ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. Ш. Кусяков

Математика:
пособие для подготовки к ЕГЭ
(профильный уровень)

Perm University Press

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Ш. Кусяков

Математика:
пособие для подготовки к ЕГЭ
(профильный уровень)

Пермь 2024

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я727
К94

Кусяков А. Ш.

К94 Математика: пособие для подготовки к ЕГЭ (профильный уровень) [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Ш. Кусяков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2024. – 4,57 Мб ; 462 с. – Режим доступа: http://www.psu.ru/files/docs/science/books/uchebnie-posobiya/Kusyakov-Matematika-posobie-dlya-podgotovki-k-EGE-profilnyj-uroven.pdf. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4194-9

В пособии представлены основные теоретические сведения из школьного курса математики, а также большое количество заданий по математике из КИМ ЕГЭ.

Издание предназначено для учащихся старших классов общеобразовательных учебных заведений при подготовке к сдаче ЕГЭ по математике (профильный уровень).

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я727

Издается по решению педагогического совета Лицея
Пермского государственного национального исследовательского университета

Рецензенты: и. о. директора средней общеобразовательной школы № 12 г. Перми с углубленным изучением немецкого языка ***Е. Ю. Королева;***

канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН ***А. В. Чупин***

ISBN 978-5-7944-4194-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В 2015 году ЕГЭ по математике был разделен на профильный и базовый уровни. Сдача экзамена профильного уровня необходима для тех выпускников, во вступительных испытаниях которых присутствует предмет «Математика». Сдача экзамена на базовом уровне необходима для тех, кто не планирует поступать в вузы или у кого во вступительных экзаменах выбранного вуза отсутствует предмет «Математика».

Пособие предназначено для учащихся старших классов для подготовки к сдаче ЕГЭ на профильном уровне. Приведены достаточно подробные теоретические сведения по всем разделам школьного курса математики, а также примеры решений задач различного уровня сложности. Представлены следующие разделы:

1. Основные понятия алгебры.
2. Тригонометрические функции.
3. Многочлены.
4. Степенные функции.
5. Показательная и логарифмическая функции.
6. Начала анализа.
7. Вероятность.
8. Текстовые задачи.
9. Планиметрия.
10. Стереометрия.

В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения. К наиболее сложным из них приведены ответы. Учащимся, претендующим на получение высоких баллов на ЕГЭ, следует обратить особое внимание на примеры, приведенные в параграфах под названием «Задачи повышенного уровня сложности». Указанные параграфы содержат типовые задачи, входящие во вторую часть контрольных измерительных материалов ЕГЭ профильного уровня.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ

1.1. Натуральные и целые числа

Натуральные числа – это числа, используемые для счета. Множество натуральных чисел обозначается буквой N.

Присоединив к множеству натуральных чисел N все числа, противоположные натуральным, и нуль, получим *множество целых чисел*

$$\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

которое обозначается Z.

Пусть даны два натуральных числа – a и b. Если существует натуральное число q, такое что выполняется равенство

$$a = bq,$$

то говорят, что число a *делится* на число b. Число a называют *делимым*, b – *делителем*, q – *частным*. Число a называют также *кратным* числа b.

Вместо фразы «a кратно b» часто используется запись $a \vdots b$.

Перечислим наиболее употребительные признаки делимости.

Признак делимости на 2. Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

Например, числа 12, 346, 1228 делятся на 2, так как последние цифры этих чисел делятся на 2.

Признак делимости на 3. Для того чтобы натуральное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

Например, число 123 делится на 3, так как сумма его цифр

$$1 + 2 + 3 = 6$$

делится на 3.

Признак делимости на 4. Для того чтобы натуральное число делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами данного числа.

Например, число 1236 делится на 4, так как делится на 4 число 36.

Признак делимости на 5. Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра делилась на 5.

Например, число 1635 делится на 5, так как последняя цифра данного числа делится на 5.

Признак делимости на 9. Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Например, число 141 543 делится на 9, так как сумма его цифр

$$1 + 4 + 1 + 5 + 4 + 3 = 18$$

делится на 9.

Всякое натуральное число, которое имеет только два делителя – само себя и единицу, называется *простым числом*. Например, числа

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$$

являются простыми.

Все натуральные числа, которые имеют более двух делителей, называются *составными числами*. Например, числа

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21$$

являются составными.

Число 1, имеющее только один делитель – 1, не относят ни к простым, ни к составным числам.

Разложить составное число на простые множители означает записать данное число в виде произведения простых чисел, которые являются делителями данного числа.

При разложении на простые множители используются признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагают справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

Пример. Разложить число 180 на простые множители.

Решение. Имеем:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Ответ: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Если натуральные числа a и b оба делятся на натуральное число c, то c называется *общим делителем* чисел a и b.

Найдем, например, общие делители чисел 18 и 24. Выпишем делители числа 18: 1, 2, 3, 6, 9. Выпишем делители числа 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12. Общими делителями чисел 18 и 24 являются числа 1, 2, 3, 6.

Наибольшим общим делителем (НОД) натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое делятся данные числа. Например, наибольшим общим делителем чисел 18 и 24 является число 6, т.е. $\text{НОД}\,(18, 24) = 6$.

В общем случае для нахождения НОД используют разложение данных чисел на множители.

Пример. Найти наибольший общий делитель чисел 48 и 64.

Решение. Имеем:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Имеем:

$$\begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Таким образом НОД (48, 84) = $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ответ: 8.

Два натуральных числа – a и b – называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, отличных от единицы, т.е. НОД (a, b) = 1.

Например, числа 35 и 36 являются взаимно простыми, хотя каждое из них – составное.

Общим кратным чисел a и b называется число, которое делится на числа a и b. Например, общими кратными чисел 12 и 18 являются числа 36, 72 и т.д.

Наименьшее из общих кратных называется *наименьшим общим кратным* (НОК) этих чисел. Например, НОК (12, 18) = 36.

Для нахождения НОК, как и в случае нахождения НОД, удобно использовать разложение данных чисел на простые множители.

Пример. Найти наибольшее общее кратное чисел 24 и 28.

Решение. Имеем:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

Имеем:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Таким образом НОК (24, 28) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.

Ответ: 168.

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$\text{НОД } (a, b) \cdot \text{НОК } (a, b) = a \cdot b.$$

Из последнего равенства, в частности, следует, что для взаимно простых чисел a и b

$$\text{НОК } (a, b) = a \cdot b.$$

Если натуральное число a не делится на натуральное число b, то рассматривают *деление с остатком*. Например, при делении числа 37 на число 15 в частном получается 2 (неполное частное) и в остатке 7. При этом имеет место соотношение

$$37 = 15 \cdot 2 + 7.$$

В общем случае, если натуральное число a больше натурального числа и a не делится на b, то существует, и только одна, пара натуральных чисел q (неполное частное) и r (остаток), причем $r < b$, что выполняется равенство

$$a = b \cdot q + r.$$

Например, для $a = 37, b = 15$ такая пара найдена выше: $q = 2, r = 7$.

Пример. Составить формулу:

а) четного числа;

б) нечетного числа.

Решение:

а) четное число n – это число, которое делится на 2; значит, $n = 2k$;

б) нечетное число n – это число, которое при делении на 2 дает в остатке 1; значит, $n = 2k + 1$.

Ответ: а) $n = 2k$; б) $n = 2k + 1$.

Пример. Составить формулу натурального числа n, которое при делении на 5 дает в остатке 4.

Решение. В данном случае неполное частное равно 5, а остаток – 4, следовательно, $n = 5k + 4$.

Ответ: $n = 5k + 4$.

1.2. Рациональные числа

Присоединив к множеству целых чисел Z все положительные и отрицательные дроби, получим *множество рациональных чисел*, обозначаемое буквой Q.

Любое рациональное число q можно представить в виде отношения

$$q = \frac{m}{n},$$

где m – целое число ($m \in Z$), n – натуральное число ($n \in N$). Например,

$$\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{7}{11}.$$

Сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел являются рациональными числами (за исключением деления на ноль).

Дробь, знаменатель которой равен 10, 100, 1000 и т.д. (т.е. степени числа 10), называется десятичной дробью и записывается в виде последовательности цифр с запятой между ними. Количество цифр после запятой равно степени числа 10, стоящей в знаменателе дроби.

В общем случае любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной, но *периодической* десятичной дроби.

Например,

3/4 = 0,75 – конечная десятичная дробь;

1/3 = 0,3333… – бесконечная периодическая десятичная дробь.

Цифра или совокупность цифр, которые повторяются в периодической дроби, называются ее периодом. Для сокращения записи период записывают в круглых скобках. Например,

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0,(3).$$

Период дроби в этом примере равен 3.

Бесконечную периодическую дробь можно записать в виде обыкновенной дроби.

Пример. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь 1,(6).

Решение. Пусть $x = 1,(6)$. Умножим x на такое число, чтобы запятая передвинулась вправо ровно на один период. Поскольку в периоде содержится только одна цифра, надо умножить x на 10. В результате получим

$$10x = 16,(6).$$

Найдем разность:

$10x - x = 16,(6) - 1,(6),$

$9x = 15.$

Следовательно,

$x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$

Ответ: 5/3.

1.3. Проценты

Процентом называют сотую часть числа. Для нахождения числа A, составляющего p процентов от числа M, используют следующую формулу:

$$A = \frac{M}{100} p.$$

Рассмотрим типовые примеры, связанные с нахождением процентов.

Пример. В школе 800 учеников, 40 % из них принимали участие в олимпиаде по математике. Сколько учеников принимали участие в олимпиаде?

Решение. Чтобы найти количество учеников, принимавших участие в олимпиаде, надо разделить количество учеников на 100 и умножить на 40:

$$\frac{800}{100} \cdot 40 = 320.$$

Ответ: 320 учеников.

Пример. Пачка сливочного масла стоит 64 руб. Пенсионерам магазин делает скидку 15 %. Сколько рублей заплатит пенсионер за две пачки масла?

Решение. Две пачки масла стоят 128 рублей. Пенсионер оплачивает только 85 % покупки, т.е.

$$\frac{128}{100} \cdot 85 = 108{,}8 \text{ (руб.)}.$$

Ответ: 108,8 руб.

Пример. Цена на электрический чайник была повышена на 22 % и составила 3050 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Решение. Начальная цена чайника составляет 100 %. По условиям задачи 3050 руб. – 122 %. Следовательно, первоначальная стоимость равна

$$\frac{3050}{122} \cdot 100 = 2500 \text{ (руб.)}.$$

Ответ: 2500 руб.

Пример. Клиент взял в банке в кредит 24 000 руб. на год под 12 %. Он должен его погашать, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение. Через год клиент должен будет выплатить

$$\frac{24\,000}{100} \cdot 112 = 26\,880\ (\text{руб.}).$$

Следовательно, ежемесячно клиент должен вносить

$$\frac{26\,880}{12} = 2240\ (\text{руб.}).$$

Ответ: 2240 руб.

Пример. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 120 руб. за штуку. Торговая наценка составляет 10 %. Какое максимальное число таких горшков можно купить в этом магазине на 1200 руб.?

Решение. Найдем стоимость горшков после наценки:

$$\frac{120}{100} \cdot 110 = 132\ (\text{руб.}).$$

Разделив 1200 на 132, получим

$$\frac{1200}{132} = 9\ \frac{1}{11}.$$

Таким образом, на 1200 руб. можно купить 9 горшков, затратив при этом 1188 руб. (остаток составит 1200 – 1188 = 12 руб.).

Ответ: 9 горшков.

Пример. В сосуд, содержащий 10 л 26%-го водного раствора некоторого вещества, добавили 3 л воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение. Найдем объем вещества:

$$\frac{10}{100} \cdot 26 = 2{,}6(\text{л}).$$

Найдем объем жидкости:

10 + 3 = 13 (л).

Найдем концентрацию вещества:

$$\frac{2{,}6}{13} \cdot 100 = 20\ \%.$$

Ответ: 20 %.

1.4. Множество действительных чисел

При выполнении некоторых алгебраических операций обнаруживается недостаточность множества рациональных чисел.

Квадратным корнем числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Квадратный корень обозначается символом $\sqrt{a}$. Очевидно, что число a должно быть неотрицательным числом. Например, $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{225} = 15$.

Методом от противного можно доказать, что среди рациональных чисел нет такого, которое было бы равно $\sqrt{2}$, т.е. не существует таких m и n, чтобы выполнялось равенство

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

где m – целое число ($m \in Z$); n – натуральное число ($n \in N$).

Числа, которые не являются рациональными, называются *иррациональными* числами. В отличие от рациональных чисел, иррациональные числа представляются в виде бесконечных *непериодических* десятичных дробей. Например,

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots;$$

$$\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots\ .$$

Обозначим множество иррациональных чисел буквой I. Множество, состоящее из рациональных и иррациональных чисел, называется *множеством действительных чисел* и обозначается R. Математически определение множества действительных чисел можно записать так:

$$R = Q \cup I.$$

Символ $\cup$ означает объединение множеств.

Действительные числа можно сравнивать друг с другом, используя следующее определение: действительное число a больше (меньше) действительного числа b, если их разность $a - b$ положительное (отрицательное) число. Пишут: $a > b$ ($a < b$).

Наряду со знаками строгих неравенств используют знаки нестрогих неравенств:

$a \geq b$ означает, что разность $a - b$ неотрицательное число;

$a \leq b$ означает, что разность $a - b$ неположительное число.

Перечислим наиболее употребительные свойства числовых неравенств:

1) если $a > b$ и $b > c,$ то $a > c$;

2) если $a > b,$ то $a + c > b + c$;

3) если $a > b$ и $m > 0,$ то $am > mb$; если $a > b$ и $m < 0,$ то $am < bm$;

4) если $a > b$ и $c > d,$ то $a + c > b + d$;

5) если a, b, c, d – положительные числа и $a > b,$ $c > d,$ то $ac > bd$;

6) для любых $a > b \geq 0$ выполняется неравенство

$$\sqrt{a} > \sqrt{b}.$$

Пример. Найти пределы, в которых заключена сумма $2a + 3b$, если

$$1 < a < 2,$$

$$-1 < b < 0.$$

Решение. Найдем пределы для $2a$:

$$1 < a < 2;\ 2 < 2a < 4.$$

Найдем пределы для $3b$:

$$-1 < b < 0;\ -3 < 3b < 0.$$

Значит,

$$2 - 3 < 2a + 3b < 4 + 0;\ -1 < 2a + 3b < 4.$$

Ответ: $-1 < 2a + 3b < 4$.

