прямой $a = 1$ уравнения (2.14) имеет пару комплексных корней, модуль которых равен единице, следовательно, любое решение уравнения (2.13) ограниченно, однако любое ненулевое решение не имеет предела.

Таким образом, мы не получили не только условия того, когда любое решение уравнения (2.13) имеет предел, но и того, когда любое решение ограниченно.

Наконец, исследуем осцилляцию решений уравнения (2.13).

Любое решение осциллирует в том и только в том случае, если характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряжённых корней.

Пусть в точке M_1 уравнение имело пару комплексно-сопряжённых корней, а в точке M_2 — пару различных вещественных корней. Тогда на кривой, соединяющей точки M_1 и M_2, лежит точка M_3, в которой характеристическое уравнение имеет один вещественный корень кратности 2. Иными словами, при непрерывном изменении параметров задачи пара комплексно-сопряжённых корней «исчезает» только в одном случае: если эти корни «слипаются» на вещественной оси.

Запишем условие существования вещественного корня кратности 2 у уравнения (2.2):

$$\begin{cases} \lambda^2 - (a+b)\lambda + a = 0, \\ (\lambda^2 - (a+b)\lambda + a)' = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda^2 - (a+b)\lambda + a = 0, \\ 2\lambda - (a+b) = 0. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $\lambda = (a+b)/2$ и подставим в первое:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (a+b)\frac{a+b}{2} + a = 0,$$

следовательно,

$$b = -a \pm 2\sqrt{a}.$$

Коль скоро нас интересуют только неотрицательные значения b, получаем

$$b = 2\sqrt{a} - a, \tag{2.19}$$

причём параметр a может принимать значения из отрезка $[0, 2]$.

Итак, парабола (2.19) разделяет D на две области (см. рис. 6). Область, расположенная ниже параболы, содержит точку $(1, 1/2)$, которой соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + 1 = 0,$$

дискриминант которого отрицателен. Следовательно, в этой области все решения уравнения (2.13) осциллируют.

Область, расположенная выше параболы (2.19), содержит точку $(4, 1/2)$. Характеристическое уравнение в этой точке имеет положительный дискриминант, следовательно, в этой области все решения уравнения (2.13) не осциллируют.

На самой параболе (2.19) решения уравнения (2.13) тоже не осциллируют, единственный корень — вещественный положительный.

Итак, всю область D можно разделить на 4 части D_1, D_2, D_3, D_4, как это показано на рис. 7.

- Область D_1 содержит такие точки (a, b), что $a \in (0, 1)$ и $2\sqrt{a} - a < b < 1$.
- Область D_2 содержит такие точки (a, b), что $a \in (0, 1)$ и $0 < b < 2\sqrt{a} - a$.
- Область D_3 содержит такие точки (a, b), что $a \in (1, 4)$ и $0 < b < 2\sqrt{a} - a$.
- Область D_4 содержит такие точки (a, b), что $a > 1$ и $\max\{2\sqrt{a} - a, 0\} < b < 1$.

Асимптотические свойства решений уравнения (2.13) в каждой области и на границе между ними таковы:

- в области D_1 и на границе областей D_1 и D_2 любое ненулевое решение стремится к нулю и не осциллирует,
- в области D_2 любое решение стремится к нулю и осциллирует,
- на границе областей D_2 и D_3 любое ненулевое решение осциллирует, ограничено, но не стремится к нулю,

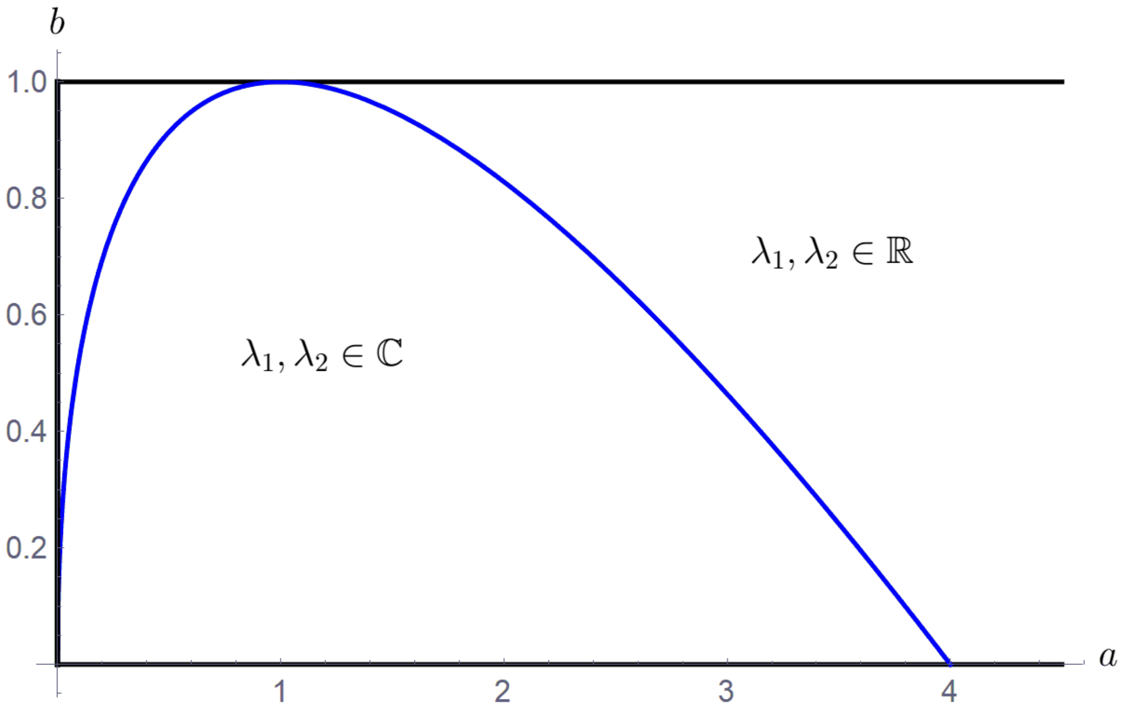

Рис. 6. Прямая $b = 2\sqrt{a} - a$

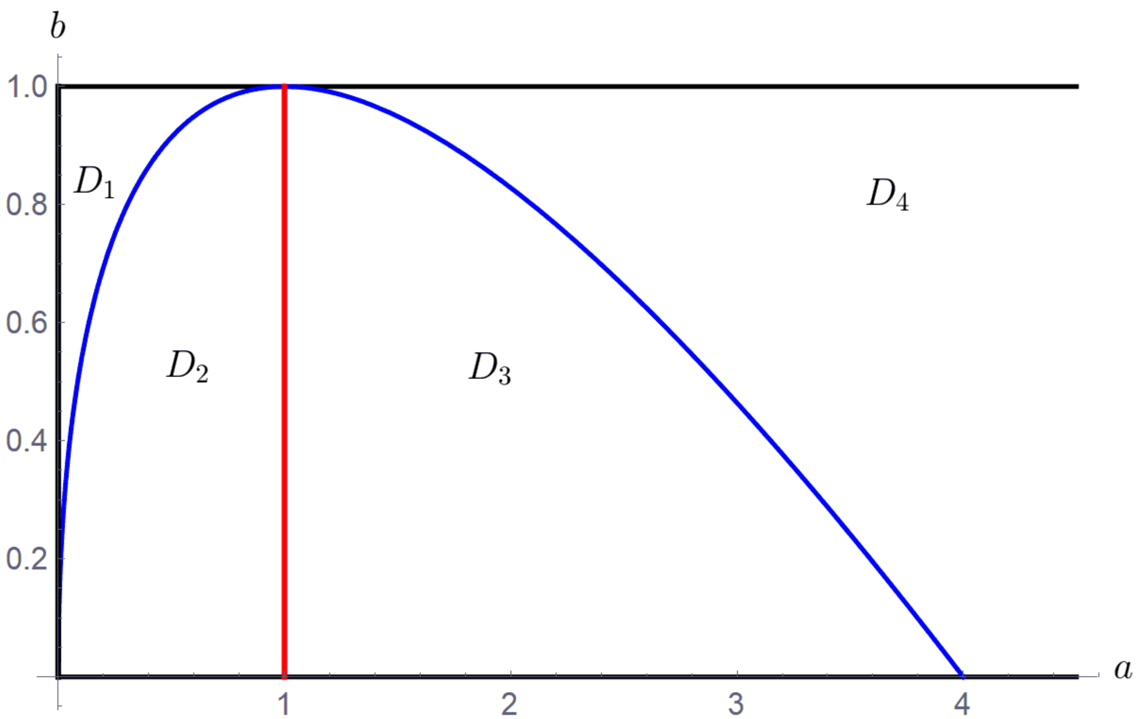

Рис. 7. Области D_1, D_2, D_3, D_4 в пространстве параметров a, b

- в области D_3 любое ненулевое решение не ограничено и не осциллирует,
- в области D_4 и на границе областей D_3 и D_4 любое ненулевое решение не ограничено к нулю и осциллирует.

Используемый метод исследования уравнения называется *методом D-разбиения*. Более подробное изложение этого метода можно найти в [7].

В работе [8] рассмотрена непрерывная модель Самуэльсона-Хикса: построено решение уравнения и исследованы асимптотические свойства аналогично изложенному выше.

2.4. Использование системы Лотки-Вольтерры в экономике

В 1925-м г. Альфредо Лотка [9] рассмотрел следующую систему дифференциальных уравнений для описания взаимодействия двух видов животных:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = N_1(t)\big(\gamma_1 + \beta_1 N_2(t)\big), \\ \dot{N}_2(t) = N_2(t)\big(\gamma_2 + \beta_2 N_1(t)\big), \end{cases} \tag{2.20}$$

где N_1 и N_2 — численность популяции моделируемых видов.

