ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. Ш. Кусяков

ВВЕДЕНИЕ
В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Ш. Кусяков

ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебного пособия для иностранных студентов
естественно-научных направлений подготовки
и специальностей*

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
"Perm University Press"

Пермь 2022

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
К94

Кусяков А. Ш.

К94 Введение в высшую математику [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Ш. Кусяков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2022. – 3,11 Мб ; 162 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/ Kusyakov-Vvedenie-V-Vysshuyu-Matematiku.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3862-8

Издание предназначено студентам-иностранцам для подготовки к изучению курса высшей математики. Содержит основные понятия алгебры, а также начальные сведения по математическому анализу. Приведены теоретические сведения, примеры решений, а также упражнения для самостоятельного решения по всем основным разделам алгебры и математического анализа.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Издается по решению ученого совета механико-математического факультета Пермского государственного национально-исследовательского университета

Рецензенты: кафедра математики и физики Пермского государственного аграрно-технологического университета им. академика Д. Н. Прянишникова (зав. кафедрой – канд. тех. наук, доцент ***В. В. Аюпов***);

научный сотрудник Института механики сплошных сред УРО РАН, канд. физ.-мат. наук ***И. И. Вертгейм***

ISBN 978-5-7944-3862-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель учебного пособия – повторение основных разделов курса алгебры, а также предварительное знакомство с базовыми понятиями математического анализа. Учебный материал ориентирован в первую очередь на студентов – иностранных граждан и содержит следующие разделы:

1. Числовые множества.
2. Алгебраические выражения.
3. Последовательности.
4. Уравнения.
5. Неравенства.
6. Простейшие функции.
7. Показательная и логарифмическая функции.
8. Тригонометрические функции.
9. Производная.
10. Интеграл.

1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

1.1. Натуральные числа. Признаки делимости

Натуральные числа – это числа, используемые для счета. Множество натуральных чисел обозначается буквой N. Натуральные числа, делящиеся на 2, и число 0, называются четными числами. Остальные натуральные числа называются нечетными.

Признаки делимости натуральных чисел:

На 2 делятся те и только те числа, которые оканчиваются четной цифрой, например,

12, 346, 12228.

На 3 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 3. Например, число 123 делится на 3, так как сумма его цифр

1+2+3=6

делится на 3.

На 5 делятся те и только те числа, которые оканчиваются на 5 или 0. Например, число 1225 делится на 5, так как оно оканчивается цифрой 5.

На 9 делятся те и только те числа, у которых сумма цифр делится на 9. Например, число 141543 делится на 9, так как сумма его цифр

1+4+1+5+4+3=18

делится на 9.

Пример. Какую цифру следует подставить вместо цифры a, чтобы число $3a5$ делилось на 9?

Решение.

Чтобы число делилось на 9, сума цифр должна делиться на 9. Запишем сумму цифр

$$3 + a + 5 = 8 + a.$$

Цифра a, по определению, удовлетворяет условию

$$0 \leq a < 10.$$

Ближайшее к 8 число, которое делится на 9, – это само число 9, следовательно,

$$8 + a = 9, a = 9 - 8 = 1.$$

Следующее по порядку число, которое делится на 9, – число 18:

$$8 + a = 18, a = 18 - 8 = 10.$$

Однако цифра a, по определению, должна удовлетворять условию

$$0 \leq a < 10.$$

Таким образом, $a = 10$ не является решением задачи.

Ответ: $a = 1$.

Пример. Какую цифру следует подставить вместо цифры a, чтобы число $437a5$ делилось на 15?

Решение:

Чтобы число делилось на 15, оно должно делиться на 3 и 5. Последняя цифра – 5, следовательно, число делиться на 5. Чтобы число делилось на 3, сумма цифр должна делиться на 3. Запишем сумму цифр

$$4 + 3 + 7 + a + 5 = 19 + a.$$

Цифра a, по определению, удовлетворяет условию

$$0 \leq a < 10.$$

Ближайшее к 19 число, которое делится на 3, – это число 21, следовательно,

$$19 + a = 21, a = 21 - 19 = 2.$$

Следующее по порядку число, которое делится на 3, – это число 24, следовательно,

$$19 + a = 24, a = 24 - 19 = 5.$$

Следующее по порядку число, которое делится на 3, – это число 27, следовательно,

$$19 + a = 27, a = 27 - 19 = 8.$$

Следующее по порядку число, которое делится на 3 – это число 30, следовательно,

$$19 + a = 30, a = 30 - 19 = 11.$$

Однако по определению,

$$0 \leq a < 10.$$

Таким образом, $a = 11$ не является решением.

Ответ: $a = 2, a = 5, a = 8$.

Всякое натуральное число (кроме единицы), которое делится только на единицу и само на себя, называется *простым*. Например, числа

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

являются простыми.

Все натуральные числа, которые больше трех и не являются простыми, называются *составными*. Например, числа

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21

являются составными.

1.2. Целые и рациональные числа

Присоединяя к множеству натуральных чисел N все числа, противоположные натуральным, и ноль, получим *множество целых чисел*

$$\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots,$$

которое обозначается Z.

Присоединив к множеству целых чисел Z все положительные и отрицательные дроби, получим *множество рациональных чисел*, обозначаемое буквой Q. Любое рациональное число q можно представить в виде отношения

$$q = \frac{m}{n},$$

где m – целое число ($m \in Z$), n – натуральное число ($n \in N$). Например,

$$\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{11}.$$

Сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел являются рациональными числами (за исключением деления на ноль).

Пример. Вычислите значение выражения $\frac{3}{1+\frac{1}{1+1}}$.

Решение:

$$\frac{3}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2\,.$$

Ответ: 2.

Дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т.д. (т.е. степени числа 10), называется десятичной дробью и записывается в виде последовательности цифр с запятой между ними. Количество цифр после запятой равно степени числа 10, стоящей в знаменатели дроби.

Пример. Вычислите значение выражения $\frac{0{,}24\cdot 2-0{,}08}{0{,}15+0{,}05}$.

Решение:

$$\frac{0{,}24 \cdot 2 - 0{,}08}{0{,}15 + 0{,}05} = \frac{0{,}48 - 0{,}08}{0{,}2} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Ответ: 2.

В общем случае любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной, но *периодической* десятичной дроби. Например,

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ – конечная десятичная дробь;

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ – бесконечная периодическая десятичная дробь.

Цифра или совокупность цифр, которые повторяются в периодической дроби, называются ее периодом. Для сокращения записи период записывают в круглых скобках. Например,

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0,(3).$$

Период дроби в этом примере равен 3.

1.3. Действительные числа

При выполнении некоторых алгебраических операций обнаруживается недостаточность множества рациональных чисел. Например, среди рациональных чисел нет такого, которое было бы равно числу $\sqrt{2}$, т.е. не существует таких m и n, чтобы выполнялось равенство

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

где m – целое число ($m \in Z$), n – натуральное число ($n \in N$).

Числа, которые не являются рациональными, называются *иррациональными* числами. В отличие от рациональных чисел иррациональные числа представляются в виде бесконечных *непериодических* десятичных дробей. Например,

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots;$$

$$\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots\ .$$

Пример. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$.

Решение:

$$\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1.$$

Ответ: $\sqrt{3}+1$.

Отметим, что при выполнении арифметических операций над иррациональными числами в результате может получиться рациональное число.

Пример. Упростить выражение $\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ .$$

Ответ: $0{,}5$.

Обозначим множество иррациональных чисел буквой I. Множество, состоящее из рациональных и иррациональных чисел, называется *множеством действительных чисел* и обозначается R. Математически определение множества действительных чисел можно записать так

$$R = Q \cup I.$$

Символ " $\cup$ " означает объединение множеств.

1.4. Числовые промежутки

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой*, т.е. прямой на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

Множество, элементы которого удовлетворяют неравенству $a \le x \le b$, называется *отрезком* $[a; b]$ (рис. 1).

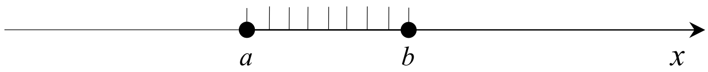


Рис. 1. Отрезок

Множество, элементы которого удовлетворяют неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* $(a; b)$ (рис. 2).

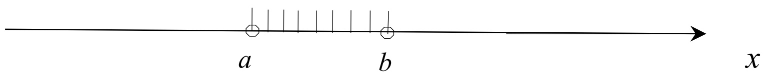


Рис. 2. Интервал

Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$, называются *полуоткрытыми интервалами* $[a; b)$(рис. 3) и $(a; b]$ (рис. 4) соответственно.

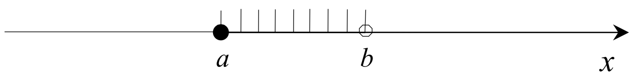


Рис. 3. Полуоткрытый интервал $[a; b)$

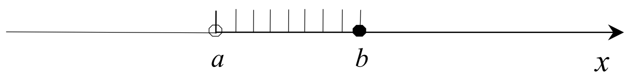


Рис. 4. Полуоткрытый интервал $(a; b]$

Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам $x \ge a$ или $x \le a$, называются *лучами* $[a; +\infty)$ (рис. 5) и $(-\infty; b]$ (рис. 6) соответственно.

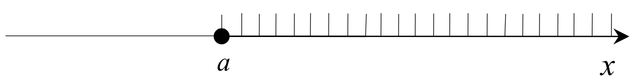


Рис. 5. Луч $[a;\ +\infty)$

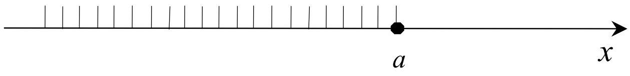


Рис. 6. Луч $(-\infty;\ a]$

Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам $x > a$ или $x < a$, называются *открытыми лучами* $(a; +\infty)$ (рис. 7) и $(-\infty;\ a)$ (рис. 8) соответственно.

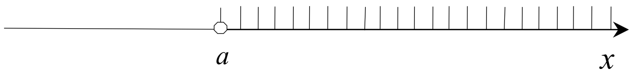


Рис. 7. Открытый луч $(a;\ +\infty)$

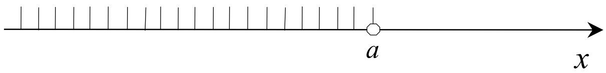


Рис. 8. Открытый луч $(-\infty;\ a)$

1.5. Модуль действительного числа

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $(-x)$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Например,

$$|3| = 3, |-3| = -(-3) = 3.$$

Из определения модуля следует, что $|x| = |-x|$ и $|x| \geq 0$.

Пример. Упростить $\left|1-\sqrt{3}\right| + \left|2-\sqrt{3}\right|$.

Решение:

Выражение под знаком модуля первого слагаемого меньше нуля:

$$1-\sqrt{3} < 0,$$

следовательно,

$$\left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1.$$

Выражение под знаком модуля второго слагаемого больше нуля:

$$2-\sqrt{3}>0,$$

следовательно,

$$\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$\left|1-\sqrt{3}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-1+2-\sqrt{3}=1.$$

Ответ: 1.

Пример. Упростить $\frac{1}{\left|1-\sqrt{5}\right|}-\frac{\left|\sqrt{5}-1\right|+1}{4}$.

Решение:

$$\frac{1}{\left|1-\sqrt{5}\right|}-\frac{\left|\sqrt{5}-1\right|+1}{4}=\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: 1/4.

1.6. Упражнения

1. Какие из чисел 1862, 1236 и 8883 делятся на 3?
2. Какие из чисел 1239, 4455 и 1199 делятся на 9?
3. Какие из чисел 1326, 1510 и 1221 делятся на 6?
4. Какие из чисел 1135, 4455 и 1198 делятся на 15?
5. Какие из чисел 2145, 4455 и 5398 делятся на 45?
6. Какую цифру следует подставить вместо цифры a, чтобы число $437a5$ делилось на 15?
7. Вычислите значение выражения $\frac{5}{1+\frac{2}{1+2}}$.
8. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$.
9. Упростить $\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}}{4}$.
10. Упростить $\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

2.1. Степени и корни

Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a.$$

Число a называется основанием степени, а число n – показателем степени. Степень с натуральным показателем удовлетворяет следующим свойствам:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\ (a^m)^n = a^{mn};$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;\ \ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Пример. Вычислить $\frac{13^6 \cdot 2^6}{26^5}$.

Решение:

$$\frac{13^6 \cdot 2^6}{26^5} = \frac{(13 \cdot 2)^6}{26^5} = \frac{26^6}{26^5} = 26.$$

Ответ: 26.

Чтобы обобщить понятие степени на случай, когда показатель степени является произвольным целым числом, примем, по определению, что

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

где n – натуральное число. Степень с целым показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем.

Пример**.** Вычислить $3^4 \cdot 9^{-2}$.

Решение:

$$3^4 \cdot 9^{-2} = 3^4 \cdot (3^2)^{-2} = 3^4 \cdot 3^{-4} = 3^{4-4} = 3^0 = 1.$$

Ответ: 1.

Арифметическим квадратным корнем из числа $a\ (a \geq 0)$ называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Квадратный корень обозначается символом $\sqrt{a}$. Например, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{225} = 15$. Выражения $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-16}$ не имеют смысла.

Арифметический квадратный корень удовлетворяет следующим *свойствам:*

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Пример. Вычислить $\frac{\sqrt{4{,}8} \cdot \sqrt{1{,}8}}{\sqrt{0{,}24}}$

Решение:

$$\frac{\sqrt{4{,}8} \cdot \sqrt{1{,}8}}{\sqrt{0{,}24}} = \sqrt{\frac{4{,}8 \cdot 1{,}8}{0{,}24}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 18}{24}} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: 6.

Кубическим корнем из числа a называется число, куб которого равен a. Кубический корень обозначается $\sqrt[3]{a}$. Например, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-27} = -3$. Таким образом, в отличие от арифметического квадратного корня кубический корень можно извлекать не только из положительных, но и из отрицательных чисел. Кубический корень обладает теми же свойствами, что и арифметический квадратный корень.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2}$.

Решение:

$$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{32 \cdot 2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Ответ: 4.

Арифметическим корнем n*-й степени* из числа $a (a \geq 0)$ называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Арифметический корень n-й степени обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Таким образом, по определению, имеем

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Степенью числа a ($a > 0$) *с рациональным показателем* $\frac{m}{n}$ (m – целое число, n – натуральное число) называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Степень с рациональным показателем обозначается символом $a^{\frac{m}{n}}$. Таким образом, по определению, имеем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Степень с рациональным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с целым показателем.

Пример. Вычислить $2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} \cdot 4^0$.

Решение:

$$2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} \cdot 4^0 = 2^{-2} \cdot (2^6)^{\frac{2}{3}} \cdot 1 = 2^{-2} \cdot 2^4 = 2^{-2+4} = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

2.2. Формулы сокращенного умножения

Для проведения тождественных преобразований алгебраических выражений важно знать следующие формулы сокращенного умножения:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (разность квадратов);

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности);

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы);

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности);

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов);

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов).

Приведем примеры нахождения значений числовых выражений с использованием формул сокращенного умножения.

Пример. Вычислить $\sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2}$

Решение:

$$\sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{(7{,}5 - 4{,}5)(7{,}5 + 4{,}5)} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример. Вычислить $\left(\sqrt{14}-\sqrt{12}\right)^4\left(\sqrt{14}+\sqrt{12}\right)^4$.

Решение:

$$\left(\sqrt{14}-\sqrt{12}\right)^4\left(\sqrt{14}+\sqrt{12}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{14}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{14}+\sqrt{12}\right)\right)^4 =$$

$$= \left(\left(\sqrt{14}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right)(14-12)^4 = 2^4 = 16.$$

Ответ: 16.

Пример. Вычислить $0{,}6^2+2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4+0{,}4^2$

Решение:

$$0{,}6^2+2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4+0{,}4^2 = (0{,}6+0{,}4)^2 = 1^2 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить $0{,}4^3+3\cdot 0{,}4^2\cdot 2{,}6+3\cdot 2{,}6^2\cdot 0{,}4+2{,}6^3$

Решение:

$$0{,}4^3+3\cdot 0{,}4^2\cdot 2{,}6+3\cdot 2{,}6^2\cdot 0{,}4+2{,}6^3 = (0{,}4+2{,}6)^3 = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

Пример. Упростить $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2$.

Решение:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2 = \sqrt{4+2\cdot 2\sqrt{3}+3} = \sqrt{2^2+2\cdot 2\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-2 = 2+\sqrt{3}-2 = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$

Приведем примеры преобразования алгебраических выражений с использованием формул сокращенного умножения.

Пример. Вычислить $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}$, если $x = 18$, $y = 12$.

Решение.

$$\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}=\frac{x(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x}{x-y}=\frac{18}{18-12}=3.$$

Ответ: 3.

Пример. Вычислить $\frac{x^3+3x^2+y^3}{x+y}+\frac{3y^2x^2-3xy^2}{x^2-y^2}$, если $x=11,\ y=4$.

Решение:

$$\frac{x^3+3x^2+y^3}{x+y}+\frac{3y^2x^2-3xy^2}{x^2-y^2}=\frac{x^3+3x^2+y^3}{x+y}+\frac{3xy^2(x-y)}{(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{x^3+3x^2+y^3}{x+y}+\frac{3xy^2}{x+y}=\frac{x^3+3x^2+y^3+3xy^2}{x+y}=\frac{(x+y)^3}{x+y}=(x+y)^2.$$

Подставив числовые значения, получим

$$(x+y)^2=(11+4)^2=15^2=225.$$

Ответ: 225.

Пример. Упростить $\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}-y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-y}+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}}$.

Решение:

Введем новые переменные $a=\sqrt[3]{x},\ b=\sqrt{y}$. Из последнего выражения найдем $y=b^2$. Выполнив в исходном выражении замену переменных, получим:

$$\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}+\frac{a}{a+b}=\frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)}+\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1.$$

Ответ: 1.

2.3. Многочлены

Квадратным трехчленом называется выражение вида

$$ax^2+bx+c,$$

где x – переменная, a, b и c– некоторые числа, причем $a\neq 0$.

Дискриминантом квадратного трехчлена называется выражение

$$D=b^2-4ac.$$

Корнем квадратного трехчлена называют число, обращающее квадратный трехчлен в нуль.

Если дискриминант $D \geq 0$, то квадратный трехчлен можно разложить на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена, определяемые по формулам

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример. Упростить $\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4}$.

Решение.

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} =$$

$$= \frac{x - 3}{x - 2} + \frac{1}{x - 2} = \frac{x - 2}{x - 2} = 1.$$

Ответ: 1.

Многочленом степени n относительно переменной x называется выражение

$$P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

где $n \in N$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ – коэффициенты многочлена.

Теорема Безу. Остаток R от деления многочлена P степени n на многочлен $(x - a)$ равен значению многочлена при $x = a$.

Пример. Даны два многочлена $A = x^3 + 3x + 1$ и $B = x - 1$. Найти остаток R от деления многочлена A на многочлен B.

Решение:

По теореме Безу остаток от деления равен

$$R = 1^3 + 3 \cdot 1 + 1 = 5.$$

Ответ: 5

Если остаток R от деления многочлена P на многочлен $(x - a)$ равен нулю, тогда значение $x = a$ является корнем многочлена, т.е. обращает его в нуль. Например, значение $x = 1$ является корнем многочлена

$$P = x^3 + 3x - 4,$$

так как

$$R = 1^3 + 3 - 4 = 0.$$

2.4. Упражнения

Вычислить:

1. а) $\dfrac{2^8 \cdot 3^8}{6^6}$; б) $\dfrac{12^7}{3^5 \cdot 4^5}$;

2. а) $4^3 \cdot 16^{-2}$; б) $5^7 \cdot 125^{-2}$;

3. а) $\dfrac{\sqrt{14} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4}}$;

4. а) $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}$; б) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{54}$;

5. а) $3^{-4} \cdot 27^{\frac{2}{3}} \cdot 9$; б) $3^{-5} \cdot 9^{\frac{3}{2}} \cdot 27$;

6. а) $\sqrt{12{,}5^2 - 3{,}5^2}$; б) $\sqrt{17{,}5^2 - 10{,}5^2}$;

7. а) $\left(\sqrt{10} - \sqrt{7}\right)^3\left(\sqrt{10} + \sqrt{7}\right)^3$; б) $\left(\sqrt{5} - 2\right)^4\left(\sqrt{5} + 2\right)^4$;

8. а) $0{,}2^2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8^2$; б) $3{,}1^2 - 2 \cdot 3{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2$;

9. а) $0{,}2^3 + 3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1{,}8 + 3 \cdot 1{,}8^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}8^3$;

   б) $4{,}3^3 - 3 \cdot 4{,}3^2 \cdot 2{,}3 + 3 \cdot 2{,}3^2 \cdot 4{,}3 - 2{,}3^3$;

10. а) $\sqrt{21 - 8\sqrt{5}} + \sqrt{21 + 8\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

Упростить выражение и вычислить его значение при данных x и y:

11. а) $\dfrac{x^2 - xy}{x^2 - 2xy + y^2}, x = 16, y = 8$;

    б) $\dfrac{xy + 2y}{x^2 + 4x + 4}, x = 11, y = 39$;

12. а) $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^3 + y^3} + \dfrac{9x - 9y}{x^2 - y^2}, x = 6, y = 4$;

    б) $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^3 - y^3} + \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}, x = 16, y = 13$.

Упростить выражение:

13. а) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}-\dfrac{x+3}{x^2-9}$; б) $\dfrac{x^2-x-20}{x^2-25}+\dfrac{x-3}{x^2-2x-15}$.

Даны два многочлена A и B. Найдите остаток R от деления многочлена A на многочлен B.

14. а) $A=x^2-4x+5, B=x-1$;

б) $A=x^3-6x^2+11x-6, B=x+1$.

Проверить, является ли число a корнем многочлена A:

15. а) $A=x^3-4x^2+5x-2, a=2$;

б) $A=x^3+x^2+12x-14, a=1$.

3. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. Определение числовой последовательности

Числовая последовательность – это совокупность перенумерованных действительных чисел

$$u_1, u_2, \dots, u_n,$$

где нижний индекс указывает номер члена последовательности.

Задать числовую последовательность – значит указать закон, по которому вычисляются члены последовательности.

Пример. Последовательность задана формулой $u_n = 2n - 1$. Вычислить сумму $u_1 + u_2 + u_3$.

Решение:

$$u_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1;$$

$$u_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3;$$

$$u_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

Таким образом,

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 3 + 5 = 9.$$

Ответ: 9.

Пример. Последовательность задана формулой $u_n = 3n + 7$. Найти номер члена последовательности равный 13.

Решение.

По условиям задачи

$$u_n = 13,$$

следовательно,

$$3n + 7 = 13;$$

$$3n = 6;$$

$$n = 2.$$

Ответ: $n = 2$.

3.2. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называемым *разностью* прогрессии.

Для того чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно знать ее первый член a_1 и разность d.

Формула n-го члена арифметической прогрессии имеет вид

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Пример. Известны первый член $a_1 = 3$ и разность $d = 2$ арифметической прогрессии. Найти a_5.

Решение:

$$a_5 = 3 + 2 \cdot (5-1) = 11.$$

Ответ: 11.

Пример. Известны два члена арифметической прогрессии $a_5 = 10$ и $a_8 = 16$. Вычислить разность прогрессии d.

Решение:

По условиям задачи имеем

$$a_1 + 4d = 10,$$

$$a_1 + 7d = 16.$$

Вычтем из второго равенства первое равенство. В результате получим

$$3d = 6,$$

следовательно,

$$d = 2.$$

Ответ: $d = 2$.

С помощью формулы n-го члена можно показать, что каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}.$$

Пример. Даны два члена арифметической прогрессии $a_6 = 7$ и $a_8 = 11$. Найти седьмой член прогрессии.

Решение:

$$a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2} = \frac{7 + 11}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Подставив в правую часть выражение

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

получим еще одну формулу суммы

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

Пример. Известны первый член $a_1 = 3$ и разность $d = 2$ арифметической прогрессии. Найти сумму первых восьми слагаемых прогрессии.

Решение:

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{2a_1 + d(8-1)}{2} \cdot 8 = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 7}{2} \cdot 8 = 80.$$

Ответ: 80.

Пример. Даны два члена арифметической прогрессии $a_1 = 8$ и $a_3 = 12$. Найти сумму первых шести членов арифметической прогрессии.

Решение:

$a_3 = a_1 + 2d;$

$8 + 2d = 12; d = 2;$

$$S_6 = \frac{2a_1 + d(6-1)}{2} \cdot 6 = \frac{2 \cdot 8 + 2 \cdot 5}{2} \cdot 6 = 78.$$

Ответ: 78.