1.5. Числовые промежутки

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками *числовой прямой*, т.е. прямой, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица масштаба. Возьмем два числа – a и b $(a < b)$ – и отметим их точками на числовой прямой.

Множество, элементы которого удовлетворяют неравенству $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* $[a; b]$ (рис. 1).

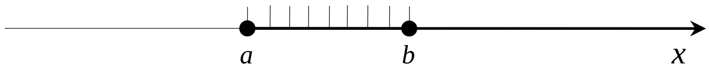


Рис. 1. Отрезок

Множество, элементы которого удовлетворяют неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* $(a; b)$ (рис. 2).

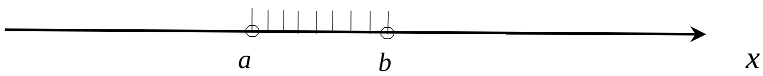


Рис. 2. Интервал

Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, называются *полуоткрытыми интервалами* $[a; b)$ (рис. 3) и $(a; b]$ (рис. 4) соответственно.

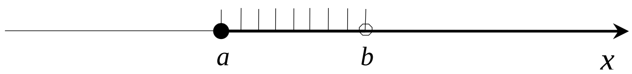


Рис. 3. Полуоткрытый интервал $[a; b)$

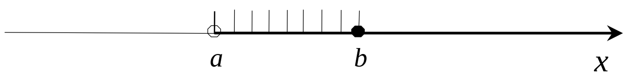


Рис. 4. Полуоткрытый интервал $(a; b]$

Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам $x \geq a$ или $x \leq a$, называются *лучами* $[a; +\infty)$ (рис. 5) и $(-\infty; b]$ (рис. 6) соответственно.

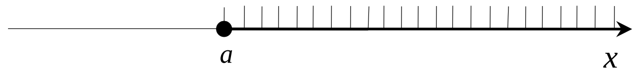


Рис. 5. Луч $[a;\ +\infty)$

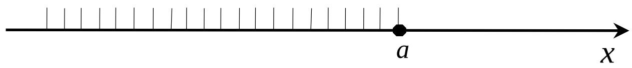


Рис. 6. Луч $(-\infty;\ a]$

Множества, элементы которых удовлетворяют неравенствам $x > a$ или $x < a$, называются *открытыми лучами* $(a; +\infty)$ (рис. 7) и $(-\infty;\ a)$ (рис. 8) соответственно.

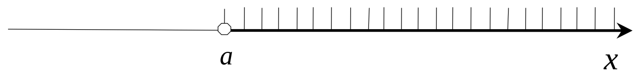


Рис. 7. Открытый луч $(a;\ +\infty)$

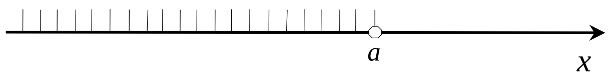


Рис. 8. Открытый луч $(-\infty;\ a)$

1.6. Модуль действительного числа

Абсолютной величиной (модулем) действительного числа x называется само число x, если x неотрицательно, и противоположное число $(-x)$, если x отрицательно:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Например,

$$|3| = 3, |-3| = -(-3) = 3.$$

Для любых действительных чисел a и b выполняются соотношения:

1) $|a| \geq 0$;

2) $|a| = |-a|$;

3) $|ab| = |a||b|$;

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;

5) $|a|^2 = a^2$;

6) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Пример. Упростить $\left|1-\sqrt{3}\right| + \left|2-\sqrt{3}\right|$.

Решение. Выражение под знаком модуля первого слагаемого меньше нуля:

$$1-\sqrt{3} < 0,$$

следовательно,

$$\left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}-1.$$

Выражение под знаком модуля второго слагаемого больше нуля:

$$2-\sqrt{3} > 0,$$

следовательно,

$$\left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$\left|1-\sqrt{3}\right| + \left|2-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}-1+2-\sqrt{3} = 1.$$

Ответ: 1.

1.7. Понятие комплексного числа

Необходимость в комплексных числах возникла в связи с задачей решения алгебраических уравнений. Так, оставаясь в множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y – действительные числа; i – мнимая единица. По определению

$$i^2 = -1.$$

Число x называется действительной частью числа z и обозначается $Re(z)$, а число y – мнимой частью числа z и обозначается $Im(z)$.

Два комплексных числа

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ и } z_2 = x_2 + iy_2$$

называются равными, если равны их действительные и мнимые части:

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2.$$

Операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел удовлетворяют обычным законам арифметических действий.

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = 5i$. Требуется вычислить $z = z_1(z_2 + z_3)$.

Решение.

$$z = z_1(z_2 + z_3) = (1 + 2i)(3 + 4i + 5i) = (1 + 2i)(3 + 9i) =$$
$$= 3 + 9i + 6i + 18i^2 = 3 + 15i - 18 = -15i + 15i.$$

Здесь учтено, что $i^2 = -1$.

Ответ: $z = -15i + 15i$.

Если у комплексного числа сохранить действительную часть и поменять знак у мнимой части, то получится комплексное число, сопряженное данному. Если данное комплексное число обозначено буквой $\boldsymbol{z}$, то сопряженное число обозначают $\bar{\boldsymbol{z}}$:

$$z = x + iy; \ \bar{z} = x - iy.$$

Например, сопряженным для числа $2 + 3i$ будет число $2 - 3i$.

Если $z = x + iy$, то $z \cdot \bar{z} = x^2 + \ y^2$. Например,

$$(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 + 3^2 = 13.$$

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + i$. Требуется вычислить $z = z_1/z_2$.

Решение. По условиям задачи имеем

$$z = \frac{2 + 3i}{1 + i}.$$

Умножив числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, получим

$$z = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i-3i^2}{1^2+1^2} = \frac{5+i}{2}.$$

Значит,

$$z = 2{,}5 + 0{,}5i.$$

Таким образом, чтобы найти частное комплексных чисел, надо числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю.

Ответ: $z = 2{,}5 + 0{,}5i$.

1.8. Степени и корни

Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a.$$

Число a называется основанием степени, а число n – показателем степени. Степень с натуральным показателем удовлетворяет следующим свойствам (m, n – натуральные числа):

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(m > n)$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$.

Пример. Вычислить $\dfrac{13^6 \cdot 2^6}{26^5}$.

Решение.

$$\frac{13^6 \cdot 2^6}{26^5} = \frac{(13 \cdot 2)^6}{26^5} = \frac{26^6}{26^5} = 26.$$

Ответ: 26.

Чтобы обобщить понятие степени на случай, когда показатель степени является произвольным целым числом, примем по определению, что

$$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

где n – натуральное число; $a \neq 0$. Степень с целым показателем обладает теми же свойствами, что и степень с натуральным показателем.

Пример. Вычислить $3^4 \cdot 9^{-2}$.

Решение.

$$3^4 \cdot 9^{-2} = 3^4 \cdot (3^2)^{-2} = 3^4 \cdot 3^{-4} = 3^{4-4} = 3^0 = 1.$$

Ответ: 1.

Корнем степени n из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Корень -й степени обозначается символом $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, а само число a – подкоренным выражением. Таким образом, по определению имеем

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Например, $\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[6]{64} = 2$; $\sqrt[3]{8} = 2$.

Если показатель корня n – нечетное число, то корень можно извлекать не только из положительных, но и из отрицательных чисел.

Корнем нечетной степени n из отрицательного числа a называется отрицательное число, n-я степень которого равна a. Например,

$$\sqrt[3]{-27} = -3; \; \sqrt[5]{-32} = -2.$$

Таким образом, корень четной степени определен только для неотрицательного подкоренного числа, а корень нечетной степени – для любого подкоренного числа.

Отметим, что корень второй степени из числа называют квадратным корнем, а показатель степени при записи опускают. Корень третьей степени называют кубическим корнем.

Перечислим основные свойства корней n-й степени в предположении, что все подкоренные выражения неотрицательны:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

5) $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$;

6) Если $a > b \geq 0,$ то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{32 \cdot 2} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример. Вычислить $\sqrt[7]{128^3}$.

Решение.

$$\sqrt[7]{128^3} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

Ответ: 8.

Пример. Сравнить числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[5]{3}$.

Решение. Представим числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[5]{3}$ в виде корней с одинаковым показателем:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32},$$

$$\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27}.$$

Из неравенства 32 > 27 следует, что $\sqrt[15]{32} > \sqrt[15]{27}$, значит, $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$.

Степенью числа $a > 0$ *с рациональным показателем* $\dfrac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное число ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$. Степень с рациональным показателем обозначается символом $a^{\frac{m}{n}}$. Таким образом, по определению имеем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Степень с рациональным показателем сохраняет основные свойства, верные для целых показателей.

Пример. Вычислить $2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$.

Решение.

$$2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} = 2^{-2} \cdot (2^6)^{\frac{2}{3}} = 2^{-2} \cdot 2^4 = 2^{-2+4} = 2^2 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример. Вычислить $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-10} \cdot 27^{-3} + 0{,}2^{-4} \cdot 25^{-2} + \left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3} =$$

$$= 3^{10} \cdot 3^{-9} + 5^4 \cdot 5^{-4} + 2^2 = 3 + 1 + 4 = 8.$$

Ответ: 8.

Отметим следующие два свойства степеней с рациональным показателем:

1) пусть r – рациональное число и $a > b > 0$, тогда

$$a^r > b^r \text{ при } r > 0,$$

$$a^r < b^r \text{ при } r < 0;$$

2) для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$ следует, что

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1,$$

$$a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1.$$

Пример. Сравнить числа 2^{30} и 3^{20}.

Решение. Запишем числа 2^{30} и 3^{20} в виде степеней с одинаковыми показателями:

$$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}; \;\; 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}.$$

Поскольку $8 < 9$, получаем

$$8^{10} < 9^{10}, \text{ т.е. } 2^{30} < 3^{20}.$$

Ответ: $2^{30} < 3^{20}$.

Пример. Сравнить числа $\sqrt[5]{8}$ и $\sqrt[3]{4}$.

Решение. Запишем числа $\sqrt[5]{8}$ и $\sqrt[3]{4}$ в виде степеней с рациональным показателем:

$$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}; \; \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно,

$$2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}},$$

так как $2/3 > 3/5$.

Ответ: $\sqrt[3]{4} > \sqrt[5]{8}$.

1.9. Формулы сокращенного умножения

Для проведения тождественных преобразований алгебраических выражений важно знать следующие формулы сокращенного умножения:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (разность квадратов);

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (квадрат суммы);

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (квадрат разности);

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (куб суммы);

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (куб разности);

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов);

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (разность кубов).

Пример. Вычислить $\sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2}$.

Решение.

$$\sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{(7{,}5 - 4{,}5)(7{,}5 + 4{,}5)} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример. Вычислить $\left(\sqrt{14} - \sqrt{12}\right)^4\left(\sqrt{14} + \sqrt{12}\right)^4$.

Решение.

$$\left(\sqrt{14} - \sqrt{12}\right)^4\left(\sqrt{14} + \sqrt{12}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{14} - \sqrt{12}\right)\left(\sqrt{14} + \sqrt{12}\right)\right)^4 =$$

$$= \left(\left(\sqrt{14}\right)^2 - \left(\sqrt{12}\right)^2\right)(14 - 12)^4 = 2^4 = 16.$$

Ответ: 16.

Пример. Упростить $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - 2$.

Решение.

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - 2 = \sqrt{4 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2} - 2 = 2 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3}\,.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

Пример. Вычислить $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}$, если $x = 18$, $y = 12$.

Решение.

$$\frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{x(x + y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{x}{x - y} = \frac{18}{18 - 12} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример. Упростить $\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}-y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-y} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}}$.

Решение. Введем новые переменные $a = \sqrt[3]{x},\ b = \sqrt{y}$. Из последнего выражения найдем $y = b^2$. Выполнив в исходном выражении замену переменных, получим

$$\frac{ab - b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a}{a + b} = \frac{b(a - b)}{(a - b)(a + b)} + \frac{a}{a + b} = \frac{b}{a + b} + \frac{a}{a + b} = \frac{a + b}{a + b} = 1.$$

Ответ: 1.

1.10. Уравнения

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестную величину. Неизвестная величина обычно обозначается буквой x.

Корнем уравнения называется число, которое при подстановке его вместо неизвестного обращает уравнение в верное равенство (тождество).

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней.

Пример. Решить уравнение $3x - 8 = x$.

Решение.

$3x - 8 = x$;

$2x = 8$;

$x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

Пример. Решить уравнение $\frac{5}{x} = 0$.

Решение. Уравнение $\frac{5}{x} = 0$ не имеет корней, так как делить на 0 нельзя, а при делении на другие числа в частном 0 не получится.

Ответ: корней нет ($\emptyset$).

Пример. Решить уравнение $x^2 - 4x = 0$.

Решение.

$x^2 - 4x = 0;$

$x(x - 4) = 0.$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 0; x_2 = 4$.

Ответ: $x_1 = 0; x_2 = 4$.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 1 = 0$.

Решение.

$x^2 - 1 = 0;$

$(x - 1)(x + 1) = 0.$

Уравнение имеет два корня: $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Ответ: $x_1 = -1; x_2 = 1$.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Решение.

$x^2 - 4x + 4 = 0;$

$(x - 2)^2 = 0;$

$x = 2.$

Ответ: $x = 2$.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 1 = 0$.

Решение.

$x^2 + 1 = 0;$

$x^2 = -1.$

Это уравнение не имеет действительных корней, так как $x^2 \geq 0$. Таким образом, левая часть уравнения всегда больше правой части уравнения.

Ответ: корней нет ($\emptyset$).