Коэффициенты γ_1 и γ_2 описывают скорость роста (или убывания) изолированной популяции, а коэффициенты β_1 и β_2 задают взаимодействие между видами. Тип взаимодействия задаётся знаками этих коэффициентов (см. таблицу).

Типы межвидового взаимодействия

Тип взаимодействия	$\operatorname{sgn}\beta_1$	$\operatorname{sgn}\beta_2$
Мутуализм	$+1$	$+1$
Комменсализм	$+1$	0
Хищник-жертва	$+1$	-1
Нейтрализм	0	0
Аменсализм	0	-1
Конкуренция	-1	-1

Несколько позже Вито Вольтерра [10] предложил более общую модель:
$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = N_1(t)\big(\gamma_1 + \beta_1 N_2(t) - \alpha_1 N_1(t)\big), \\ \dot{N}_2(t) = N_2(t)\big(\gamma_2 + \beta_2 N_1(t) - \alpha_2 N_2(t)\big). \end{cases} \tag{2.21}$$

Модель (2.21) позволяет учитывать ограниченность роста популяций вследствие ограниченности ресурсов. Построение этой модели позволило объяснить колебания численности рыб в Средиземном море не внешними факторами, а внутренней динамикой взаимодействия хищных рыб и их жертв. Тем самым В. Вольтерра фактически положил начало науке популяционной динамики.

На сегодняшний модель (2.21) называется *моделью Лотки-Вольтерры* и различные её обобщения по прежнему широко используются для моделирования не только биологических, но и экономических процессов.

В экономике модель (2.21) используется для моделирования следующих процессов:

- конкуренция предприятий на общем рынке,
- международная конкуренция,
- гонка вооружений между государствами-противниками,
- динамика изменения цены в окрестности равновесного значения.

Исследуем положения равновесия системы (2.21): для этого нужно решить систему уравнений
$$\begin{cases} N_1(\gamma_1 + \beta_1 N_2 - \alpha_1 N_1) = 0, \\ N_2(\gamma_2 + \beta_2 N_1 - \alpha_2 N_2) = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Система имеет положение равновесия $N_1 = N_2 = 0$. Это положение равновесия называется *тривиальным* — с биологической точки зрения оно соответствует ситуации, когда оба вида вымерли.

Если числа $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$ отличны от нуля, то существует ещё два положения равновесия:
$$N_1 = 0, \quad N_2 = \gamma_2/\alpha_2,$$
$$N_2 = 0, \quad N_1 = \gamma_1/\alpha_1.$$

Оба эти положения равновесия соответствует ситуации, когда один из видов вымер, а другой — нет.

И с биологической, и с экономической точек зрения наиболее интересна ситуация, когда обе моделируемые величины не обращаются в ноль. Это возможно в том случае, если система уравнений

$$\begin{cases} \gamma_1 + \beta_1 N_2 - \alpha_1 N_1 = 0, \\ \gamma_2 + \beta_2 N_1 - \alpha_2 N_2 = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

имеет положительное решение.

Если $\beta_1\beta_2 \neq a_1 a_2$, то система (2.23) имеет единственное решение:

$$K_1 = \frac{\beta_1\gamma_2 + \gamma_1 a_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2},$$

$$K_2 = \frac{\gamma_1\beta_2 + a_1\gamma_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}.$$

Предположим, что $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$, тогда систему (2.21) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = N_1(t)\Big(\beta_1\big(N_2(t) - K_2\big) - \alpha_1\big(N_1(t) - K_1\big)\Big), \\ \dot{N}_2(t) = N_2(t)\Big(\beta_2\big(N_1(t) - K_1\big) - \alpha_2\big(N_2(t) - K_2\big)\Big). \end{cases}$$

Пусть далее $a_1, a_2 > 0$. Введём следующие обозначения:

$$a_1 = \alpha_1 K_1,$$

$$a_2 = \alpha_2 K_2,$$

$$b_1 = \frac{\beta_2 K_2}{\alpha_1 K_1},$$

$$b_1 = \frac{\beta_1 K_1}{\alpha_2 K_2}$$

и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = a_1 N_1(t)\left(1 - \dfrac{N_1(t)}{K_1} + b_1\left(\dfrac{N_2(t)}{K_2} - 1\right)\right), \\ \dot{N}_2(t) = a_2 N_2(t)\left(1 - \dfrac{N_2(t)}{K_2} + b_2\left(\dfrac{N_1(t)}{K_1} - 1\right)\right). \end{cases} \tag{2.24}$$

Легко видеть, что уравнения системы (2.24) представляют собой логистические уравнения в случае, если на это уравнение не влияет решение другого уравнения. Так, решение первого уравнения — логистическая функция в двух случаях: если $b_1 = 0$ (то есть второй вид не влияет на динамику изменения второго) или если $N_2(t) \equiv K_2$ (т. е. второй вид находится в равновесном состоянии).

Знак коэффициентов b_1, b_2 по-прежнему задаёт тип взаимодействия. В частности, если $b_1 < 0$ и $b_2 < 0$, то система (2.24) используется для описания конкуренции между фирмами. Рассмотрим подробнее этот случай.

2.5. Модель конкуренции двух предприятий на общем рынке

Пусть N_1 и N_2 — величина основных фондов двух предприятий, существующих в одной экономической нише, т. е. для их деятельности требуются общие ресурсы, предприятия выпускают одинаковые товары или услуги для одного множества потребителей.

Допущениями модели является так же то, что товар незамещаем, а цена на него не изменяется при изменении объёма товара на рынке. В качестве примеров можно привести небольшой город, где существует всего две транспортные компании или две станции технического обслуживания автомобилей.

Предположение об ограниченности основных фондов может быть обусловлено следующими причинами:

- ограниченность рабочей силы, которую предприятия могут привлечь,
- снижение спроса вследствие роста производства,
- используемые в производстве природные ресурсы ограничены.

Будем считать, что взаимное влияние фирм пропорционально величинам основных фондов обоих предприятий. В этом случае динамика основных фондов будет описана системой (2.24). Все коэффициенты имеют определённый экономический смысл и могут быть идентифицированы [11].

Определение 2.4. Положение равновесия $\{K_1, K_2\}$ системы (2.24) называется *локально асимптотически устойчивым*, если существует число δ такое, что из неравенств

$$\big|N_1(0) - K_1\big| < \delta,$$

$$\big|N_2(0) - K_2\big| < \delta$$

вытекает

$$\lim_{t\to\infty} N_1(t) = K_1,$$

$$\lim_{t\to\infty} N_2(t) = K_2.$$

Для того, чтобы исследовать поведение решения системы (2.24) вблизи положения равновесия $\{K_1, K_2\}$, проведём замену переменных:

$$x_1 = \frac{N_1}{K_1} - 1,$$

$$x_2 = \frac{N_2}{K_2} - 1.$$

Рассматриваемая система примет следующий вид

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big(K_1(x_1+1)\big) = a_1\big(K_1(x_1+1)\big)(-x_1+b_1x_2), \\ \dfrac{d}{dt}\big(K_2(x_2+1)\big) = a_2\big(K_2(x_1+1)\big)(-x_2+b_2x_1). \end{cases}$$

Разделив обе части уравнений на K_1 и K_2 соответственно, получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(1+x_1)(-x_1+b_1x_2), \\ \dot{x}_2 = a_2(1+x_2)(-x_2+b_2x_1). \end{cases}$$

Далее,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1x_1 + a_1b_1x_2 + a_1(-x_1x_2 + b_1x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -a_2x_2 + a_2b_2x_1 + a_2(-x_2^2 + b_2x_1x_2). \end{cases} \tag{2.25}$$

По сути мы провели линеаризацию уравнений (см. параграф 1.5). Если значения x_1 и x_2 достаточно близки к нулю (т. е. N_1 достаточно мало отличается от K_1, а N_2 — от K_2), то слагаемые x_1^2, x_1x_2, x_2^2 гораздо меньше по модулю слагаемых x_1 и x_2. Поэтому вблизи положения равновесия $\{0, 0\}$ решение системы (2.25) может быть приближено описано решением более простой (линейной) системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + a_1 b_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_2 + a_2 b_2 x_1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Дополним систему начальными условиями: $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$ и введём следующие обозначения:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 b_1 \\ a_2 b_2 & -a_2 \end{bmatrix},$$

$$x^{(0)} = \begin{Bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{Bmatrix}.$$

Запишем задачу Коши для системы (2.21):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geqslant 0 \\ x(0) = x^{(0)}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Решение уравнения (2.27) ищется в виде:

$$x(t) = he^{\lambda t},$$

где h — вектор, λ — число (вообще говоря, комплексное).

Подставим решение в систему (2.27):

$$\lambda h e^{\lambda t} = A h e^{\lambda t}.$$

Экспоненциальная функция $e^{\lambda t}$ не обращается в ноль, поэтому данное выражение эквивалентно следующему:

$$(\lambda I - A)h = 0, \tag{2.28}$$

где

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если
$$\det(\lambda I - A) \neq 0,$$
то уравнение (2.28) имеет единственное решение $h = 0$. Конечно, $x(t) \equiv 0$ удовлетворяет системе (2.27), однако нас интересуют ненулевые решения системы. Для того, чтобы система (2.28) имела ненулевое решение, необходимо, чтобы детерминант матрицы $(\lambda I - A)$ был равен нулю.