Пример. Найдите сумму первых 20 нечетных чисел.

Решение:

В этой задаче

$a_1 = 1; d = 2; n = 20;$

$$S_{20} = \frac{2a_1 + d(20-1)}{2} \cdot 20 = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 19}{2} \cdot 20 = 400.$$

Ответ: 400.

3.3. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, отличное от нуля, называемое *знаменателем прогрессии*.

Для того чтобы задать геометрическую прогрессию b_n, достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q.

Формула n-го *члена* геометрической прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Пример. Дан первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1 = 3$ и $q = 2$. Вычислить четвертый член прогрессии.

Решение:

$b_4 = b_1 q^3;$

$b_4 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24.$

Ответ: 24.

С помощью формулы n-го члена можно показать, что квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

Пример. Даны два члена знакоположительной геометрической прогрессии $b_3 = 4$ и $b_5 = 9$. Найти четвертый член прогрессии.

Решение:

$b_4^2 = b_3 b_5;$

$b_4^2 = 4 \cdot 9 = 36;$

$b_4 = \pm 6.$

По условиям задачи прогрессия является знакоположительной, следовательно,

$b_4 = 6.$

Ответ: 6.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии имеет вид

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Пример. Дан первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1 = 3$ и $q = 2$. Вычислить сумму первых четырех членов прогрессии.

Решение:

$S_4 = 3 \cdot \dfrac{2^4 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 15 = 45.$

Ответ: 45.

3.4. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots,$$

знаменатель которой удовлетворяют условию $|q| < 1$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Пример. Известна сумма $S = 8$ и первый член бесконечной геометрической прогрессии $b_1 = 4$. Вычислить знаменатель прогрессии.

Решение:

Воспользуемся формулой

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Подставив числовые значения, получим

$8 = \frac{4}{1-q}, 8(1 - q) = 4, 2(1 - q) = 1, 2 - 2q = 1, -2q = -1, q = \frac{1}{2} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

3.5. Понятие предела последовательности

Рассмотрим бесконечную числовую последовательность

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

Число u называется *пределом последовательности* u_n, если при стремлении n к бесконечности ($n \to \infty$) величина u_n стремится к u ($u_n \to u$). В математической форме предел записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Например, последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

при стремлении n к бесконечности, стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Аналогично предыдущему примеру можно получить:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0; \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0;$$

Отметим также, что предел константы k равен этой же константе k:

$$\lim_{n\to\infty} k = k.$$

Например,

$$\lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Например, последовательность

$$1, 2, \dots, \dots, 1000, \dots, n, \dots$$

является расходящейся, так как

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Аналогично этому примеру можно показать

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty, \ \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty.$$

Пусть x_n и y_n – некоторые заданные последовательности, а k – заданная константа. Перечислим основные *правила* вычисления пределов:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{n\to\infty} kx_n = k\lim_{n\to\infty} x_n.$$

2. Предел суммы (разности) двух последовательностей равен сумме (разности) пределов слагаемых

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

если оба эти предела существуют.

3. Предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

если оба эти предела существуют.

4. Предел отношения двух последовательностей равен отношению пределов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

если оба эти предела существуют и предел знаменателя не равен нулю.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 2+0-2\cdot 0 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+1}$.

Решение:

Преобразуем выражение под знаком предела следующим образом:

$$\frac{4n+1}{2n+1} = \frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{4+0}{2+0}=2.$$

Ответ: 2

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}$.

Решение:

Преобразуем дробное выражение следующим образом:

$$\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}=\frac{n^2(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})}=\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+5\cdot0+4\cdot0}{1+2\cdot0}=3.$$

Ответ: 3.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{n+1}\right)^4$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{n+1}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+1}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^4=3^4=81.$$

Ответ: 81

3.6. Число *e*

Рассмотрим бесконечную последовательность вида

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Швейцарский математик Якоб Бернулли установил, что по мере увеличения номера n ($n\to\infty$) величина u_n сходится к вполне определенному числу, которое принято обозначать буквой e ($u_n\to e$). Математически этот факт записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e часто встречается не только в математике, но и во многих естественных науках (физика, химия, биология и т.д.). Его можно вычислить с какой угодно точностью, задавая достаточно большие номера n. Приближенно $e = 2{,}718$.

3.7. Упражнения

1. Последовательность задана формулой $u_n = n^2 - 1$. Вычислить сумму первых трех членов последовательности.

2. Известны первый член $a_1 = 3$ и разность $d = 4$ арифметической прогрессии. Найти a_5.

3. Даны два члена арифметической прогрессии $a_3 = 5$ и $a_8 = 15$. Вычислить разность прогрессии.

4. Даны два члена арифметической прогрессии $a_3 = 8$ и $a_5 = 14$. Найти первый член прогрессии.

5. Известны первый член $a_1 = 1$ и разность $d = 2$ арифметической прогрессии. Найти сумму первых пяти слагаемых прогрессии.

6. Даны первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1 = 1$ и $q = 2$. Вычислить четвертый член прогрессии.

7. Даны два члена геометрической прогрессии $b_1 = 1$ и $b_4 = 27$. Найти знаменатель прогрессии.

8. Даны два члена геометрической прогрессии $b_2 = 6$ и $b_3 = 12$. Найти первый член прогрессии.

9. Даны первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1 = 2$ и $q = 3$. Вычислить сумму первых четырех членов прогрессии.

10. Известны первый член $b_1 = 4$ и знаменатель бесконечной геометрической прогрессии $q = 0{,}2$. Вычислить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

11. Последовательность задана формулой $a_n = 3n - 1$. Найдите номер члена последовательности, равного 122.

12. В арифметической прогрессии сумма второго и десятого членов равна 20. Найдите сумму первого и одиннадцатого членов прогрессии.

13. Найдите сумму всех целых чисел от 1 до 15 включительно.

14. Найдите количество нечетных чисел от 1 до 31 включительно.

15. Известен шестой член геометрической прогрессии $b_6 = 4$. Найти произведение пятого и седьмого членов прогрессии.

16. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$.

17. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-1}{3n+2}$.

18. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-n+3}{2n^2+4n+1}$.

19. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$.

20. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{n+2}\right)^3$.

4. УРАВНЕНИЯ

4.1. Основные понятия

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину. Неизвестная величина обычно обозначается буквой x.

Корнем уравнения называется число, которое при подстановке его вместо неизвестного обращает уравнение в верное равенство (тождество).

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней.

Пример. Решить уравнение $3x - 8 = x$.

Решение:

$3x - 8 = x$;

$2x = 8$;

$x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Пример. Решить уравнение $\frac{5}{x} = 0$.

Решение:

Уравнение $\frac{5}{x} = 0$ не имеет корней, так как делить на 0 нельзя, а при делении на другие числа в частном 0 не получится.

Ответ: корней нет ($\emptyset$).

Пример. Решить уравнение $x^2 - 4x = 0$.

Решение:

$x^2 - 4x = 0$;

$x(x - 4) = 0$.

Уравнение имеет два корня

$x_1 = 0, x_2 = 4$.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 4$.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 1 = 0$.

Решение:

$x^2 - 1 = 0$;

$(x-1)(x+1)=0.$

Уравнение имеет два корня

$x_1=-1, x_2=1.$

Ответ: $x_1=-1, x_2=1.$

Пример. Решить уравнение $x^2-4x+4=0.$

Решение:

$x^2-4x+4=0;$

$(x-2)^2=0;$

$x=2.$

Ответ: $x=2.$

Пример. Решить уравнение $x^2+1=0.$

Решение:

$x^2+1=0;$

$x^2=-1.$

Это уравнение не имеет действительных корней, так как $x^2 \geq 0$, $-1<0$. Таким образом, левая часть уравнения всегда больше правой части уравнения.

Ответ: корней нет ($\emptyset$).

4.2. Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$. Коэффициент a называют *первым коэффициентом*, коэффициент b – *вторым коэффициентом*, c – *свободным членом*.

Дискриминантом квадратного уравнения называется выражение

$$D=b^2-4ac.$$

При решении квадратного уравнения возможны три случая:

1. Дискриминант $D>0$. Уравнение имеет *два различных* действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Дискриминант $D = 0$. В данном случае существует только одно действительное число:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

удовлетворяющее квадратному уравнению. Это число называют *двукратным корнем*.

3. Дискриминант $D < 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 2 = 3x$.

Решение:

$x^2 + 2 = 3x;$

$x^2 - 3x + 2 = 0;$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0.$

Уравнение имеет два различных корня:

$x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1;$

$x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2\,.$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2.$

Пример. Решить уравнение $x^2 + 6x = -9.$

Решение:

$x^2 + 6x = -9;$

$x^2 + 6x + 9 = 0;$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$

Уравнение имеет двукратный корень

$x = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3.$

Ответ: $x = -3.$

Пример. Решить уравнение $x(x+2)+6=0$.

Решение:

$x(x+2)+6=0$;

$x^2+2x+6=0$;

$D=2^2-4\cdot 1\cdot 6=4-24=-20<0$.

Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: корней нет.

4.3. Теорема Виета

Приведенным квадратным уравнением называется квадратное уравнение, в котором первый коэффициент равен 1:

$$x^2+px+q=0,$$

где p и q – некоторые числа. Заметим, что любое квадратное уравнение можно свести к приведенному, разделив обе его части на коэффициент a.

Формулы корней приведенного квадратного уравнения можно представить в виде

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{D}}{2}, x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2},$$

где $D=p^2-4q$.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение – свободному члену этого уравнения

$$x_1+x_2=-p;$$

$$x_1x_2=q.$$

Пример. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+21x=7$. Найдите сумму $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

Решение:

$x^2+21x=7$;

$x^2+21x-7=0$.

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = -21,$

$x_1 x_2 = -7.$

Найдем требуемую сумму

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-21}{-7} = 3.$$

Ответ: 3.

На практике теорема Виета используется для нахождения корней квадратного уравнения методом подбора.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0.$

Решение:

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = 3;$

$x_1 x_2 = 2.$

Подбором найдем корни уравнения

$x_1 = 1; x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2.$

Пример. Решить уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0.$

Решение.

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = 7;$

$x_1 x_2 = 10.$

Подбором найдем корни уравнения

$x_1 = 2; x_2 = 5.$

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = 5.$

4.4. Биквадратное уравнение

Биквадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$. Это уравнение решается при помощи замены переменной $t = x^2$.

$$at^2 + bt + c = 0,$$

Таким образом, получаем квадратное уравнение относительно новой переменной t, причем $t \geq 0$.

Пример. Решить уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Решение:

Введем новую переменную $t = x^2$. Уравнение принимает вид

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

При помощи теоремы Виета найдем корни последнего уравнения

$$t = 1;\ t = 4.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$x^2 = 1;\ x^2 = 4.$$

Таким образом, уравнение имеет четыре корня

$$x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 2.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 2$.

Пример. Решить уравнение $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

Решение:

Введем новую переменную $t = x^2$. Уравнение принимает вид

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

При помощи теоремы Виета найдем корни последнего уравнения

$$t = -2;\ t = 1.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$x^2 = -2;\ x^2 = 1.$$

Первое уравнение не имеет корней, так как в правой части стоит отрицательное число, а величина $x^2 \geq 0$. Второе уравнение имеет корни

$$x_{1,2} = \pm 1.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1$.

4.5. Рациональные уравнения

Уравнение вида

$$\frac{P}{Q} = 0,$$

где $\frac{P}{Q}$ – рациональная дробь, называется рациональным уравнением.

Пример. Решить уравнение $\frac{x^2-5x+6}{3x-9} = 0$.

Решение:

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения, получим

$x^2 - 5x + 6 = 0.$

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = 5;$

$x_1 x_2 = 6.$

Подбором находим корни

$x_1 = 2; x_2 = 3.$

Осталось проверить выполнение условия

$3x - 9 \neq 0.$

Решив неравенство, получим

$x \neq 3.$

Этому условию удовлетворяет корень $x = 2$. Корень $x = 3$ – посторонний, его в решение не включают (на 0 делить нельзя).

Ответ: $x = 2$.

Пример. Решить уравнение $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$.

Решение:

Преобразуем уравнение

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)};$$

$$\frac{x(x-3)+x-5}{x(x-5)}=\frac{x+5}{x(x-5)};$$

$$\frac{x(x-3)+x-5}{x(x-5)}-\frac{x+5}{x(x-5)}=0;$$

$$\frac{x(x-3)+x-5-(x+5)}{x(x-5)}=0;$$

$$\frac{x^2-3x+x-5-x-5}{x(x-5)}=0;$$

$$\frac{x^2-3x-10}{x(x-5)}=0.$$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения, получим

$x^2-3x-10=0.$

Найдем корни по теореме Виета

$x_1+x_2=3;$
$x_1\cdot x_2=-10.$

Подбором находим $x_1=-2; x_2=5.$

Проверим выполнение условия

$x(x-5)\neq 0.$

Корень $x=5$ не удовлетворяет данному условию. Таким образом, уравнение имеет один корень $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

4.6. Уравнения с модулем

Рассмотрим примеры решений уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Пример. Решить уравнение $|x-3|=4.$

Решение:

По определению модуля имеем

$x-3=-4$ или $x-3=4.$

Таким образом, получаем два корня

$x_1 = -1; x_2 = 7.$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 7.$

Пример. Решить уравнение $|x - 1| = -2.$

Решение:

По определению модуля выражение в левой части уравнения неотрицательно, т.е. $|x - 1| \geq 0$. В правой части стоит отрицательное число (-2). Получили противоречие. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

4.7. Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие неизвестную под знаком корня, называются *иррациональными.*

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x - 1} = 4.$

Решение:

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$\left(\sqrt{x - 1}\right)^2 = 4^2,$

следовательно,

$x - 1 = 16, x = 17.$

Ответ: $x = 17.$

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x - 4} + 1 = 0.$

Решение:

Перенесем 1 из левой части в правую часть. В результате получим

$\sqrt{x - 4} = -1.$

По определению арифметического квадратного корня выражение в левой части уравнения неотрицательно, т.е. $\sqrt{x - 4} \geq 0$. В правой части стоит отрицательное число (-1). Получили противоречие. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Пример. Решите уравнение: $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

Решение:

Введем переменную

$t = \sqrt{x-1} \geq 0$.

По определению арифметического квадратного корня должно выполняться условие $t \geq 0$.

Выразим x через t:

$t^2 = x - 1; x = t^2 + 1$.

Получим уравнение

$t^2 - 3t + 2 = 0$.

Найдем корни по теореме Виета

$t = 1, t = 2$.

Найденные корни удовлетворяют условию $t \geq 0$.

Выполним обратную замену

$\sqrt{x-1} = 1;\ \sqrt{x-1} = 2$.

Решив уравнения, получим $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$.

Ответ: $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$.

4.8. Системы уравнений

Упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$ называется *решением системы уравнений* с двумя неизвестными x и y

$$\begin{cases} f(x,y) = 0; \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

если при подстановке вместо x и y соответственно чисел x_0 и y_0 каждое из уравнений системы обращается в верное числовое равенство.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

Решение:

Для решения системы уравнений воспользуемся *методом подстановки.*

Выразив из первого уравнения системы переменную x через переменную y, получим

$x = 5 - 2y$.

Подставим полученное выражение во второе уравнение. В результате получим

$3(5 - 2y) + 2y = 7$.

Решим полученное уравнение относительно y

$15 - 6y + 2y = 7, 15 - 4y = 7, -4y = -8, y = 2$.

Подставив найденное значение y в выражение для x, найдем

$x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 2$=5-4=1.

Таким образом, решение системы имеет вид:

$x = 1, y = 2$.

Ответ: $(1; 2)$.

Для решения системы можно было воспользоваться *методом сложения.* Этот метод удобно использовать в тех случаях, когда модули коэффициентов при одной из неизвестных в первом и втором уравнениях системы совпадают. Если коэффициенты при одной из неизвестных совпадают по модулю и имеют разные знаки, то при сложении эта неизвестная сокращается. В результате получаем уравнение относительно одной неизвестной. Если коэффициенты при одной из неизвестных совпадают по модулю и имеют одинаковые знаки, тогда вместо сложения выполняется операция вычитания.

В системе уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

коэффициенты при неизвестной y в первом и втором уравнениях совпадают по абсолютной величине и имеют одинаковые знаки. В соответствии с методом сложения из первого уравнения вычтем второе уравнение. В результате получим

$-2x = -2, x = 1$.

Подставив найденное значение x в первое уравнение, найдем

$1 + 2y = 6, 2y = 4, y = 2$.

Таким образом, получили то же самое решение, что и выше.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y}=4,\\ 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=3.\end{cases}$

Решение:

Введем новые переменные

$a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}.$

Выполнив замену переменных в исходной системе уравнений, получим

$$\begin{cases}a+2b=4,\\ 2a-b=3.\end{cases}$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом сложения. Умножив обе части второго уравнения на 2, получим

$$\begin{cases}a+2b=4,\\ 4a-2b=6.\end{cases}$$

Сложив эти уравнения, найдем

$a+4a+2b-2b=4+6;$

$5a=10, a=2.$

Подставим найденное значение a в первое уравнение системы. В результате получим

$2+2b=4, 2b=4, b=1.$

Таким образом,

$a=2,\ b=1.$

Подставив вместо a и b их выражения через x и y соответственно, получим

$\sqrt{x}=2,\ \sqrt{y}=1,$

следовательно,

$x=4,\ y=1.$

Ответ: $(4;1)$.

4.9. Упражнения

Решить уравнения:

1. а) $x - \frac{x}{5} = 4$; б) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$;

2. а) $x^2 - 6x = 0$; б) $x^2 + 9x = 0$;

3. а) $x^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 25 = 0$;

4. а) $x^2 + 6 = 7x$; б) $x(x - 8) + 15 = 0$;

5. а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

6. а) $\frac{x^2 - 8x + 7}{2x - 2} = 0$; б) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 0$;

7. а) $|2x + 9| = 5$; б) $|2x - 5| = 1$;

8. а) $\sqrt{x^2 - 5} = 2$; б) $\sqrt{x^2 - 9} = 4$;

Решить системы уравнений:

9. а) $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x + 2y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 3, \\ x + 5y = 6; \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x - 1} + 2\sqrt{y - 3} = 3, \\ 4\sqrt{x - 1} - \sqrt{y - 3} = 3. \end{cases}$

5. НЕРАВЕНСТВА

5.1. Основные понятия

Неравенством называется выражение, содержащее один из знаков: «больше» (>), «меньше» (<), «больше или равно» (≥), «меньше или равно» (≤). В зависимости от знака неравенства мы имеем *строгие* (>, <) или *нестрогие* (≥, ≤) неравенства. Например, неравенства $2x - 4 < 2$, $-3x + 9 > 0$ – строгие, а неравенства $4x - 4 \leq 0$, $x + 3 \leq 2$ – нестрогие.

Решением неравенства называются все значения неизвестной величины, при которых исходное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Пример. Решить неравенство $2x - 4 < 2$.

Решение:

$2x - 4 < 2;$

$2x < 6;$

$x < 3.$

Таким образом, решением неравенства служат все значения величины x, меньшие 3, т.е. $x \in (-\infty; 3)$. Неравенство $x < 3$– строгое, поэтому в записи решения после числа 3 стоит круглая скобка. Знак бесконечности всегда записывается с круглой скобкой.

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом:

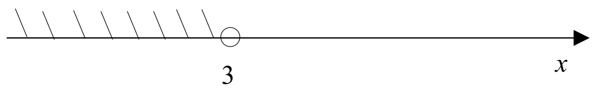


Рис. 9. Решение неравенства $2x - 4 < 2$

Отметим, что граничная точка строгого неравенства не закрашивается.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

Пример. Решить неравенство $5x + 4 \geq 14$.

Решение:

$5x + 4 \geq 14;$

$5x \geq 1;,$

$x \geq 2.$

Решением неравенства служат все значения неизвестной x, большие или равные 2, т.е. $[2;\ +\infty)$.

В данном примере неравенство $x \geq 2$– нестрогое, поэтому перед числом 2 стоит квадратная скобка.

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом:

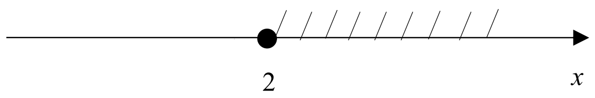


Рис. 10. Решение неравенства $5x + 4 \geq 14$

Граничная нестрогого неравенства всегда рисуется закрашенной.

Ответ: $[2;\ +\infty)$.

Следует помнить, что при умножении или делении неравенства на *положительное число* знак неравенства *сохраняет*ся, а при умножении или делении неравенства на *отрицательное чис*ло знак неравенства *меняетс*я на *противоположный*.

Пример. Решить неравенство $x \geq 4x + 9$.

Решение:

$x \geq 4x + 9;$

$x - 4x \geq 9;$

$-3x \geq 9;$

$x \leq -3.$

$x \in (-\infty; 3].$

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом:

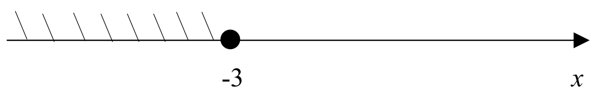


Рис. 11. Решение неравенства $x \geq 4x + 9$

Ответ: $x \in (-\infty; 3]$.

Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x - 2 \geq 7; \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 7; \\ 2x \leq 10. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq 9; \\ x \leq 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3; \\ x \leq 5. \end{cases}$$

В данном примере решением служит *отрезок* от 3 до 5, полученный в результате пересечения решений неравенств $x \geq 3$ и $x \leq 5$, т.е. $x \in [3; 5]$.

На числовой оси решение системы изображается следующим образом:

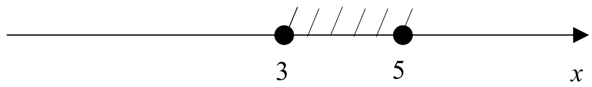


Рис. 12. Решение системы неравенств $\begin{cases} 3x - 2 \geq 7; \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Ответ: $[3; 5]$.

Пример. Решить двойное неравенство $3 \leq 2x - 1 \leq 5$.

Решение:

Решить двойное неравенство можно путем замены его системой неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 5, \\ 2x - 1 \geq 3; \end{cases} \begin{cases} 2x \leq 6, \\ 2x \geq 4; \end{cases} \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$x \in [2; 3]$.

На числовой оси решение системы изображается следующим образом:

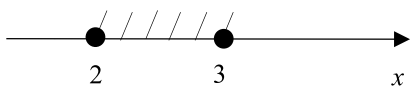


Рис. 13. Решение двойного неравенства $3 \leq 2x - 1 \leq 5$

Ответ: $x \in [2; 3]$.

5.2. Рациональные неравенства

Неравенства вида

$$\frac{P}{Q} < 0, \qquad \frac{P}{Q} \leq 0, \qquad \frac{P}{Q} > 0, \qquad \frac{P}{Q} \geq 0,$$

где $\frac{P}{Q}$ – рациональная дробь, называются рациональными неравенствами.

Пример. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{x-4} < 0.$

Решение:

Для решения рациональных неравенств обычно применяют *метод интервалов*. В соответствии с этим методом на числовой прямой *отмечаются все точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель* рационального выражения. Затем на каждом из полученных интервалов *определяется знак выражения*. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак выражения в какой-либо *внутренней точке* рассматриваемого промежутка.

В данном примере имеются только две характерные точки

$$x = 2 \text{ и } x = 4,$$

обращающие в нуль числитель и знаменатель соответственно. Отметим эти точки на числовой прямой.

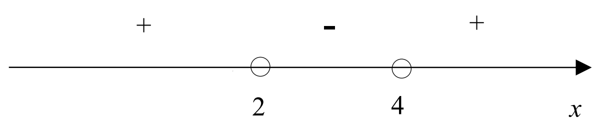


Рис.14. Решение неравенства $\frac{x-2}{x-4} < 0$.

Так как неравенство строгое, характерные точки на числовой прямой не закрашиваются.

Теперь определим знаки выражения на каждом из трех промежутков. Обычно исследование знака проводят справа налево.

При $x > 4$ возьмем $x = 5$, тогда $\frac{5-2}{5-4} = 3 > 0$. Ставим знак «+».

При $2 < x < 4$ возьмем $x = 3$, тогда $\frac{3-2}{3-4} = -1 < 0$. Ставим знак «-».

При $x < 2$ возьмем $x = 0$, тогда $\frac{0-2}{0-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$. Ставим знак «+».