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$. Коэффициент a называют *первым коэффициентом*, коэффициент b – *вторым коэффициентом*, c – *свободным членом*.

Дискриминантом квадратного уравнения называется выражение

$$D = b^2 - 4ac.$$

При решении квадратного уравнения возможны три случая:

1. Дискриминант $D > 0$. Уравнение имеет *два различных* действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2. Дискриминант $D = 0$. В данном случае существует только одно действительное число:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

удовлетворяющее квадратному уравнению. Это число называют *двукратным корнем*.

3. Дискриминант $D < 0$. Уравнение не имеет действительных корней.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 2 = 3x$.

Решение.

$x^2 + 2 = 3x$;

$x^2 - 3x + 2 = 0$;

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0.$

Уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 - 1}{2} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{3 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2.$

Пример. Решить уравнение $x^2 + 6x = -9.$

Решение.

$x^2 + 6x = -9;$

$x^2 + 6x + 9 = 0;$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0.$

Уравнение имеет двукратный корень

$$x = -\frac{6}{2 \cdot 1} = -3.$$

Ответ: $x = -3.$

Пример. Решить уравнение $x(x + 2) + 6 = 0.$

Решение.

$x(x + 2) + 6 = 0;$

$x^2 + 2x + 6 = 0;$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 4 - 24 = -20 < 0.$

Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: корней нет.

Приведенным квадратным уравнением называется квадратное уравнение, в котором первый коэффициент равен 1:

$$x^2 + px + q = 0,$$

где p и q – некоторые числа. Заметим, что любое квадратное уравнение можно свести к приведенному, разделив обе его части на коэффициент a.

Формулы корней приведенного квадратного уравнения можно представить в виде

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2};\ x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2},$$

где $D = p^2 - 4q$.

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение – свободному члену этого уравнения:

$$x_1 + x_2 = -p;$$

$$x_1 x_2 = q.$$

Пример. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + 21x = 7$. Найдите сумму $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Решение.

$x^2 + 21x = 7;$

$x^2 + 21x - 7 = 0.$

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = -21,$

$x_1 x_2 = -7.$

Найдем требуемую сумму

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-21}{-7} = 3.$$

Ответ: 3.

На практике теорема Виета используется для нахождения корней квадратного уравнения методом подбора.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Решение.

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = 3;$

$x_1 x_2 = 2.$

Подбором найдем корни уравнения

$x_1 = 1; x_2 = 2.$

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 2.$

Пример. Решить уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0.$

Решение.

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = 7;$

$x_1 x_2 = 10.$

Подбором найдем корни уравнения

$x_1 = 2; x_2 = 5.$

Ответ: $x_1 = 2; x_2 = 5.$

Биквадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$. Это уравнение решается при помощи замены переменной $t = x^2$.

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Таким образом, получаем квадратное уравнение относительно новой переменной t, причем $t \geq 0$.

Пример. Решить уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

Решение. Введем новую переменную $t = x^2$. Уравнение принимает вид

$t^2 - 5t + 4 = 0.$

При помощи теоремы Виета найдем корни последнего уравнения:

$t = 1;\ t = 4.$

Выполнив обратную замену, получим

$x^2 = 1;\ x^2 = 4.$

Таким образом, уравнение имеет четыре корня:

$x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 2.$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1;\ x_{3,4} = \pm 2.$

Пример. Решить уравнение $x^4 + x^2 - 2 = 0.$

Решение. Введем новую переменную $t = x^2$. Уравнение принимает вид $t^2 + t - 2 = 0.$

При помощи теоремы Виета найдем корни последнего уравнения:

$t = -2;\ t = 1.$

Выполнив обратную замену, получим

$x^2 = -2;\ x^2 = 1.$

Первое уравнение не имеет корней, так как в правой части стоит отрицательное число, а величина $x^2 \geq 0$. Второе уравнение имеет корни

$x_{1,2} = \pm 1.$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1.$

Уравнение вида

$$\frac{P}{Q} = 0,$$

где $\frac{P}{Q}$ – рациональная дробь, называется рациональным уравнением.

Пример. Решить уравнение $\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 9} = 0.$

Решение. Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения, получим

$x^2 - 5x + 6 = 0.$

По теореме Виета

$x_1 + x_2 = 5;$

$x_1 x_2 = 6.$

Подбором находим корни

$x_1 = 2; x_2 = 3.$

Осталось проверить выполнение условия

$3x - 9 \neq 0.$

Решив неравенство, получим

$x \neq 3$.

Этому условию удовлетворяет корень $x = 2$. Корень $x = 3$ – посторонний, его в решение не включают (на 0 делить нельзя).

Ответ: $x = 2$.

Пример. Решить уравнение $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$.

Решение. Преобразуем уравнение

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)};$$

$$\frac{x(x-3) + x - 5}{x(x-5)} = \frac{x+5}{x(x-5)};$$

$$\frac{x(x-3) + x - 5}{x(x-5)} - \frac{x+5}{x(x-5)} = 0;$$

$$\frac{x(x-3) + x - 5 - (x+5)}{x(x-5)} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 3x + x - 5 - x - 5}{x(x-5)} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x(x-5)} = 0.$$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Приравняв нулю числитель дроби в левой части уравнения, получим

$x^2 - 3x - 10 = 0$.

Найдем корни по теореме Виета:

$x_1 + x_2 = 3;$
$x_1 \cdot x_2 = -10.$

Подбором находим $x_1 = -2; x_2 = 5$.

Проверим выполнение условия

$x(x-5) \neq 0$.

Корень $x = 5$ не удовлетворяет данному условию. Таким образом, уравнение имеет один корень $x = -2$.

Ответ: $x = -2$.

Рассмотрим примеры решений уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Пример. Решить уравнение $|x-3| = 4$.

Решение. По определению модуля имеем $x - 3 = -4$ или $x - 3 = 4$.

Таким образом, получаем два корня: $x_1 = -1$; $x_2 = 7$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 7$.

Пример. Решить уравнение $|x-1| = -2$.

Решение. По определению модуля выражение в левой части уравнения неотрицательно, т.е. $|x-1| \geq 0$. В правой части стоит отрицательное число (-2). Получили противоречие. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Уравнения, содержащие неизвестную под знаком корня, называются *иррациональными.*

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x-1} = 4$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = 4^2$, следовательно, $x - 1 = 16, x = 17$.

Ответ: $x = 17$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x-4} + 1 = 0$.

Решение. Перенесем 1 из левой части в правую часть. В результате получим $\sqrt{x-4} = -1$.

По определению арифметического квадратного корня выражение в левой части уравнения неотрицательно, т.е. $\sqrt{x-4} \geq 0$. В правой части стоит отрицательное число (-1). Получили противоречие. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Пример. Решите уравнение $x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

Решение. Введем переменную $t = \sqrt{x-1} \geq 0$. Выразим x через t:

$t^2 = x - 1; x = t^2 + 1$.

Получим уравнение

$t^2 - 3t + 2 = 0$.

Найдем корни по теореме Виета:

$t_1 = 1;\ t_2 = 2$.

Выполним обратную замену

$\sqrt{x-1} = 1;\ \sqrt{x-1} = 2$.

Решив полученную совокупность уравнений, получим

$x_1 = 2$ и $x_2 = 5$.

Ответ: 2; 5.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0,$$

где a, b и c – некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$. Справедливо следующее утверждение: если дискриминант квадратного уравнения D меньше нуля, то комплексные корни уравнения вычисляются по формуле

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}.$$

Пример. Решить уравнение $z^2 - 3z + 8{,}5 = 0$.

Решение.

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8{,}5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-25}}{2} = \frac{3 \pm 5i}{2} = 1{,}5 \pm 2{,}5i.$$

Ответ: $1{,}5 \pm 2{,}5i$.

1.11. Системы уравнений

Упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$ называется *решением системы уравнений* с двумя неизвестными x и y

$$\begin{cases} f(x,y) = 0; \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

если при подстановке вместо x и y соответственно чисел x_0 и y_0 каждое из уравнений системы обращается в верное числовое равенство.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$

Решение. Для решения системы уравнений воспользуемся *методом подстановки.*

Выразив из первого уравнения системы переменную x через переменную y, получим $x = 5 - 2y$.

Подставим полученное выражение во второе уравнение. В результате получим $3(5 - 2y) + 2y = 7$.

Решим полученное уравнение относительно y:

$15 - 6y + 2y = 7;\ 15 - 4y = 7;\ -4y = -8;\ y = 2.$

Подставив найденное значение y в выражение для x, найдем

$x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$.

Таким образом, решение системы имеет вид $x = 1, y = 2$.

Ответ: $(1; 2)$.

Для решения системы можно было воспользоваться *методом сложения.* Этот метод удобно использовать в тех случаях, когда модули коэффициентов при одной из неизвестных в первом и втором уравнениях системы совпадают. Если коэффициенты при одной из неизвестных совпадают по модулю и имеют разные знаки, то при сложении эта неизвестная сокращается. В результате получаем уравнение относительно одной неизвестной. Если коэффициенты при одной из неизвестных совпадают по модулю и имеют одинаковые знаки, тогда вместо сложения выполняется операция вычитания.

В системе уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

коэффициенты при неизвестной y в первом и втором уравнениях совпадают по абсолютной величине и имеют одинаковые знаки. В соответствии с методом сложения из первого уравнения вычтем второе уравнение. В результате получим

$-2x = -2;\ x = 1.$

Подставив найденное значение x в первое уравнение, найдем

$1 + 2y = 6;\ 2y = 4;\ y = 2.$

Таким образом, получили то же самое решение, что и выше.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4, \\ 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3. \end{cases}$

Решение. Введем новые переменные

$a = \sqrt{x},\ b = \sqrt{y}.$

Выполнив замену переменных в исходной системе уравнений, получим

$$\begin{cases} a + 2b = 4, \\ 2a - b = 3. \end{cases}$$

Для решения полученной системы воспользуемся методом сложения. Умножив обе части второго уравнения на 2, получим

$$\begin{cases} a + 2b = 4, \\ 4a - 2b = 6. \end{cases}$$

Сложив эти уравнения, найдем

$a + 4a + 2b - 2b = 4 + 6;$

$5a = 10;\ a = 2.$

Подставим найденное значение a в первое уравнение системы.

В результате получим

$2 + 2b = 4;\ 2b = 2;\ b = 1.$

Таким образом,

$a = 2; b = 1.$

Подставив вместо a и b их выражения через x и y соответственно, получим

$\sqrt{x} = 2; \sqrt{y} = 1,$

следовательно,

$x = 4; y = 1.$

Ответ: $(4; 1)$.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = -5; \\ x^2 - 2xy - y^2 = 17. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения выразим y через x и подставим найденное выражение во второе уравнение:

$$\begin{cases} y = x - 5; \\ x^2 - 2x(x - 5) - (x - 5)^2 = 17. \end{cases}$$

Выполним преобразования:

$$\begin{cases} y = x - 5; \\ x^2 - 10x + 21 = 0. \end{cases}$$

Найдем корни второго уравнения:

$x_1 = 3; x_2 = 7.$

Подставив последовательно найденные корни второго уравнения в первое уравнение системы, получим

$x_1 = 3, y_1 = -2;$

$x_2 = 7, y_2 = 2.$

Ответ: (3; –2); (7; 2).

1.12. Неравенства

Неравенством называется выражение, содержащее один из знаков: $>$ (больше), $<$ (меньше), $\geq$ (больше или равно), $\leq$ (меньше или равно). В зависимости от знака неравенства мы имеем *строгие* ($>$, $<$) или *нестрогие* ($\geq$, $\leq$) неравенства. Например, неравенства

$$2x - 4 < 2; -3x + 9 > 0 \text{ – строгие,}$$

а неравенства

$$4x - 4 \leq 0; x + 3 \leq 2 \text{ – нестрогие.}$$

Решением неравенства называются все значения неизвестной величины, при которых исходное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Пример. Решить неравенство $2x - 4 < 2$.

Решение.

$2x - 4 < 2;$

$2x < 6;$

$x < 3.$

Таким образом, решением неравенства служат все значения величины x, меньшие 3, т.е. $x \in (-\infty; 3)$. Неравенство $x < 3$ – строгое, поэтому в записи решения после числа 3 стоит круглая скобка. Знак бесконечности всегда записывается с круглой скобкой.

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом (рис. 9):

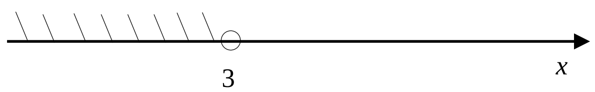


Рис. 9. Решение неравенства $2x - 4 < 2$

Отметим, что граничная точка строгого неравенства не закрашивается.

Ответ: $(-\infty; 3)$.

Пример. Решить неравенство $5x + 4 \geq 14$.

Решение.

$5x + 4 \geq 14$;

$5x \geq 10$;

$x \geq 2$.

Решением неравенства служат все значения неизвестной x, большие или равные 2, т.е. $[2;\ +\infty)$.

В данном примере неравенство $x \geq 2$ – нестрогое, поэтому перед числом 2 стоит квадратная скобка.

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом (рис. 10):

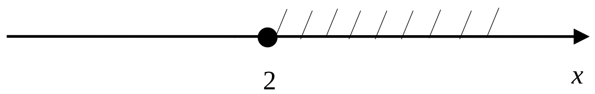


Рис. 10. Решение неравенства $5x + 4 \geq 14$

Граничная нестрогого неравенства всегда рисуется закрашенной.

Ответ: $[2;\ +\infty)$.

Следует помнить, что при умножении или делении неравенства на *положительное число* знак неравенства *сохраняет*ся, а при умножении или делении неравенства на *отрицательное чис*ло знак неравенства *меняетс*я на *противоположный*.

Пример. Решить неравенство $x \geq 4x + 9$.

Решение.

$x \geq 4x + 9$; $x - 4x \geq 9$;

$-3x \geq 9$; $x \leq -3$.

Таким образом, $x \in (-\infty; 3]$.