Уравнение
$$\det(\lambda I - A) = 0$$
имеет два вещественных или комплексных корня (быть может, совпадающие между собой). Обозначим их через λ_1 и λ_2. Эти числа называются *собственными числами матрицы* A. Подстановка каждого собственного числа в систему (2.28) приводит к разрешимой однородной системе линейных алгебраических уравнений — такая система имеет бесконечно много решений. Обозначим через h_1 какое-то ненулевое решение данной системе в случае, когда $\lambda = \lambda_1$, а через h_2 — ненулевое решение в случае $\lambda = \lambda_2$. Эти вектора называются *собственными векторами* матрицы A.

Решение системы (2.27) может принимать одну из трёх форм:
$$x(t) = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{2.29}$$
$$x(t) = C_1 h_1 e^{\lambda t} + C_2 h_2 t e^{\lambda t}, \tag{2.30}$$
$$x(t) = C_1 h_1 e^{\operatorname{Re}\lambda t} \cos(\operatorname{Im}\lambda t) + C_2 h_2 e^{Re\lambda t} \sin(\operatorname{Im}\lambda t). \tag{2.31}$$

Выражение (2.29) имеет место в случае, когда λ_1, λ_2 — два различных вещественных корня, либо в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, однако собственные вектора h_1 и h_2 можно выбрать *линейно независимыми*[13].

Выражение (2.30) имеет место либо в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2$ и любые два вектора h_1 и h_2 *линейно зависимы*[14].

Выражение (2.31) имеет место в том случае, если λ_1, λ_2 — пара комплексно-сопряжённых корней.

Подстановка любого из этих выражений в равенства $x(0) = x^{(0)}$ позволяет однозначно найти константы C_1 и C_2.

[13] Это означает, что линейная комбинация $k_1 h_1 + k_2 h_2$ может обратиться в нулевой вектор только в случае $k_1 = k_2 = 0$.

[14] Это означает, что для любых собственных векторов найдутся два числа k_1, k_2 такие, что $k_1 h_1 + k_2 h_2 = 0$, причём по крайней мере одно из этих двух чисел отлично от нуля.

Поставим перед собой следующий вопрос: при каких значениях параметров системы (2.27) *любое* решение системы стремится к нулевому вектору независимо от начальных условий: система, обладающая таким свойством, называется *асимптотически устойчивой*.

Мы видим, что

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$$

в том и только в том случае, если $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$.

Из асимптотической устойчивости линейной системы (2.27) вытекает локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия $\{K_1, K_2\}$ нелинейной системы (2.24).

Выясним, какие значения должны принимать параметры системы (2.27) для того, чтобы эта система была асимптотически устойчивой.

Запишем характеристическое уравнение для этой системы:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & -a_1 b_1 \\ -a_2 b_2 & \lambda + a_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + (a_1 + a_2)\lambda + a_1 a_2 (1 - b_1 b_2).$$

Введём обозначения

$$p = a_1 + a_2,$$

$$q = a_1 a_2 (1 - b_1 b_2)$$

и запишем характеристическое уравнение в виде:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{2.32}$$

Рассмотрим уравнение (2.32) в случае, когда p и q — два независимых вещественных параметра. Тогда при непрерывном изменении параметров корни уравнения меняются непрерывно. Пусть на плоскости Opq мы выбрали две точки M_1 и M_2 такие, что точке M_1 соответствует уравнение, оба корня которого лежат слева от мнимой оси, а точке M_2 соответствует уравнение, хотя бы один корень которого лежит справа от мнимой оси. Тогда на любой кривой, соединяющей точки M_1 и M_2, найдётся хотя бы одна точка, которой соответствует уравнение, корень которого лежат на мнимой оси.

Таким образом, условие $\lambda = i\varphi$ задаёт на плоскости Opq некоторые линии, которые разделяют плоскость на несколько областей, внутри которых количество корней с положительной вещественной частью не меняется. Область, которая соответствует характеристическому уравнению, оба корня которого лежат слева от мнимой оси, называется *областью устойчивости.*

Найдём область устойчивости уравнения (2.32). Для этого подставим $\lambda = i\varphi$ в это уравнение и разделим вещественную и мнимую части полученного выражения:

$$\begin{cases} -\varphi^2 + q = 0, \\ p\varphi = 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Из второго уравнения системы (2.33) вытекает, что, по крайней мере, одно из чисел p и φ равно нулю.

Если $p = 0$, то φ — произвольное вещественное число и из первого уравнения вытекает, что q — произвольное неотрицательное число. То есть это условие задаёт на плоскости Opq луч (на рис. 8 он изображён синим цветом).

Если $\varphi = 0$, то p — произвольное вещественное число и из первого уравнения вытекает $q = 0$. Это условие задаёт прямую на плоскости Opq (на рис. 8 она изображена красным цветом).

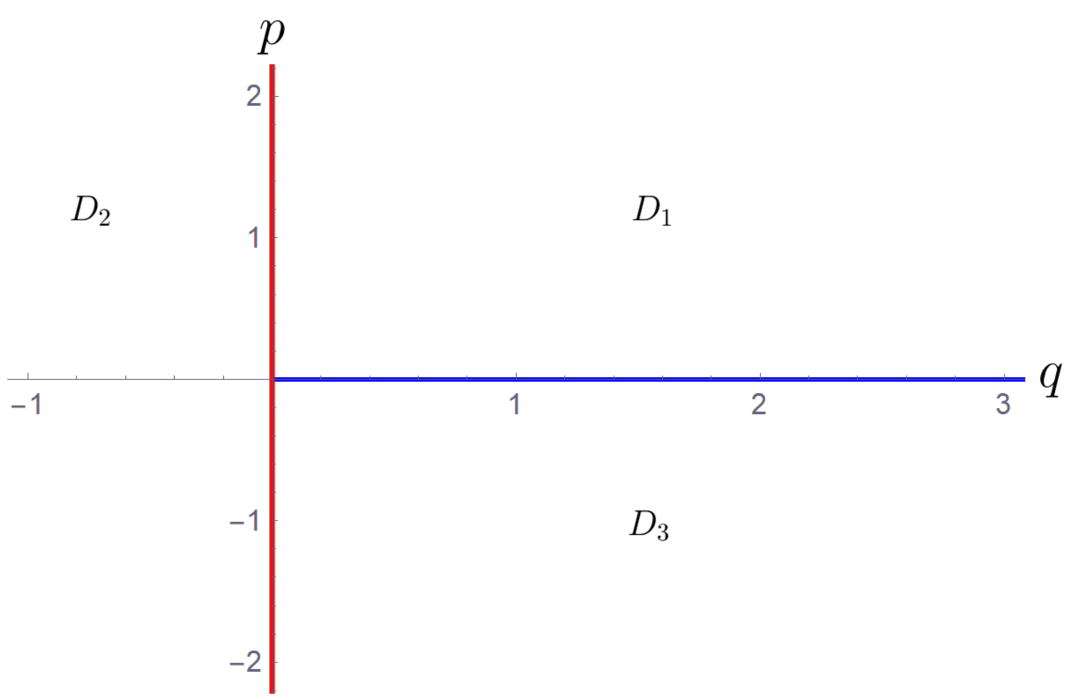

Рис. 8. Исследование устойчивости уравнения (2.33)

Полученные прямая и луч разделяют плоскость Opq на три части:

$$D_1 = \{(p,q) : p > 0, q > 0\},$$

$$D_2 = \{(p,q) : q < 0\}.$$

$$D_3 = \{(p,q) : p < 0, q > 0\}.$$

Остаётся выбрать по одной точке из каждой области и выяснить, какая из них является областью устойчивости.

Области D_1 принадлежит точка $(2,1)$, которой соответствует уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0. \tag{2.34}$$

Области D_2 принадлежит точка $(0,-11)$, которой соответствует уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0. \tag{2.35}$$

Области D_3 принадлежит точка $(-2,1)$, которой соответствует уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0. \tag{2.36}$$

Легко видеть, что уравнение (2.34) не имеет ни одного корня с положительной вещественной частью, уравнение (2.35) — один корень, а уравнение (2.36) — два. Следовательно, область D_1 является областью устойчивости характеристического уравнения (2.32) и только она.

Итак, система (2.27) асимптотически устойчива в том и только в том случае, если

$$a_1 + a_2 > 0$$

и

$$a_1 a_2 (1 - b_1 b_2) > 0.$$

Так как по экономическим соображениям параметры a_1 и a_2 положительны, то необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы можно упростить: $b_1 b_2 < 1$.

Вернёмся к исходной нелинейной системе.

Теорема 1. *Если $a_1, a_2, K_1, K_2 > 0$ и $b_1 b_2 < 1$, то положение равновесия $\{K_1, K_2\}$ системы (2.24) локально асимптотически устойчиво.*

Глава III. Задачи для самостоятельной работы

Материал, изложенный выше, достаточен для решения нижеприведённых задач. Дополнительную информацию о способах решения аналогичных задач можно найти в [12, 13, 14, 15].

3.1. Задача 1

Фирма проводит рекламную компанию для реализации своей продукции. В момент времени t доля потенциальных покупателей, знающих о продукции, равна $x(t)$. Предположим, что скорость распространения информации о продукции среди потенциальных покупателей пропорциональна как числу покупателей, знакомых с продукцией, так и покупателей, незнакомых с продукцией данной фирмы, тогда $x(t)$ описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t)\big(1 - x(t)\big).$$

Рекламная компания длится от момента времени $t_1 = 0$ до момента времени t_2.