Из рисунка видно, что выражение $\frac{x-2}{x-4}$ принимает отрицательные значения на интервале (2; 4), т.е. $x \in (2; 4)$.

Ответ: $(2; 4)$.

Пример. Решить неравенство $\frac{x^2-9}{x-1} \geq 0$.

Решение:

Представим неравенство в виде

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x-1} \geq 0.$$

Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$x = -3, x = 1, x = 3.$

Отметим эти точки на числовой оси.

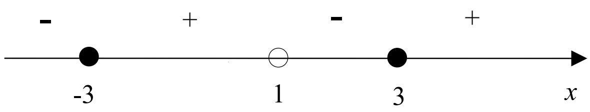


Рис. 15. Решение неравенства $\frac{x^2-9}{x-1} \geq 0$

Так как неравенство не строгое, точки $x = -3$ и $x = 3$ на числовой прямой закрашены. Точка $x = 1$ обращает в нуль знаменатель, поэтому она не закрашивается (на ноль делить нельзя).

Теперь определим знаки выражения на каждом из промежутков.

При $x > 3$ возьмем $x = 5$, тогда $\frac{(5+3)(5-3)}{5-1} = 4 > 0$. Ставим знак «+».

При $1 < x < 3$ возьмем $x = 2$, тогда $\frac{(2+3)(2-3)}{2-1} = -5 < 0$. Ставим знак «-».

При $-3 < x < 1$ возьмем $x = 2$, тогда $\frac{(0+3)(0-3)}{0-1} = 9 > 0$. Ставим знак «+».

При $x < -3$ возьмем $x = -4$, тогда $\frac{(-4+3)(-4-3)}{-4-1} = -\frac{7}{5} < 0$. Ставим знак «-».

Решением неравенства является *объединение* двух промежутков: $[-3; 1)$ и $[-3; +\infty)$, то есть

$x \in [-3; 1) \cup [3; +\infty).$

Ответ: $[-3; 1) \cup [3; +\infty)$..

Пример. Решить неравенство $\frac{x^3 + 2x^2}{x-3} \geq 0.$

Решение:

Представим неравенство в виде

$$\frac{x^2(x+2)}{x-3} \geq 0.$$

Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$x = -2, x = 0, x = 3.$

Отметим эти точки на числовой оси.

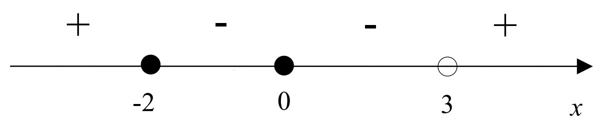


Рис. 16. Решение неравенства $\frac{x^3+2x^2}{x-3} \geq 0.$

Так как неравенство нестрогое, точки $x = -2$ и $x = 0$ на числовой прямой закрашены. Точка $x = 3$ обращает в нуль знаменатель, поэтому она не закрашивается (на ноль делить нельзя).

Теперь определим знаки выражения на каждом из промежутков.

При $x > 3$ возьмем $x = 4$, тогда $\frac{4^2(4+2)}{4-3} = 96 > 0$. Ставим знак «+».

При $0 < x < 3$ возьмем $x = 2$, тогда $\frac{2^2(2+2)}{2-3} = -16 < 0$. Ставим знак «-».

При $-2 < x < 0$ возьмем $x = -1$, тогда $\frac{(-1)^2(-1+2)}{-1-3} = -\frac{1}{4} < 0$. Ставим знак «-».

При $x < -2$ возьмем $x = -3$, тогда $\frac{(-3)^2(-3+2)}{-3-3} = \frac{3}{2} > 0$. Ставим знак «+».

Главная особенность данного примера: при переходе через точку $x = 0$ знак выражения не изменяется (*точка четной кратности*).

Из рисунка видно, что решением неравенства является *объединение* двух промежутков $(-\infty; 2]$ и $(3; +\infty)$, а также изолированной точки $x = 0$. Если решение неравенства содержит изолированные точки, их заключают в фигурные скобки. Таким образом, решение неравенства в данном примере имеет вид

$x \in (-\infty; 2] \cup \{0\} \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 2] \cup \{0\} \cup (3; +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $$\frac{x-1}{x^2-5x+6} < 0.$$

Решение:

Точка $x = 1$ обращает в нуль числитель. Чтобы найти точки, обращающие в нуль знаменатель, надо найти корни квадратного уравнения

$x^2 - 5x + 6 = 0.$

По теореме Виета имеем

$x_1 + x_2 = 5;$

$x_1 x_2 = 6.$

Подбором находим корни:

$x_1 = 2, x_2 = 3.$

Представим знаменатель дроби в виде разложения по корням:

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$

Таким образом, исходное неравенство примет вид

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0.$$

Отметим найденные характерные точки на числовой оси. Определим знаки выражения на каждом из промежутков, аналогично рассмотренным выше примерам (рис. 17).

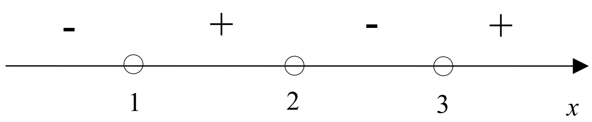


Рис. 17. Решение неравенства $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0.$

Из рисунка видно, что решением неравенства является *объединение* двух промежутков $(-\infty; 1)$ и $(2; 3)$, т.е.

$x \in (-\infty; 1)) \cup (2; 3).$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; 3).$

Пример. Решить неравенство $\frac{2x-6}{x^2+1} < 0.$

Решение:

В данном примере нет необходимости использовать метод интервалов. Действительно, выражение в знаменателе больше нуля при любых значениях x. Следовательно, исходное неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$2x - 6 < 0.$

Решив это неравенство, получим

$x < 3.$

Таким образом,

$x \in (-\infty; 3)$.

На числовой оси решение системы изображается следующим образом:

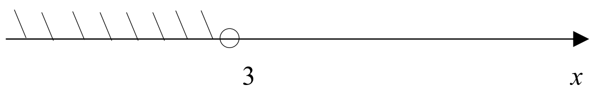


Рис. 18. Решение неравенства $\frac{2x-6}{x^2+1} < 0$

Ответ: $(-\infty; 3)$.

Пример. Решить неравенство $x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2$.

Решение:

Преобразуем неравенство

$$x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2 + 2(x-5)}{x-5} \leq 2;$$

$$x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2}{x-5} + 2 \leq 2;$$

$$x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2}{x-5} \leq 0;$$

$$x^2\left(x + 9 + \frac{40}{x-5}\right) \leq 0;$$

$$x^2\left(\frac{x^2 + 9x - 5x - 45 + 40}{x-5}\right) \leq 0;$$

$$x^2\left(\frac{x^2 + 4x - 5}{x-5}\right) \leq 0.$$

Разложим на множители выражение

$x^2 + 4x - 5 = (x - x_1)(x - x_2)$.

По теореме Виета имеем

$x_1 + x_2 = -4;$

$x_1 x_2 = -5.$

Подбором находим

$x_1 = -5, x_2 = 1.$

Таким образом,

$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1).$

Неравенство запишется в виде

$$x^2 \frac{(x+5)(x-1)}{x-5} \le 0.$$

Отметим найденные характерные точки на числовой оси. Определим знаки выражения на каждом из промежутков, аналогично рассмотренным выше примерам (рис. 19).

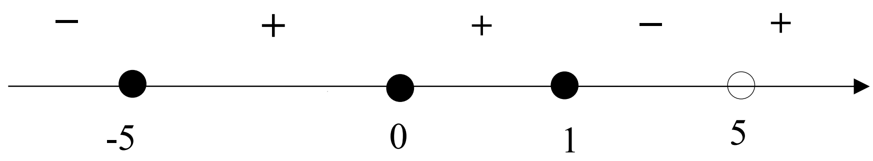


Рис. 19. Решение неравенства $x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2+2x-10}{x-5} \le 2.$

Ответ: $(-\infty;\ -5] \cup \{0\} \cup [1; 5)$.

5.3. Неравенства, содержащие знак модуля

Рассмотрим примеры решения неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Пример. Решить неравенство $|x-1| - 2 \le 0$.

Решение:

Для решения неравенства, содержащего знак модуля, воспользуемся методом интервалов. Сначала найдем точки, *обращающие в нуль выражение, стоящее в левой части неравенства*. Для этого надо найти корни уравнения

$|x-1| - 2 = 0.$

Перенесем число 2 в правую часть. В результате получим

$|x-1| = 2.$

По определению модуля имеем

$x - 1 = 2$ или $x - 1 = -2$.

Таким образом, получаем два корня

$x = 3, x = -1.$

Отметим эти точки на числовой прямой.

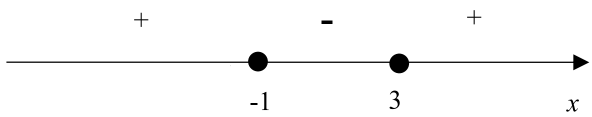


Рис. 20. Решение неравенства $|x-1|-2 \leq 0$

Так как неравенство нестрогое, характерные точки на числовой прямой закрашиваются.

Теперь определим знаки выражения $(|x-1|-2)$ на каждом из трех промежутков.

При $x > 3$ возьмем $x = 5$, тогда $|5-1|-2 = 4-2 = 2 > 0$. Ставим знак «+».

При $-1 \leq x \leq 3$ возьмем $x = 0$, тогда $|0-1|-2 = 1-2 = -1 < 0$. Ставим знак «-».

При $x < -1$ возьмем $x = -2$, тогда $|-1-2|-2 = 3-2 = 1 > 0$. Ставим знак «+»

Из рисунка видно, что решением данного неравенства является отрезок $[-1; 3]$.

Ответ: $[-1; 3]$.

Пример. Решить неравенство $|x+4|+1 \leq 0$.

Решение:

По определению модуля имеем

$|x+4| \geq 0$.

Следовательно,

$|x+4|+1>0$

при любых значениях x. Таким образом, решение исходного неравенства представляет собой пустое множество, т.е.

$x \in \varnothing$.

Ответ: $\varnothing$.

5.4. Иррациональные неравенства

Неравенства, содержащие неизвестную под знаком корня, называются *иррациональными*. При решении неравенств, содержащих знак квадратного корня, следует помнить, что *подкоренное выражение должно быть неотрицательной величиной*.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{x-2} \le 3$.

Решение:

Исходное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} x-2 \ge 0; \\ x-2 \le 9. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$\begin{cases} x \ge 2; \\ x \le 11. \end{cases}$$

Таким образом, решением данного неравенства служит отрезок $[2; 11]$.

Ответ: $[2; 11]$.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{3x+1} + 2 \le 0$.

Решение:

По определению арифметического квадратного корня

$$\sqrt{3x+1} \ge 0.$$

Следовательно,

$$\sqrt{3x+1} + 2 > 0$$

при всех допустимых значениях x. Таким образом, решение исходного неравенства представляет собой пустое множество, т.е.

$$x \in \varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} + 3 > 0$.

Решение:

По определению арифметического квадратного корня

$\sqrt{x-2} \ge 0$ и $\sqrt{6-x} \ge 0$

при всех допустимых значениях, следовательно,

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}+3>0$$

при всех *допустимых* значениях x. Таким образом, *решением* данного неравенства служит множество всех *допустимых значений* x, которое определяется из системы

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 6-x\geq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$\begin{cases} x\geq 2, \\ x\leq 6. \end{cases}$$

Таким образом, решением исходного неравенства является отрезок $[2;6]$.

Ответ: $[2;6]$.

5.5. Упражнения

Решить неравенства:

1. а) $5x-16\geq x$; б) $7x-15\geq 2x$;
2. а) $x\geq 2(x-4)$; б) $4x\leq 5(x-1)$;
3. а) $\dfrac{2x-1}{2}<0{,}5x+2$; б) $\dfrac{x+0{,}5}{3}+\dfrac{x-1}{2}<1{,}5-x$.

Решить системы неравенств:

4. а) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{2}\geq\dfrac{x-2}{3}, \\ 2x\geq 3x-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{3}\geq\dfrac{2x+8}{6}, \\ x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{4}\leq 10; \end{cases}$
5. а) $\begin{cases} x-1\geq\dfrac{x+2}{3}, \\ 2x\geq\dfrac{x+2}{3}-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}2x\geq x-4, \\ x\geq\dfrac{x+12}{3}. \end{cases}$

Решить неравенства:

6. а) $-7\leq 2x+1\leq 9$; б) $4\leq 4x-4\leq 12$;
7. а) $\dfrac{2x-4}{x-6}<0$; б) $\dfrac{x-6}{3x-6}<0$;

8. а) $\dfrac{x-4}{4x-8} > 0;$ б) $\dfrac{2x-4}{3x-9} > 0;$

9. а) $\dfrac{x}{(x+2)(x-4)} \geq 0;$ б) $\dfrac{x-2}{x(x-5)} \geq 0;$

10. а) $\dfrac{(x-1)^2}{(x-4)(x-6)} \geq 0;$ б) $\dfrac{(x-2)^2}{x(x-4)} \geq 0;$

11. а) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} < 0;$ б) $\dfrac{x}{x^2-7x+10} < 0;$

12. а) $\dfrac{x^2+2}{x+2} < 0;$ б) $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} < 0;$

13. а) $|x-1| - 3 \leq 0;$ б) $|x-2| - 4 \leq 0;$

14. а) $|x-4| - 1 > 0;$ б) $|x+1| - 2 > 0;$

15. а) $\sqrt{2x-4} - 2 < 0;$ б) $\sqrt{1-x} - 2 < 0.$

6. ФУНКЦИИ

6.1. Определение функции

Функцией $y = f(x)$ называется правило, по которому каждому значению величины x из некоторого множества X ставится в соответствие единственное значение величины y из множества Y.

Величина x называется *независимой переменной*, y – *зависимой переменной*. Множество X называется *областью определения функции* $D(y)$, множество Y – *множеством значений* функции $E(y)$.

Обозначение $f(x)$ позволяет компактно записывать результат подстановки значения независимой переменной в выражение функции.

Пример. Дана функция $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Вычислить $f(3)$.

Решение:

$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = 9 - 9 + 1 = 1.$

Ответ: $f(3) = 1$

Пример. Дана функция $f(x) = 2x + 1$. Вычислить $f(f(3))$.

Решение:

Сначала найдем

$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$

Подставив найденное значение $f(3) = 7$ в выражение функции, получим

$f\big(f(3)\big) = f(7) = 2 \cdot 7 = 1 = 15.$

Ответ: $f\big(f(3)\big) = 15.$

Пример. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-5}}$.

Решение:

Найти область определения значит найти все значения переменной x, при которых выражение $f(x)$, определяющее функцию, имеет смысл.

Выражение $\sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$ имеет смысл, если подкоренное выражение неотрицательно:

$$\frac{x-2}{x-5} \geq 0.$$

Таким образом, для нахождения области определения требуется решить рациональное неравенство. Для решения полученного неравенства воспользуемся методом интервалов. Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$x = 2, x = 5.$

Отметим эти точки на числовой прямой.

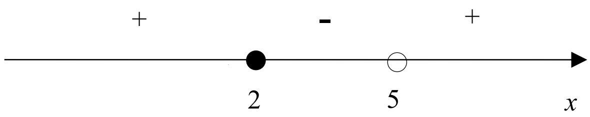


Рис. 21. Область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$.

Так как неравенство нестрогое, точка $x = 2$ на числовой прямой закрашивается. Точка $x = 5$ обращает в нуль знаменатель дроби, поэтому эта точка не закрашивается.

Теперь определим знаки выражения на каждом из трех промежутков.

При $x > 5$ возьмем $x = 6$, тогда $\frac{6-2}{6-5} = 4 > 0$. Ставим знак «+».

При $2 \leq x < 5$ возьмем $x = 3$, тогда $\frac{3-2}{3-5} = -\frac{1}{2} < 0$. Ставим знак «-».

При $x < 2$ возьмем $x = 0$, тогда $\frac{0-2}{0-5} = \frac{2}{5} > 0$. Ставим знак «+».

Из рисунка видно, что решением неравенства является объединение двух промежутков $(-\infty; 2]$ и $(5; +\infty)$, т.е.

$D(y) = (-\infty; 2] \cup (5; +\infty).$

Ответ: $D(y) = (-\infty; 2] \cup (5; +\infty).$

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости *OXY*, координаты *x* и *y* которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Ниже приведены графики простейших алгебраических функций.

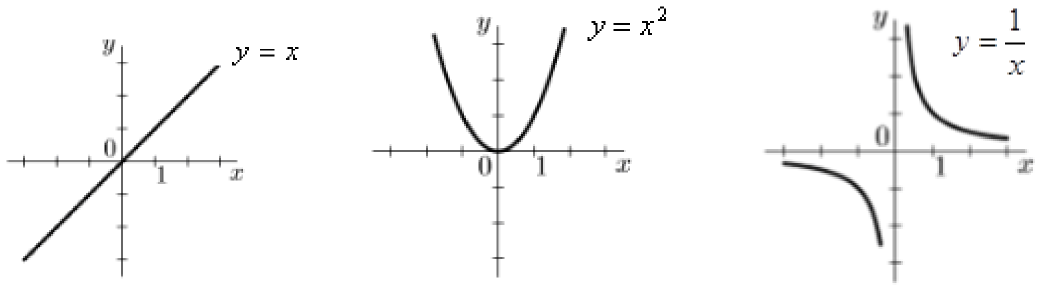


Рис. 22. Графики простейших алгебраических функций

6.2. Линейная функция

Функция $y = x$ – частный случай *линейной функции*

$$y = kx + b.$$

Здесь k– угловой коэффициент, b– свободный член. Областью определения линейной функции служит все множество действительных чисел. График функции $y = kx + b$ есть прямая линия. Поэтому для построения графика, очевидно, достаточно двух точек.

Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая с положительным направлением оси *OX*.

Если $k > 0$, то прямая образует острый угол с осью OX (функция возрастает), если $k < 0$ – тупой угол с осью OX (функция убывает).

Если $k = 0$, прямая проходит через точку с координатами $(0;\ b)$ параллельно оси OX.

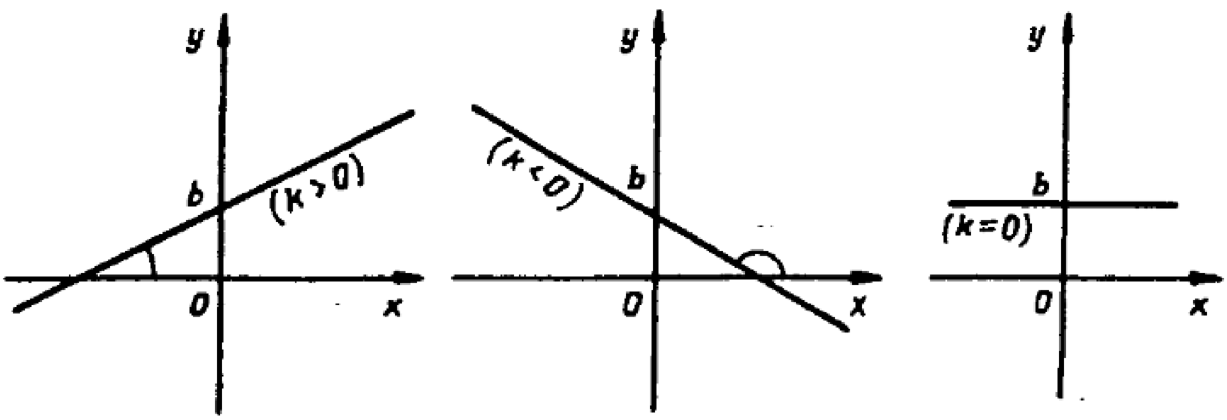


Рис. 23. Графики линейной функции $y = kx + b$

Пример. Даны координаты двух точек прямой (2;5) и (3;7). Вычислить угловой коэффициент и свободный член линейной функции.

Решение:

Подставив координаты точек (2; 5) и (3; 7) в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2k + b = 5, \\ 3k + b = 7. \end{cases}$$

Для решения этой системы воспользуемся методом сложения. Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение. В результате получим

$k = 2$.

Подставив найденное значение k в первое уравнение, найдем

$2 \cdot 2 + b = 5, b = 1$.

Таким образом, уравнение прямой имеет вид: $y = 2x + 1$.

Ответ: $k = 2, b = 1$.

6.3. Квадратичная функция

Функция $y = x^2$ – это частный случай *квадратичной функции*

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c – заданные числа, причем $a \neq 0$.

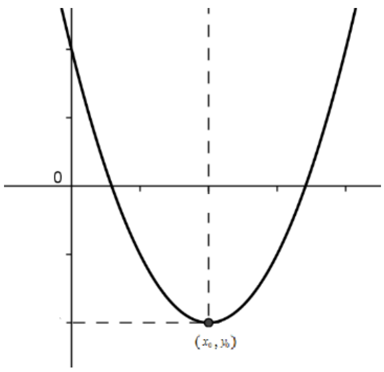


Рис. 24. Вершина параболы

Областью определения квадратичной функции являются все действительные числа.

График квадратичной функции называется параболой. Любую квадратичную функцию можно преобразовать к виду, удобному для построения графика функции: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Здесь x_0 , y_0 – координаты *вершины параболы*, которые вычисляются по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = -\frac{D}{4a},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Направление ветвей параболы зависит от знака коэффициента a:

если $a > 0$– ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$– ветви параболы направлены вниз.

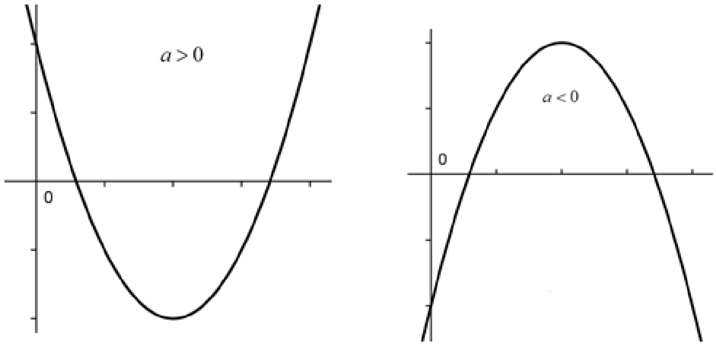


Рис. 25. Направления ветвей параболы

График параболы $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ можно получить из графика $y = ax^2$ при помощи сдвига по осям OX и OY так, чтобы вершина параболы совпала с точкой $(x_0; y_0)$.

Пример. Преобразовать квадратичную функцию $y = x^2 - 2x + 3$ к виду $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ и построить график этой функции.

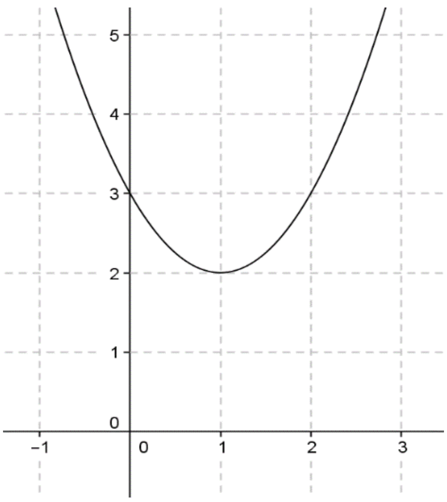


Рис. 26. График функции $y = x^2 - 2x + 3$

Решение:

$$x_0 = -\frac{-2}{2} = 1, \qquad y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2.$$

Таким образом, квадратичную функцию можно представить в виде: $y = (x - 1)^2 + 2$.

График этой функции можно получить из графика $y = x^2$ при помощи сдвига на одну единицу в направлении оси OX и на две единицы в направлении оси OY.

Ответ: $y = (x - 1)^2 + 2$.

Следует отметить, что правила сдвига графиков функций вдоль координатных осей являются универсальными, т.е. справедливы для любой функции $y = f(x)$.

Пример. Решить неравенство $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Решение:

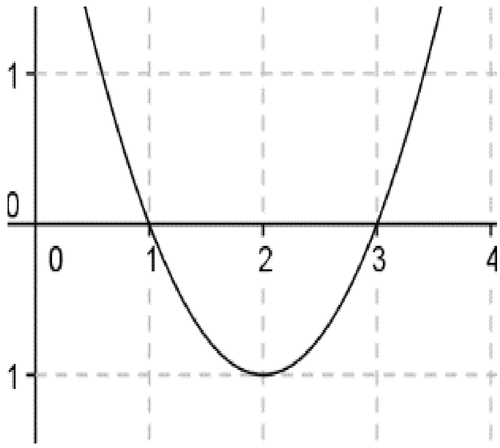


Рис. 27. График $y = x^2 - 4x + 3$

Для решения неравенства воспользуемся графическим методом. Графиком функции $y = x^2 - 4x + 3$ служит парабола, ветви которой направлены вверх. Парабола лежит ниже оси OX на промежутке $[x_1, x_2]$, где x_1, x_2 корни уравнения

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

По графику находим корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Таким образом, решением неравенства служит промежуток [1; 3].