На числовой оси решение неравенства изображается следующим образом (рис. 11):

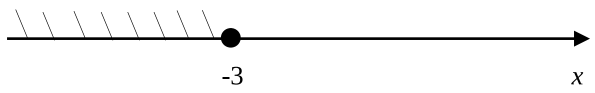


Рис. 11. Решение неравенства $x \geq 4x + 9$

Ответ: $x \in (-\infty; 3]$.

Пример. Решить систему неравенств $\begin{cases} 3x - 2 \geq 7; \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Решение.

$\begin{cases} 3x - 2 \geq 7; \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

$\begin{cases} 3x \geq 9; \\ x \leq 5. \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 3; \\ x \leq 5. \end{cases}$

В данном примере решением служит *отрезок* от 3 до 5, полученный в результате пересечения решений неравенств $x \geq 3$ и $x \leq 5$, т.е. $x \in [3; 5]$.

На числовой оси решение системы изображается следующим образом (рис. 12):

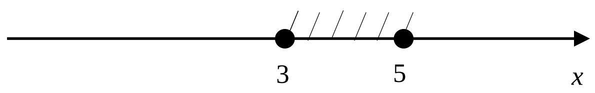


Рис. 12. Решение системы неравенств $\begin{cases} 3x - 2 \geq 7; \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Ответ: $[3; 5]$.

Пример. Решить двойное неравенство $3 \leq 2x - 1 \leq 5$.

Решение. Решить двойное неравенство можно путем замены его системой неравенств

$\begin{cases} 2x - 1 \leq 5, \\ 2x - 1 \geq 3; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x \leq 6, \\ 2x \geq 4; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq 2; \end{cases}$

$x \in [2; 3]$.

На числовой оси решение системы изображается следующим образом (рис. 13):

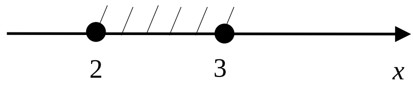


Рис. 13. Решение двойного неравенства $3 \le 2x - 1 \le 5$

Ответ: $x \in [2; 3]$.

Неравенства вида

$$\frac{P}{Q} < 0, \qquad \frac{P}{Q} \le 0, \qquad \frac{P}{Q} > 0, \qquad \frac{P}{Q} \ge 0,$$

где $\frac{P}{Q}$ – рациональная дробь, называются рациональными неравенствами.

Пример. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{x-4} < 0.$

Решение. Для решения рациональных неравенств обычно применяют *метод интервалов*. В соответствии с этим методом на числовой прямой *отмечаются все точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель* рационального выражения. Затем на каждом из полученных интервалов *определяется знак выражения*. Чтобы определить этот знак, достаточно найти знак выражения в какой-либо *внутренней точке* рассматриваемого промежутка.

В данном примере имеются только две характерные точки

$$x = 2 \text{ и } x = 4,$$

обращающие в нуль числитель и знаменатель соответственно. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 14).

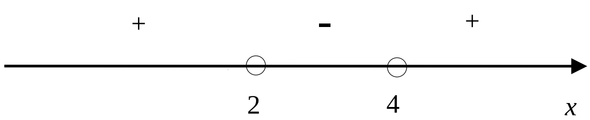


Рис. 14. Решение неравенства $\frac{x-2}{x-4} < 0$.

Так как неравенство строгое, характерные точки на числовой прямой не закрашиваются.

Теперь определим знаки выражения на каждом из трех промежутков. Обычно исследование знака проводят справа налево.

При $x > 4$ возьмем $x = 5$, тогда $\frac{5-2}{5-4} = 3 > 0$. Ставим знак «+».

При $2 < x < 4$ возьмем $x = 3$, тогда $\frac{3-2}{3-4} = -1 < 0$. Ставим знак «–».

При $x < 2$ возьмем $x = 0$, тогда $\frac{0-2}{0-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$. Ставим знак «+».

Выражение принимает отрицательные значения на интервале (2; 4).

Ответ: $(2; 4)$.

Пример. Решить неравенство $\frac{x^2-9}{x-1} \geq 0$.

Решение. Представим неравенство в виде

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x-1} \geq 0.$$

Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$x = -3;\ x = 1;\ x = 3$.

Отметим эти точки на числовой оси (рис. 15).

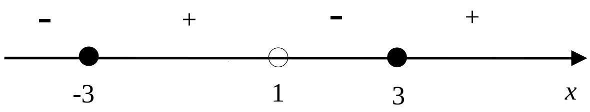


Рис. 15. Решение неравенства $\frac{x^2-9}{x-1} \geq 0$

Так как неравенство нестрогое, точки $x = -3$ и $x = 3$ на числовой прямой закрашены. Точка $x = 1$ обращает в нуль знаменатель, поэтому она не закрашивается (на ноль делить нельзя).

Решением неравенства является *объединение* двух промежутков: $[-3; 1)$ и $[-3; +\infty)$, т.е. $x \in [-3; 1) \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $[-3; 1) \cup [3; +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $\frac{x^3 + 2x^2}{x - 3} \geq 0$.

Решение. Представим неравенство в виде

$$\frac{x^2(x+2)}{x-3} \geq 0.$$

Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель:

$x = -2;\ x = 0;\ x = 3.$

Отметим эти точки на числовой оси (рис. 16).

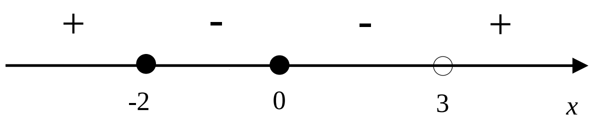


Рис. 16. Решение неравенства $\frac{x^3+2x^2}{x-3} \geq 0$

Так как неравенство нестрогое, точки $x = -2$ и $x = 0$ на числовой прямой закрашены. Точка $x = 3$ обращает в нуль знаменатель, поэтому она не закрашивается (на ноль делить нельзя).

Главная особенность данного примера: при переходе через точку $x = 0$ знак выражения не изменяется (*точка четной кратности*).

На рис. 16 видно, что решением неравенства является *объединение* двух промежутков $(-\infty; 2]$ и $(3; +\infty)$, а также изолированной точки $x = 0$. Если решение неравенства содержит изолированные точки, их заключают в фигурные скобки. Таким образом, решение неравенства в данном примере имеет вид $x \in (-\infty; 2] \cup \{0\} \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 2] \cup \{0\} \cup (3; +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $\frac{x-1}{x^2-5x+6} < 0.$

Решение. Точка $x = 1$ обращает в нуль числитель. Чтобы найти точки, обращающие в нуль знаменатель, надо найти корни квадратного уравнения

$x^2 - 5x + 6 = 0.$

По теореме Виета имеем

$x_1 + x_2 = 5;$

$x_1 x_2 = 6.$

Подбором находим корни:

$x_1 = 2; x_2 = 3.$

Представим знаменатель дроби в виде разложения по корням:

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$

Таким образом, исходное неравенство примет вид

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0.$$

Отметим найденные характерные точки на числовой оси и определим знаки выражения на каждом из промежутков (рис. 17).

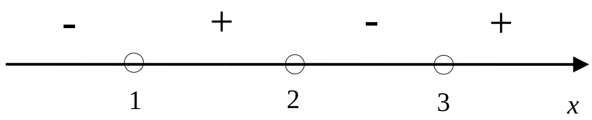


Рис. 17. Решение неравенства $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} < 0$

На рис. 17 видно, что решением неравенства является *объединение* двух промежутков $(-\infty; 1)$ и $(2; 3)$, т.е. $x \in (-\infty; 1)) \cup (2; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; 3)$.

Пример. Решить неравенство $\dfrac{2x-6}{x^2+1} < 0$.

Решение. В данном примере нет необходимости использовать метод интервалов. Действительно, выражение в знаменателе больше нуля при любых значениях x. Следовательно, исходное неравенство эквивалентно следующему неравенству: $2x - 6 < 0$.

Решив это неравенство, получим $x < 3$.

Таким образом, $x \in (-\infty; 3)$.

На числовой оси решение системы изображается следующим образом (рис. 18).

Рис. 18. Решение неравенства $\frac{2x-6}{x^2+1} < 0$

Ответ: $(-\infty; 3)$.

Пример. Решите неравенство $x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2+2x-10}{x-5} \leq 2$.

Решение. Выполним преобразования:

$$x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2 + 2(x-5)}{x-5} \leq 2;$$

$$x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2}{x-5} + 2 \leq 2;$$

$$x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2}{x-5} \leq 0;$$

$$x^2\left(x + 9 + \frac{40}{x-5}\right) \leq\ 0;$$

$$x^2\left(\frac{x^2 + 9x - 5x - 45 + 40}{x-5}\right) \leq 0;$$

$$x^2\left(\frac{x^2 + 4x - 5}{x-5}\right) \leq 0;$$

$$x^2\frac{(x+5)(x-1)}{x-5} \leq 0.$$

На числовой оси решение системы изображается следующим образом (рис. 19).

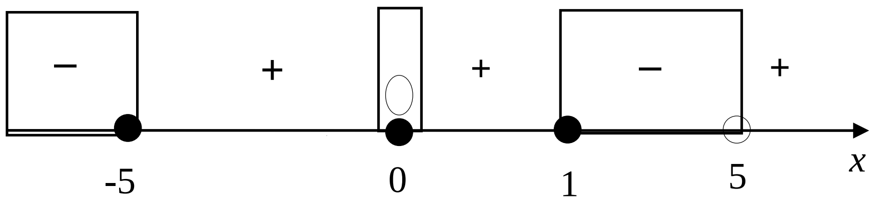


Рис. 19. Решение неравенства $x^3 + 9x^2 + \frac{40x^2+2x-10}{x-5} \leq 2$

Решив полученное неравенство методом интервалов, получим

$x \in (-\infty;\ -5] \cup \{0\} \cup [1;5)$.

Ответ: $(-\infty;\ -5] \cup \{0\} \cup [1;5)$.

Рассмотрим примеры решения неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Пример. Решить неравенство $|x-1| - 2 \leq 0$.

Решение. Для решения неравенства, содержащего знак модуля, воспользуемся методом интервалов. Сначала найдем точки, *обращающие в* *нуль выражение, стоящее в левой части неравенства*. Для этого надо найти корни уравнения

$|x-1|-2=0.$

Перенесем число 2 в правую часть. В результате получим

$|x-1|=2.$

По определению модуля имеем

$x-1=2$ или $x-1=-2.$

Таким образом, получаем два корня: $x=3$; $x=-1$.

Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 20).

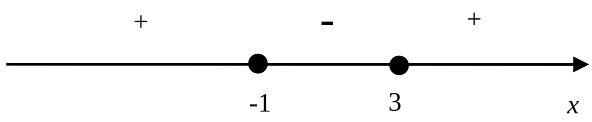


Рис. 20. Решение неравенства $|x-1|-2 \leq 0$

Так как неравенство нестрогое, характерные точки на числовой прямой закрашиваются.

Теперь определим знаки выражения $(|x-1|-2)$ на каждом из трех промежутков.

При $x>3$ возьмем $x=5$, тогда $|5-1|-2=4-2=2>0$. Ставим знак «+».

При $-1 \leq x \leq 3$ возьмем $x=0$, тогда $|0-1|-2=1-2=-1<0$. Ставим знак «–».

При $x<-1$ возьмем $x=-2$, тогда $|-1-2|-2=3-2=1>0$. Ставим знак «+».

Решением данного неравенства является отрезок $[-1;3]$.

Ответ: $[-1;3]$.

Пример. Решить неравенство $|x+4|+1 \leq 0$.

Решение. По определению модуля имеем

$|x+4| \geq 0.$

Следовательно,

$|x+4|+>0$

при любых значениях x. Таким образом, решение исходного неравенства представляет собой пустое множество.

Ответ: $\varnothing$.

Неравенства, содержащие неизвестную под знаком корня, называются *иррациональными*. При решении неравенств, содержащих знак квадратного корня, следует помнить, что *подкоренное выражение должно быть неотрицательной величиной*.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{x-2} \leq 3$.

Решение. Исходное неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} x-2 \geq 0; \\ x-2 \leq 9. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$\begin{cases} x \geq 2; \\ x \leq 11. \end{cases}$$

Таким образом, решением данного неравенства служит отрезок $[2;11]$.

Ответ: $[2;11]$.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{3x+1}+2 \leq 0$.

Решение. По определению арифметического квадратного корня

$$\sqrt{3x+1} \geq 0.$$

Следовательно,

$$\sqrt{3x+1}+2>0$$

при всех допустимых значениях x. Таким образом, решение исходного неравенства представляет собой пустое множество, т.е. $x \in \emptyset$.

Ответ: $\emptyset$.

Пример. Решить неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}+3>0$.

Решение. По определению арифметического квадратного корня

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \text{ и } \sqrt{6-x} \geq 0$$

при всех допустимых значениях, следовательно,

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} + 3 > 0$$

при всех *допустимых* значениях x. Таким образом, *решением* данного неравенства служит множество всех *допустимых значений* x, которое определяется из системы

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 6-x \geq 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 6. \end{cases}$$

Таким образом, решением неравенства является отрезок $[2; 6]$.

Ответ: $[2; 6]$.

1.13. Определение и свойства функции

Функцией $y = f(x)$ называется правило, по которому каждому значению величины x из некоторого множества X ставится в соответствие единственное значение величины y из множества Y.

Величина x называется *независимой переменной*, y – *зависимой переменной*. Множество X называется *областью определения функции* $D(y)$, множество Y – *множеством значений* функции $E(y)$.

Пример. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-5}}$.

Решение. Найти область определения – значит найти все значения переменной x, при которых выражение $f(x)$, определяющее функцию, имеет смысл.

Выражение, определяющее функцию, имеет смысл, если выполняется условие

$$\frac{x-2}{x-5} \geq 0.$$

Таким образом, для нахождения области определения требуется решить рациональное неравенство. Для решения полученного неравенства воспользуемся методом интервалов. Найдем точки, обращающие в нуль числитель и знаменатель: $x = 2;\ x = 5$.

Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 21).