В момент времени t_1 о продукции данной компании знает каждый n-й потенциальный покупатель. Как изменится доля потенциальных покупателей, знакомых с продукцией, к концу рекламной компании.

Вариант № 1

$$a(t) = \frac{5}{t^2 - 13t + 36},$$
$$t_2 = 6,$$
$$n = 4.$$

Вариант № 2

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 16t + 60}$$
$$t_2 = 6$$
$$n = 6.$$

Вариант № 3

$$a(t) = \frac{2}{t^2 - 18t + 80}$$
$$t_2 = 4$$
$$n = 7.$$

Вариант № 4

$$a(t) = \frac{1}{t^2 - 15t + 56}$$
$$t_2 = 2$$
$$n = 22.$$

Вариант № 5

$$a(t) = \frac{3}{t^2 - 7t + 10}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 26.$$

Вариант № 6

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 14t + 45}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 7.$$

Вариант № 7

$$a(t) = \frac{6}{t^2 - 12t + 27}$$
$$t_2 = 6$$
$$n = 10.$$

Вариант № 8

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 10t + 21}$$
$$t_2 = 2$$
$$n = 16.$$

Вариант № 9

$$a(t) = \frac{5}{t^2 - 19t + 84}$$
$$t_2 = 2$$
$$n = 8.$$

Вариант № 10

$$a(t) = \frac{6}{t^2 - 8t + 7}$$
$$t_2 = 6$$
$$n = 50.$$

Вариант № 11

$$a(t) = \frac{5}{t^2 - 11t + 24}$$
$$t_2 = 5$$
$$n = 65.$$

Вариант № 12

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 18t + 77}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 15.$$

Вариант № 13

$$a(t) = \frac{3}{t^2 - 19t + 88}$$
$$t_2 = 4$$
$$n = 15.$$

Вариант № 14

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 20t + 96}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 7.$$

Вариант № 15

$$a(t) = \frac{3}{t^2 - 5t + 4}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 17.$$

Вариант № 16

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 14t + 45}$$
$$t_2 = 1$$
$$n = 11.$$

Вариант № 17

$$a(t) = \frac{1}{t^2 - 11t + 30}$$
$$t_2 = 2$$
$$n = 11.$$

Вариант № 18

$$a(t) = \frac{1}{t^2 - 13t + 42}$$
$$t_2 = 2$$
$$n = 16.$$

Вариант № 19

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 8t + 12}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 6.$$

Вариант № 20

$$a(t) = \frac{5}{t^2 - 17t + 66}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 34.$$

Вариант № 21

$$a(t) = \frac{5}{t^2 - 19t + 84}$$
$$t_2 = 4$$
$$n = 15.$$

Вариант № 22

$$a(t) = \frac{1}{t^2 - 3t + 2}$$
$$t_2 = 6$$
$$n = 8.$$

Вариант № 23

$$a(t) = \frac{5}{t^2 - 13t + 36}$$
$$t_2 = 2$$
$$n = 28.$$

Вариант № 24

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 10t + 21}$$
$$t_2 = 2$$
$$n = 16.$$

Вариант № 25

$$a(t) = \frac{2}{t^2 - 14t + 48}$$
$$t_2 = 4$$
$$n = 4.$$

Вариант № 26

$$a(t) = \frac{3}{t^2 - 5t + 4}$$
$$t_2 = 4$$
$$n = 6.$$

Вариант № 27

$$a(t) = \frac{1}{t^2 - 13t + 42}$$
$$t_2 = 4$$
$$n = 36.$$

Вариант № 28

$$a(t) = \frac{5}{t^2 - 15t + 50}$$
$$t_2 = 4$$
$$n = 4.$$

Вариант № 29

$$a(t) = \frac{2}{t^2 - 10t + 24}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 8.$$

Вариант № 30

$$a(t) = \frac{4}{t^2 - 14t + 45}$$
$$t_2 = 3$$
$$n = 6.$$

3.2. Задача 2

Клиент оформил вклад в банке в размере x_0 тыс. руб. 1-го января 2020 г. Ежемесячно 10-го числа банк начисляет p процентов по вкладу (проценты вычисляются от текущей суммы вклада), а 20-го числа клиент снимает со своего счёта a тыс. руб.

1. Найти размер вклада в указанный в варианте день.
2. Найти момент времени, когда сумма вклада впервые вырастет в k раз.

Вариант № 1

$$x_0 = 860$$
$$p = 2\%$$
$$a = 10$$
$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го июля 2033 г.

Вариант № 2

$$x_0 = 440$$

$$p = 2\%$$

$$a = 8$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го ноября 2027 г.

Вариант № 3

$$x_0 = 580$$

$$p = 3\%$$

$$a = 10$$

$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го июля 2030 г.

Вариант № 4

$$x_0 = 810$$

$$p = 2\%$$

$$a = 10$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го февраля 2032 г.

Вариант № 5

$$x_0 = 980$$

$$p = 1\%$$

$$a = 9$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го ноября 2033 г.

Вариант № 6

$$x_0 = 850$$

$$p = 3\%$$

$$a = 20$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го октября 2032 г.

Вариант № 7

$$x_0 = 620$$

$$p = 1\%$$

$$a = 5$$

$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го декабря 2033 г.

Вариант № 8

$$x_0 = 530$$

$$p = 2\%$$

$$a = 10$$

$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го октября 2032 г.

Вариант № 9

$$x_0 = 210$$

$$p = 2\%$$

$$a = 4$$

$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го августа 2028 г.

Вариант № 10

$$x_0 = 490$$

$$p = 2\%$$

$$a = 8$$

$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го сентября 2030 г.

Вариант № 11

$$x_0 = 970$$

$$p = 2\%$$

$$a = 10$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го января 2034 г.

Вариант № 12

$$x_0 = 220$$

$$p = 3\%$$

$$a = 6$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го февраля 2033 г.

Вариант № 13

$$x_0 = 360$$

$$p = 1\%$$

$$a = 3$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го июня 2032 г.

Вариант № 14

$$x_0 = 620$$

$$p = 3\%$$

$$a = 10$$

$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го февраля 2034 г.

Вариант № 15

$$x_0 = 450$$

$$p = 2\%$$

$$a = 8$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го марта 2031 г.

Вариант № 16

$$x_0 = 760$$

$$p = 1\%$$

$$a = 7$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го февраля 2033 г.

Вариант № 17

$$x_0 = 680$$

$$p = 1\%$$

$$a = 6$$

$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го февраля 2031 г.

Вариант № 18

$$x_0 = 990$$

$$p = 3\%$$

$$a = 20$$

$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го июня 2031 г.

Вариант № 19

$$x_0 = 570$$

$$p = 3\%$$

$$a = 10$$

$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го января 2030 г.

Вариант № 20

$$x_0 = 430$$

$$p = 1\%$$

$$a = 4$$

$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го февраля 2032 г.

Вариант № 21

$$x_0 = 910$$

$$p = 1\%$$

$$a = 8$$

$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го сентября 2031 г.

Вариант № 22

$$x_0 = 550$$

$$p = 2\%$$

$$a = 9$$

$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го февраля 2034 г.

Вариант № 23

$$x_0 = 330$$

$$p = 2\%$$

$$a = 6$$

$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го сентября 2033 г.

Вариант № 24

$$x_0 = 830$$

$$p = 1\%$$

$$a = 8$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го марта 2030 г.

Вариант № 25

$$x_0 = 280$$

$$p = 2\%$$

$$a = 5$$

$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го января 2028 г.

Вариант № 26

$$x_0 = 770$$
$$p = 3\%$$
$$a = 20$$
$$k = 3.$$

Найти сумму вклада 1-го декабря 2030 г.

Вариант № 27

$$x_0 = 460$$
$$p = 1\%$$
$$a = 4$$
$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го июля 2032 г.

Вариант № 28

$$x_0 = 750$$
$$p = 1\%$$
$$a = 7$$
$$k = 4.$$

Найти сумму вклада 1-го ноября 2034 г.

Вариант № 29

$$x_0 = 780$$
$$p = 3\%$$
$$a = 20$$
$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го мая 2032 г.

Вариант № 30

$$x_0 = 380$$

$$p = 3\%$$

$$a = 10$$

$$k = 2.$$

Найти сумму вклада 1-го сентября 2031 г.

3.3. Задача 3

Найти общее решение дифференциального уравнения.