Ответ: [1; 3].

6.4. Функция $y = k/x$

Функция $y = \frac{1}{x}$ – это частный случай *функции*

$$y = \frac{k}{x},$$

где k – заданное число, причем $k \neq 0$.

Область определения этой функции есть множество всех действительных чисел, за исключением нуля.

Графиком функции $y = \frac{k}{x}$, является гипербола, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат.

Если $k > 0$, ветви гиперболы расположены в I и III координатных углах; если $k < 0$ – во II и IV координатных углах.

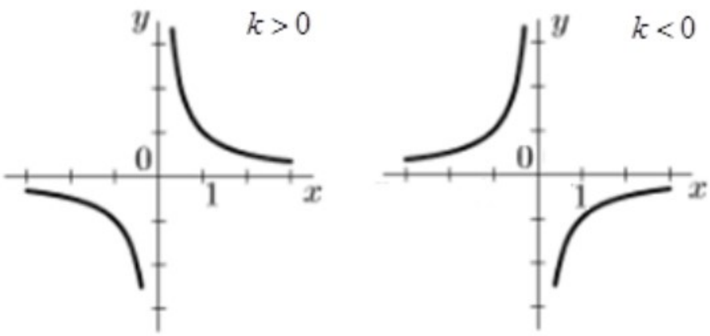


Рис. 28. Гипербола $y = \frac{k}{x}$.

Пример. Построить график функции $y = \dfrac{1}{x-1} + 2.$

Решение.

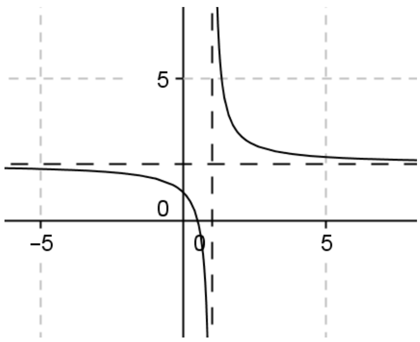
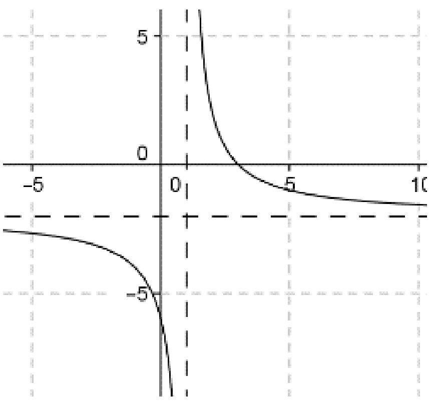


График этой функции можно получить из графика $y = \frac{1}{x}$ при помощи сдвига на одну единицу в направлении оси OX и на две единицы в направлении оси OY.

Рис. 29. График $y = \frac{1}{x}$

Пример. Решить неравенство $y = \dfrac{4}{x-1} - 2 \leq 0.$

Решение.



Для решения неравенства воспользуемся графическим методом. Графиком функции служит гипербола. Построим этот график. По рисунку видно, что гипербола находится ниже оси OX на объединении промежутков

$$(-\infty; 0) \cup (x_0; +\infty).$$

Рис. 30. График $y = \frac{4}{x-1} - 2$

Здесь x_0 – точка пересечения правой ветви гиперболы с осью OX. Точку x_0 найдем из уравнения

$$\frac{4}{x-1} - 2 = 0.$$

Преобразуем уравнение и найдем x_0:

$$\frac{4}{x-1} = 2; 4 = 2x - 2; 2x = 6; x = 3.$$

Таким образом, решением неравенства служит объединение промежутков $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Ответ:$(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

6.5. Функция $y = |x|$

Областью определения функции $y = |x|$ служат все действительные числа, т.е. $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$. По определению модуля график этой функции располагается выше оси OX, т.е. $E(y) = [0; +\infty)$.

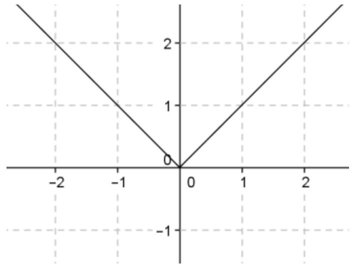


Рис. 31. График функции $y = |x|$

Пример. Построить график функции $y = |x - 1| + 2$.

Решение:

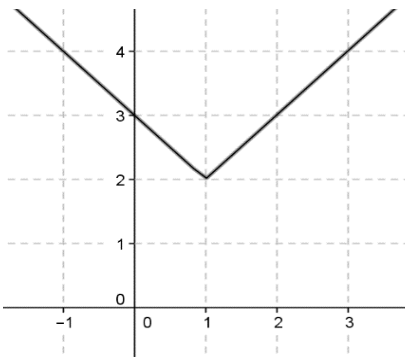
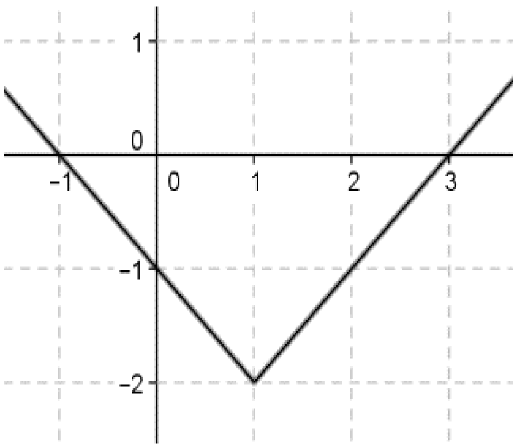


График этой функции можно получить из графика $y = |x|$ при помощи сдвига на одну единицу в направлении оси OX и на две единицы в направлении оси OY.

Рис. 32. График $y = |x - 1| + 2$

Пример. Решить неравенство $y = |x - 1| - 2 \leq 0$.

Решение:



Для решения неравенства воспользуемся графическим методом. Построим график этой функции. График лежит ниже оси OX на промежутке $[x_1, x_2]$, где x_1, x_2 уравнения

$$y = |x - 1| - 2 = 0.$$

Рис. 33. График $y = |x - 1| - 2$

По графику найдем корни этого уравнения $x_1 = -1$. $x_2 = 3$. Таким образом, решением неравенства служит промежуток [-1; 3]

Ответ: [-1; 3].

6.6. Уравнение окружности

Окружностью называется множество точек на плоскости, удаленных на одинаковое расстояние (радиус) от данной точки (центр). Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом равным R имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

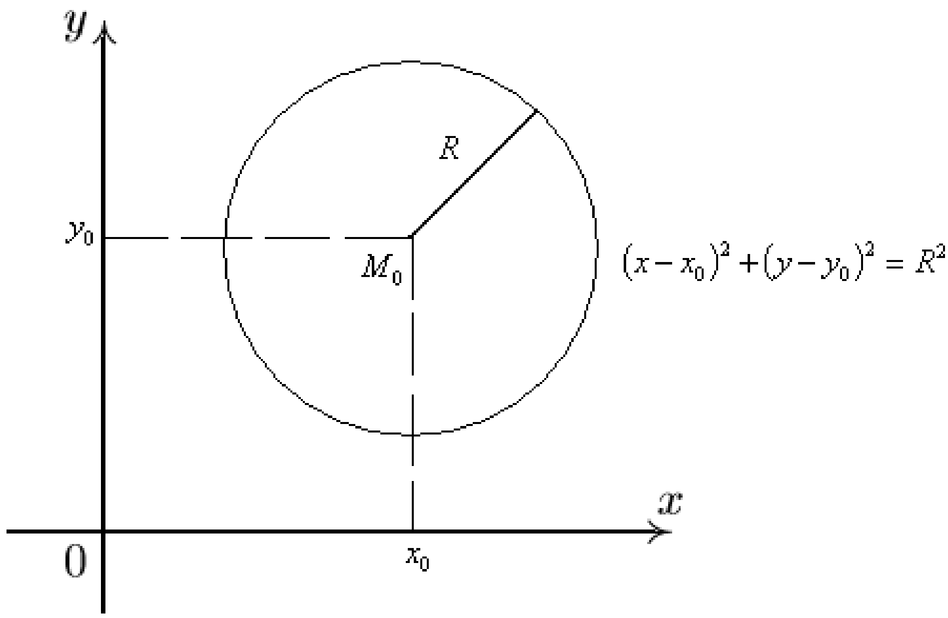


Рис. 34. Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$.

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то последнее уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Пример. Составить уравнение окружности с центром в точке $(1;\ 2)$ и с радиусом равным 5.

Решение:

Подставив числовые значения в уравнение окружности, получим

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$

Ответ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$.

Пример. Составить уравнение окружности с центром в точке (5; -7) и проходящей через точку (2; -3).

Решение:

В данном примере сначала надо найти радиус окружности R. Подставим в уравнение окружности координаты центра (5; -7) и координаты данной точки (2; -3) вместо переменных координат x и y. В результате получим

$$(2-5)^2+(-3-(-7))^2=R^2,$$

$$3^2+4^2=R^2, 25=R^2,$$

следовательно,

$$R=5.$$

Подставив в уравнение окружности координаты центра и найденную величину радиуса, получим

$$(x-5)^2+(y-(-7))^2=5^2.$$

или

$$(x-5)^2+(y+7)^2=5^2$$

Ответ: $(x-5)^2+(y+7)^2=5^2$.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

Решение:

Сначала сгруппируем члены данного уравнения

$$(x^2-8x)+(y^2+6y)=0.$$

Дополним выражения (x^2-8x) и (y^2+6y) до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 16, а ко второму – 9. Одновременно к правой части последнего равенства прибавляется сумма этих чисел 25. В результате получим

$$(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)=25.$$

или

$$(x-4)^2+(y+3)^2=25.$$

Последнее равенство представим в виде:

$$(x-4)^2+(y-(-3))^2=5^2,$$

следовательно,

$$x_0=4, y_0=-3, R=5.$$

Ответ: $x_0=4, y_0=-3, R=5$.

6.7. Упражнения

1. Дана функция $y = f(x)$. Вычислить значение функции в данной точке:

а) $f(x) = x + \dfrac{5}{x^2+1}, f(2)$; б) $f(x) = x^3 + |x-3|,\ f(1)$.

2. Дана функция $y = f(x)$. Вычислить значение функции в данной точке:

а) $f(x) = 3x - 2, \quad f(f(2))$; б) $f(x) = 6x - 14, \quad f(f(3))$.

3. Найти область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-5}{x-6}}$; б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

4. Найти область определения функции:

а) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$.

5. Даны координаты двух точек прямой A и B. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящий через заданные точки:

а) $A(1;4), B(3;8))$; б) $A(-2;3), B(0;9))$.

6. Построить графики функций:

а) $f(x) = (x-4)^2$; б) $f(x) = x^2 + 3$.

7. Построить графики функций:

а) $f(x) = (x-1)^2 + 1$; б) $f(x) = (x+1)^2 + 3$.

8. Построить графики функций:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 10$; б) $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

9. Решить графически неравенства:

а) $x^2 - 4x + 3 \le 0$; б) $x^2 - 6x + 5 \le 0$.

10. Построить графики функции

а) $y = \dfrac{1}{x} + 2$; б) $y = \dfrac{1}{x-1}$.

11. Решить графически неравенства:

а) $\dfrac{1}{x-2} - 1 \le 0$; б) $\dfrac{2}{x-3} - 1 \le 0$.

12. Построить графики функции:

а) $y = |x| + 3$; б) $y = |x-1|$.

13. Построить графики функции:

а) $y = |x - 2| + 1$; б) $y = |x + 1| - 1$.

14. Решить графически неравенства:

а) $|x - 2| - 1 \leq 0$; б) $|x - 4| - 2 \leq 0$.

15. Найти координаты центра и радиус окружности:

а) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; б) $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

7. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

7.1. Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида

$$y = a^x,$$

где a – некоторое положительное число, отличное от 1.

Областью определения этой функции служат все действительные числа, т.е. $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$. Множество значений – все положительные числа, т.е. $E(y) = (0; +\infty)$.

Если $a > 1$, функция является возрастающей, если $0 < a < 1$ – убывающей.

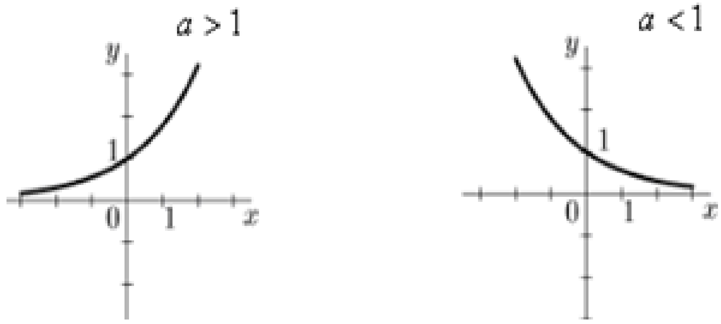


Рис. 35. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

При любых действительных значениях x и y справедливы равенства:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};\ \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\ \ (a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x;\ \ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Пример. Упростить выражение $3^{2x+1} \cdot 9^{-x}$.

Решение:

$3^{2x+1} \cdot 9^{-x} = 3^{2x+1} \cdot 3^{-2x} = 3^{2x+1-2x} = 3.$

Ответ: 3.

Пример. Упростить выражение $2^{2x} \cdot 3^x - 2^x 6^x$.

Решение:

$2^{2x} \cdot 3^x - 2^x 6^x = 4^x \cdot 3^x - 2^x \cdot 6^x = 12^x - 12^x = 0.$

Ответ: 0.

Пример. Решить уравнение $2^{x^2+2} = 8^x$.

Решение:

$2^{x^2+2} = 8^x$; $2^{x^2+2} = (2^3)^x$; $2^{x^2+2} = 2^{3x}$;

$x^2 + 2 = 3x; x^2 - 3x + 2 = 0.$

Таким образом, получаем квадратное уравнение, корни которого можно найти, например, по теореме Виета

$x_1 = 1; x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2.$

При решении показательных неравенств следует помнить, что при $a > 1$ показательная функция является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей.

Пример. Решить неравенство $2^x \geq 8.$

Решение:

Перепишем неравенство следующим образом:

$2^x \geq 2^3.$

В данном случае $a = 2 > 1$. Функция является возрастающей, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

$x \geq 3.$

Таким образом, решение неравенства имеет вид

$x \in [3; +\infty).$

Ответ: $x \in [3; +\infty).$

Пример. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \leq 27.$

Решение:

Перепишем неравенство следующим образом:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}.$

В данном случае $a = \frac{1}{3} < 1$. Функция является убывающей, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции:

$x + 5 \geq -3, x \geq 8.$

Таким образом, решение неравенства имеет вид: $x \in [8; +\infty)$

Ответ: $[8; +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 0$.

Решение:

Введем новую переменную $t = 2^x$. Неравенство примет вид

$t^2 - 6t + 8 \leq 0$.

В левой части неравенства стоит квадратичная функция, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, график функции лежит ниже оси OX на промежутке $[t_1, t_2]$, где t_1, t_2 – корни квадратного трехчлена.

Применив теорему Виета, получим

$t_1 = 2, t_2 = 4$.

Таким образом,

$2 \leq t \leq 4$,

следовательно,

$2 \leq 2^x \leq 4; 1 \leq x \leq 2$

Ответ: $[1; 2]$

Пример. Решить неравенство $\dfrac{3^x - 1}{3^x - 9} < 0$.

Решение:

Введем новую переменную $t = 3^x$. Неравенство примет вид

$\dfrac{t - 1}{t - 2} < 0$.

Решив это неравенство методом интервалов, получим

$1 < t < 9$,

следовательно,

$1 < 3^x < 9$,

$0 < x < 3$.

Ответ: $(0; 2)$.

7.2. Логарифмы

Рассмотрим показательное уравнение в общем виде

$$a^x = b.$$

Очевидно, что данное уравнение имеет решение только при $b > 0$. Корень этого уравнения называется *логарифмом* числа b по основанию a и обозначается следующим образом:

$$x = \log_a b.$$

Например, корнем показательного уравнения

$$2^x = 6$$

является число

$$x = \log_2 6.$$

Таким образом, логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в который надо возвести a, чтобы получить b.

Пример. Найти значение выражения $\log_3 81 + \log_5 25 + \log_2 1$.

Решение:

По определению логарифма, имеем

$\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$;

$\log_5 25 = 2$, так как $5^2 = 25$;

$\log_2 1 = 0$, так как $2^0 = 1$.

$\log_2 1 = 0$, так как $2^0 = 1$,

следовательно,

$\log_3 81 + \log_5 25 + \log_2 1 = 4 + 2 + 0 = 6.$

Ответ: 6.

Из определения логарифма следует *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Пример. Найти значение выражения $3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5}$.

Решение:

Из основного логарифмического тождества следует

$3^{\log_3 7} = 7, 2^{\log_2 5} = 5,$

следовательно,

$3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5} = 7 + 5 = 12.$

Ответ: 12.

Сформулируем *основные теоремы о логарифмах*.

1. Логарифм произведения двух положительных чисел x и y равен сумме логарифмов сомножителей, т.е.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел x и y равен разности логарифмов сомножителей, т.е.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

3. Логарифм степени положительного числа x равен произведению показателя степени этого числа на логарифм ее основания, т.е.

$$\log_a x^n = n\log_a x.$$

Пример. Найти значение выражения $\log_4 12 + \log_4 \frac{1}{3}$.

Решение:

$\log_4 12 + \log_4 \frac{1}{3} = log_4\left(12 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_4 4 = 1$.

Ответ: 1.

Пусть a, b и c – некоторые положительные числа, причем $a \neq 1$ и $c \neq 1$. Справедлива следующая *формула перехода* от основания a к основанию c:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Из этой формулы, в частности, для $c = b \neq 1$ имеем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Пример. Найти значение выражения $\log_5 49 \cdot \log_7 5$.

Решение:

$\log_5 49 \cdot \log_7 5 = \log_5 7^2 \cdot \log_7 5 = 2\log_5 7 \cdot \log_7 5 = 2 \cdot 1 = 2$.

Ответ: 2.

Для обозначения *десятичных логарифмов* (логарифмов по основанию 10) принята специальная запись: вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$. Логарифм по основанию e ($e = 2{,}718281828\ldots$) называют *натуральным логарифмом* и обозначают $\ln b$.

7.3. Логарифмическая функция

Введение понятия логарифма позволяет из формулы $y = a^x$ выразить величину x через величину y: $x = \log_a y$. Если в последней формуле поменять обозначения x на y и y на x, получим $y = \log_a x$.

Функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ называется *логарифмической*. Эта функция является *обратной* функцией к показательной функции. Графики логарифмической функции при $a > 1$ и $0 < a < 1$ представлены ниже.

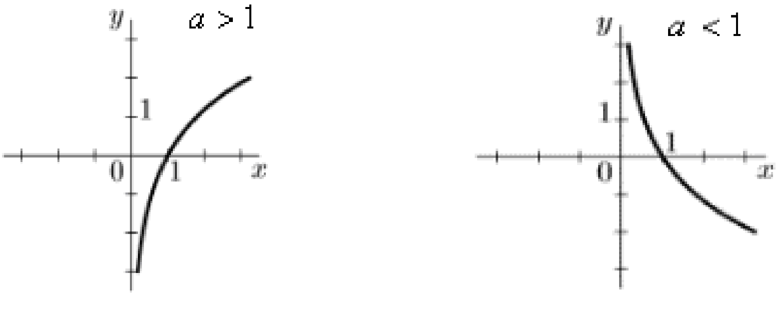


Рис. 36. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

Областью определения логарифмической функции являются все положительные числа, т.е. $D(y) = (0;\ +\infty)$; множеством значений служат все действительные числа, т.е. $E(y) = (-\infty; +\infty)$. При $a > 0$ функция возрастает, а при $0 < a < 1$ – убывает.

Пример. Найти область определения функции $f(x) = \log_2(6 - 3x)$.

Решение:

Выражение под знаком логарифма по определению должно быть больше нуля:

$6 - 3x > 0.$

Решив данное неравенство, получим

$x < 2.$

Таким образом,

$x \epsilon (-\infty; 2).$

Ответ: $(-\infty; 2)$.

При решении логарифмических уравнений и неравенств следует помнить, что выражение под знаком логарифма должно быть положительным.

Пример. Решить уравнение $\log_4(2x - 4) = \log_4(3x - 5)$.

Решение:

Согласно определению логарифма имеем

$2x - 4 = 3x - 5.$

Решив данное уравнение, получим

$x = 1.$

Проверим выполнение условий

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 3x - 5 > 0. \end{cases}$$

$2x - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0.$

Проверять второе условие не обязательно, так как корень уравнения был найден из условия

$2x - 4 = 3x - 5.$

Таким образом, найденное значение величины x не удовлетворяет условиям положительности выражений под знаком логарифма. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Пример. Решить уравнение $\log_4(2x - 4) = 0{,}5$.

Решение:

Согласно определению логарифма имеем

$2x - 4 = 4^{0,5}, 2x - 4 = (2^2)^{0,5},$

$2x - 4 = 2, 2x = 6, x = 3.$

Отметим, что в данном примере нет необходимости проверять условие положительности выражения под знаком логарифма, так как в правой части равенства

$2x - 4 = 4^{0,5}$

стоит положительное число $4^{0,5}$, что автоматически обеспечивает выполнение условия $2x - 4 > 0$.

Ответ: $x = 3$.

Пример. Решить неравенство $\log_3(x - 1) < 2$.

Решение:

При решении логарифмических неравенств в дополнение к условию положительности выражения под знаком логарифма следует учитывать также величину основания.

Здесь $a = 2 > 1$, следовательно, функция является возрастающей, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Таким образом, имеем

$x - 1 < 3^2, x < 10.$

Выражение под знаком логарифма должно быть положительным, то есть

$x - 1 > 0, x > 1.$

Таким образом, решение исходного неравенства определяется условиями

$$\begin{cases} x < 10, \\ x > 1, \end{cases}$$

следовательно,

$x \in (1; 10).$

Ответ: $(1; 10)$.

Пример. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) < -2$.

Решение:

Здесь $a = \frac{1}{2} < 1$, следовательно, функция является убывающей, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Таким образом, имеем

$$x - 3 > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, x - 3 > 4, x > 7.$$

Записывать условие

$$x - 3 > 0$$

нет необходимости, так как при $x > 7$ это условие выполняется автоматически.

Таким образом, решение исходного неравенства имеет вид

$$x \in (7;\ +\infty).$$

Ответ: $(7;\ +\infty)$..

Пример. Решить неравенство $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \le 0$.

Решение:

Введем новую переменную $t = \log_3 x$. Неравенство примет вид

$$t^2 - 3t + 2 \le 0.$$

Решив это неравенство, получим

$$1 \le t \le 2,$$

следовательно,

$$1 \le \log_3 x \le 2,$$

$$3 \le x \le 9.$$

Ответ: $[3;\ 9]$

Пример. Решить неравенство $\dfrac{\log_2 x - 1}{\log_2 x - 3} < 0$.

Решение:

Введем новую переменную $t = \log_2 x$. Неравенство примет вид

$$\frac{t - 1}{t - 3} < 0.$$

Решив это неравенство методом интервалов, получим

$$1 < t < 3,$$

следовательно,

$1 < \log_2 x < 3,$

$2 < x < 8.$

Ответ: (2; 8).

Пример. Решить неравенство $log_4^2(64 - x^2) - 5\log_4(64 - x^2) + 6 \geq 0$

Решение:

Введем новую переменную

$t = \log_4(64 - x^2)$

Неравенство примет вид

$t^2 - 5t + 6 \geq 0.$

Найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства.

По теореме Виета

$t_1 + t_2 = 5;$

$t_1 t_2 = 6.$

Подбором находим корни

$t_1 = 2;\ t_2 = 3.$

Графиком квадратного трехчлена является парабола, ветви которой направлены вверх.