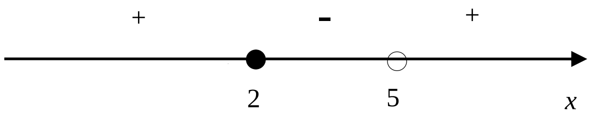


Рис. 21. Область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x-5}}$

Так как неравенство нестрогое, точка $x = 2$ на числовой прямой закрашивается. Точка $x = 5$ обращает в нуль знаменатель дроби, поэтому эта точка не закрашивается. Решением неравенства является объединение двух промежутков $(-\infty; 2]$ и $(5;\ +\infty)$, т.е. $D(y) = (-\infty; 2] \cup (5;\ +\infty)$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; 2] \cup (5;\ +\infty)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости OXY, координаты x и y которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

Ниже приведены графики простейших алгебраических функций (рис. 22).

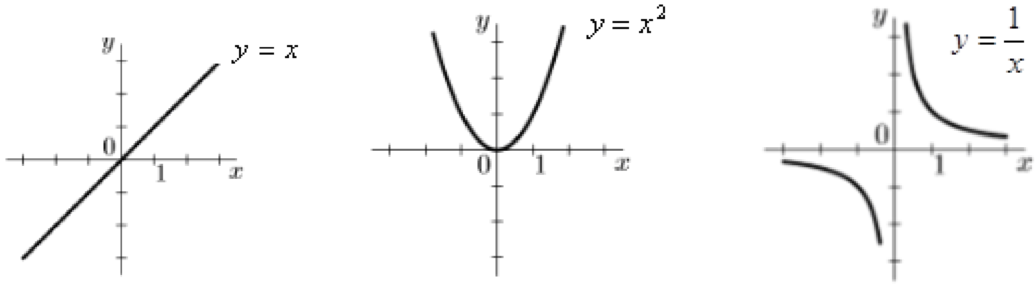


Рис. 22. Графики простейших алгебраических функций

Функция называется *возрастающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Функция называется *убывающей* на промежутке X, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Например, функция $y = x$ является возрастающей, а функция $y = -x$ – убывающей. Возрастающие и убывающие на промежутке функции называются *монотонными.*

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если она определена на симметричном множестве и удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$. Например, функция $y = x^2$ является четной, так как она определена на симметричном множестве $(-\infty; +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если она определена на симметричном множестве и удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$. Например, функция $y = 1/x$ является нечетной, так как она определена на симметричном множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат O.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число M, что

$$|f(x)| \leq M$$

для любого $x \in X$.

Функция $y = f(x)$называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции выполняется равенство

$$f(x + T) = f(x).$$

Ограниченные и периодические функции будут подробно изучены в разделе «Тригонометрия».

1.14. Взаимно обратные функции

Пусть $y = f(x)$ есть функция от независимой переменной x, определенной на множестве X, с множеством значений Y. Если уравнение $y = f(x)$ однозначно разрешимо относительно x, тогда функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве Y с множеством значений X, называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Поскольку, как правило, аргумент обозначают x, а функцию – y, то функция обратная к функции $y = f(x)$ примет вид $y = \varphi(x)$. Обратную функцию записывают также в виде $y = f^{-1}(x)$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 23).

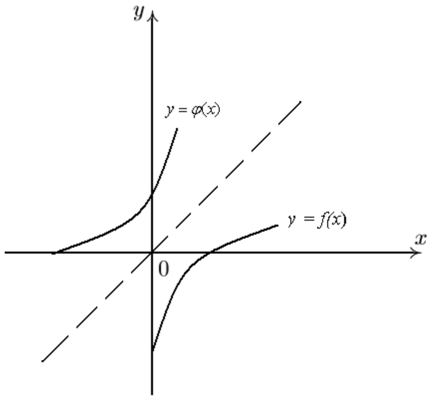


Рис. 23. Графики взаимно обратных функций

Пример. Построить функцию, обратную для функции $y = 2x - 6$.

Решение. Для нахождения обратной функции разрешим данное равенство относительно x. В результате получим

$$x = 0{,}5y + 3.$$

После перехода к общепринятым обозначениям для аргумента и функции получим выражение для обратной функции

$$y = 0{,}5x + 3.$$

Ответ: $y = 0{,}5x + 3$.

1.15. Примеры функций

Функции $y = x$ – это частный случаи *линейной функции*

$$y = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент; b – свободный член. Областью определения квадратичной функции являются все действительные числа, т.е.

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая с положительным направлением оси Ox (рис. 24):

– если $k > 0$, прямая образует острый угол с осью Ox (функция возрастает);

– если $k < 0$, прямая образует тупой угол с осью Ox (функция убывает);

– если $k = 0$, прямая проходит через точку с координатами $(0; b)$ параллельно оси Ox.

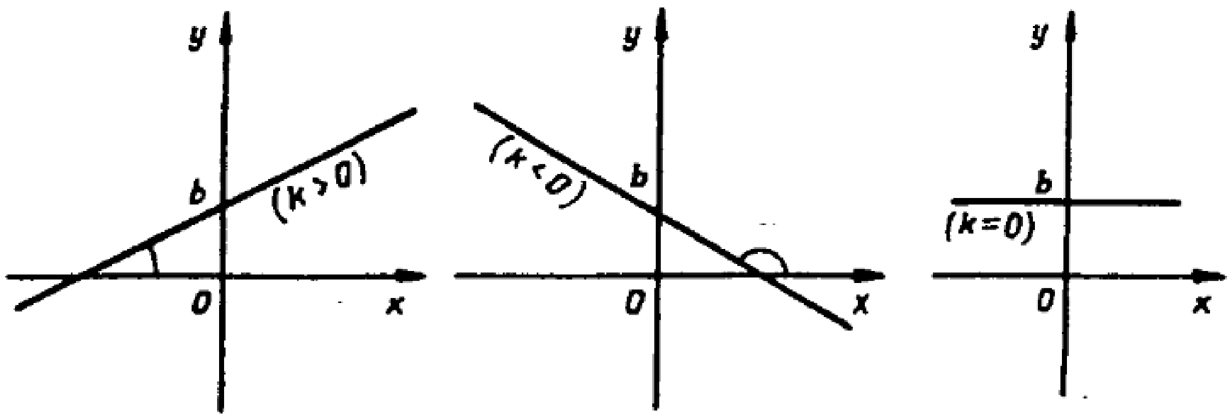


Рис. 24. Графики линейной функции $y = kx + b$

Пример. Даны координаты двух точек прямой (2; 5) и (3; 7). Вычислить угловой коэффициент и свободный член линейной функции.

Решение. Подставив координаты точек (2; 5) и (3; 7) в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2k + b = 5, \\ 3k + b = 7. \end{cases}$$

Для ее решения воспользуемся методом сложения. Вычтем из второго уравнения системы первое уравнение. В результате получим $k = 2$.

Подставив найденное значение k в первое уравнение, найдем

$2 \cdot 2 + b = 5;\ b = 1.$

Таким образом, уравнение прямой имеет вид: $y = 2x + 1$.

Ответ: $k = 2;\ b = 1$.

Функция $y = x^2$ – это частный случай *квадратичной функции*

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – заданные числа, причем $a \neq 0$. Областью определения данной функции являются все действительные числа, т.е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

График квадратичной функции называется параболой. Любую квадратичную функцию можно преобразовать к виду, удобному для построения графика функции: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Здесь x_0, y_0 – координаты *вершины параболы* (рис. 25), которые вычисляются по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a};\ y_0 = -\frac{D}{4a}, \text{где } D = b^2 - 4ac.$$

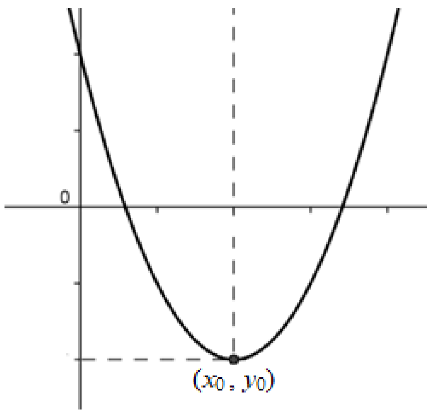


Рис. 25. Вершина параболы

Направление ветвей параболы зависит от знака коэффициента a (рис. 26):

– если $a > 0$ – ветви параболы направлены вверх;

– если $a < 0$ – ветви параболы направлены вниз.

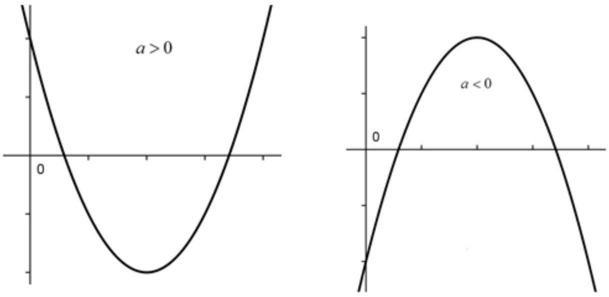


Рис. 26. Направления ветвей параболы

График параболы $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ можно получить из графика $y = ax^2$ при помощи сдвига по осям *Ox* и *Oy* так, чтобы вершина параболы совпала с точкой $(x_0; y_0)$.

Пример. Преобразовать квадратичную функцию $y = x^2 - 2x + 3$ к виду $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ и построить график этой функции.

Решение.

$$x_0 = -\frac{-2}{2} = 1;\ y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2.$$

Таким образом, квадратичную функцию можно представить в виде $y = (x - 1)^2 + 2$.

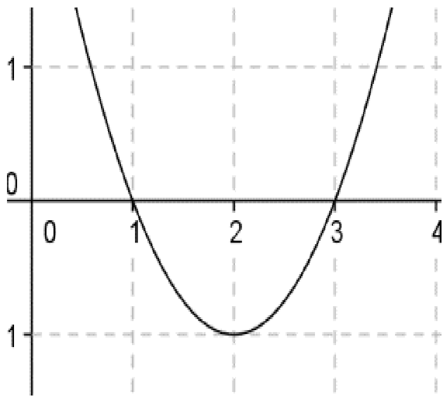


Рис. 27. График функции $y = x^2 - 2x + 3$

График этой функции можно получить из графика $y = x^2$ при помощи сдвига на одну единицу в направлении оси *Ox* и на две единицы в направлении оси *Oy* (рис. 27).

Ответ: $y = (x - 1)^2 + 2$.

Следует отметить, что правила сдвига графиков функций вдоль координатных осей являются универсальными, т.е. справедливы для любой функции $y = f(x)$.

Пример. Решить неравенство $x^2 - 4x + 3 \leq 0$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 - 4x + 3$ служит парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 28).

Парабола лежит ниже оси Ox на промежутке $[x_1, x_2]$, где x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Рис. 28. Решение квадратного неравенства $x^2 - 4x + 3 \leq 0$

По тереме Виета находим корни: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. Таким образом, решением неравенства служит промежуток [1; 3].

Ответ: [1; 3].

Пример. На рисунке изображен график функции вида

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где числа a, b и c – целые (рис. 29). Найдите значение $f(-12)$.

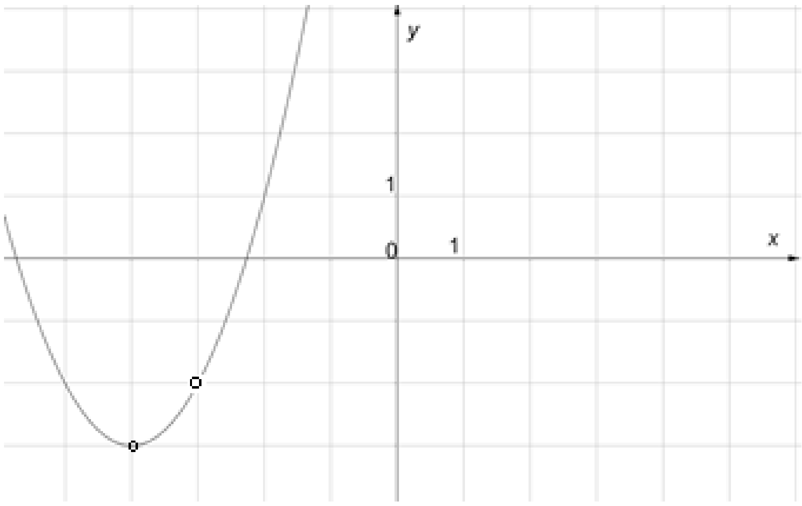


Рис. 29. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$

Решение. Представим квадратичную функции в виде

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0,$$

где (x_0, y_0) – координаты вершины параболы. По графику функции найдем $x_0 = -4;\ y_0 = -3.$ Следовательно, $f(x) = a(x+4)^2 - 3.$

Для нахождения коэффициента a воспользуемся тем, что график проходит через точку (–3; –2). Подставив значения в выражение, получим

$$-2 = a(-3+4)^2 - 3, \qquad a = 1.$$

Таким образом, функция имеет вид

$$f(x) = (x+4)^2 - 3.$$

Подставив значение $x = -12$, получим

$$f(-12) = (-12+4)^2 - 3 = 64 - 3 = 61.$$

Ответ: 61.

Функция $y = \frac{k}{x}$, где k – заданное число, называется обратно пропорциональной. Область определения этой функции – множество всех действительных чисел, за исключением нуля, т.е. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Графиком функции $y = \frac{k}{x}$ является гипербола, состоящая из двух ветвей, симметричных относительно начала координат.

Если $k > 0$, ветви гиперболы расположены в I и III координатных углах; если $k < 0$ – во II и IV координатных углах (рис. 30).