Вариант № 1

$$\dot{x}(t) = -2x^2(t)\sin t - 4x^2(t)\cos t + \frac{x(t)}{t}.$$

Вариант № 2

$$\dot{x}(t) = -4x^8(t)\sin t + x^8(t)\cos t + \frac{x(t)}{7t}.$$

Вариант № 3

$$\dot{x}(t) = x^3(t)\sin t + x^3(t)\cos t + \frac{x(t)}{2t}.$$

Вариант № 4

$$\dot{x}(t) = 4tx^8(t) + \frac{x(t)\operatorname{ctg} t}{7}.$$

Вариант № 5

$$\dot{x}(t) = \frac{e^{3t}}{x^5(t)} - \frac{x(t)}{6t}.$$

Вариант № 6

$$\dot{x}(t) = -\frac{5e^{4t}}{x^2(t)} - \frac{x(t)}{3t}.$$

Вариант № 7

$$\dot{x}(t) = \frac{9t}{x^3(t)} + \frac{x(t)\operatorname{tg} t}{4}.$$

Вариант № 8

$$\dot{x}(t) = \frac{\sin t}{x^{10}(t)} - \frac{4\cos t}{x^{10}(t)} - \frac{x(t)}{11t}.$$

Вариант № 9

$$\dot{x}(t) = 4e^{4t}x^6(t) + \frac{x(t)}{5t}.$$

Вариант № 10

$$\dot{x}(t) = -3e^{3t}x^{10}(t) + \frac{x(t)}{9t}.$$

Вариант № 11

$$\dot{x}(t) = -2tx^6(t) + \frac{x(t)\operatorname{ctg} t}{5}.$$

Вариант № 12

$$\dot{x}(t) = -3tx^5(t) - \frac{x(t)\operatorname{tg} t}{4}.$$

Вариант № 13

$$\dot{x}(t) = -\frac{5\sin t}{x^7(t)} - \frac{3\cos t}{x^7(t)} - \frac{x(t)}{8t}.$$

Вариант № 14

$$\dot{x}(t) = \frac{\sin t}{x^8(t)} + \frac{3\cos t}{x^8(t)} - \frac{x(t)}{9t}.$$

Вариант № 15

$$\dot{x}(t) = -5tx^6(t) - \frac{x(t)\operatorname{tg} t}{5}.$$

Вариант № 16

$$\dot{x}(t) = -\frac{t}{x^6(t)} - \frac{x(t)\operatorname{ctg} t}{7}.$$

Вариант № 17

$$\dot{x}(t) = \frac{4t}{x^{10}(t)} + \frac{x(t)\operatorname{tg} t}{11}.$$

Вариант № 18

$$\dot{x}(t) = -\frac{\sin t}{x^7(t)} + \frac{3\cos t}{x^7(t)} - \frac{x(t)}{8t}.$$

Вариант № 19

$$\dot{x}(t) = -\frac{5\sin t}{x^2(t)} - \frac{4\cos t}{x^2(t)} - \frac{x(t)}{3t}.$$

Вариант № 20

$$\dot{x}(t) = \frac{2\sin t}{x(t)} - \frac{\cos t}{x(t)} - \frac{x(t)}{2t}.$$

Вариант № 21

$$\dot{x}(t) = -2tx^8(t) + \frac{x(t)\operatorname{ctg} t}{7}.$$

Вариант № 22

$$\dot{x}(t) = -\frac{10t}{x^9(t)} + \frac{x(t)\operatorname{tg} t}{10}.$$

Вариант № 23

$$\dot{x}(t) = -2x^3(t)\sin t + 4x^3(t)\cos t + \frac{x(t)}{2t}.$$

Вариант № 24

$$\dot{x}(t) = \frac{8t}{x^3(t)} + \frac{x(t)\operatorname{tg} t}{4}.$$

Вариант № 25

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{e^{2t}x^4(t)} - \frac{x(t)}{5t}.$$

Вариант № 26

$$\dot{x}(t) = \frac{\sin t}{x^{10}(t)} - \frac{\cos t}{x^{10}(t)} - \frac{x(t)}{11t}.$$

Вариант № 27

$$\dot{x}(t) = 4e^{2t}x^{10}(t) + \frac{x(t)}{9t}.$$

Вариант № 28

$$\dot{x}(t) = 7tx^3(t) - \frac{x(t)\operatorname{tg} t}{2}.$$

Вариант № 29

$$\dot{x}(t) = -\frac{x^3(t)}{e^{3t}} + \frac{x(t)}{2t}.$$

Вариант № 30

$$\dot{x}(t) = \frac{2t}{x(t)} - \frac{x(t)\operatorname{ctg} t}{2}.$$

3.4. Задача 4

Найти общее решение разностного уравнения. Найти решение задачи Коши. Является ли решение

а)ограниченным?

б)сходящимся?

в)осциллирующим?

Если предел существует, то найти его.

Вариант № 1

$$\begin{cases} 12x(n+2) + 17x(n+1) + 6x(n) = 0, \\ x(0) = 2, \\ x(1) = -\dfrac{13}{12}. \end{cases}$$

Вариант № 2

$$\begin{cases} 6x(n+2) - x(n+1) - 5x(n) = 0, \\ x(0) = 2, \\ x(1) = \dfrac{28}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 3

$$\begin{cases} x(n+2) - x(n) = 0, \\ x(0) = -12, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

Вариант № 4

$$\begin{cases} 4x(n+2) - x(n) = 0, \\ x(0) = 12, \\ x(1) = -4. \end{cases}$$

Вариант № 5

$$\begin{cases} 7x(n+2) - 13x(n+1) + 6x(n) = 0, \\ x(0) = -10, \\ x(1) = -\dfrac{68}{7}. \end{cases}$$

Вариант № 6

$$\begin{cases} 49x(n+2) - 35x(n+1) - 6x(n) = 0, \\ x(0) = -2, \\ x(1) = -\dfrac{40}{7}. \end{cases}$$

Вариант № 7

$$\begin{cases} 10x(n+2) - 11x(n+1) + 3x(n) = 0, \\ x(0) = 2, \\ x(1) = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Вариант № 8

$$\begin{cases} 49x(n+2) - 21x(n+1) - 18x(n) = 0, \\ x(0) = 14, \\ x(1) = \dfrac{12}{7}. \end{cases}$$

Вариант № 9

$$\begin{cases} 7x(n+2) - 13x(n+1) - 2x(n) = 0, \\ x(0) = -2, \\ x(1) = \dfrac{17}{7}. \end{cases}$$

Вариант № 10

$$\begin{cases} 18x(n+2) + 9x(n+1) - 2x(n) = 0, \\ x(0) = 7, \\ x(1) = -\dfrac{23}{6}. \end{cases}$$

Вариант № 11

$$\begin{cases} 6x(n+2) + 7x(n+1) - 10x(n) = 0, \\ x(0) = 3, \\ x(1) = \dfrac{49}{6}. \end{cases}$$

Вариант № 12

$$\begin{cases} 4x(n+2) + 4x(n+1) - 3x(n) = 0, \\ x(0) = -1, \\ x(1) = \dfrac{19}{2}. \end{cases}$$

Вариант № 13

$$\begin{cases} 35x(n+2) + 16x(n+1) - 3x(n) = 0, \\ x(0) = 11, \\ x(1) = -\dfrac{23}{35}. \end{cases}$$

Вариант № 14

$$\begin{cases} 8x(n+2) - 30x(n+1) + 25x(n) = 0, \\ x(0) = -1, \\ x(1) = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Вариант № 15

$$\begin{cases} 12x(n+2) + 41x(n+1) + 35x(n) = 0, \\ x(0) = -12, \\ x(1) = \dfrac{61}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 16

$$\begin{cases} 15x(n+2) + 8x(n+1) + x(n) = 0, \\ x(0) = -6, \\ x(1) = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 17

$$\begin{cases} 16x(n+2) - 8x(n+1) - 15x(n) = 0, \\ x(0) = 15, \\ x(1) = \dfrac{35}{4}. \end{cases}$$

Вариант № 18

$$\begin{cases} 21x(n+2) + 61x(n+1) + 28x(n) = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(1) = \dfrac{111}{7}. \end{cases}$$

Вариант № 19

$$\begin{cases} x(n+2) + 2x(n+1) - 24x(n) = 0, \\ x(0) = -14, \\ x(1) = 4. \end{cases}$$

Вариант № 20

$$\begin{cases} 4x(n+2) - 13x(n+1) + 10x(n) = 0, \\ x(0) = -6, \\ x(1) = -15. \end{cases}$$

Вариант № 21

$$\begin{cases} 12x(n+2) - 13x(n+1) - 35x(n) = 0, \\ x(0) = -8, \\ x(1) = -\dfrac{13}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 22

$$\begin{cases} 30x(n+2) - 23x(n+1) - 14x(n) = 0, \\ x(0) = 9, \\ x(1) = -\dfrac{7}{15}. \end{cases}$$

Вариант № 23

$$\begin{cases} 16x(n+2) + 8x(n+1) - 35x(n) = 0, \\ x(0) = -11, \\ x(1) = \dfrac{29}{4}. \end{cases}$$

Вариант № 24

$$\begin{cases} 30x(n+2) + 61x(n+1) + 30x(n) = 0, \\ x(0) = 6, \\ x(1) = -\dfrac{86}{15}. \end{cases}$$

Вариант № 25

$$\begin{cases} 5x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 0, \\ x(0) = 5, \\ x(1) = -\dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Вариант № 26

$$\begin{cases} 15x(n+2) - 7x(n+1) - 2x(n) = 0, \\ x(0) = 7, \\ x(1) = \dfrac{31}{15}. \end{cases}$$

Вариант № 27

$$\begin{cases} 7x(n+2) + 23x(n+1) + 6x(n) = 0, \\ x(0) = 6, \\ x(1) = -\dfrac{107}{7}. \end{cases}$$

Вариант № 28

$$\begin{cases} 5x(n+2) - 2x(n+1) - 3x(n) = 0, \\ x(0) = 3, \\ x(1) = -\dfrac{17}{5}. \end{cases}$$

Вариант № 29

$$\begin{cases} 4x(n+2) - 21x(n+1) + 5x(n) = 0, \\ x(0) = -2, \\ x(1) = -\dfrac{97}{4}. \end{cases}$$

Вариант № 30

$$\begin{cases} 5x(n+2) + 16x(n+1) + 12x(n) = 0, \\ x(0) = 13, \\ x(1) = -22. \end{cases}$$

3.5. Задача 5

Найти общее решение разностного уравнения. Найти решение задачи Коши. Является ли решение

а)ограниченным?