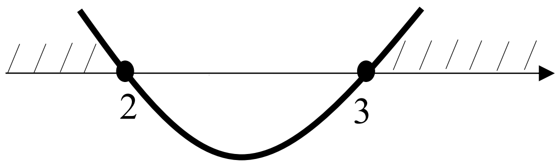


Рис. 37

По рисунку видно, что решением неравенства служит совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 2, \\ t \geq 3, \end{array}\right.$$

следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \log_4(64 - x^2) \leq 2, \\ \log_4(64 - x^2) \geq 3. \end{array}\right.$$

Решим первое неравенство полученной совокупности.

$$\begin{cases} 64 - x^2 > 0, \\ 64 - x^2 \leq 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 64 < 0, \\ x^2 - 48 \geq 0\,. \end{cases}$$

Решением первого квадратного неравенства служит промежуток $(-8; 8)$.

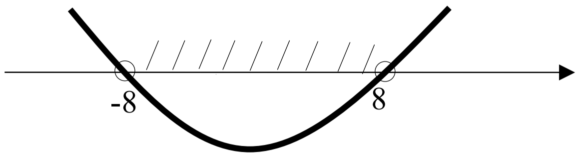


Рис. 38

Решением второго неравенства служит объединение промежутков $\left(-\infty;\ -\sqrt{48}\right] \cup \left[\sqrt{48};\ +\infty\right)$.

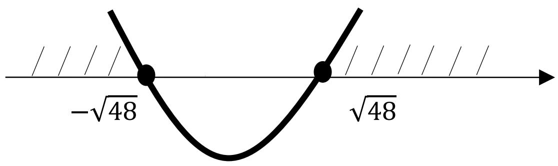


Рис. 39

Таким образом, решением первого неравенства служит множество $\left(-8;\ -\sqrt{48}\right] \cup \left[\sqrt{48};\ 8\right)$.

Решим второе неравенство совокупности:

$64 - x^2 \geq 64;$

$-x^2 \geq 0;$

$x^2 \leq 0;$

$x = 0.$

Таким образом, решением второго неравенства служит точка $x = 0$.

Объединяем полученные решения

$\left(-8;\ -\sqrt{48}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{48};\ +8\right).$

Ответ: $\left(-8;\ -\sqrt{48}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{48};\ +8\right).$

7.4. Упражнения

Упростить выражения:

1. а) $4^{2x+2}\cdot 16^{-x}$. б) $2^{3x+4}\cdot 8^{-x}$.
2. а) $3^{2x}\cdot 4^{x}-12^{x}3^{x}$. б) $2^{2x}\cdot 8^{x}-2^{x}16^{x}$.

Решить уравнения:

3. а) $2^{x-2}=8$ б) $3^{3x-2}=81$
4. а) $3^{x^2+3}=81^{x}$ б) $2^{x^2+6}=32^{x}$
5. а) $4^{x}-3\cdot 2^{x}+2=0$; б) $9^{x}-12\cdot 3^{x}+27=0$

Решить неравенства:

6. а) $3^{x}\geq 9$ б) $5^{x}\geq 625$
7. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}\leq\frac{1}{8}$ б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\leq 9$
8. а) $9^{x}-4\cdot 3^{x}+3\leq 0$ б) $5^{x}-6\cdot 5^{x}+5\leq 0$

Найдите значение выражения:

9. а) $\log_2 16+\log_3 3+\log_6 1$; б) $\log_4 64+\log_7 7+\log_9 1$;
10. а) $3^{\log_3 8}+2^{\log_2 11}$; б) $5^{\log_5 4}+3^{\log_3 6}$;
11. а) $\log_8 14+\log_8\frac{32}{7}$; б) $\log_5\frac{35}{3}+\log_5\frac{75}{7}$;
12. а) $\log_3 5\cdot\log_5 27$; б) $\log_7 36\cdot\log_6 49$.

Найдите область определения функции:

13. а) $f(x)=\log_2(2x-2)$; б) $f(x)=\log_2(4-2x)$;
14. а) $f(x)=\log_5(1-x^2)$; б) $f(x)=\log_3(9-x^2)$.

Решить уравнения:

15. а) $\log_4(4x-6)=\log_4(5x+4)$; б) $\log_4(2x-1)=\log_4(3x+2)$;
16. а) $\log_{\sqrt{3}}(2x-9)=2$; б) $\log_9\left(\frac{x}{2}-1\right)=0{,}5$;
17. а) $\log_2^2 x-6\log_2 x+8=0$; б) $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$.

Решить неравенства:

18. а) $\log_2(x-1)<1$; б) $\log_4(x-6)<2$;
19. а) $\log_{\frac{1}{3}} x<-1$; б) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)<-3$;

20. а) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 \leq 0;$ б) $\log_5^2 x - 5\log_5 x \leq 0;$

Решить неравенства:

21. $4^{6x-x^2-4} - 34 \cdot 2^{6x-x^2-4} + 64 \geq 0;$

22. $\dfrac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0{,}5;$

23. $\dfrac{9^x - 3^{x+1} - 19}{3^x - 6} + \dfrac{9^{x+1} - 3^{x+4} + 2}{3^x - 9} \leq 10 \cdot 3^x + 3;$

24. $\dfrac{\log_3(81x)}{\log_3 x - 4} + \dfrac{\log_3 x - 4}{\log_3(81x)} \geq \dfrac{24 - \log_3 \mathrm{x}^8}{\log_3^2 x - 16};$

25. $\log_2^2(16 - x^2) - 6\log_2(16 - x^2) + 8 \geq 0.$

8. ТРИГОНОМЕТРИЯ

8.1. Тригонометрические функции острого угла

Изучение тригонометрии начнем с рассмотрения *тригонометрических функций острого угла*.

Построим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Обозначим острый угол, противолежащий катету a, буквой α. Второй острый угол $\beta = 90° - \alpha$.

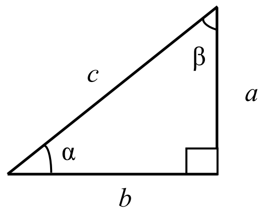


Рис. 40. Прямоугольный треугольник

Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Из определений тангенса и котангенса следует:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}.$$

Очевидно, что пропорциональное увеличение и уменьшение длин сторон треугольника не влияет на значения тригонометрических функций. Разделим длины всех сторон прямоугольного треугольника на c. В результате получим треугольник с единичной гипотенузой. Катеты этого треугольника будут равны соответственно

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

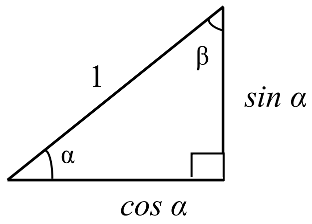


Рис. 41. Треугольник с единичной гипотенузой

Применив теорему Пифагора к треугольнику с единичной гипотенузой, получим *основное тригонометрическое тождество*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Пример**.** Известно, что α – острый угол. Найдите значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Решение:

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2\alpha + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = 1, \sin^2\alpha + \frac{2}{5} = 1, \sin^2\alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Так как тригонометрические функции острого угла могут принимать только положительные значения, в решении мы оставляем только положительные корни.

Ответ: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$

Разделив обе части основного тригонометрического тождества на $\cos^2\alpha$, получим *первое следствие* из основного тригонометрического тождества:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Разделив обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha$, получим *второе следствие*:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Пример**.** Упростите выражение $2(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)\cos^2\alpha + 1$.

Решение:

Воспользуемся первым следствием из основного тригонометрического тождества

$$2(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)\cos^2\alpha + 1 = \frac{2}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Ответ: 3.

По определению, имеем

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha, \beta = 90° - \alpha,$$

следовательно,

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$$

Путем аналогичных рассуждений найдем:

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha, \beta = 90° - \alpha,$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha, \beta = 90° - \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = ctg\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \beta = 90° - \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Таким образом, получено еще четыре формулы, которые называются *формулами дополнительного угла*. Выпишем эти формулы еще раз:

$$\sin(90° - \alpha) = cos\alpha, \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$$

$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = ctg\alpha, \qquad \mathrm{ctg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha.$

Пример**.** Найдите значение выражения $\sin^2 24° + \cos^2 66° + 2$.

Решение:

$24° + 66° = 90°, 66° = 90° - 24°;$

$\sin 66° = \sin(90° - 24°) = \cos 24°,$

$\sin^2 24° + \cos^2 24° + 2 = 1 + 2 = 3$.

Ответ: 3.

Существуют три стандартных угла, для которых значения тригонометрических функций можно найти без использования измерительных инструментов.

Пусть $\alpha = 30°$. Воспользуемся известной из геометрии теоремой: длина катета, противолежащего углу $\alpha = 30°$, равна половине длины гипотенузы, т.е. $a = \frac{c}{2}$. Подставив выражение $a = \frac{c}{2}$ в формулу для синуса, получим

$$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

Из основного и тригонометрического тождества найдем

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По известным значениям синуса и косинуса найдем значения тангенса и котангенса:

$$\mathrm{tg} 30° = \frac{sin 30°}{cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\mathrm{ctg} 30° = \frac{1}{\mathrm{tg} 30°} = \sqrt{3}.$$

Пусть $\alpha = 45°$. Второй угол равен $\beta = 90° - 45° = 45°$ Следовательно, $\cos 45° = \sin 45°$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1,$

$\cos 45° = \sin 45°,$

$\sin^2 45° + \sin^2 45° = 1,$

$2\sin^2 45° = 1,$

$\sin^2 45° = \frac{1}{2},$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Так как $\cos 45° = \sin 45°$, тангенс и котангенс данного угла равны единице:

$\mathrm{tg} 45° = \mathrm{ctg} 45° = 1.$

Пусть $\alpha = 60°$. Воспользуемся формулами дополнительного угла

$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg} 60° = \mathrm{tg}(90° - 30°) = \mathrm{ctg} 30° = \sqrt{3}$;

$\mathrm{ctg} 60° = \mathrm{ctg}(90° - 30°) = \mathrm{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Выпишем значения основных тригонометрических функций для трех стандартных значений острого угла еще раз.

Таблица 1

Значения тригонометрических функций для стандартных значений углов

Функция	Угол		
	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Пример. Найдите значение выражения $\sqrt{2}\sin 45° + 4\cos 60° + \mathrm{tg} 45°$.

Решение:

$$\sqrt{2}\sin 45° + 4\cos 60° + \mathrm{tg} 45° = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 .$$

Ответ: 4.

8.2. Тригонометрические функции произвольного угла

Обобщим понятия тригонометрических функций на случай произвольного угла α.

Построим *тригонометрический круг* – круг единичного радиуса на координатной плоскости, центр которого совпадает с началом координат. Отметим на круге произвольную точку M. Обозначим через α угол, который образует единичный радиус OM с положительным направлением оси OX.

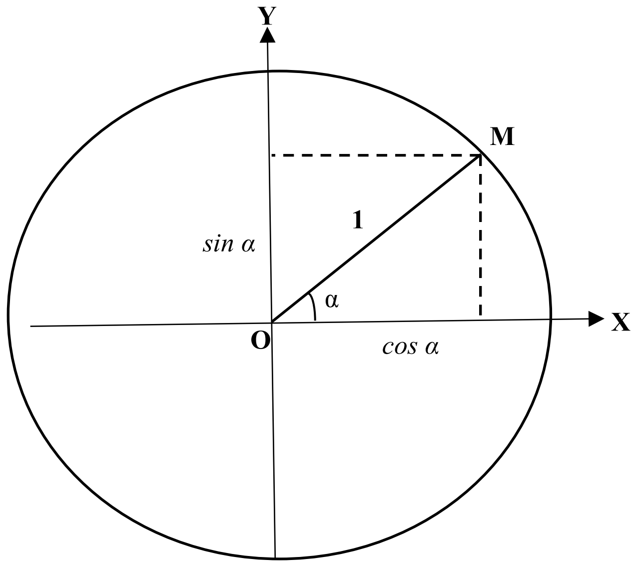


Рис. 42. Тригонометрический круг

Синусом угла α называется проекция точки M на ось OY.

Косинусом угла α называется проекция точки M на ось OX.

Тангенсом угла α называется отношение синуса этого угла к косинусу того же угла, т.е. $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к синусу того же угла, т.е. $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Координатные оси делят тригонометрический круг на четыре четверти.

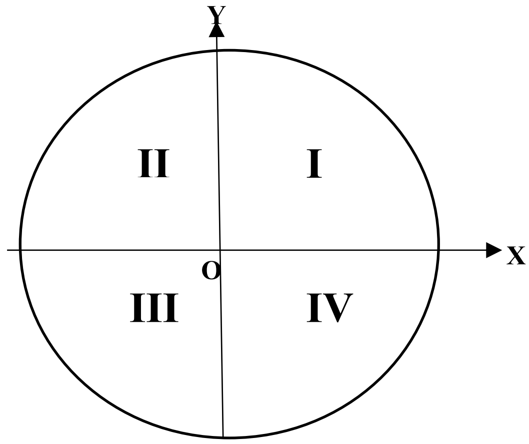


Рис.43. Четверти тригонометрического круга

Знаки основных тригонометрических функций в каждой из четвертей тригонометрического круга представлены ниже.

Таблица 2

Знаки основных тригонометрических функций

Функция	Четверть тригонометрического круга			
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\text{tg}\alpha$	+	–	+	–
$\text{ctg}\alpha$	+	–	+	–

Таким образом, *в первой четверти* все тригонометрические функции принимают *положительные значения*. В остальных четвертях тригонометрические функции могут принимать как *положительные,* так и *отрицательные* значения.

Пример**.** Известно, что угол α находится во второй четверти. Найдите значение $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$.

Решение:

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1, \qquad \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1, \cos^2\alpha = \frac{16}{25},$$

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Косинус угла, находящегося во второй четверти, – величина отрицательная, поэтому в решении мы оставляем только отрицательный корень.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Если единичный радиус совершает поворот *против часовой стрелки*, то угол α считается *положительным*, если же единичный радиус совершает поворот *по часовой стрелке*, *– отрицательным.*

При помощи тригонометрического круга нетрудно установить справедливость следующих равенств:

$$\sin(-\alpha) = sin\alpha, \cos(-\alpha) = cos\alpha.$$

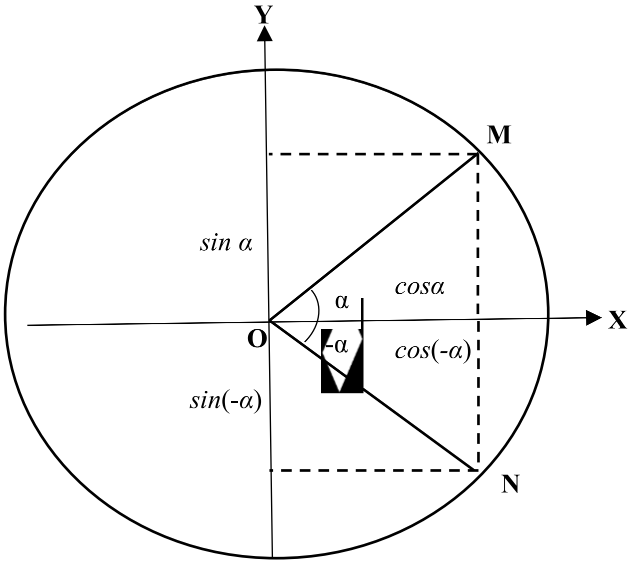


Рис. 44. Равенства $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Действительно, рассмотрим два угла α и $(-\alpha)$. Проекции на ось OX точек M и N, задающих эти углы, одинаковы, проекции на ось OY отличаются только знаком. Таким образом, синус как функция угла αявляется *нечетной* функцией, а косинус – *четной* функцией.

Значения синуса и косинуса по определению не изменяются при повороте единичного радиуса на угол, кратный 360°, т.е.

$$\sin(\alpha \pm 360°n) = \sin\alpha, \cos(\alpha \pm 360°n) = \cos\alpha.$$

где n– любое целое число. Это свойство называется *периодичностью.*

Пример**.** Найдите значение выражения

$\sqrt{2}\sin(-45°) + 2\sqrt{3}\cos(-30°) - 4\cos420°$.

Решение:

$$\sqrt{2}\sin(-45°) + 2\sqrt{3}\cos(-30°) - 4\cos 420° =$$

$$= -\sqrt{2}sin45° + 2\sqrt{3}cos30° - 4\cos 60° =$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1 + 3 - 2 = 0.$$

Ответ: 0.

Формулы, позволяющие выразить значения тригонометрических функций углов $90° \pm \alpha$, $180° \pm \alpha$ и $270° \pm \alpha$ через функцию угла α, называются *формулами приведения*. Эти формулы являются обобщением формул дополнительного угла на случай тригонометрических функций произвольного угла.

Углы $180° \pm \alpha$ принято называть углами, откладываемыми от *горизонтального диаметра*, а углы $90° \pm \alpha$ и $270° \pm \alpha$ – углами, откладываемыми от *вертикального диаметра*.

Сформулируем *правило приведения:*

1. Если угол откладывается от горизонтального диаметра, то наименование функции не меняется, если же угол откладывается от вертикального диаметра, то наименование функции меняется на сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс и т.д.).

2. Знак в правой части формулы определяется по знаку функции, стоящей в левой части, при этом угол α считается острым независимо от его величины.

Применив данное правило, получим, в частности:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$;

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$;

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$.

Пример. Найдите значение выражения

$4\sqrt{3}\sin 120° - \sqrt{2}\sin 135° + 2\sin 150°$.

Решение:

$$4\sqrt{3}\sin 120° - \sqrt{2}\sin 135° + 2\sin 150° =$$

$$= 4\sqrt{3}\sin(90° + 30°) - \sqrt{2}\sin(90° + 45°) + 2\sin(180° - 30°) =$$

$$= 4\sqrt{3}\cos 30° - \sqrt{2}\cos 45° + 2\sin 30° =$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 6 - 1 + 1 = 6.$$

Ответ: 6.

8.3. Формулы сложения

Формулы сложения позволяют выразить тригонометрические функции углов $\alpha \pm \beta$ через функции углов α и β. Выпишем шесть основных формул сложения для синуса, косинуса и тангенса.

Формулы *синуса суммы и разности* двух аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Формулы *косинуса суммы и разности* двух аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Формулы *тангенса суммы и разности* двух аргументов:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}, \mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}.$$

Пример. Вычислить $\cos(\alpha - \beta)$, если

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5},\ \sin\beta = -\frac{3}{5};\ 180° < \alpha < 270°, 270° < \beta < 360°.$$

Решение:

При помощи основного тригонометрического тождества найдем значения $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат углы α и β:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Подставив найденные значения в формулу косинуса разности двух аргументов, получим:

$$\cos(\alpha - \beta) = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}.$$

Ответ: $-\frac{7}{25}$.

8.4. Формулы двойного угла

Из формул сложения, положив $\beta = \alpha$, получим *формулы двойного угла:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Пример. Вычислить значение выражения $\frac{6\sin 22°\sin 68°}{\cos 46°}$.

Решение:

$$\frac{6\sin 22°\sin 68°}{\cos 46°} = \frac{6\sin 22°\cos 22°}{\sin 44°} = \frac{3\sin 44°}{\sin 44°} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример. Упростить выражение

$1 - \cos(180° - 2\alpha) - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.

Решение:

$1 - \cos(180° - 2\alpha) - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$

$1 + \cos 2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$

$= 1 + \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 1.$

Ответ: 1.

Используя основное тригонометрическое тождество, можно получить еще две дополнительные формулы для косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

8.5. Формулы понижения степени

Выразив из двух последних формул предыдущего параграфа величины $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$, получим *формулы понижения степени:*

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Пример. Вычислить $\sin^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = 0{,}2$.

Решение:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1-0{,}2}{2} = 0{,}4 .$$

Ответ: 0,4.

Отметим, что формулы понижения степени можно представить следующим образом:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

8.6. Формулы преобразования произведения в сумму

При помощи формул сложения для синуса и косинуса можно получить следующие формулы *преобразования произведения тригонометрических функций в сумму*:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Пример. Упростить выражение $2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) - cos2\alpha$.

Решение:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) - cos2\alpha =$$

$$= 2\frac{\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha}{2} - \cos 2\alpha =$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

8.7. Формулы преобразования суммы в произведение

С помощью тождеств

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\ , \qquad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$$

и формул сложения можно получить следующие формулы *преобразования суммы тригонометрических функций в произведение*:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Пример. Преобразовать сумму $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$ в произведение.

Решение:

$\sin 4\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin 3\alpha\cos\alpha.$

Ответ: $2\sin 3\alpha\cos\alpha.$

8.8. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

Из формулы двойного угла для тангенса можно получить выражение тангенса через тангенс половинного угла

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формула для синуса получается в результате следующих преобразований:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогично выводится формула для косинуса

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Пример. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

Решение:

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 3}{1+3^2} = \frac{6}{10} = 0{,}6;$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-3^2}{1+3^2} = \frac{-8}{10} = -0{,}8.$$

Ответ: $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\alpha = -0{,}8$.

Пример. Вычислить $13\sqrt{3}\mathrm{tg}(60° - \alpha)$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение:

Воспользуемся формулой суммы

$$13\sqrt{3}\mathrm{tg}(60° - \alpha) = 13\sqrt{3}\cdot\frac{\mathrm{tg}60° - \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}60°\mathrm{tg}\alpha} = 13\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha}.$$

Найдем $\mathrm{tg}\alpha$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}} = 4\sqrt{3}.$$

Вычислим значение выражения

$$13\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha} = 13\sqrt{3}\cdot\frac{-3\sqrt{3}}{1+12} = -9.$$

Ответ: -9.

8.9. Тригонометрические функции числового аргумента

В тригонометрии кроме градусной меры используется также *радианная мера* угла. Связь между радианной мерой φ и градусной мерой α устанавливается из пропорции:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}.$$

Здесь π – постоянная, равная отношению длины окружности к ее диаметру ($\pi \approx 3{,}14$). Из последнего равенства получим формулу, позволяющую переводить градусную меру в радианную:

$$\varphi = \frac{\pi\alpha}{180°}.$$

Пример. Перевести угол $\alpha = 20°$ из градусной меры в радианную меру.

Решение:

$$\varphi = \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{\pi \cdot 20}{180} = \frac{\pi}{9}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{9}$.

Приведем значения углов в радианах для стандартного набора значений углов в градусной мере.

Таблица 3

Перевод градусной меры углов в радианную

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Пример**.** Вычислить $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

Решение:

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 4.$$

Ответ: 4.

Использование радианной меры позволяет считать углом любое действительное число, следовательно, тригонометрические функции можно рассматривать как *функции числового аргумента.* Воспользуемся общепринятыми для функций обозначениями: x – независимая переменная (аргумент), y– зависимая переменная (функция).

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ представлены ниже.

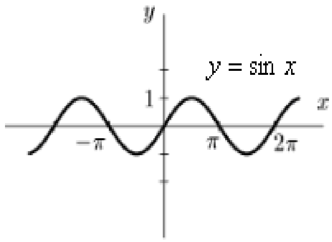


Рис. 45. Синус как функция числового аргумента x

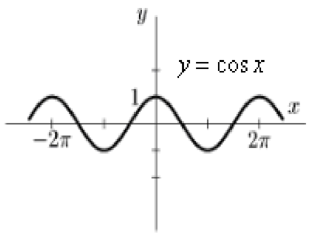


Рис. 46. Косинус как функция числового аргумента x

Область определения синуса и косинуса – все действительные числа, а множество значений – отрезок [-1; 1]. Синус – нечетная функция, косинус – четная функция. Наименьший положительный период этих функций равен 2π.

Обозначив через Z множество целых чисел, запишем решения простейших тригонометрических уравнений:

$\sin x = 0, x = \pi n, n \epsilon Z;$

$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z;$

$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z;$

$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z;$

$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \epsilon Z;$

$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \epsilon Z.$

Пример. Решить уравнение $\cos^2 x - 3\cos x = 0.$

Решение:

$\cos^2 x - 3\cos x = 0;$

$\cos x(\cos x - 3 = 0).$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0;\\ \cos x = 3.\end{array}\right.$

Первое из них имеет решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$. Второе уравнение не имеет решений, так как $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$.

Ниже представлены графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

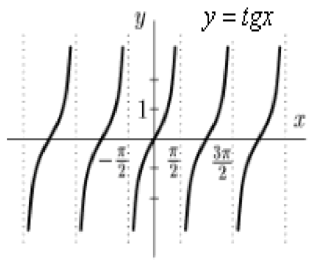


Рис. 47. Тангенс как функция числового аргумента x

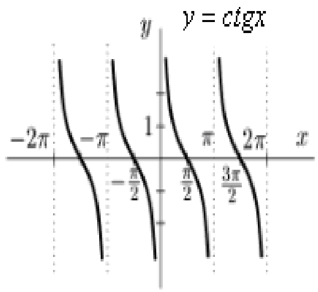


Рис. 48. Котангенс как функция числового аргумента x

Область определения тангенса – все действительные числа, за исключением точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$. Область определения котангенса – все действительные числа, за исключением точек $x = \pi n, n \epsilon Z$. Множество значений функций тангенса и котангенса – все действительные числа. Тангенс и котангенс – нечетные функции. Наименьший положительный период тангенса и котангенса равен π.