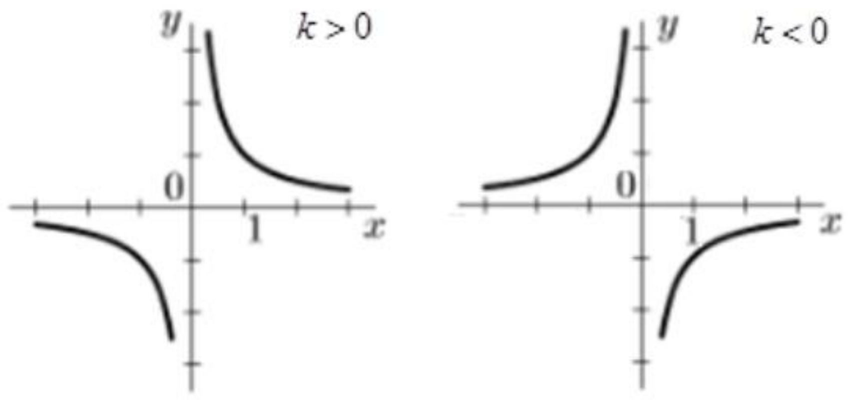


Рис. 30. Гипербола $y = \frac{k}{x}$

Пример. Построить график функции $y = \dfrac{1}{x-1} + 2.$

Решение. График этой функции можно получить из графика $y = \frac{1}{x}$ при помощи сдвига на одну единицу в направлении оси Ox и на две единицы в направлении оси Oy (рис. 31).

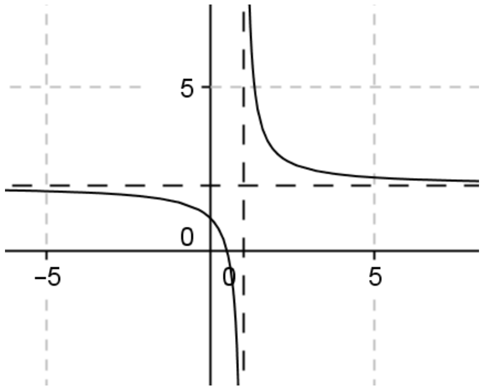


Рис. 31. График функции $y = \frac{1}{x}$

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$. Она является обратной к функции $y = x^2$ на множестве $[0; +\infty)$. Областью определения этой функции служат все неотрицательные действительные числа, т.е. $D(y) = [0; +\infty)$. Множеством значений служат также все неотрицательные действительные числа, т.е. $E(y) = [0; \infty)$. Функция является возрастающей. График функции приведен на рис. 32.

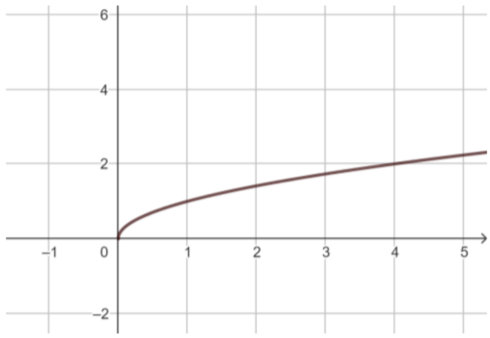


Рис. 32. График функции $y = \sqrt{x}$

1.16. Преобразование графиков функций

Пусть известен график функции $y = f(x)$. Перечислим правила преобразования графика функции $y = f(x)$ в общем виде:

1. График функции $y = f(x - a)$ получается сдвигом графика функции $y = f(x)$ на a единиц вправо, если $a > 0$ и на $|a|$ единиц влево, если $a < 0$.

2. График функции $y = f(x) + b$ получается сдвигом графика функции $y = f(x)$ на b единиц вверх, если $b > 0$ и на $|b|$ единиц вниз, если $b < 0$.

3. График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.
4. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси ординат.
5. График функции $y = mf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси *Oy* в m раз, если $m > 1$, и сжатием в $1/m$ раз, если $0 < m < 1$.
6. График функции $y = f(kx)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси *Ox* сжатием в k раз, если $k > 1$, и растяжением в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
7. График функции $y = f(|x|)$ симметричен относительно оси ординат и совпадает при $x \geq 0$ с графиком функции $y = f(x)$.
8. График функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ в точках, лежащих выше оси абсцисс, и симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс в остальных точках.

Пример. Построить график функции $y = |(x-2)^2 - 1|$.

Решение. Алгоритм построения графика данной функции состоит из четырех шагов:

1. Строим график функции $y = x^2$.

2. Сдвигаем график функции $y = x^2$ на две единицы вправо. Получаем график функции $y = (x-2)^2$.

3. Сдвигаем график функции $y = (x-2)^2$ на единицу вниз. Получаем график функции $y = (x-2)^2 - 1$.

4. Часть графика, лежащую ниже оси абсцисс отображаем симметрично относительно оси абсцисс. В результате получаем искомый график функции $y = |(x-2)^2 - 1|$ (рис. 33).

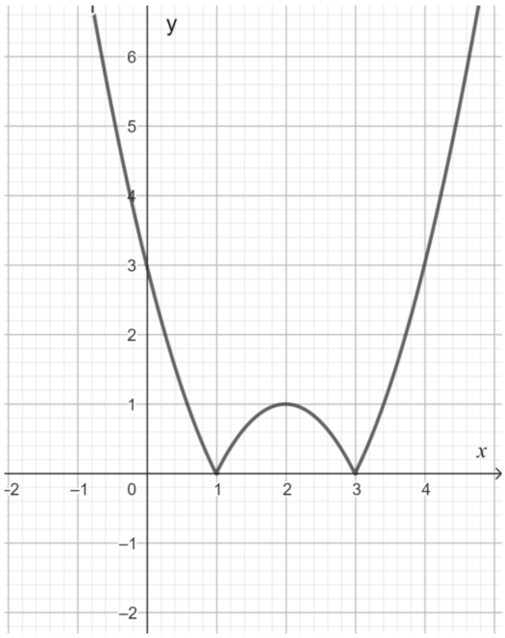


Рис. 33. График функции $y = |(x-2)^2 - 1|$

1.17. Неявные функции

Неявной функцией называется функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = 1$$

определяет y как неявную фунцию от x.

Уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом, равным R, в общем случае имеет вид (рис. 34)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

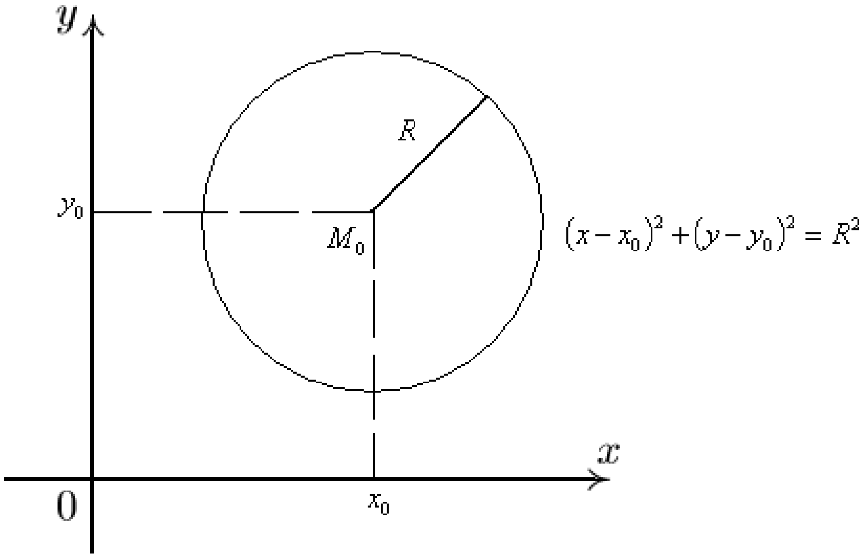


Рис. 34. Окружность с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R

Пример. Построить окружность, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0.$$

Решение. Чтобы построить окружность, надо сначала определить координаты центра окружности (x_0, y_0) и ее радиус R.

Сгруппируем члены данного уравнения: $(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) = 0$.

Дополним выражения $(x^2 - 8x)$ и $(y^2 + 6y)$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 16, а ко второму – 9. Одновременно к правой части последнего равенства прибавляется сумма этих чисел 25. В результате получим

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 6y + 9) = 25.$$

или

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

Последнее равенство представим в виде

$$(x - 4)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2,$$

следовательно, $x_0 = 4;\ y_0 = -3;\ R = 5$.

Построим окружность с центром в точке $(4; -3)$ и радиусом $R = 5$ (рис. 35).

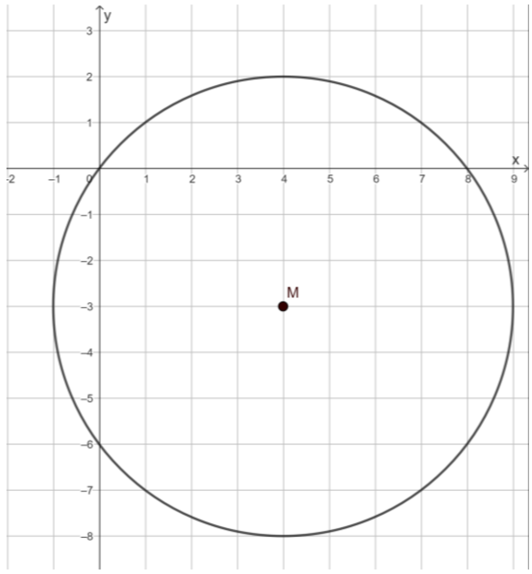


Рис. 35. Окружность с центром в точке $(4; -3)$ и радиусом $R = 5$

Пример. Построить график неявной функции, заданной уравнением

$$y^2 - 4x^2 = 0.$$

Решение. Разложив левую часть уравнения на множители, получим $(y - 2x)(y + 2x) = 0.$

Итак, данное уравнение задает пару прямых: $y = 2x;\; y = -2x.$

Построим графики этих функций (рис. 36).

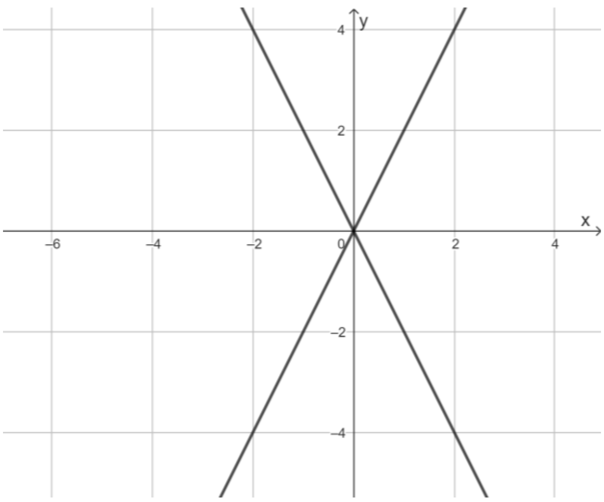


Рис. 36. График неявной функции $y^2 - 4x^2 = 0$

Пример. Построить график неявной функции, заданной уравнением

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = 0.$$

Решение. Левую часть уравнения будем рассматривать как квадратный трехчлен относительно переменной y с коэффициентами

$$a = 1;\ b = -3x;\ c = 2x^2.$$

Решив квадратное уравнение, получим $y = x$ и $y = 2x$.

Построим графики этих функций (рис. 37).

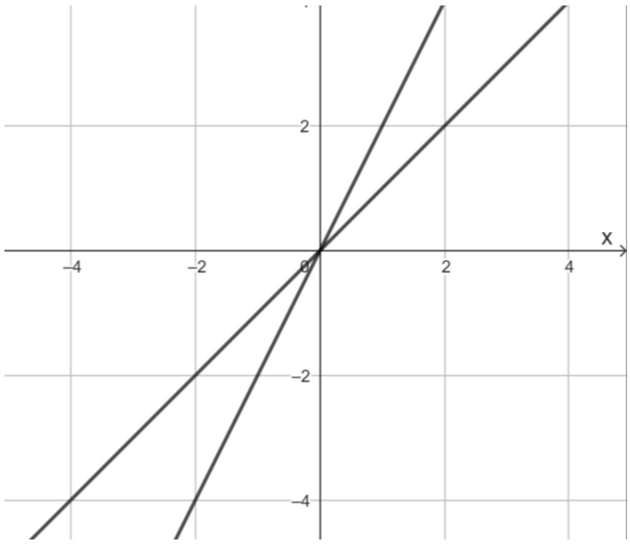


Рис. 37. График неявной функции $y^2 - 3xy + 2x^2 = 0$

1.18. Последовательности

Числовая последовательность – это совокупность перенумерованных действительных чисел

$$u_1, u_2, \dots, u_n,$$

где нижний индекс указывает номер члена последовательности.

Задать числовую последовательность – значит указать закон, по которому вычисляются члены последовательности.

Основные способы задания числовой последовательности:

– аналитический;

– рекуррентный.

Говорят, что последовательность задана аналитически, если указана формула ее n-го члена.

Пример. Последовательность задана формулой $u_n = 3n + 7$. Найти номер члена последовательности, равный 13.

Решение. По условиям задачи $u_n = 13$, следовательно,

$$3n + 7 = 13;\ 3n = 6;\ n = 2.$$

Ответ: $n = 2$.

Рекуррентный способ – это правило, по которому вычисляется текущий член последовательности по известным предыдущим членам последовательности.

Пример. Выписать первые три члена последовательности, заданной рекуррентно: $u_1 = 2, u_n = 4 - u_{n-1}$.

Решение.

$u_1 = 2;$

$u_2 = 4 - u_1 = 4 - 2 = 2;$

$u_3 = 4 - u_2 = 4 - 2 = 2.$

Ответ: $2, 2, 2$.

Пример. Выписать первые пять членов последовательности Фибоначчи: $u_1 = 1, u_2 = 1, u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$.

Решение.

$u_1 = 1;$

$u_2 = 1;$

$u_3 = u_1 + u_2 = 1 + 1 = 2;$

$u_4 = u_2 + u_3 = 1 + 2 = 3.$

$u_5 = u_3 + u_4 = 2 + 3 = 5.$

Ответ: $1, 1, 2, 3, 5$.

Аналитически последовательность Фибоначчи задается следующим образом:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Последовательность (u_n) называют возрастающей, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего, т.е.

$$u_{n+1} > u_n.$$

Например, последовательность

$$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$$

является возрастающей.

Последовательность (u_n) называют убывающей, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего, т.е.

$$u_{n+1} < u_n.$$

Например, последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

является убывающей.

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – монотонные последовательности.

Пример. Исследовать на монотонность последовательность, заданную формулой $u_n = 3n + 2$.

Решение. Составим разность

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3 > 0.$$

Таким образом, $u_{n+1} - u_n > 0$, т.е. $u_{n+1} > u_n$. Следовательно, последовательность является возрастающей.