б)сходящимся?

в)осциллирующим?

Если предел существует, то найти его.

Вариант № 1

$$\begin{cases} 2x(n+2) - x(n+1) + 2x(n) = 0, \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Вариант № 2

$$\begin{cases} 9x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = 0, \\ x(0) = -5, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 3

$$\begin{cases} 9x(n+2) - 6x(n+1) + 16x(n) = 0, \\ x(0) = -10, \\ \dot{x}(0) = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 4

$$\begin{cases} x(n+2) - 6x(n+1) + 72x(n) = 0, \\ x(0) = 3, \\ \dot{x}(0) = 48. \end{cases}$$

Вариант № 5

$$\begin{cases} x(n+2) - 6x(n+1) + 48x(n) = 0, \\ x(0) = -9, \\ \dot{x}(0) = -48. \end{cases}$$

Вариант № 6

$$\begin{cases} 25x(n+2) + 10x(n+1) + 8x(n) = 0, \\ x(0) = -9, \\ \dot{x}(0) = 4. \end{cases}$$

Вариант № 7

$$\begin{cases} x(n+2) + 2x(n+1) + 8x(n) = 0, \\ x(0) = -10, \\ \dot{x}(0) = 6. \end{cases}$$

Вариант № 8

$$\begin{cases} 9x(n+2) - 6x(n+1) + 8x(n) = 0, \\ x(0) = 6, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{20}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 9

$$\begin{cases} 2x(n+2) + x(n+1) + 2x(n) = 0, \\ x(0) = 1, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Вариант № 10

$$\begin{cases} x(n+2) + 4x(n+1) + 64x(n) = 0, \\ x(0) = -9, \\ \dot{x}(0) = 4. \end{cases}$$

Вариант № 11

$$\begin{cases} x(n+2) + 3x(n+1) + 36x(n) = 0, \\ x(0) = 8, \\ \dot{x}(0) = -6. \end{cases}$$

Вариант № 12

$$\begin{cases} 25x(n+2) + 15x(n+1) + 12x(n) = 0, \\ x(0) = 10, \\ \dot{x}(0) = -3. \end{cases}$$

Вариант № 13

$$\begin{cases} 12x(n+2) + 3x(n+1) + x(n) = 0, \\ x(0) = 3, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Вариант № 14

$$\begin{cases} x(n+2) + x(n+1) + 2x(n) = 0, \\ x(0) = -10, \\ \dot{x}(0) = 11. \end{cases}$$

Вариант № 15

$$\begin{cases} 9x(n+2) + 15x(n+1) + 100x(n) = 0, \\ x(0) = -8, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 16

$$\begin{cases} x(n+2) - 3x(n+1) + 36x(n) = 0, \\ x(0) = 5, \\ \dot{x}(0) = -6. \end{cases}$$

Вариант № 17

$$\begin{cases} 2x(n+2) + x(n+1) + x(n) = 0, \\ x(0) = 7, \\ \dot{x}(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант № 18

$$\begin{cases} 4x(n+2) + 5x(n+1) + 25x(n) = 0, \\ x(0) = -4, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{15}{4}. \end{cases}$$

Вариант № 19

$$\begin{cases} 9x(n+2) - 15x(n+1) + 50x(n) = 0, \\ x(0) = -1, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{20}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 20

$$\begin{cases} 2x(n+2) - x(n+1) + 2x(n) = 0, \\ x(0) = 8, \\ \dot{x}(0) = 9. \end{cases}$$

Вариант № 21

$$\begin{cases} x(n+2) - 2x(n+1) + 8x(n) = 0, \\ x(0) = -5, \\ \dot{x}(0) = -8. \end{cases}$$

Вариант № 22

$$\begin{cases} 54x(n+2) - 9x(n+1) + 2x(n) = 0, \\ x(0) = -5, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Вариант № 23

$$\begin{cases} 2x(n+2) + 3x(n+1) + 6x(n) = 0, \\ x(0) = 9, \\ \dot{x}(0) = -\dfrac{51}{2}. \end{cases}$$

Вариант № 24

$$\begin{cases} 25x(n+2) + 15x(n+1) + 36x(n) = 0, \\ x(0) = 7, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$$

Вариант № 25

$$\begin{cases} 75x(n+2) - 15x(n+1) + 4x(n) = 0, \\ x(0) = 10, \\ \dot{x}(0) = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Вариант № 26

$$\begin{cases} 25x(n+2)+15x(n+1)+18x(n)=0, \\ x(0)=-1, \\ \dot{x}(0)=0. \end{cases}$$

Вариант № 27

$$\begin{cases} 12x(n+2)+15x(n+1)+25x(n)=0, \\ x(0)=10, \\ \dot{x}(0)=-10. \end{cases}$$

Вариант № 28

$$\begin{cases} x(n+2)+x(n+1)+4x(n)=0, \\ x(0)=7, \\ \dot{x}(0)=-15. \end{cases}$$

Вариант № 29

$$\begin{cases} 9x(n+2)+3x(n+1)+2x(n)=0, \\ x(0)=-2, \\ \dot{x}(0)=4. \end{cases}$$

Вариант № 30

$$\begin{cases} 27x(n+2)+9x(n+1)+4x(n)=0, \\ x(0)=9, \\ \dot{x}(0)=-\dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Глава IV. Ответы

4.1. Задача 1

Вариант № 1

Каждый 3-ий покупатель.

Вариант № 2

Каждый 5-й покупатель.

Вариант № 3

Каждый 6-й покупатель.

Вариант № 4

Каждый 21-й покупатель.

Вариант № 5

Каждый 17-й покупатель.

Вариант № 6

Каждый 6-й покупатель.

Вариант № 7

Каждый 6-й покупатель.

Вариант № 8

Каждый 8-й покупатель.

Вариант № 9

Каждый 7-й покупатель.

Вариант № 10

Каждый 14-й покупатель.

Вариант № 11

Каждый 40-й покупатель.

Вариант № 12

Каждый 12-й покупатель.

Вариант № 13

Каждый 12-й покупатель.

Вариант № 14

Каждый 6-й покупатель.

Вариант № 15

Каждый 8-й покупатель.

Вариант № 16

Каждый 10-й покупатель.

Вариант № 17

Каждый 10-й покупатель.

Вариант № 18

Каждый 15-й покупатель.

Вариант № 19

Каждый 4-й покупатель.

Вариант № 20

Каждый 29-й покупатель.

Вариант № 21

Каждый 10-й покупатель.

Вариант № 22

Каждый 5-й покупатель.

Вариант № 23

Каждый 23-й покупатель.

Вариант № 24

Каждый 8-й покупатель.

Вариант № 25

Каждый 3-й покупатель.

Вариант № 26

Каждый 3-й покупатель.

Вариант № 27

Каждый 34-й покупатель.

Вариант № 28

Каждый 2-й покупатель.

Вариант № 29

Каждый 7-й покупатель.

Вариант № 30

Каждый 4-й покупатель.

4.2. Задача 2

Вариант № 1

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 9403 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июня 2027 г. (спустя 89 мес.).

Вариант № 2

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 657 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го марта 2033 г. (спустя 158 мес.).

Вариант № 3

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 10557 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июня 2023 г. (спустя 41 месяц).

Вариант № 4

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 5975 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го октября 2027 г. (спустя 93 месяца).

Вариант № 5

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 1317 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го марта 2047 г. (спустя 326 мес.).

Вариант № 6

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 17545 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го августа 2026 г. (спустя 79 мес.).

Вариант № 7

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 1132 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июля 2043 г. (спустя 282 месяца).

Вариант № 8

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 1121 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го апреля 2032 г. (спустя 147 мес.).

Вариант № 9

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 277 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го января 2033 г. (спустя 156 мес.).

Вариант № 10

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 1535 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го ноября 2027 г. (спустя 94 месяца).

Вариант № 11

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 13590 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го декабря 2026 г. (спустя 83 месяца).

Вариант № 12

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 2272 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го ноября 2028 г. (спустя 106 мес.).

Вариант № 13

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 564 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июля 2041 г. (спустя 258 мес.).

Вариант № 14

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 42685 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го сентября 2025 г. (спустя 68 мес.).

Вариант № 15

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 1110 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июня 2032 г. (спустя 149 мес.).

Вариант № 16

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 986 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июня 2047 г. (спустя 329 мес.).

Вариант № 17

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 900 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июля 2047 г. (спустя 330 мес.).

Вариант № 18

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 19217 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го августа 2026 г. (спустя 79 мес.).

Вариант № 19

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 8548 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июля 2023 г. (спустя 42 месяца).

Вариант № 20

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 527 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го октября 2051 г. (спустя 381 месяц).

Вариант № 21

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 1243 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го апреля 2047 г. (спустя 327 мес.).

Вариант № 22

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 3291 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го февраля 2032 г. (спустя 145 мес.).

Вариант № 23

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 1072 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го июня 2030 г. (спустя 125 мес.).

Вариант № 24

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 901 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го октября 2053 г. (спустя 405 мес.).

Вариант № 25

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 451 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го августа 2032 г. (спустя 151 месяц).

Вариант № 26

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 5632 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го ноября 2027 г. (спустя 94 месяца).

Вариант № 27

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 667 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го сентября 2046 г. (спустя 320 мес.).

Вариант № 28

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 994 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го февраля 2052 г. (спустя 385 мес.).

Вариант № 29

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 9667 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го ноября 2025 г. (спустя 70 мес.).