8.10. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется *угол* из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Арксинус обозначается $arcsin a$. Например,

$$arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{так как } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \text{так как } \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{так как } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Функция $y = arcsinx$ является обратной к функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. График функции приведен ниже.

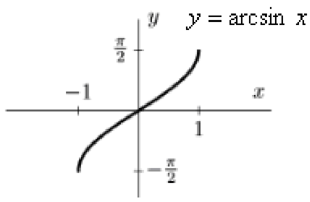


Рис. 49. Функция $y = arcsinx$

Областью определения арксинуса служит отрезок [-1; 1], а множеством значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Арксинус – нечетная функция, т.е. $arcsin(-x) = -arcsinx$.

Пример**.** Вычислить $arcsin1 + arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + arcsin0$.

Решение:

$$arcsin1 + arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + arcsin0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Арккосинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется *угол* из промежутка $[0;\pi]$, косинус которого равен a. Арккосинус обозначается $arccosa$. Например,

$$arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{так как } \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \text{так как } \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{так как } \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Функция $y = arccosx$ является обратной к функции $y = cosx$ на промежутке $[0; \pi]$. График функции приведен ниже.

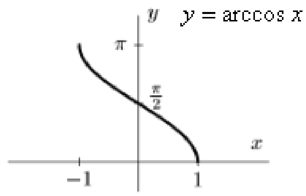


Рис. 50. Функция $y = arccosx$

Область определения арккосинуса – отрезок [-1;1], а множество значений – отрезок $[0; \pi]$. Для арккосинуса справедливо равенство $arcccos(-x) = \pi - arccosx$.

Пример. Вычислить $arccos1 + arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos0$.

Решение:

$$arccos1 + arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos0 = 0\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6}$.

Арктангенсом числа aназывается *угол* из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс которого равен a. Арктангенс обозначается $arctga$. Например,

$$arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \text{так как } \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$arctg1 = \frac{\pi}{4}, \text{так как } \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Функция $y = arctgx$ является обратной к функции $y = \text{tg}x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. График функции приведен ниже.

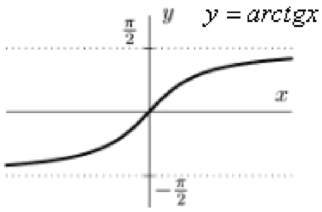


Рис. 51. Функция $y = arctgx$

Область определения арктангенса – все действительные числа, а множество значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Арктангенс – нечетная функция, т.е. $arctg(-x) = -arctgx$.

Пример**.** Вычислить $arctg1 + arctg\left(-\sqrt{3}\right) + arctg0$.

Решение.

$$arctg1 + arctg\left(-\sqrt{3}\right) + arctg0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}$.

Арккотангенсом числа a называется *угол* из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a. Арккотангенс обозначается $arcctga$. Например,

$arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, так как $\text{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$;

$arcctg1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\text{ctg}\frac{\pi}{4} = 1$;

$arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, так как $\text{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Функция $y = arcctgx$ является обратной к функции $y =\text{tg}x$ на промежутке $(0; \pi)$. График функции приведен ниже.

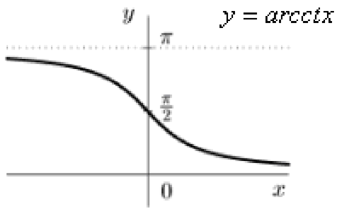


Рис. 52. Функция $y = arcctgx$

Область определения арктангенса – все действительные числа, а множество значений – интервал $(0; \pi)$. Для арккотангенса справедливо равенство $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$.

Пример**.** Вычислить $arcctg1 + arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + arcctg0$.

Решение:

$$arcctg1 + arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + arcctg0 = \frac{\pi}{4} + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{19\pi}{12}$.

8.11. Тригонометрические уравнения

Прежде чем выписать общие формулы для корней простейших тригонометрических уравнений, рассмотрим следующий пример.

Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение:

Данное уравнение вследствие периодичности функции $y = \sin x$ имеет бесконечное множество решений. Для удобства построим сначала решение на промежутке $[0; 2\pi]$. Длина этого промежутка равна периоду функции. Проведем прямую $y = \frac{1}{2}$.

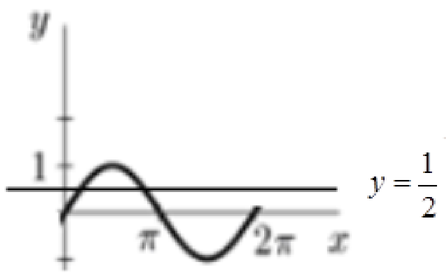


Рис 53. Решение уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ на отрезке $[0; 2\pi]$

Прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает график функции в двух точках:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ и } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Таким образом, на промежутке $[0; 2\pi]$ уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$ имеет два решения: $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{5\pi}{6}$. Тогда вследствие периодичности функции $y = \sin x$ общее решение уравнения на всей числовой оси можно представить в виде совокупности двух общих решений:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z;$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \epsilon Z.$$

Нетрудно проверить, что полученную совокупность решений можно записать в виде одной формулы

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \epsilon Z;$$

Действительно, подставив в последнюю формулу значение $k = 2n$, получим первую формулу совокупности решений:

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Подставив значение $k = 2n + 1$, получим вторую формулу совокупности решений:

$$x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n = x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \epsilon Z.$

Формула корней уравнения

$$\sin x = a,$$

где $|a| \leq 1$, в общем случае имеет вид

$$x = (-1)^k arcsin a + \pi k, k \in Z.$$

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x = 0$.

Решение:

$\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x = 0;$

$$\sqrt{2}sinx\left(sinx-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{array}\right.$$

Первое из них имеет решение

$x=\pi n, n\in Z.$

Решение второго уравнения представим в виде

$$x=(-1)^k arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi k, k\in Z.$$

Подставив значение

$$arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$$

в последнюю формулу, получим

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $x=\pi n, n\in Z;\ x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Пример**.** Решить уравнение $\cos x=\frac{1}{2}$.

Решение:

Сначала построим решение данного уравнения на промежутке $[-\pi;\ \pi]$. Длина этого промежутка равна периоду функции. Проведем прямую $y=\frac{1}{2}$.

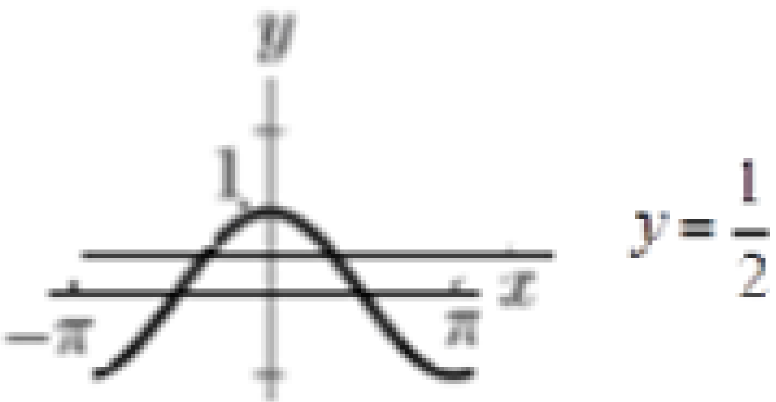


Рис. 54. Решение уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$

Прямая $y=\frac{1}{2}$ пересекает график функции в двух точках:

$$x=-\frac{\pi}{3} \text{ и } x=\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ уравнение $\cos x=\frac{1}{2}$ имеет два решения: $x=-\frac{\pi}{3}$ и $x=\frac{\pi}{3}$. Тогда вследствие периодичности функции $y=\cos x$ общее решение уравнения на всей числовой оси можно представить в виде совокупности двух общих решений:

$$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z;$$

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z;$$

Полученную совокупность решений можно записать в виде одной формулы

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

Формула корней уравнения

$$\cos x=a,$$

где $|a|\le 1$ в общем случае имеет вид

$$x=\pm arccos a+2\pi n, n\in Z.$$

Пример**.** Решить уравнение $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0.$

Решение.

$2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0$;

$2\cos x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{aligned}&\cos x=0,\\&\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\right.$$

Первое из них имеет решение $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$

Решение второго уравнения представим в виде

$x = \pm arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Подставив значение $arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ в последнюю формулу, получим

$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Формула корней уравнения

$$\mathrm{tg}x = a$$

в общем случае имеет вид

$$x = arctga + \pi k, k \in Z.$$

Пример**.** Решить уравнение $\mathrm{tg}x = 1.$

Решение:

$\mathrm{tg}x = 1, x = arctg1 + \pi k, k \in Z.$

Подставив значение $arctg1 = \frac{\pi}{4}$, получим

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Формула корней уравнения

$$\mathrm{ctg}x = a$$

имеет вид

$$x = arcctga + \pi k, k \in Z.$$

Пример**.** Решить уравнение $\mathrm{ctg}x = \sqrt{3}.$

Решение:

$\mathrm{ctg}x = \sqrt{3}, x = arcctg\sqrt{3} + \pi k, k \in Z.$

Подставив значение $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, получим

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Пример. Решите уравнение $cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + sinx = 0.$

Решение:

Воспользуемся формулой приведения

$cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=-sin2x;$

$-sin2x+sinx=0.$

Воспользуемся формулой синуса двойного угла

$-2sinx\cdot cosx+sinx=0;$

$-2sinx\left(cosx-\frac{1}{2}\right)=0.$

Таким образом, получаем совокупность

$\left[\begin{array}{l}sinx=0;\\ cosx=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

Следовательно,

$\left[\begin{array}{l}x=\pi n, n\in Z;\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

Ответ: $\pi n, n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

Пример. Решите уравнение.$2\sqrt{3}cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-sin2x=0.$

Решение:

Формула приведения:

$cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=sinx.$

Формула синуса двойного угла:

$sin2x=2sinx\cdot cosx.$

Подставим последние выражения в исходное уравнение

$2\sqrt{3}sin^2x-2sinx\cdot cosx=0.$

Вынесем за скобки $2sinx$

$2sinx\left(\sqrt{3}sinx-cosx\right)=0.$

Таким образом, получаем совокупность

$\left[\begin{array}{l}sinx=0;\\ \sqrt{3}sinx-cosx=0.\end{array}\right.$

Решение первого уравнения совокупности:

$x = \pi n, n \in Z.$

Второе уравнение преобразуем следующим образом:

$\sqrt{3}sinx - cosx = 0;\ \sqrt{3}sinx = cosx;\ \sqrt{3}tgx = 1; tgx = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Таким образом, решение второго уравнения имеет вид:

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\pi n, n \in Z;\ \ \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример. Решите уравнение $2cos^3x - cos^2x + 2cosx - 1 = 0.$

Решение:

Введем новую переменную

$t = cosx.$

Уравнение примет вид:

$2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0.$

Разложим левую часть на множители

$t^2(2t - 1) + (2t - 1) = 0;$

$(2t - 1)(t^2 + 1) = 0.$

Таким образом, получаем совокупность уравнений

$\left[\begin{array}{l} 2t - 1 = 0; \\ t^2 + 1 = 0. \end{array}\right.$

Второе уравнение совокупности

$t^2 + 1 = 0; t^2 = -1$

не имеет решений.

Решение первого уравнения:

$t = \frac{1}{2}.$

Выполнив обратную замену, получим

$cosx = \frac{1}{2}.$

Таким образом,

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Пример. Решите уравнение $(27^{cosx})^{sinx} = 3^{\frac{3cosx}{2}}$.

Решение:

Преобразуем уравнение

$$(3^{3cosx})^{sinx} = 3^{\frac{3cosx}{2}};$$

$$3^{3cosx\cdot sinx} = 3^{\frac{3cosx}{2}}.$$

Следовательно,

$$3cosx \cdot sinx = \frac{3cosx}{2};$$

$$2cosx \cdot sinx = cosx;$$

$$2cosx \cdot sinx - cosx = 0;$$

$$cosx \cdot (2sinx - 1) = 0.$$

Таким образом, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} cosx = 0; \\ sinx = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения совокупности

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

Решение второго уравнения имеет вид

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

8.12. Упражнения

1. Известно, что α– острый угол. Найдите значение $sin\alpha$ по заданному значению $cos\alpha$:

а) $cos\alpha = 0{,}6$; б) $cos\alpha = 0{,}8$;

2. Упростите выражение:

а) $2(tg^2\alpha + 1)cos^2\alpha + 3$; б) $sin^2\alpha + cos^2\alpha\left(1 + \frac{1}{cos^4\alpha}\right) - 2$.

3. Найдите значение выражения:

а) $sin^2 32° + cos^2 58° + 1$; б) $tg^2 13° \cdot ctg^2 77° + 1$.

4. Найдите значение выражения:

а) $2sin30° + 4cos60°$; б) $2tg45° + \sqrt{3}ctg30°$.

5. Известно, что угол α находится во второй четверти. Найдите значение $cos\alpha$ по известному значению $sin\alpha$:

а) $sin\alpha = 0{,}6$; б) $sin\alpha = 0{,}8$.

6. Известно, что угол α находится в третьей четверти. Найдите значение $cos\alpha$ по известному значению $sin\alpha$.

а) $sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

7. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2}\sin(-45°) + \sqrt{3}cos(-30°)$; б) $\sqrt{3}\,tg(-30°) - 2ctg(-45°)$.

8. Найдите значение выражения:

а) $3sin150° + \sqrt{2}sin135°$; б) $6cos120° + \sqrt{2}cos135°$.

9. Найдите значение выражения:

а) $4sin390° + \sqrt{2}cos405°$; б) $2\sqrt{3}sin420° + 6cos300°$.

10. Найдите значение выражения:

а) $sin27°cos63° + cos27°sin63°$; б) $cos22°cos68° - sin22°sin68°$.

11. Найдите значение выражения:

а) $\frac{6sin27°sin63°}{cos36°}$; б) $\frac{2\cos^2 19° - 1}{sin52°}$.

12. Вычислить $cos2\alpha$ по известному $sin\alpha$:

а) $sin\alpha = 0{,}4$; б) $sin\alpha = 0{,}8$.

13. Вычислить $cos2\alpha$ по известному $cos\alpha$:

а) $cos\alpha = 0{,}8$; б) $cos\alpha = 0{,}2$.

14. Вычислить $sin^2\alpha$ по известному $cos2\alpha$.

а) $cos2\alpha = 0{,}4$; б) $cos2\alpha = 0{,}2$.

15. Вычислить $cos^2\alpha$ по известному $cos2\alpha$.

а) $cos2\alpha = 0{,}6$; б) $cos2\alpha = 0{,}8$.

16. Упростить выражение:

а) $\sin(30° - \alpha)\sin(30° + \alpha)$; б) $\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha)$.

17. Преобразовать сумму в произведение:

а) $sin4\alpha + sin2\alpha$; б) $cos2\alpha + cos6\alpha$.

18. Вычислить $sin\alpha$ и $cos\alpha$ по заданному значению $tg\frac{\alpha}{2}$:

а) $tg\,\alpha/2 = 1$; б) $tg\,\alpha/2 = 2$.

19. Вычислить значение выражения по заданному значению $tg\frac{\alpha}{2}$:

а) $\dfrac{6sin\alpha + 9cos\alpha}{9sin\alpha + 5cos\alpha}, tg\,\alpha/2 = 1/2$; б) $\dfrac{3sin\alpha + cos\alpha}{3sin\alpha - cos\alpha}, tg\,\alpha/2 = 2$.

20. Вычислить значение выражения по заданному значению $tg\frac{\alpha}{2}$:

а) $7tg(45° - \alpha), tg\,\alpha/2 = 1/2$; б) $\sqrt{2}sin(45° - \alpha), tg\,\alpha/2 = 1/2$.

21. Перевести угол α из градусной в радианную меру:

а) $\alpha = 10°$; б) $\alpha = 40°$.

22. Вычислить:

а) $2\sqrt{3}sin\frac{\pi}{3} + 4sin\frac{\pi}{6} + tg\frac{\pi}{4}$; б) $\sqrt{3}cos\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{3} + ctg\frac{\pi}{4}$.

23. Вычислить:

а) $4arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 3arcsin\frac{1}{2}$; б) $4arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 3arccos\frac{1}{2}$.

24. Вычислить:

а) $4arctg1 + 6arctg(\sqrt{3})$; б) $8arcctg1 + 6arcctg(\sqrt{3})$.

25. Решить уравнения:

а) $2sin^2x - 5sinx = 0$; б) $4cos^2x - 6cosx = 0$.

26. Решить уравнения:

а) $\sqrt{2}sinx - sin2x = 0$; б) $\sqrt{3}cosx - sin2x = 0$.

27. Решить уравнения:

а) $cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + sinx = 0$; б) $sin2x = sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

28. Решить уравнения:

а) $cos2x - \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$; б) $cos2x + \sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

29. Решить уравнения:

а) $2cos^3x + \sqrt{3}cos^2x + 2cosx + \sqrt{3} = 0$; б) $2sin^3x - sin^2x + 2sinx - 1 = 0$.

30. Решить уравнения:

а) $\left(36^{sinx}\right)^{cosx} = 6^{\sqrt{2}sinx}$; б) $\left(36^{sinx}\right)^{-cosx} = 6^{sinx}$.

9. ПРОИЗВОДНАЯ

9.1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и придадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$ («дельта икс»). Тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это отношение называется *относительным приращением функции* на промежутке $(x; x + \Delta x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел относительного приращения функции при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Производная функции имеет несколько обозначений:

•y' (обозначение Лагранжа, читается: «игрек штрих»);

•$\frac{dy}{dx}$ (обозначение Лейбница, читается: «дэ игрек по дэ икс»);

•$\dot{y}$ (обозначение Ньютона, читается: «игрек с точкой»).

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Из определения производной следует, что производная константы равна нулю, то есть

$$(k)' = 0,$$

где $k = const$.

9.2. Таблица производных

На основе определения производной можно составить таблицу производных основных элементарных функций.

Таблица 4.

Производные основных элементарных функций

№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$
1	x	1	5	$sinx$	$cosx$	9	$arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	x^n	nx^{n-1}	6	$cosx$	$-sinx$	10	$arccosx$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	e^x	e^x	7	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	11	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
4	lnx	$1/x$	8	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	12	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Пример. Найти производную функции $y=\sqrt{x}$ при $x=0{,}25$.

Решение:

Найдем производную

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Подставив числовое значение, получим

$$y'(0{,}25)=\frac{1}{2\sqrt{0{,}25}}=\frac{1}{2\cdot 0{,}5}=\frac{1}{1}=1.$$

Ответ: $y'(0{,}25)=1$.

Пример. Найти производную функции $y=\frac{1}{x}$ при $x=0{,}1$.

Решение:

Найдем производную

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

Подставив числовое значение, получим

$$y'(0{,}1)=-\frac{1}{0{,}1^2}=-\frac{1}{0{,}01}=-100.$$

Ответ: $y'(0{,}1)=-100$.

9.3. Геометрический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной в данной точке

$$y'(x_0) = k = tg\alpha.$$

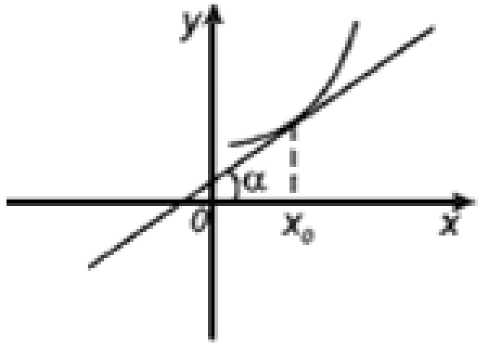


Рис. 55. Геометрический смысл производной

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение:

Сначала вычислим значение функции в точке $x_0 = 2$

$f(2) = 2^2 = 4.$

Найдем производную функции

$f'(x) = 2x$

Вычислим значение производной в точке $x_0 = 2$

$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$

Подставив найденные значения функции и ее производной в точке в уравнение касательной, получим

$y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4.$

Найдем угловой коэффициент нормали (прямой, перпендикулярной касательной) из условия перпендикулярности прямых

$k = -\frac{1}{f'^{(2)}} = -\frac{1}{4}.$

Запишем уравнение нормали

$y = 4 - \frac{1}{4}(x - 2) = -0{,}25x + 4{,}5.$

Ответ: $y = 4x - 4$; $y = -0{,}25x + 4{,}5.$

9.4. Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, *линейная относительно приращения* аргумента Δx. Дифференциал обозначается dy и вычисляется по формуле

$$dy = y'\Delta x.$$

Найдем дифференциал функции $y = x$. Производная $y' = 1$, следовательно,

$$dy = dx = y'\Delta x = \Delta x,$$

откуда

$$dx = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменой. На этом основании формулу для дифференциала функции можно представить в виде

$$dy = y'dx,$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Пример. Найти дифференциал функции $y = x^2$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Решение:

Сначала найдем дифференциал

$dy = y'dx = 2xdx.$

Подставив числовые значения, получим

$dy = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2.$

Ответ: $dy = 2.$

9.5. Правила вычисления производных

Пусть k – константа, а $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1) Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(ku)' = ku'.$$

2) Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Отметим, что данное правило можно обобщить на случай алгебраической суммы нескольких функций.

3) Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

4) Производная отношения двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Пример. Найти значение производной функции

$y = 2x^4 + 2\sqrt{x} + \dfrac{4}{x} + 1$ при $x = 1$.

Решение:

Воспользуемся правилом вычисления производной суммы нескольких функций:

$$y' = 8x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}.$$

Подставив значение $x = 1$, получим

$$y'(1) = 8 \cdot 1^3 + \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{4}{1^2} = 5.$$

Ответ: $y'(1) = 5$.

Пример. Найти значение производной функции $y = 6e^x + 2x$ при $x = ln2$.

Решение:

$y' = 6e^x + 2.$

Подставив значение $x = ln2$, получим

$y'(ln2) = 6e^{ln2} + 2 = 6 \cdot 2 + 2 = 14.$

Ответ: $y'(ln2) = 14.$

Пример. Найти значение производной функции $y = 12lnx + 3x$ при $x = 3$.

Решение:

$y' = \frac{12}{x} + 3.$

Подставив значение $x = 3$, получим

$$y'(3) = \frac{12}{3} + 3 = 7.$$

Ответ: $y'(3) = 7.$

Пример. Найти значение производной функции $y = 12sinx + tgx$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

Решение:

$$y' = 12cosx + \frac{1}{cos^2x}.$$

Подставив значение $x = \frac{\pi}{3}$, получим

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{cos^2\frac{\pi}{3}} = 6 + 4 = 10.$$

Ответ: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10$

Пример. Найти значение производной функции

$y = 10arctgx + \sqrt{3}arcsinx$ при $x = \frac{1}{2}$.

Решение:

$$y' = \frac{10}{1 + x^2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Подставив значение $x = \frac{1}{2}$, получим

$$y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{10}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=8+2=10\,.$$

Ответ: $y'\left(\frac{1}{2}\right)=10$.

Пример. Вычислить производную функции $y=e^x\sin x$.

Решение:

Используя правило вычисления производной произведения двух функций и табличные значения производных, получим

$$y'=(e^x\sin x)'=(e^x)'sinx+e^x(sinx)'=$$

$$=e^x sinx+e^x cosx=e^x(sinx+cosx).$$

Ответ: $y'=e^x(sinx+cosx)$.

Пример. Вычислить производную функции $y=\frac{2x}{x^2+1}$.

Решение:

Воспользуемся правилом вычисления производной отношения двух функций

$$y'=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{(2x)'(x^2+1\,)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}\,.$$

Ответ: $y=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

Пример. Вычислить производную логарифмической функции общего вида $y=log_a x$, где $a>0, a\neq 1$.

Решение:

Используя формулу перехода к новому основанию, представим логарифмическую функцию в виде

$$y=\log_a x=\frac{lnx}{lna}\,.$$

Найдем производную последнего выражения

$$y'=\left(\frac{lnx}{lna}\right)'=\frac{1}{lna}(lnx)'=\frac{1}{xlna}.$$

Таким образом, производная логарифмической функции общего вида вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}.$$

Например,

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{xln2}.$$

Ответ: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}$.

9.6. Производная сложной функции

Пусть $y = f(z)$ есть функция от переменной z, а переменная z в свою очередь является функцией $z = g(x)$ от переменной x, т.е. задана сложная функция $y = f(g(x))$.