Ответ: последовательность является возрастающей.

Пример. Исследовать на монотонность последовательность, заданную формулой $u_n = 0{,}25^n$.

Решение. Составим отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{0{,}25^{n+1}}{0{,}25^n} = 0{,}25 < 1.$$

Таким образом, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, т.е. $u_{n+1} < u_n$. Следовательно, последовательность является убывающей.

Ответ: последовательность является убывающей.

Последовательность (u_n) называют ограниченной сверху, если существует такое число М, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $u_n \leq M$. Число М называют верхней границей последовательности.

Последовательность (u_n) называют ограниченной снизу, если существует такое число m, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $u_n \geq m$. Число m называют нижней границей последовательности.

Пример. При каких значениях параметра p последовательность

$$u_n = \frac{3n + p}{3n + 1}$$

ограничена сверху числом 1?

Решение. Задача нахождения параметра p сводится к решению неравенства

$$\frac{3n + p}{3n + 1} \leq 1.$$

Выполним очевидные преобразования

$$3n + p \leq 3n + 1, \qquad p \leq 1.$$

Таким образом, последовательность ограничена сверху при $p \leq 1$.

Ответ: $p \leq 1$.

Пример. При каких значениях параметра p последовательность

$$u_n = \frac{2n + p}{n + 1}$$

ограничена снизу числом 1?

Решение. Задача нахождения параметра p сводится к решению неравенства

$$\frac{2n + p}{n + 1} \geq 2.$$

Выполним очевидные преобразования

$$2n + p \geq 2n + 2, \qquad p \geq 2.$$

Таким образом, последовательность ограничена снизу при $p \geq 2$.

Ответ: $p \geq 2$.

Последовательность называют ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу. Например, ограниченной является последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots .$$

В качестве верхней границы можно взять 1, а качестве нижней – 0.

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, называемым *разностью* прогрессии.

Для того чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно знать ее первый член a_1 и разность d.

Формула n *-го члена* арифметической прогрессии имеет вид

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Пример. Известны первый член $a_1 = 3$ и разность $d = 2$ арифметической прогрессии. Найти a_5.

Решение.

$$a_5 = 3 + 2 \cdot (5-1) = 11.$$

Ответ: 11.

Пример. Известны два члена арифметической прогрессии $a_5 = 10$ и $a_8 = 16$. Вычислить разность прогрессии d.

Решение. По условиям задачи имеем

$$a_1 + 4d = 10,$$

$$a_1 + 7d = 16.$$

Вычтем из второго равенства первое равенство. В результате получим $3d = 6$, следовательно, $d = 2$.

Ответ: $d = 2$.

С помощью формулы n-го члена можно показать, что каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}.$$

Пример. Даны два члена арифметической прогрессии $a_6 = 7$ и $a_8 = 11$. Найти седьмой член прогрессии.

Решение.

$$a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2} = \frac{7 + 11}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Ответ: 9.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Подставив в правую часть выражение

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

получим еще одну формулу суммы

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n.$$

Пример. Известны первый член $a_1 = 3$ и разность $d = 2$ арифметической прогрессии. Найти сумму первых восьми слагаемых прогрессии.

Решение.

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{2a_1 + d(8 - 1)}{2} \cdot 8 = \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 7}{2} \cdot 8 = 80.$$

Ответ: 80.

Пример. Даны два члена арифметической прогрессии $a_1 = 8$ и $a_3 = 12$. Найти сумму первых шести членов арифметической прогрессии.

Решение.

$a_3 = a_1 + 2d;$

$8 + 2d = 12; d = 2;$

$$S_6 = \frac{2a_1 + d(6-1)}{2} \cdot 6 = \frac{2 \cdot 8 + 2 \cdot 5}{2} \cdot 6 = 78.$$

Ответ: 78.

Пример. Найдите сумму первых 20 нечетных чисел.

Решение. В этой задаче $a_1 = 1; d = 2; n = 20;$

$$S_{20} = \frac{2a_1 + d(20-1)}{2} \cdot 20 = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 19}{2} \cdot 20 = 400.$$

Ответ: 400.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, отличное от нуля, называемое *знаменателем прогрессии*.

Для того чтобы задать геометрическую прогрессию b_n, достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q.

Формула n -го *члена* геометрической прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Пример. Дан первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1 = 3$ и $q = 2$. Вычислить четвертый член прогрессии.

Решение.

$b_4 = b_1 q^3;$

$b_4 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24.$

Ответ: 24.

С помощью формулы n-го члена можно показать, что квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

Пример. Даны два члена знакоположительной геометрической прогрессии $b_3 = 4$ и $b_5 = 9$. Найти четвертый член прогрессии.

Решение.

$b_4^2 = b_3 b_5;$

$b_4^2 = 4 \cdot 9 = 36;$

$b_4 = \pm 6.$

По условиям задачи прогрессия является знакоположительной, следовательно, $b_4 = 6$.

Ответ: 6.

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии имеет вид

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Пример. Даны первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1 = 3$ и $q = 2$. Вычислить сумму первых четырех членов прогрессии.

Решение.

$S_4 = 3 \cdot \dfrac{2^4 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 15 = 45.$

Ответ: 45.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots,$$

знаменатель которой удовлетворяют условию $|q| < 1$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Пример. Известны сумма $S = 8$ и первый член бесконечной геометрической прогрессии $b_1 = 4$. Вычислить знаменатель прогрессии.

Решение. Воспользуемся формулой

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Подставив числовые значения, получим

$8 = \frac{4}{1-q};\ 8(1 - q) = 4;\ 2(1 - q) = 1;\ 2 - 2q = 1; -2q = -1;\ q = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

Пример. Решить уравнение

$$x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = 3,$$

если известно, что $|x| < 1$.

Решение. В левой части уравнения записана сумма членов бесконечной геометрической прогрессии, причем $b_1 = x;\ q = x$.

Применив формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии, получим

$$\frac{x}{1-x} = 3.$$

Выполним очевидные преобразования и найдем корень уравнения

$$x = 3 - 3x;\ 4x = 3;\ x = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

Рассмотрим бесконечную последовательность вида

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Швейцарский математик Якоб Бернулли установил, что по мере увеличения номера n $(n \to \infty)$ величина u_n сходится к вполне определенному числу, которое принято обозначать буквой e $(u_n \to e)$. Математически этот факт записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e часто встречается не только в математике, но и во многих естественных науках (физика, химия, биология и т.д.). Его можно вычислить с какой угодно точностью, задавая достаточно большие номера n. Приближенно $e = 2{,}718$.

1.19. Задачи повышенного уровня сложности

Пример. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2-a^2}{3x-9-2a}=0$$

имеет ровно два различных решения.

Решение. Перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases}9x^2-a^2=0, & (1)\\ 3x-9-2a\neq 0. & (2)\end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (1). Его корни можно получить в явном виде;

$$9x^2=a^2;\ x^2=\frac{a^2}{9};\ \ x=\pm\frac{a}{3}.$$

Таким образом, уравнение (1), без учета условия (2), имеет ровно два различных решения при условии $a\neq 0$.

Чтобы исключить решения, обращающие в нуль знаменатель, подставим найденные корни уравнения в условие (2).

Подставив корень $x=-\frac{a}{3}$, получим

$$3\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)-9-2a\neq 0;\ -a-9-2a\neq 0;\ -3a\neq 9;a\neq -3.$$

Подставив корень $x=\frac{a}{3}$, получим

$$3\cdot\left(\frac{a}{3}\right)-9-2a\neq 0;\ a-9-2a\neq 0;\ -a\neq 9;a\neq -9.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два различных корня при всех действительных значениях параметра a, за исключением точек

$a=-9,\ a=-3,\ a=0.$

Ответ: $(-\infty;\ -9)\cup(-9;-3)\cup(-3;0)\cup(0;\ +\infty)$.

Пример. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-x^2+2|x|-1=0$ имеет ровно два различных решения.

Решение. Выполним следующие преобразования:

$a^2 - (|x|^2 - 2|x| + 1) = 0,$

$a^2 - (|x| - 1)^2 = 0,$

$\big(a - (|x| - 1)\big)\big(a + (|x| - 1)\big) = 0.$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности

$a = \pm(|x| - 1).$

Построим график этой совокупности в системе координат xOa (рис. 38).

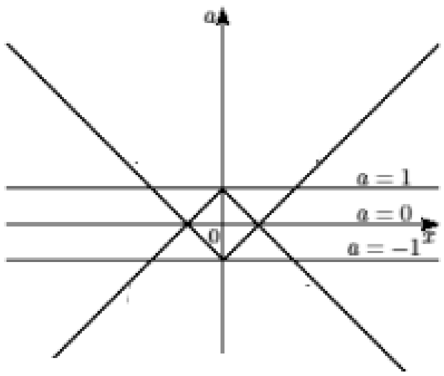


Рис. 38. График совокупности $a = \pm(|x| - 1)$

По рисунку видно, что при $a < -1, a = 0$ и $a > 1$ исходное уравнение имеет ровно два различных решения.

Ответ: $a < -1, a = 0$ и $a > 1$.

Пример. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a + 7)^2 = |x - a - 7| + |x + a + 7|$ имеет единственный корень.

Решение. Пусть $b = a + 7$. Тогда уравнение примет вид

$x^2 + b^2 = |x - b| + |x + b|.$

Уравнение является четным по x, т.е. если x_0 – решение уравнения, то величина $(-x_0)$ – решение уравнения.

Чтобы уравнение имело единственный корень, необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие $x_0 = -x_0$. Последнее равенство возможно только при выполнении условия $x_0 = 0$. Подставив это значение в исходное уравнение, получим $b^2 = |-b| + |b|$.

Учитывая, что $|-b| = |b|$ и $b^2 = |b|^2$, представим уравнение в виде $|b|^2 = 2|b|$.

Перенесем выражение, стоящее в правой части в левую часть, а затем вынесем $|b|$ за скобки: $|b|(|b| - 2) = 0$.

Решив уравнение, получим $b = 0; b = \pm 2$. Проверим, какие из найденных значений b удовлетворяют условиям задачи.

Пусть $b = 0$. Тогда уравнение примет вид

$x^2 = 2|x|$.

Представим уравнение в виде

$|x|^2 - 2|x| = 0$.

Вынесем величину $|x|$ за скобки:

$|x|(|x| - 2) = 0$.

Решив уравнение, получим

$x = 0; x = \pm 2$.

Таким образом, получаем три решения. Следовательно, значение $b = 0$ не удовлетворяет условиям задачи.

Пусть $b = \pm 2$. Очевидно, что в силу четности исходного уравнения по b можно ограничиться случаем $b = 2$.

Подставив значение b в исходное уравнение, получим

$x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

Уравнение с модулем решаем методом интервалов.

Пусть $x < -2$. Уравнение примет вид

$x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$.

Следовательно,

$x^2 + 4 = -2x$,

$x^2 + 2x + 4 = 0$.

Дискриминант уравнения:

$D = 4 - 16 = -12 < 0$.

Следовательно, уравнение не имеет корней.

Пусть $-2 \leq x \leq 2$. Уравнение примет вид

$x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2.$

Отсюда получим

$x^2 + 4 = 4.$

Следовательно, $x = 0$. Таким образом, уравнение имеет единственный корень.

Пусть $x > 2$. Уравнение примет вид

$x^2 + 4 = x - 2 + x + 2.$

Следовательно,

$x^2 + 4 = 2x;$

$x^2 - 2x + 4 = 0.$

Дискриминант уравнения:

$D = 4 - 16 = -12 < 0.$

Следовательно, уравнение не имеет корней.

Таким образом, при $b = \pm 2$ уравнение имеет единственный корень.

Найдем значение параметра a из равенства

$a + 7 = \pm 2.$

Таким образом,

$a = -9$ и $a = -5$.

Ответ: –9; –5.

Пример. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4ax - 2ay + 5a^2 - 25 = 0, \\ y^2 - 1{,}5xy - x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Покажем, что первое уравнение системы представляет собой уравнение окружности. Преобразуем первое уравнение системы следующим образом:

$$x^2 - 2(2ax) + (2a)^2 + y^2 - 2ay + a^2 - (2a)^2 - a^2 + 5a^2 - 25 = 0.$$

Применив формулу сокращенного умножения для квадрата суммы, получим

$$(x-2a)^2+(y-a)^2-25=0.$$

Окончательно первое уравнение примет вид

$$(x-2a)^2+(y-a)^2=5^2.$$

Таким образом, первое уравнение – уравнение окружности с центром в точке $(2a;a)$ и радиусом $R=5$.

Рассмотрим второе уравнение. Разложим левую часть уравнения на множители, рассматривая это выражение как квадратный трехчлен относительно переменной y:

$$y^2-1{,}5xy-x=(y-y_1)(y-y_2).$$

По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} y_1+y_2=1{,}5x, \\ y_1\cdot y_2=-x. \end{cases}$$

Подбором находим

$$y_1=-0{,}5x;\ y_2=2x.$$

Второе уравнение запишется в виде

$$(y+0{,}5x)(y-2x)=0.$$

Таким образом, второе уравнение системы задает пару прямых

$y=-0{,}5x$ и $y=2x$,

пересекающихся в точке $(0;0)$.

Прямая и окружность, очевидно, могут иметь *не более двух общих* точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия (рис. 39):

– окружность *пересекается* с прямой $y=2x$ *в двух точках*;

– окружность *пересекается* с прямой $y=-0{,}5x$ *в двух точках*;

– окружность *не проходит* *через точку пересечения* прямых $(0;0)$.