Вариант № 30

Сумма вклада на указанную дату приближённо равна 3259 тыс. руб.
Впервые вклад вырастет в k раз 20-го апреля 2026 г. (спустя 75 мес.).

4.3. Задача 3

Вариант № 1

$$x(t) = \frac{1}{\frac{C+2\sin t+4\cos t}{t} + 4\sin t - 2\cos t}.$$

Вариант № 2

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{\frac{C+28\sin t-7\cos t}{t} - 7\sin t - 28\cos t}}.$$

Вариант № 3

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{C-2\sin t-2\cos t}{t} - 2\sin t + 2\cos t}}.$$

Вариант № 4

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{C\operatorname{cosec} t - 28(1 - t\operatorname{ctg} t)}}.$$

Вариант № 5

$$x(t) = \sqrt[6]{\frac{C}{t} - \frac{2e^{3t}}{3}\left(\frac{1}{t} - 3\right)}.$$

Вариант № 6

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{C}{t} + \frac{15e^{4t}}{16}\left(\frac{1}{t} - 4\right)}.$$

Вариант № 7

$$x(t) = \sqrt[4]{C\sec t + 36(1 + t\operatorname{tg} t)}.$$

Вариант № 8

$$x(t) = \sqrt[11]{\frac{C + 11\sin t - 44\cos t}{t} - 44\sin t - 11\cos t}.$$

Вариант № 9

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{C}{t} + \frac{5e^{4t}}{4}\left(\frac{1}{t} - 4\right)}}.$$

Вариант № 10

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{C}{t} - 3e^{3t}\left(\frac{1}{t} - 3\right)}}.$$

Вариант № 11

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{C \operatorname{cosec} t + 10(1 - t \operatorname{ctg} t)}}.$$

Вариант № 12

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{C \sec t + 12(1 + t \operatorname{tg} t)}}.$$

Вариант № 13

$$x(t) = \sqrt[8]{\frac{C - 40 \sin t - 24 \cos t}{t} - 24 \sin t + 40 \cos t}.$$

Вариант № 14

$$x(t) = \sqrt[9]{\frac{C + 9 \sin t + 27 \cos t}{t} + 27 \sin t - 9 \cos t}.$$

Вариант № 15

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[5]{C \sec t + 25(1 + t \operatorname{tg} t)}}.$$

Вариант № 16

$$x(t) = \sqrt[7]{C \operatorname{cosec} t - 7(1 - t \operatorname{ctg} t)}.$$

Вариант № 17

$$x(t) = \sqrt[11]{C \sec t + 44(1 + t \operatorname{tg} t)}.$$

Вариант № 18

$$x(t) = \sqrt[8]{\frac{C - 8\sin t + 24\cos t}{t} + 24\sin t + 8\cos t}.$$

Вариант № 19

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{C - 15\sin t - 12\cos t}{t} - 12\sin t + 15\cos t}.$$

Вариант № 20

$$x(t) = \sqrt{\frac{C + 4\sin t - 2\cos t}{t} - 2\sin t - 4\cos t}.$$

Вариант № 21

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[7]{C \operatorname{cosec} t + 14(1 - t \operatorname{ctg} t)}}.$$

Вариант № 22

$$x(t) = \sqrt[10]{C \sec t - 100(1 + t \operatorname{tg} t)}.$$

Вариант № 23

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{C + 4\sin t - 8\cos t}{t} - 8\sin t - 4\cos t}}.$$

Вариант № 24

$$x(t) = \sqrt[4]{C\sec t + 32(1 + t\operatorname{tg} t)}.$$

Вариант № 25

$$x(t) = \sqrt[5]{\frac{C}{t} + \frac{5}{4e^{2t}}\left(\frac{1}{t} + 2\right)}.$$

Вариант № 26

$$x(t) = \sqrt[11]{\frac{C + 11\sin t - 11\cos t}{t} - 11\sin t - 11\cos t}.$$

Вариант № 27

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[9]{\frac{C}{t} + 9e^{2t}\left(\frac{1}{t} - 2\right)}}.$$

Вариант № 28

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{C\sec t - 14(1 + t\operatorname{tg} t)}}.$$

Вариант № 29

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{t} - \frac{2}{9e^{3t}}\left(\frac{1}{t} + 3\right)}}.$$

Вариант № 30

$$x(t) = \sqrt{C\operatorname{cosec} t + 4(1 - t\operatorname{ctg} t)}.$$

4.4. Задача 4

Решение имеет вид

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n.$$

Вариант № 1

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4};$$
$$\lambda_2 = -\frac{2}{3};$$
$$C_1 = -3;$$
$$C_2 = 5.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 2

$$\lambda_1 = -\frac{5}{6};$$
$$\lambda_2 = 1;$$
$$C_1 = -4;$$
$$C_2 = 6.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 3

$$\lambda_1 = 1;$$
$$\lambda_2 = -1;$$
$$C_1 = -6;$$
$$C_2 = -6.$$

Решение ограничено, не имеет предела, **не** осциллирует.

Вариант № 4

$$\lambda_1 = \frac{1}{2};$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{2};$$
$$C_1 = 2;$$
$$C_2 = 10.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 5

$$\lambda_1 = 1;$$
$$\lambda_2 = \frac{6}{7};$$
$$C_1 = -8;$$
$$C_2 = -2.$$

Решение ограничено, имеет предел, равный -8, **не** осциллирует.

Вариант № 6

$$\lambda_1 = \frac{6}{7};$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{7};$$
$$C_1 = -6;$$
$$C_2 = 4.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 7

$$\lambda_1 = \frac{1}{2};$$
$$\lambda_2 = \frac{3}{5};$$
$$C_1 = 4;$$
$$C_2 = -2.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 8

$$\lambda_1 = -\frac{3}{7};$$
$$\lambda_2 = \frac{6}{7};$$
$$C_1 = 8;$$
$$C_2 = 6.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 9

$$\lambda_1 = 2;$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{7};$$
$$C_1 = 1;$$
$$C_2 = -3.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, **не** осциллирует.

Вариант № 10

$$\lambda_1 = -\frac{2}{3};$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{6};$$
$$C_1 = 6;$$
$$C_2 = 1.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 11

$$\lambda_1 = \frac{5}{6};$$
$$\lambda_2 = -2;$$
$$C_1 = 5;$$
$$C_2 = -2.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 12

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2};$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2};$$
$$C_1 = -5;$$
$$C_2 = 4.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, осциллирует.

Вариант № 13

$$\lambda_1 = -\frac{3}{5};$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{7};$$
$$C_1 = 3;$$
$$C_2 = 8.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 14

$$\lambda_1 = \frac{5}{4};$$
$$\lambda_2 = \frac{5}{2};$$
$$C_1 = -4;$$
$$C_2 = 3.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, **не** осциллирует.

Вариант № 15

$$\lambda_1 = -\frac{7}{4};$$
$$\lambda_2 = -\frac{5}{3};$$
$$C_1 = -4;$$
$$C_2 = -8.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, осциллирует.

Вариант № 16

$$\lambda_1 = -\frac{1}{5};$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{3};$$
$$C_1 = -10;$$
$$C_2 = 4.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 17

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4};$$
$$\lambda_2 = \frac{5}{4};$$
$$C_1 = 5;$$
$$C_2 = 10.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 18

$$\lambda_1 = -\frac{4}{7};$$
$$\lambda_2 = -\frac{7}{3};$$
$$C_1 = 9;$$
$$C_2 = -9.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 19

$$\lambda_1 = -6;$$
$$\lambda_2 = 4;$$
$$C_1 = -6;$$
$$C_2 = -8.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, осциллирует.

Вариант № 20

$$\lambda_1 = 2;$$
$$\lambda_2 = \frac{5}{4};$$
$$C_1 = -10;$$
$$C_2 = 4.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, **не** осциллирует.

Вариант № 21

$$\lambda_1 = -\frac{5}{4};$$
$$\lambda_2 = \frac{7}{3};$$
$$C_1 = -4;$$
$$C_2 = -4.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, **не** осциллирует.

Вариант № 22

$$\lambda_1 = -\frac{2}{5};$$
$$\lambda_2 = \frac{7}{6};$$
$$C_1 = 7;$$
$$C_2 = 2.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 23

$$\lambda_1 = \frac{5}{4};$$
$$\lambda_2 = -\frac{7}{4};$$
$$C_1 = -4;$$
$$C_2 = -7.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, осциллирует.

Вариант № 24

$$\lambda_1 = -\frac{5}{6};$$
$$\lambda_2 = -\frac{6}{5};$$
$$C_1 = 4;$$
$$C_2 = 2.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 25

$$\lambda_1 = \frac{6}{5};$$
$$\lambda_2 = -1;$$
$$C_1 = 2;$$
$$C_2 = 3.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, **не** осциллирует.

Вариант № 26

$$\lambda_1 = \frac{2}{3};$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{5};$$
$$C_1 = 4;$$
$$C_2 = 3.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, **не** осциллирует.

Вариант № 27

$$\lambda_1 = -\frac{2}{7};$$
$$\lambda_2 = -3;$$
$$C_1 = 1;$$
$$C_2 = 5.$$

Решение ограничено, стремится к нулю, осциллирует.

Вариант № 28

$$\lambda_1 = 1;$$
$$\lambda_2 = -\frac{3}{5};$$
$$C_1 = -1;$$
$$C_2 = 4.$$

Решение ограничено, имеет предел, равный -1, **не** осциллирует.

Вариант № 29

$$\lambda_1 = 5;$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{4};$$
$$C_1 = -5;$$
$$C_2 = 3.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, **не** осциллирует.