Если $y = f(z)$ и $z = g(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то *производная сложной функции* равна производной данной функции по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, то есть

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y'_z \cdot z'_x.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = (3x + 2)^7$.

Решение:

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$y' = ((3x + 2)^7)' = 7(3x + 2)^6(3x + 2)' =$

$= 7(3x + 2)^6 \cdot 3 = 21(3x + 2)^6$.

Ответ: $y' = 21(3x + 2)^6$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \dfrac{1}{(3x + 2)^7}$

Решение:

Представим функцию в виде

$y = \dfrac{1}{(3x + 2)^7} = (3x + 2)^{-7}$.

По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$y' = ((3x+2)^{-7})' = -7(3x+2)^{-8}(3x+2)' =$$

$$= -7(3x+2)^{-8} \cdot 3 = -\frac{21}{(3x+2)^8}.$$

Ответ: $y' = -\frac{21}{(3x+2)^8}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = e^{4x+3}$.

Решение:

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (e^{4x+3})' = e^{4x+3}(4x+3)' = 4e^{4x+3}.$$

Ответ: $y' = 4e^{4x+3}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \ln(6x+5)$.

Решение:

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (\ln(6x+5))' = \frac{1}{6x+5}(6x+5)' = \frac{6}{6x+5}.$$

Ответ: $y' = \frac{6}{6x+5}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \sin^2 x$.

Решение:

Представим функцию в виде

$$y = sin^2 x = (sinx)^2.$$

По правилу вычисления сложной функции имеем

$$y' = ((sinx)^2)' = 2sinx \cdot (sinx)' = 2sinxcosx = sin2x.$$

Ответ: $y' = sin2x$.

Пример. Вычислить производную показательной функции общего вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Решение:

Используя основное логарифмическое тождество, представим показательную функцию в виде

$$y = a^x = e^{lna^x} = e^{xlna}.$$

Применив формулу дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = (e^{xlna})' = e^{xlna} \cdot lna = e^{lna^x} \cdot lna = a^x lna.$$

Таким образом, производная показательной функции общего вида вычисляется по формуле

$(a^x)' = a^x lna.$

Например, $(3^x)' = 3^x \cdot ln3.$

Ответ: $(a^x)' = a^x lna.$

9.7. Экстремумы функции

Функция называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Возрастающие и убывающие на промежутке функции называются *монотонными.*

Теорема. Если *производная* функции $y = f(x)$ *положительна* внутри некоторого промежутка X, то функция *возрастает* на этом промежутке.

Например, производная функции $y = x^3 + x + 1$ равна

$$y' = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1.$$

Очевидно, что $y' > 0$, следовательно, данная функция является возрастающей.

Теорема. Если *производная* функции $y = f(x)$ *отрицательна* внутри некоторого промежутка X, то функция *убывает* на этом промежутке.

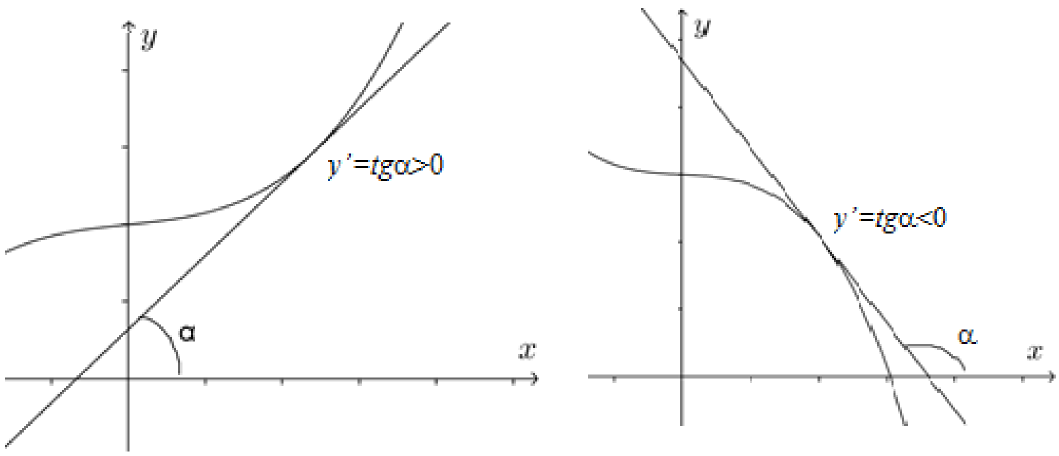


Рис. 56. Геометрическая иллюстрация условий монотонности функции

Например, производная функции $y = -x^5 - 3x + 2$ равна

$$y' = (-x^5 - 3x + 2)' = -5x^4 - 3.$$

Очевидно, что $y' < 0$, следовательно, данная функция является убывающей.

Геометрический смысл теорем: если касательная к графику функции образует с осью абсцисс острый угол, то функция возрастает, если тупой – убывает.

Точки на оси абсцисс, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, называются *точками экстремума.*

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток возрастания, а справа – промежуток убывания, то эта точка называется *точкой максимума.*

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток убывания, а справа – промежуток возрастания, то эта точка называется *точкой минимума.*

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно *максимумом и минимумом функции.* Максимум или минимум функции объединяют общим термином *экстремум функции*.

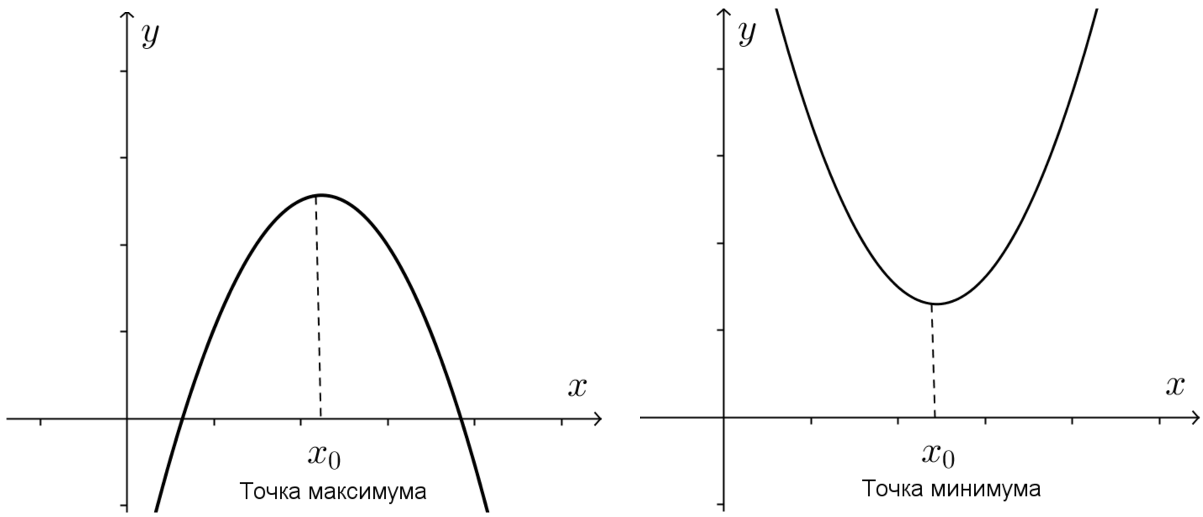


Рис. 57. Геометрическая иллюстрация экстремумов функции

Теорема (необходимые условия экстремума). В точке экстремума $x = x_0$ производная равна нулю

$$f'(x_0) = 0.$$

Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными*.

При формулировке необходимого условия экстремума предполагалось, что функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0. Однако, возможны случаи, когда в точках экстремума производная не существует. Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются *критическими.*

Теорема (первое достаточное условие). Пусть x_0 – критическая точка. Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум, а если с минуса на плюс – минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Алгоритм исследования на экстремум при помощи первой производной:

1. Находим производную.

2. Находим критические точки.

3. Исследуем знаки первой производной и находим экстремумы функции.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 10$.

Решение:

Сначала найдем производную данной функции

$f'(x) = (2x^3 - 6x + 10)' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x - 1)(x + 1)$.

Приравнивая производную нулю

$6(x - 1)(x + 1) = 0$,

найдем критические точки

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Экстремумы могут быть только в этих точках. Нанесем критические точки на числовую ось. Исследуем знак производной $f'(x) = 6(x - 1)(x + 1)$.

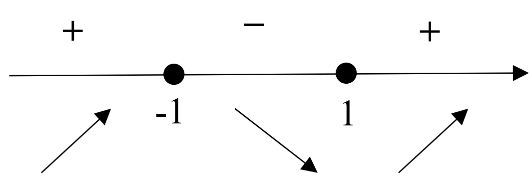


Рис. 58. Знаки производной

Найдем экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 10$:

$y_{max} = f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) + 10 = 14$;

$y_{min} = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 10 = 6.$

Ответ: $y_{max} = f(-1) = 14$; $y_{min} = f(1) = 6$.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Решение:

Представим данную функцию в виде

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}.$$

Найдем производную

$$f'(x) = (x + x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0.$$

Решив уравнение, найдем критические

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Точка $x = 0$ не является критической, так как функция не определена в этой точке.

Нанесем критические точки и точку $x = 0$ на числовую ось. Исследуем знак производной

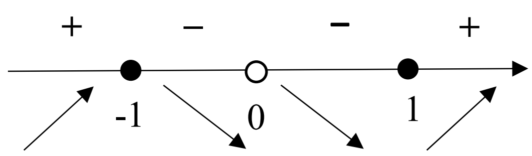


Рис. 59. Знаки производной

Таким образом, $x = -1$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем экстремумы функции $f(x) = x + 1/x$:

$$y_{max} = f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2;$$

$$y_{min} = f(1) = 1 + 1/1 = 2.$$

В данном примере оказалось, что $y_{max} < y_{min}$.

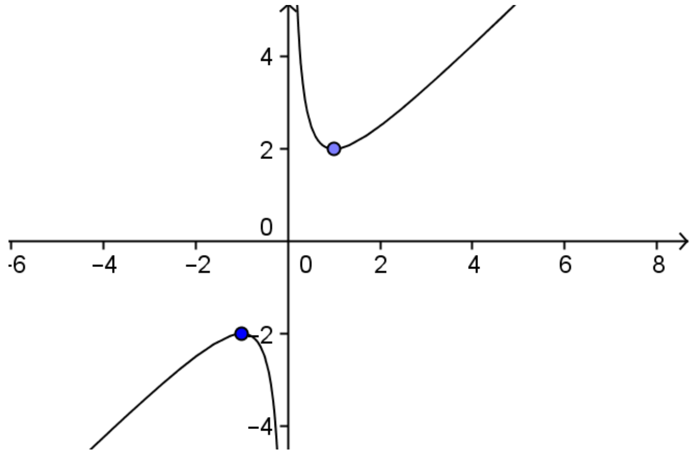


Рис. 60. График функции

Ответ: $y_{max} = f(-1) = -2$; $y_{min} = f(1) = 2$.

При формулировке второго достаточного условия используется понятие второй производной

$$y'' = (y')',$$

т.е. вторая производная функции равна производной от производной данной функции.

Теорема (второе достаточное условие). Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 и выполняются условия:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция имеет экстремум:

если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ – минимум,

если $f''(x_0) < 0$, то $f(x_0)$ – максимум.

Алгоритм исследования на экстремум при помощи второй производной:

1) находим производную;
2) находим критические точки;
3) находим вторую производную;
4) исследуем знаки второй производной в критических точках и находим экстремумы функции.

Пример. При помощи второго достаточного условия исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - 3x + 10$.

Решение:

Сначала найдем производную данной функции

$f'(x) = (x^3 - 3x + 10) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$.

Приравнивая производную нулю

$3(x - 1)(x + 1) = 0$,

найдем критические точки

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Найдем вторую производную данной функции

$f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$.

В точке $x_1 = -1$ вторая производная $f''(x) = -6 < 0$, т.е. функция имеет максимум.

В точке $x_2 = 1$ вторая производная $f''(x) = 6 > 0$, т.е. функция имеет минимум.

Вычислив значения функции в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, найдем экстремумы функции:

$y_{max} = f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 10 = 12$,

$y_{min} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 10 = 8$.

Ответ: $y_{max} = f(-1) = 12$; $y_{min} = f(1) = 8$.

9.8. Выпуклость и вогнутость функций

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой на некотором промежутке X.

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*выпуклой вверх*) на промежутке X, если график функции $y = f(x)$ расположен ниже касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка X.

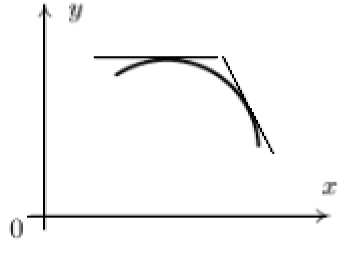


Рис. 61. Выпуклая функция

Функция $y = f(x)$ называется *вогнутой* (*выпуклой вниз*) на промежутке X, если график функции $y = f(x)$ расположен выше касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка X.

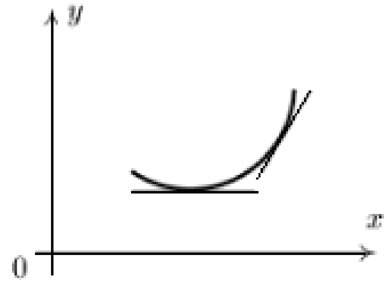


Рис. 62. Вогнутая функция

Теорема. Если вторая производная функции $y = f(x)$ внутри данного промежутка X положительна, то функция $y = f(x)$ вогнута (выпукла вниз); если же вторая производная отрицательна, то функция на данном промежутке выпукла (выпукла вверх).

Точка, в которой меняется направление выпуклости функции называется *точкой перегиба.*

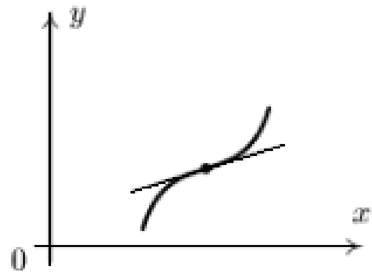


Рис. 63. Точка перегиба

Теорема (необходимое условие перегиба). В точке перегиба $x = x_0$ вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю

$$f''(x_0) = 0$$

или не существует.

Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует называются *критическими точками второго рода.*

Теорема (*достаточное условие перегиба*). Если вторая производная функции $y = f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Из этих теорем вытекает следующая схема исследования на выпуклость и вогнутость функций:

1) найти вторую производную;

2) найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует;

3) исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод о характере выпуклости исследуемой функции.

Пример. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^3 - 3x + 1$.

Решение:

Найдем вторую производную данной функции

$y'' = ((x^3 - 3x + 1)')' = (3x^2 - 3)' = 6x.$

Приравняв вторую производную нулю

$6x = 0,$

получим

$x = 0.$

Точка $x = 0$ – критическая точка второго рода.

Точка $x = 0$ разбивает область определения второй производной на два интервала: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

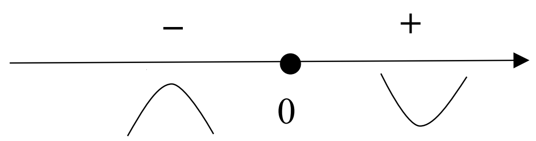


Рис. 64. Точка перегиба

Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба.

Найдем значение функции в точке перегиба

$y_п = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$

Ответ: $x = 0$ – точка перегиба.

9.9. Построение графиков многочленов

При исследовании многочленов и построении их графиков можно рекомендовать следующую схему:

1) найти интервалы монотонности и экстремумы (при помощи первой производной);
2) найти интервалы выпуклости-вогнутости и точки перегиба (при помощи второй производной);
3) найти дополнительные точки и построить график.

Пример. Построить график многочлена $y = x^3 - 3x + 1$.

Решение:

1. Найдем производную

$y' = 3x^2 - 3$.

Приравняв производную нулю

$y' = 0$,

получим уравнение

$3x^2 - 3 = 0$.

Корни этого уравнения

$x = -1$ и $x = 1$.

Таким образом, имеем две критические точки $x = -1$ и $x = 1$.

Исследуем знак производной. Для этого представим производную в виде

$y = 3(x + 1)(x - 1)$.

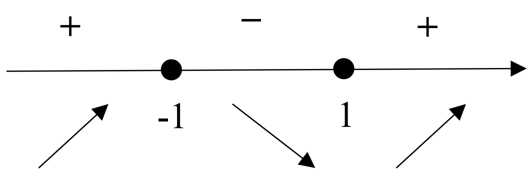


Рис. 65. Знаки производной

Таким образом, $x = -1$ – точка максимума; $x = -1$ – точка минимума.

Найдем экстремумы

$y_{max} = y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3$;

$y_{min} = y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1$.

2. Найдем вторую производную

$$y'' = (y')' = (3x^2 - 3)' = 6x.$$

Приравняв вторую производную нулю, получим уравнение

$$6x = 0.$$

Корень этого уравнения $x = 0$. Таким образом, $x = 0$ – критическая точка второго рода.

Исследуем знак второй производной.

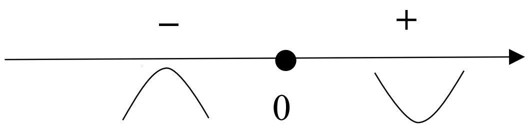


Рис. 66. Знаки второй производной

Таким образом, точка $x = 0$ – точка перегиба. Найдем значение функции в этой точке

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$

3. В качестве дополнительных характерных точек выберем

$x = -2,\ \ y(-2) = -1;$

$x = 2,\ \ y(2) = 3.$

Построим график функции.

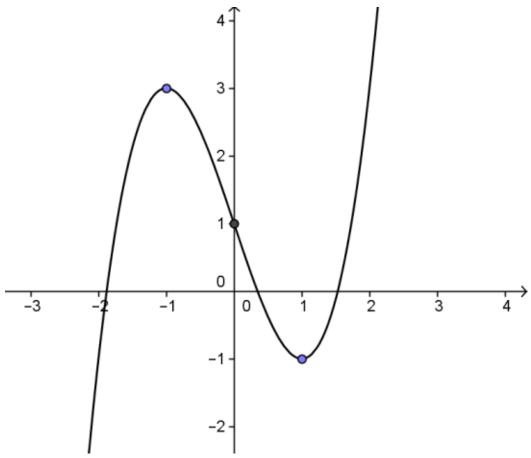


Рис. 67. График функции

Пример. Построить график многочлена $y = x^3 + 3x + 1$.

Решение:

1. Найдем производную

$y' = 3x^2 + 3 > 0.$

Производная больше нуля, следовательно, функция является возрастающей. Точек экстремума нет.

2. Найдем вторую производную

$y'' = (y')' = (3x^2 + 3)' = 6x.$

Приравняв вторую производную нулю, получим уравнение

$6x = 0.$

Корень этого уравнения $x = 0$. Таким образом, $x = 0$ – критическая точка второго рода.

Исследуем знак второй производной.

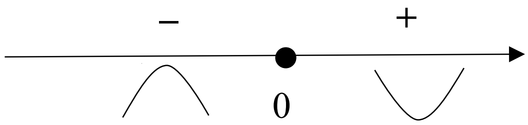


Рис. 68. Знаки второй производной

Таким образом, точка $x = 0$ – точка перегиба. Найдем значение функции в этой точке

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$

3. В качестве дополнительных характерных точек выберем

$x = -1, \ y(-1) = -3;$

$x = 1, \ y(1) = 5.$

Построим график функции.

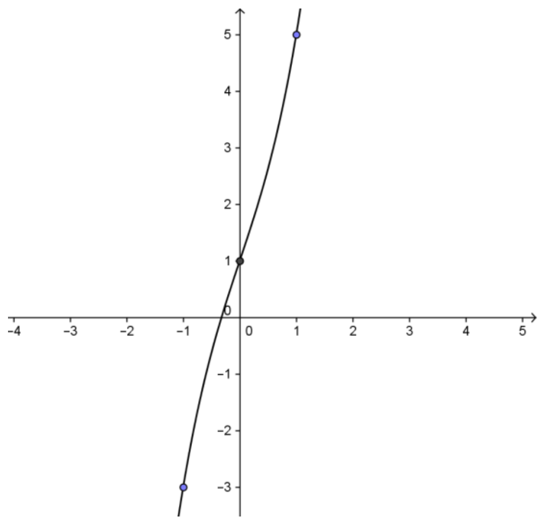


Рис. 69. График функции

Пример. Построить график многочлена $y = x^4 - 4x + 1$.

Решение:

1. Найдем производную

$y' = 4x^3 - 4.$

Приравняв производную нулю

$y' = 0,$

получим уравнение

$4x^3 - 4 = 0; 4x^3 = 4; x^3 = 1; x = 1.$

Таким образом, имеем одну критическую точку $x = 1$.

Исследуем знак производной.

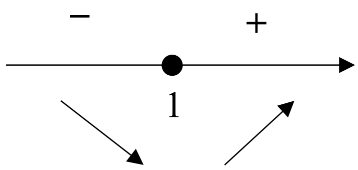


Рис. 70. Знаки производной

Таким образом, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем минимум функции

$y_{min} = y(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 + 1 = -2.$

2. Найдем вторую производную

$y'' = (y')' = (4x^3 - 4)' = 12x^2.$

Приравняв вторую производную нулю, получим уравнение

$12x^2 = 0.$

Корень этого уравнения $x = 0$. Таким образом, $x = 0$ – критическая точка второго рода.

Исследуем знак второй производной.

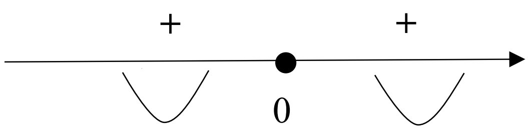


Рис. 71. Знаки второй производной

Таким образом, точка $x = 0$ не является точкой перегиба

3. В качестве дополнительных характерных точек выберем

$x = 0,\ \ y(0) = 1;$

$x = 2,\ \ y(2) = 9.$

Построим график функции.

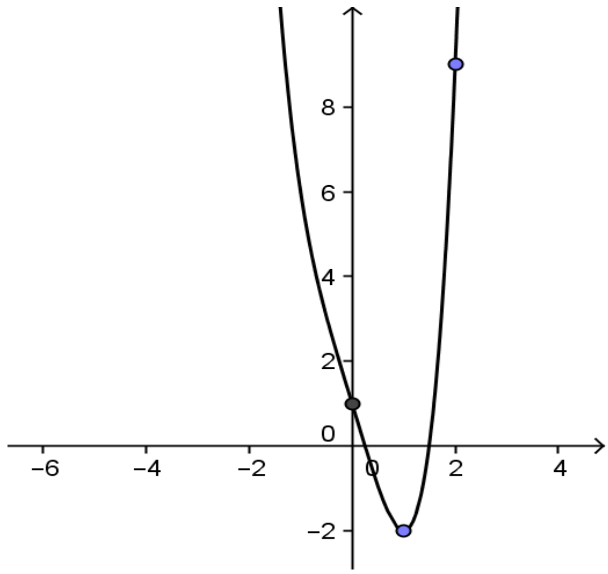


Рис. 72. График функции

9.10. Упражнения

1. Найти значения производных при данном x:

а) $y = 3x^2 - 2x + \frac{4}{x}$, $x = 2$; б) $y = \frac{8}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + 2x$, $x = 4$; в) $y = 2e^x + 3x$, $x = ln2$.

2. Найти значения производных при данном x:

а) $y = 6lnx - x^2$, $x = 2$; б) $y = 3sinx + 2tgx$, $x = \frac{\pi}{3}$; в) $y = 5arctgx + \sqrt{3}arcsinx$, $x = \frac{1}{2}$.

3. Найти производные следующих функций:

а) $y = (2x - 1)(x + 1)$ б) $y = (x^2 + 1)(e^x - 1)$ в) $y = (lnx + x)(sinx + 2)$

4. Найти производные следующих функций:

а) $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$; б) $y = \frac{e^x}{x + 1}$; в) $y = \frac{lnx}{sinx + 1}$.

5. Найти производные следующих функций:

а) $y = (3x + 2)^7 \frac{1}{2x + 1}$; б) $y = e^{6x} - \ln(2x + 3)$; в) $y = sin\,9x + arctg(x + 2)$.

6. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = x^3 - 3x + 4$: б) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 6$; в) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

7. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$; в) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

8. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; б) $y = 2x^3 - 3x^2$; в) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

9. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

а) $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2$; б) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2$; в) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

10. Построить графики многочленов:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 1$; б) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$; в) $y = x^3 - 3x + 2$.

10. ИНТЕГРАЛ

10.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$, так как

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Нетрудно убедиться, что функции $\frac{x^3}{3} + 1$, $\frac{x^3}{3} + 5$ и вообще $\frac{x^3}{3} + C$, где C – некоторое произвольное число, также являются первообразными для функции $f(x) = x^2$. Действительно, по определению первообразной имеем

$$\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3} + 5\right)' = x^2, \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Таким образом, для заданной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно.

Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Можно показать, что выражение вида $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, описывает *все первообразные* функции $f(x)$.

Совокупность функций $F(x) + C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Таким образом, по определению, имеем

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием* этой функции.

Из определения неопределенного интеграла, в частности, следует, что неопределенный интеграл от постоянной величины k представляет собой линейную функцию

$$\int kdx = kx + C,$$

где $k = const$. Действительно,

$$\left(\int kdx\right)' = (kx + C)' = k.$$

Например,

$$\int 5dx = 5x + C.$$

10.2. Таблица интегралов

На основе формул, по которым вычислялись производные элементарных функций, можно получить таблицу неопределенных интегралов.

Таблица 5

Таблица неопределенных интегралов

№	$f(x)$	$\int f(x)dx$	№	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	1	$x + C$	6	e^x	$e^x + C$
2	$x^n\ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	7	$sinx$	$-cosx + C$
3	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert + C$	8	$cosx$	$sinx + C$
4	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx + C$	9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$
5	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx + C$	10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x}dx$.

Решение:

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C.$$

Ответ:$2\sqrt{x} + C$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Ответ:$-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

10.3. Правила интегрирования

Сформулируем правила нахождения неопределенных интегралов:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

где k – некоторое заданное число.

2. Интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx\,.$$

Пример. Найти интеграл $\int (6x^2 + 1)dx$.

Решение:

$$\int(6x^2+1)dx=6\int x^2dx+\int dx=6\frac{x^3}{3}+x=2x^3+x+C.$$

Ответ: $2x^3+x+C$.

Пример. Найти интеграл $\int\left(\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx$.

Решение:

$$\int\left(\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x}\right)dx=3\int x^{-2}dx+4\int\frac{dx}{x}=3\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+4\ln|x|=$$

$$=-\frac{3}{x}+4\ln|x|+C.$$

Ответ: $-\frac{3}{x}+4\ln|x|+C$.

Пример. Найти интеграл $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение:

$$\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=3\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=$$

$$=2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}=2\sqrt{x}(x+1)+C.$$

Ответ: $2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

Пример. Найти интеграл $\int\left(\frac{3}{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

Решение:

$$\int\left(\frac{3}{x^2+1}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=3arctgx+2arcsinx+C.$$

Ответ: $3arctgx+2arcsinx+C$.

Пример. Найти интеграл $\int\left(cosx+\frac{2}{cos^2x}\right)dx$.

Решение:

$$\int\left(cosx+\frac{2}{cos^2x}\right)dx=sinx+2tgx+C.$$

Ответ: $sinx+2tgx+C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2-1}{x+1}dx.$

Решение:

$$\int \frac{x^2-1}{x+1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1}dx = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - x + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3x^3-2x^2+1}{x}dx.$

Решение:

$$\int \frac{3x^3-2x^2+1}{x}dx = \int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= 3\int x^2dx - 2\int xdx + \int \frac{dx}{x} = x^3 - x^2 + \ln|x| + C.$$

Ответ: $x^3 - x^2 + \ln|x| + C.$

Пример. Найти интеграл $\int tg^2x\,dx.$

Решение:

$$\int tg^2x\,dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Ответ: $tgx - x + C.$

10.4. Метод замены переменной

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – заданная непрерывная функция, x – переменная интегрирования. Положим $x = \varphi(t)$, где t – новая переменная, а $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется формулой *замены переменной* в неопределенном интеграле. Введем обозначение

$$g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

С учетом данного обозначения формула замены переменной принимает вид

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt.$$

Здесь $g(t)$ – более «удобная» для интегрирования функция, чем функция$f(x)$. После интегрирования по переменной t следует вернуться к исходной переменной x при помощи обратной подстановки $t = \psi(x)$, где $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ – обратная функция.

Пример. Вычислить интеграл $\int 12(2x+1)^5\,dx$.

Решение:

Введем новую переменную

$t = 2x + 1.$

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)'dt = \frac{1}{2}dt = \frac{dt}{2}.$$

Найдем интеграл

$$\int 12(2x+1)^5\,dx = 12\int t^5\frac{dt}{2} =$$

$$= 6\int t^5dt = 6\frac{t^6}{6} = t^6 = (2x+1)^6 + C.$$

Ответ: $(2x+1)^6 + C$.

Пример. Найти интеграл $\int 3\sqrt{2x-4}\,dx$.

Решение:

Введем новую переменную

$t = 2x - 4.$

Выразим из последнего равенства переменную x через новую переменную t

$$x = \frac{t+4}{2} = \frac{t}{2} + 2\,.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \frac{1}{2}dt,$$

следовательно,

$$\int 3\sqrt{2x-4} = 3\int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} = (2x-4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ответ: $(2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{2dx}{2x+1}$.

Решение:

Введем новую переменную

$t = 2x + 1$.

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt = \frac{dt}{2}.$$

Найдем интеграл

$$\int \frac{2dx}{2x+1} = 2\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|2x+1| + C.$$

Ответ: $\ln|2x+1| + C$.

Пример. Найти интеграл $\int 2e^{2x+1}\,dx$.

Решение:

Введем новую переменную

$t = 2x + 1$.

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt\ .$$

Найдем интеграл

$$\int 2e^{2x+1}dx = 2\int e^t \frac{dt}{2} = e^t = e^{2x+1} + C.$$

Ответ: $e^{2x+1} + C$.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int 2\cos(2x+1)\, dx$.

Решение:

Введем новую переменную

$$t = 2x + 1.$$

Выразим переменную x через t

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt.$$

Найдем интеграл

$$\int 2\cos(2x+1)dx = 2\int cost\frac{dt}{2} = sint = \sin(2x+1) + C.$$

Ответ: $\sin(2x+1) + C$.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$, где a – некоторое число.

Решение:

Преобразуем функцию под знаком интеграла

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}.$$

Введем новую переменную

$$t = \frac{x}{a}.$$

Выразим x через t

$x = at.$

Найдем дифференциал

$dx = adt.$

Найдем интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{adt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a} arctgt = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C.$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ где a – некоторое число ($a > 0$).

Решение:

Преобразуем функцию под знаком интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Введем новую переменную

$$t = \frac{x}{a}.$$

Выразим x через t

$x = at.$

Найдем дифференциал

$dx = adt.$

Найдем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{adt}{\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = arcsint = arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Ответ: $arcsin\frac{x}{a} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int a^x dx$, где a^x – показательная функция.

Решение:

Воспользуемся формулой

$$a^x = e^{lna^x} = e^{xlna}.$$

Введем новую переменную

$$t = xlna.$$

Выразим x через t

$$x = \frac{t}{lna}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \left(\frac{1}{lna} \cdot t\right)' dt = \frac{1}{lna} \cdot dt = \frac{dt}{lna}.$$

Найдем интеграл

$$\int a^x dx = \int e^{xlna} dx = \frac{1}{lna} \int e^t dt = \frac{1}{lna} e^t =$$

$$= \frac{1}{lna} e^{xlna} = \frac{1}{lna} e^{lna^x} = \frac{a^x}{lna} + C.$$

Таким образом,

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C.$$

Например,

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{ln2} + C.$$

Ответ: $\frac{a^x}{lna} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-6}\,dx$.

Решение:

Введем новую переменную

$t = \sqrt{x-6}$.

Выразим из последнего равенства переменную x через новую переменную t

$x = t^2 + 6$.

Найдем дифференциал

$dx = 2tdt$,

следовательно,

$$\int x\sqrt{x-6}\,dx = \int (t^2+6)t \cdot 2tdt = 2\int (t^4+6t^2)dt =$$

$$2\left(\frac{t^5}{5} + 2t^3\right) = \frac{2}{5}t^5 + 4t^3 = \frac{2}{5}(x-6)^{5/2} + 4(x-6)^{3/2} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{5}(x-6)^{5/2} + 4(x-6)^{3/2} + C$.

В некоторых случаях, для упрощения подынтегрального выражения, вместо прямой подстановки $x = \varphi(t)$ удобнее применять *обратную подстановку* $t = \psi(x)$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Решение:

Введем новую переменную

$t = x^2 + 4$.

В отличие от рассмотренных выше примеров, в данном случае нет необходимости строить явное выражение для функции $x = \varphi(t)$.

Найдем дифференциал

$dt = 2xdx$.

Исходное подынтегральное выражение содержит в числителе произведение xdx. Выразив xdx через dt, получим

$$xdx = \frac{dt}{2},$$

следовательно,

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C$.

Использование обратной подстановки $t=\psi(x)$ оправдывается, если в составе подынтегрального выражения $f(x)dx$ содержится множитель $\psi'(x)dx$, дающий дифференциал новой переменной dt. В предыдущем примере подстановка $t=x^2+4$ себя оправдала, так как подынтегральное выражение данного интеграла содержало множитель $xdx=\frac{dt}{2}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3\,ln^2\,xdx}{x}$.

Решение:

Введем новую переменную

$t=lnx$.

Найдем дифференциал

$dt=\frac{1}{x}dx$,

следовательно,

$$\int \frac{3\ln^2 xdx}{x}=3\int t^2dt=3\cdot\frac{t^3}{3}+C=t^3+C=\ln^3 x+C.$$

Ответ: $\ln^3 x+C$.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^3 x\cdot \cos xdx$.

Решение:

Введем новую переменную

$t=sinx$.

Найдем дифференциал

$dt=cosxdx$.

Исходное подынтегральное выражение содержит множитель $cosxdx$, следовательно,

$$\int \sin^3 x\cdot\cos xdx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}=\frac{\sin^4 x}{4}+C\,.$$

Ответ: $\frac{\sin^4 x}{4}$.

10.5. Определенный интеграл

Исторически понятие определенного интеграла возникло в связи с *задачей о вычислении площади фигуры.*

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$. Требуется найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью абсцисс $y = 0$.

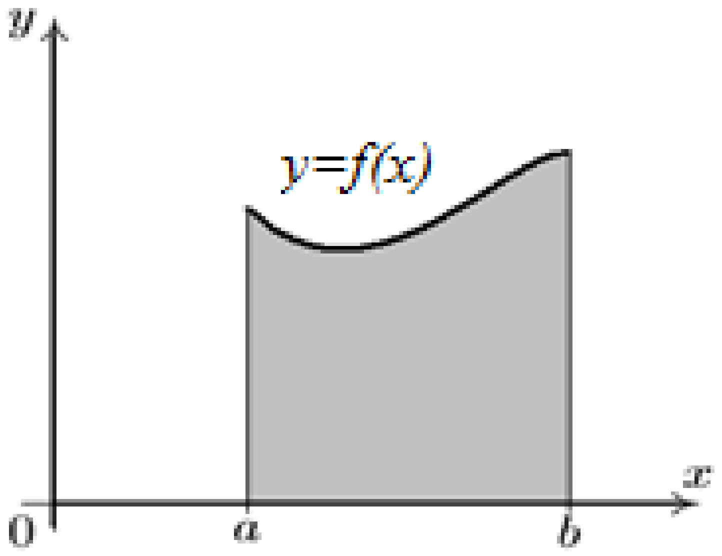


Рис.73. Криволинейная трапеция

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n сегментов точками $x_0, x_1, \dots x_n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

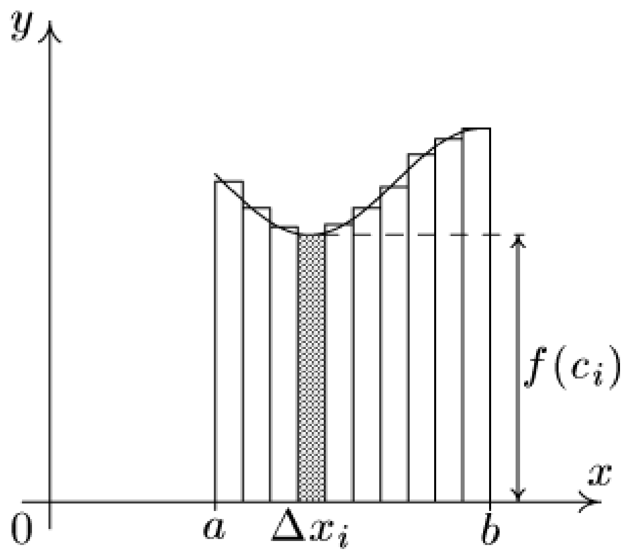


Рис.74. Разбивка фигуры

Внутри каждого сегмента длиной

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \ (i = 1,2, \dots, n)$$

выберем произвольную точку c_i и вычислим значение $f(c_i)$. Произведение $f(c_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма площадей всех прямоугольников

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

приближенно равна площади криволинейной трапеции. Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Обозначим через λ максимальную из длин сегментов $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} S_n = S.$$

Числа a и b называются *нижним и верхним пределами* интегрирования функции соответственно.

В общем случае, когда функция $y = f(x)$ может принимать не только положительные, но и отрицательные значения, условимся считать площади частей фигуры под осью OX – отрицательными. Например, для приведенного ниже графика функции

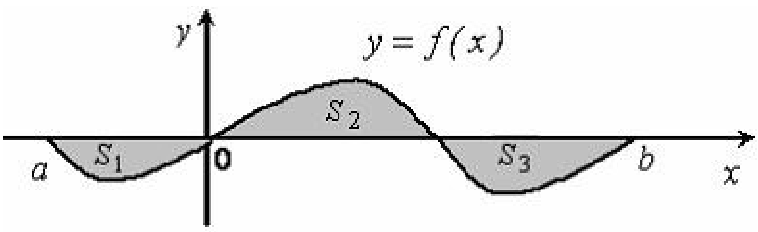


Рис. 75. Вычисление определенного интеграла в общем случае

определенный интеграл равен

$$\int_a^b f(x)dx = S_2 - S_1 - S_3 \, .$$

Здесь S_1, S_2, S_3– площади фигур.

Ранее предполагалось, что $a < b$. Понятие определенного интеграла можно обобщить и на случай $a \geq b$, полагая по определению

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

Из последнего равенства, в частности, следует

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a;b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула носит название *формулы Ньютона–Лейбница*. Для сокращения записи решения приращение первообразной обозначают следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Таким образом, основная формула интегрального исчисления принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Формула Ньютона-Лейбница позволяет свести вычисление определенного интеграла к отысканию неопределенного интеграла (первообразной). Действительно, чтобы вычислить определенный интеграл, достаточно найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x)$ (постоянное слагаемое C можно не записывать, так оно все равно уничтожится при вычитании), подставить в найденное выражение сначала верхний предел, затем нижний предел и вычесть из первой величины вторую.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^2 3x^2 dx$.

Решение:

$$\int_1^2 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3}\Big|_1^2 = x^3\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = arctgx\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \pi/4.$$

Ответ: $\pi/4$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение:

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\,\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^5 3\sqrt{2x-1}\,dx$.

Решение:

Введем новую переменную

$t = 2x - 1$.

Подставив в правую часть равенства значения $x = 1$ и $x = 5$, получим соответственно нижний α и верхний β пределы интегрирования новой переменной t

$\alpha = 2 \cdot 1 - 1 = 1,\ \beta = 2 \cdot 5 - 1 = 9$.

Выразив x через t, получим

$$x = \frac{t+1}{2}.$$

Найдем дифференциал

$$dx = \frac{dt}{2},$$

следовательно,

$$\int_1^5 3\sqrt{2x-1}\,dx = \int_1^9 3\sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,dt = t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = t\sqrt{t}\Big|_1^9 = 27 - 1 = 26.$$

Ответ: 26.

10.6. Вычисление площадей фигур

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$.

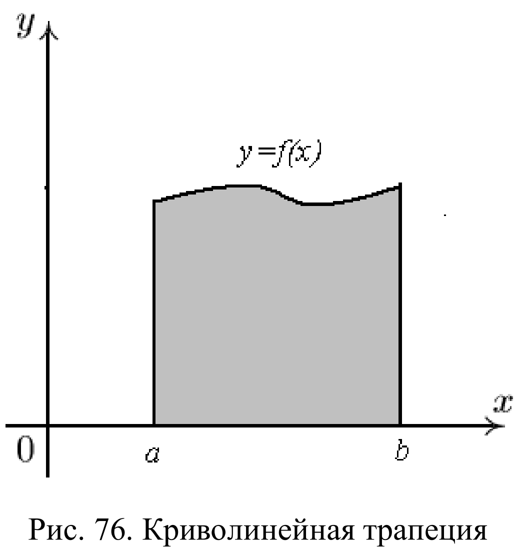


Рис. 76. Криволинейная трапеция

По геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью абсцисс $y = 0$ равна

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Пусть на отрезке $[a; b]$ заданы непрерывные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ такие, что $f(x) \geq g(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$, на отрезке $[a; b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

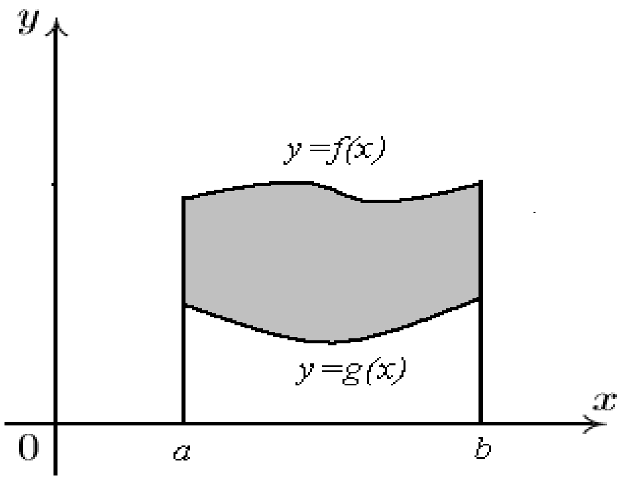


Рис. 77. Площадь фигуры ограниченной кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 3x^2$, прямыми $x = 0, x = 1$ и $y = 0$.

Решение:

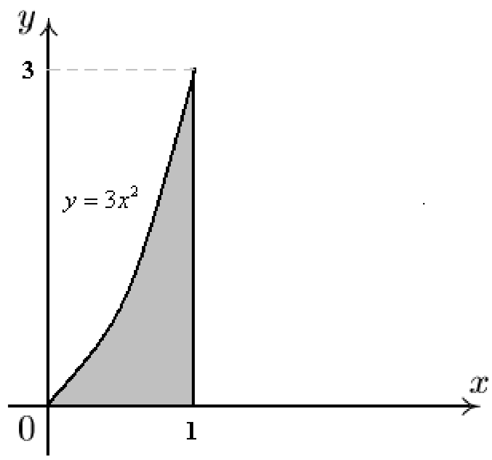


Рис. 78. Фигура, ограниченная линиями $y = 3x^2$, $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$.

Здесь $f(x) = 3x^2, a = 0, b = 1$.

$$S = \int_0^1 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3}|_0^1 = x^3|_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x(2 - x), y = 0$.

Решение:

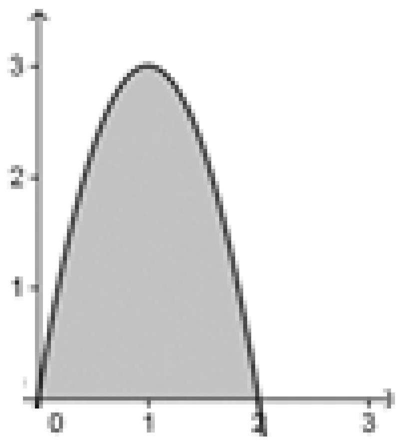


Рис. 79. Фигура, ограниченная линиями $y = 3x(2 - x), y = 0$.

Найдем пределы интегрирования a и b. Вычислим координаты точек пересечения графика функции $y = 3x(2 - x)$ с осью Ox ($y = 0$):

$3x(2 - x) = 0;$

$x = 0, x = 2.$

Таким образом, $a = 0, b = 2$.

Найдем площадь фигуры

$$S = \int_0^2 (6x - 3x^2) = (6\text{x} - 3\text{x}^2) = 12 - 8 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример. Вычислить площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение:

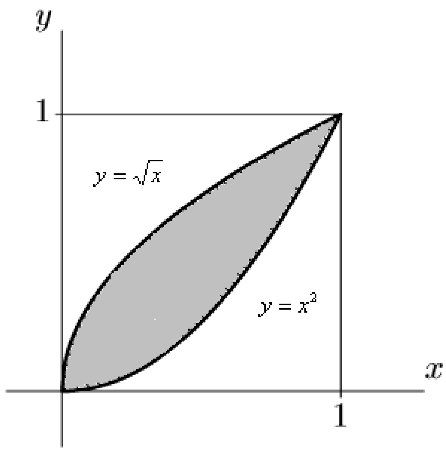


Рис. 80. Фигура, ограниченная линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$

Найдем пределы интегрирования a и b. Вычислим координаты точек пересечения указанных кривых, для чего решим уравнение

$x^2 = \sqrt{x}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат

$x^4 = x$.

Приведем это уравнение к виду

$x^4 - x = 0, x(x^3 - 1)$.

Решив последнее уравнение, получим

$x = 0, x = 1$.

Таким образом, нижний и верхний пределы интегрирования соответственно равны

$a = 0, b = 1$.

Теперь найдем площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ на отрезке [0; 1].

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: 1/3.

10.7. Упражнения

1. Найти интегралы:

а) $\int x^2\sqrt{x}dx$; б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x}}$; в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^2}$.

2. Найти интегралы:

а) $\int(3x^2+2x+1)dx$; б) $\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^2}\right)dx$; в) $\int\left(6\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

3. Найти интегралы:

а) $\int\frac{x^2-4}{x+2}dx$; б) $\int\frac{x^2-9}{x-3}dx$; в) $\int\frac{x^2-25}{x+5}dx$.

4. Найти интегралы:

а) $\int(2x+1)^5dx$; б) $\int\sqrt[3]{3x+1}dx$; в) $\int\frac{2dx}{2x+3}$.

5. Найти интегралы:

а) $\int\frac{x-1}{x+2}dx$; б) $\int\frac{x+5}{x+4}dx$; в) $\int\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

6. Найти интегралы:

а) $\int\frac{4dx}{1+16x^2}$; б) $\int\frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$. в) $\int e^{4x-6}dx$.

7. Найти интегралы:

а) $\int 3\cos(3x+2)\,dx$; б) $\int 4\sin(2x+1)\,dx$; в) $\int\frac{4dx}{\cos^2(4x+3)}$.

8. Найти интегралы:

а) $\int x\sqrt{x-1}dx$; б) $\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$; в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

9. Найти интегралы:

а) $\int\frac{2x}{x^2+1}dx$; б) $\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx$; в) $\int\frac{2x-1}{x^2+1}dx$.

10. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^3 (x^2 + 2x + 1)dx$; б) $\int_1^e \frac{3dx}{x}$; в) $\int_0^2 \frac{2dx}{x^2 + 4}$.

11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y = x^2 + 2,$ $x = -1, x = 2,$ $y = 0;$

б) $y = x^2 + 2x + 0{,}5,$ $x = 0, x = 1,$ $y = 0;$

в) $y = x^2 + 2x - 3,$ $x = 0, x = 2,$ $y = 0.$

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y = 6x^2 + 18,$ $y = 24x;$

б) $y = 2x + 6,$ $y = x^2 + 3;$

в) $y = x^2 + 3,$ $y = x + 3.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А. П., Кондаков В. М. Математика: учеб. пособие для учащихся лицеев и слушателей подготовительных курсов. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1995. 244 с.

2. Иванов А. П. Тесты и контрольные работы по математике. М.: МФТИ, 2002. 288 с.

3. Кусяков А. Ш. Математика для иностранных слушателей подготовительных курсов [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А. Ш. Кусяков; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. Пермь, 2019. 4,26 Мб; 242 с.

4. Кусяков А. Ш. Математический анализ: учеб. пособие/ Перм. ун-т. Пермь, 2009. 180 с.

Учебное издание

Кусяков Альфред Шамильевич

ВВЕДЕНИЕ В ВЫСШУЮ МАТЕМАТИКУ

Учебное пособие

Редактор *Н. И. Стрекаловская*
Корректор *Л. И. Семицветова*
Техническая подготовка материалов: *А. Ш. Кусяков*

Объем данных 3,11 Мб
Подписано к использованию 16.08.2022

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Издательский центр
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15