Вариант № 30

$$\lambda_1 = -\frac{6}{5};$$
$$\lambda_2 = -2;$$
$$C_1 = 5;$$
$$C_2 = 8.$$

Решение не ограничено, не имеет предела, осциллирует.

4.5. Задача 5

Решение имеет вид

$$x_n = \left|\lambda\right|^n \left(C_1 \cos \arg \lambda + C_2 \sin \arg \lambda\right).$$

Вариант № 1

$$|\lambda| = 1;$$
$$\arg \lambda = \frac{\pi}{6};$$
$$C_1 = 1;$$
$$C_2 = 2\sqrt{3}.$$

Вариант № 2

$$|\lambda| = \frac{2}{3}\sqrt{2};$$
$$\arg \lambda = \frac{\pi}{4};$$
$$C_1 = -5;$$
$$C_2 = 3\sqrt{4}.$$

Вариант № 3

$$|\lambda| = \frac{4}{3};$$
$$\arg \lambda = \frac{\pi}{6};$$
$$C_1 = -10;$$
$$C_2 = 3\sqrt{3}.$$

Вариант № 4

$$|\lambda| = 6\sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{4};$$
$$C_1 = 3;$$
$$C_2 = \frac{5}{2}\sqrt{4}.$$

Вариант № 5

$$|\lambda| = 4\sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{3};$$
$$C_1 = -9;$$
$$C_2 = \sqrt{3}.$$

Вариант № 6

$$|\lambda| = \frac{2}{5}\sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{3\pi}{4};$$
$$C_1 = -9;$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4}.$$

Вариант № 7

$$|\lambda| = 2\sqrt{2};$$

$$\arg\lambda = \frac{3\pi}{4};$$

$$C_1 = -10;$$

$$C_2 = -\frac{7}{2}\sqrt{4}.$$

Вариант № 8

$$|\lambda| = \frac{2}{3}\sqrt{2};$$

$$\arg\lambda = \frac{\pi}{4};$$

$$C_1 = 6;$$

$$C_2 = 2\sqrt{4}.$$

Вариант № 9

$$|\lambda| = 1;$$

$$\arg\lambda = \frac{2\pi}{3};$$

$$C_1 = 1;$$

$$C_2 = \frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Вариант № 10

$$|\lambda| = 8;$$
$$\arg\lambda = \frac{2\pi}{3};$$
$$C_1 = -9;$$
$$C_2 = -\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Вариант № 11

$$|\lambda| = 6;$$
$$\arg\lambda = \frac{2\pi}{3};$$
$$C_1 = 8;$$
$$C_2 = 2\sqrt{3}.$$

Вариант № 12

$$|\lambda| = \frac{2}{5}\sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{5\pi}{6};$$
$$C_1 = 10;$$
$$C_2 = 5\sqrt{3}.$$

Вариант № 13

$$|\lambda| = \frac{1}{6}\sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{5\pi}{6};$$
$$C_1 = 3;$$
$$C_2 = 3\sqrt{3}.$$

Вариант № 14

$$|\lambda| = \sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{3\pi}{4};$$
$$C_1 = -10;$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4}.$$

Вариант № 15

$$|\lambda| = \frac{10}{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{2\pi}{3};$$
$$C_1 = -8;$$
$$C_2 = -2\sqrt{3}.$$

Вариант № 16

$$|\lambda| = 6;$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{6};$$
$$C_1 = 5;$$
$$C_2 = -\frac{7}{3}\sqrt{3}.$$

Вариант № 17

$$|\lambda| = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{3\pi}{4};$$
$$C_1 = 7;$$
$$C_2 = 3\sqrt{4}.$$

Вариант № 18

$$|\lambda| = \frac{5}{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{2\pi}{3};$$
$$C_1 = -4;$$
$$C_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Вариант № 19

$$|\lambda| = \frac{5}{3}\sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{4};$$
$$C_1 = -1;$$
$$C_2 = \frac{5}{2}\sqrt{4}.$$

Вариант № 20

$$|\lambda| = 1;$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{6};$$
$$C_1 = 8;$$
$$C_2 = \frac{10}{3}\sqrt{3}.$$

Вариант № 21

$$|\lambda| = 2\sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{4};$$
$$C_1 = -5;$$
$$C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{4}.$$

Вариант № 22

$$|\lambda| = \frac{1}{9}\sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{3};$$
$$C_1 = -5;$$
$$C_2 = 7\sqrt{3}.$$

Вариант № 23

$$|\lambda| = \sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{5\pi}{6};$$
$$C_1 = 9;$$
$$C_2 = -8\sqrt{3}.$$

Вариант № 24

$$|\lambda| = \frac{6}{5};$$
$$\arg\lambda = \frac{2\pi}{3};$$
$$C_1 = 7;$$
$$C_2 = \frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Вариант № 25

$$|\lambda| = \frac{2}{15}\sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{\pi}{3};$$
$$C_1 = 10;$$
$$C_2 = -6\sqrt{3}.$$

Вариант № 26

$$|\lambda| = \frac{3}{5}\sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{3\pi}{4};$$
$$C_1 = -1;$$
$$C_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{4}.$$

Вариант № 27

$$|\lambda| = \frac{5}{6}\sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{5\pi}{6};$$
$$C_1 = 10;$$
$$C_2 = 2\sqrt{3}.$$

Вариант № 28

$$|\lambda| = 2;$$
$$\arg\lambda = \frac{2\pi}{3};$$
$$C_1 = 7;$$
$$C_2 = -\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Вариант № 29

$$|\lambda| = \frac{1}{3}\sqrt{2};$$
$$\arg\lambda = \frac{3\pi}{4};$$
$$C_1 = -2;$$
$$C_2 = 5\sqrt{4}.$$

Вариант № 30

$$|\lambda| = \frac{2}{9}\sqrt{3};$$
$$\arg\lambda = \frac{5\pi}{6};$$
$$C_1 = 9;$$
$$C_2 = -\sqrt{3}.$$

Заключение

В настоящем учебном пособии рассмотрены вопросы построения и качественного исследования асимптотических свойств решения дифференциальных и разностных уравнений и систем в связи с задачами экономической математики. Отмеченные классы уравнений принадлежит к простейшим: поскольку их свойства хорошо известны, они изучаются в стандартных университетских курсах. Простота уравнений в то же время является и их недостатком: с их помощью многие особенности моделируемых процессов не удаётся учесть. В частности, более адекватного описания экономических процессов следует ожидать от уравнений и систем, представляющих собой синтез непрерывных и дискретных моделей. Примером таких уравнений служат дифференциально-разностные уравнения: эти модели позволяют учитывать эффект последействия в непрерывном времени. Для многих из рассмотренных экономических моделей существуют их дифференциально-разностные аналоги, вызывающие значительный интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения. Однако изучение дифференциально-разностных уравнений ещё на стало частью университетского курса по дифференциальным уравнениям. Некоторые из рассмотренных в данном издании подходы к исследованию обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений могут быть применены и к дифференциально-разностным (см. [16]).

Библиографический список

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.

2. *Нижегородцев Р. М.* Логистическое моделирование экономической динамики. Ч. I // Проблемы управления. 2004. №1. С. 46-53.

3. *Шень А. Х.* Математическая индукция. М.: МЦНМО, 2004. 36 с.

4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

5. *Замков О. О., Толстопятенко А.В., Черемёных Ю.Н.* Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1997.

6. *Куликов Д. А.* Устойчивость и локальные бифуркации в модели Солоу с запаздыванием // Журнал СВМО. 2018. № 2: **20**. С. 225-234.

7. *Неймарк Ю. И.* Динамические системы и управляемые процессы // М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. 336 с.

8. *Колемаев В. А.* Исследование поведения модели Самуэльсона–Хикса // Пробл. управл. 2006. №1. С. 16-19.

9. Lotka A. ELEMENTS OF PHYSICAL BIOLOGY // Williams and Wilkins Company, 1926.

10. В. Вольтерра. Математическая борьба за существование / под ред. и с пред. Ю. М. Свирежева. // М.: Наука, 1976.

11. *Праслов А. В.* Математические методы экономической динамики: уч. пособие. 2-е изд., испр. СПб.: Лань, 2015. 352 с.

12. *Полосков И. Е.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Курс лекций и практикум: уч. пособие для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Прикладная математика и информатика» и «Информационные системы и технологии». Пермь: изд-во Перм. гос. ун-та, 2020. URL https://elis.psu.ru/node/631491 (дата обращения: 01.04.2022)

13. *Коврижных А. Ю.* Дифференциальные и разностные уравнения: учебное пособие. Пермь: изд-во Перм. гос. ун-та, 2020. URL http://www.iprbookshop.ru/68426.html (дата обращения: 01.04.2022) (дата обращения: 01.04.2022)

14. *Королев А. В.* Дифференциальные и разностные уравнения : учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство «Юрайт», 2019. URL https://www.urait.ru/bcode/433869 (дата обращения: 01.04.2022)

15. *Юмагулов М. Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : теория и приложения. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2019. URL http://www.iprbookshop.ru/91969.html (дата обращения: 01.04.2022)

16. *Праслов А. В.* Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии : учеб. пособие. СПб.: Лань, 2010. 192 с.

Учебное издание

Мулюков Михаил Вадимович

Динамические модели экономики. Дифференциальные и разностные уравнения

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*
Корректор *А. В. Цветкова*
Компьютерная вёрстка: *М. В. Мулюков*

Объем данных 1,28 Мб
Подписано к использованию 06.06.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15