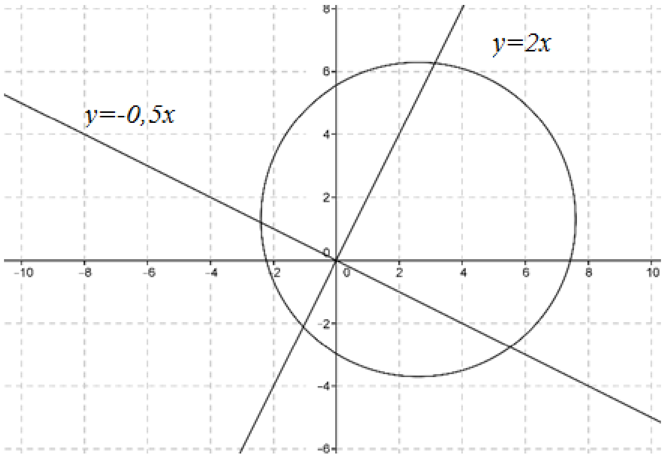


Рис. 39. Взаимное расположение прямых и окружности

Подставив последовательно значения $y = 2x$ и $y = -0{,}5x$ в уравнение окружности, получим совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}(x-2a)^2+(2x-a)^2=25,\\(x-2a)^2+(-0{,}5x-a)^2=25.\end{array}\right.$$

Преобразуем полученную совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}5x^2-8ax+5a^2-25=0,\\5x^2-12ax+20a^2-100=0.\end{array}\right.$$

Таким образом, имеем совокупность двух квадратных уравнений.

Найдем дискриминант первого уравнения:

$D = 64a^2 - 20(5a^2 - 25) = -4(9a^2 - 125)$.

Найдем дискриминант второго уравнения:

$D = 144a^2 - 20(20a^2 - 100) = -16(16a^2 - 125)$.

Чтобы каждое квадратное уравнение имело ровно два корня, т.е. окружность пересекала каждую из прямых ровно в двух точках, дискриминанты этих уравнений должны быть больше нуля:

$$\begin{cases}-4(9a^2-125)>0,\\-16(16a^2-125)>0.\end{cases}$$

Преобразуем систему следующим образом:

$$\begin{cases}a^2<\dfrac{125}{9},\\a^2<\dfrac{125}{16}\end{cases}.$$

Решением системы относительно a^2, очевидно, служит неравенство

$$a^2 < \frac{125}{16}.$$

Следовательно,

$$-\frac{5\sqrt{5}}{4} < a < \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

Из полученного решения следует исключить значения a, при которых окружность проходит через точку пересечения прямых $(0;0)$.

Подставив значения $x = 0, y = 0$ в уравнение окружности, получим

$$(2a)^2 + a^2 = 25,5a^2 = 25,\ \ a = \pm\sqrt{5}.$$

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно четыре решения при выполнении следующих условий:

$$-\frac{5\sqrt{5}}{4} < a < -\sqrt{5}; \quad -\sqrt{5} < a < \sqrt{5}; \quad \sqrt{5} < a < \frac{5\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{5\sqrt{5}}{4}; -\sqrt{5}\right) \cup \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}; \frac{5\sqrt{5}}{4}\right).$

Пример. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x| - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$ задает окружность с центром в точке $C_1(4;4)$ и радиусом 2, а если $x < 0$, то оно задает окружность с центром в точке $C_2(-4;4)$ того же радиуса (рис. 40).

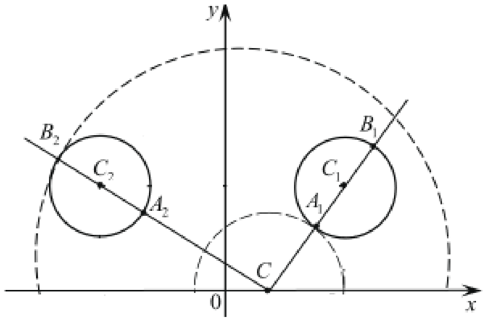


Рис. 40. Взаимное расположение окружностей

При положительных значениях параметра a уравнение

$$(x-1)^2+y^2=a^2$$

задает окружность с центром в точке $C(1;0)$ и радиусом $a.$ Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a при каждом из которых окружность C имеет единственную общую точку с совокупностью окружностей C_1 и C_2.

Из точки C проведем луч CC_1. Обозначим через A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью C_1.

Так как $CC_1=\sqrt{(4-1)^2+4^2}=\sqrt{25}=5,$ то

$CA_1=5-2=3;\ \ CB_1=5+2=7.$

Из точки C проведем луч CC_2. Обозначим через A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью C_2.

Так как $CC_2=\sqrt{(-4-1)^2+4^2}=\sqrt{41},$ то

$CA_2=\sqrt{41}-2;\ \ CB_2=\sqrt{41}+2.$

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность C касается только одной из двух окружностей C_1 и C_2 и не имеет общих точек с другой окружностью. Так как $CA_1<CA_2<CB_1<CB_2,$

то условию задачи удовлетворяют только числа $a=3$ и $a=\sqrt{41}+2.$

Ответ: $a=3$ и $a=\sqrt{41}+2.$

Пример. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1860.

А. Может ли последовательность состоять их двух членов?

Б. Может ли последовательность состоять из трех членов?

В. Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение. А. Если последовательность состоит из двух членов, то возможны только два случая: $a, 10a$; $10a, a,$ где a – натуральное число.

Сумма членов в обоих случаях равна $10a + a = 11a$.

По условию $11a = 1860$.

Следовательно, $a = \frac{1860}{11} = 169\frac{1}{11}$.

Получили противоречие, так как a должно быть натуральным числом. Следовательно, последовательность не может состоять из двух членов.

Б. Если последовательность состоит из трех членов, то возможны четыре случая:

$a + 10a + 100a = 111a;$

$100a + 10a + a = 111a;$

$10a + a + 10a = 21a.$

$a + 10a + a = 12a.$

Суммы членов в первом и втором случаях совпадают, следовательно, достаточно проверить только три случая:

$$a = \frac{1860}{111} = 16\frac{84}{111};$$

$$a = \frac{1860}{21} = 88\frac{12}{21}.$$

$$a = \frac{1860}{12} = 155.$$

Таким образом, условиям задачи удовлетворяет только последний случай: 155, 1550, 155.

Сумма этих чисел: 155 + 1550 + 155 = 1860.

Таким образом, последовательность может состоять из трех членов.

В. Чем меньше по величине члены последовательности, тем больше количество слагаемых. Построим «минимальную последовательность» следующим образом: 1, 10, 1, 10, 1, 10…

Найдем общее количество пар (1, 10). Для этого разделим число 1860 на сумму чисел 1 + 10 = 11:

$$\frac{1860}{11} = 169 + \frac{1}{11}.$$

Таким образом, получается 169 пар (1, 10). Дописывая в конец последовательности последний член, равный единице, получим требуемую «минимальную последовательность»: 1, 10, 1, 10, 1, 10, …10, 1, 1.

Найдем общее количество членов последовательности:

$$169 \cdot 2 + 1 = 339.$$

Ответ: А. Нет. Б. Да. В. 339.

Пример. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

А. Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

Б. Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

В. Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

Решение. А. Воспользуемся известной формулой суммы членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

где a_1 – первый член прогрессии; d – разность прогрессии; n – число членов прогрессии.

По условиям задачи эта сумма равна

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 14.$$

Отсюда

$$\left(2a_1 + d(n-1)\right) \cdot n = 28.$$

Таким образом, имеем одно уравнение и три неизвестных. Требуется найти хотя бы одно решение этого уравнения. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$2a_1 + d(n-1) = \frac{28}{n}.$$

В левой части уравнения стоит целая величина, следовательно, в правой части тоже должна быть целая величина. Рассмотрим предельный случай, когда $n = 4$. В этом случае получим $2a_1 + 3d = 7$.

Пусть, например, $d = 1$. Тогда $2a_1 + 3 = 7$; $a_1 = 2$.

Таким образом, получим прогрессию, состоящую из четырех членов $2, 3, 4, 5.$ Сумма членов: $2 + 3 + 4 + 5 = 14,$ т.е. данная прогрессия удовлетворяет условиям задачи.

Б. Справедливо следующее утверждение: чем меньше первый член прогрессии a_1 и ее разность d, тем больше количество слагаемых $n.$ Наименьшие возможные значения a_1 и d: $a_1 = 1, d = 1.$ Следовательно, сумма равна

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 + n - 1}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

По условиям задачи

$$\frac{n(n+1)}{2} < 900.$$

Из последнего неравенства получим

$$n(n+1) < 1800.$$

Наибольшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию:

$$n_{\max} = 41.$$

В. Сначала оценим границы, в которых может изменяться величина $n.$

Нижняя граница задана: $n_{\min} = 3.$ Найдем верхнюю границу $n_{\max},$ при условии что сумма членов не должна превышать числа 123.

Чем меньше первый член прогрессии и ее разность, тем больше количество слагаемых $n.$ В предыдущем пункте было показано, что в этом случае сумма равна

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Значит, $\frac{n(n+1)}{2} \leq 123.$

Следовательно, $n(n+1) \leq 246$.

Наибольшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию: $n_{\max} = 15$.

Таким образом, $3 \leq n \leq 15$.

По условиям задачи требуется найти все возможные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 123.$$

Преобразуем это уравнение:

$$2a_1 + d(n-1) = \frac{246}{n}.$$

В левой части стоит целая величина, следовательно, и правая часть должна быть целой величиной. Другими словами, число 246 должно делится на n без остатка.

Разложим число 246 на множители: $246 = 2 \cdot 3 \cdot 41$. Таким образом, число n может принимать только два значения: $n = 3;\ n = 6$. Остальные значения n выходят за границы промежутка $3 \leq n \leq 15$.

Приведем пример прогрессий для найденных значений n.

Для $n = 3$ получаем уравнение $2a_1 + 2d = 82$.

Отсюда $a_1 + d = 41$. Таким образом, получаем одно уравнение и два неизвестных. Пусть, например, $d = 1$, тогда $a_1 + 1 = 41;\ a_1 = 40$. В результате получаем прогрессию $40, 41, 42$. Сумма членов прогрессии $40 + 41 + 42 = 123$, т.е. удовлетворяет условиям задачи.

Для $n = 6$ получаем уравнение $2a_1 + 5d = 41$. Таким образом, получаем одно уравнение и два неизвестных. Пусть, например, $d = 1$, тогда $2a_1 + 5 = 41;\ a_1 = 18$. В результате получаем прогрессию $18, 19, 20, 21, 22, 23$. Сумма членов прогрессии равна

$$18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 123,$$

т.е. удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: А. Да. Б. 41. В. 3, 6.

1.20. Упражнения

1. Какие из чисел 1862, 1236 и 8883 делятся на 3?
2. Какие из чисел 1239, 4455 и 1199 делятся на 9?
3. Какие из чисел 1326, 1510 и 1221 делятся на 6?
4. Какие из чисел 1135, 4455 и 1198 делятся на 15?
5. Какие из чисел 2145, 4455 и 5398 делятся на 45?
6. Разложить число на простые множители:

а) 126; б) 504;

в) 252; г) 405.

7. Найдите НОД и НОК чисел:

а) 84 и 56; б) 96 и 144;

в) 99 и 132; г) 65 и 136.

8. Составить формулу натурального числа n, которое при делении на 11 дает в остатке 7.
9. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь:

а) $1,(23)$; б) $3,(17)$;

в) $37,(71)$; г) $32,(21)$.

10. В школе 300 учеников, 20 % из них – спортсмены. Сколько спортсменов в школе?
11. Пачка сливочного масла стоит 80 руб. Пенсионерам магазин делает скидку 15 %. Сколько рублей заплатит пенсионер за две пачки масла?
12. Цена на электрический чайник была повышена на 20 % и составила 2400 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?
13. Клиент взял в банке кредит на 30 000 руб. на год под 20 %. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую

сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

14. Магазин закупает цветочные горшки по оптовой цене 140 руб. за штуку. Торговая наценка составляет 20 %. Какое наибольшее число таких горшков можно купить в этом магазине на 1110 руб.?

15. Найти пределы, в которых заключена сумма $3a + 4b$, если $1 < a < 2; 1 < b < 3$.

16. Упростить выражение:

а) $\left|\sqrt{51} - 7\right| + \left|\sqrt{51} - 8\right|$; б) $\left|\sqrt{37} - 7\right| + \left|\sqrt{37} - 6\right|$.

17. Даны комплексные числа z_1и z_2. Требуется вычислить z.

а) $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i, z = (z_2 + z_1)z_2$;

б) $z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i, z = (z_2 - z_1)(z_2 + z_1)$;

в) $z_1 = 1 - i, z_2 = 2 - 2i, z = (z_2 - z_1)^2$.

18. Даны комплексные числа z_1, z_2. Требуется вычислить z.

а) $z_1 = -1 + i, z_2 = 1 - i, z = \dfrac{z_2}{z_1 + z_2}$;

б) $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + 2i, z = \dfrac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}$;

в) $z_1 = 2 + 2i, z_2 = -1 - i, z = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$.

19. Вычислить:

а) $\dfrac{2^8 \cdot 3^8}{6^6}$; б) $\dfrac{12^7}{3^5 \cdot 4^5}$;

в) $4^3 \cdot 16^{-2}$; г) $5^7 \cdot 125^{-2}$.

20. Вычислить:

а) $\dfrac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$;

в) $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}$; г) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{54}$.

21. Вычислить:

а) $\sqrt[4]{16\cdot 0{,}0001}$; б) $\sqrt[5]{243\cdot\dfrac{1}{32}}$.

22. Вычислить:

а) $\sqrt[4]{32\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{8\cdot 27}$; б) $\sqrt[5]{32\cdot 7^2}\cdot\sqrt[5]{7^3}$.

23. Вычислить.

а) $\sqrt[4]{6+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$; б) $\sqrt[5]{6-2\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{6+2\sqrt{17}}$.

24. Вычислить:

а) $\sqrt[3]{-5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt{32}+\dfrac{\sqrt[5]{-729}}{\sqrt[5]{3}}$;

б) $\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{9}+\dfrac{\sqrt[5]{-64}}{\sqrt[5]{2}}$.

25. Сравнить числа:

а) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[6]{40}$; б) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[8]{500}$.

26. Вычислить:

а) $3^{-4}\cdot 27^{\frac{2}{3}}\cdot 9$; б) $3^{-5}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\cdot 27$.

27. Вычислить:

а) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{2}}\cdot 125^{-\frac{1}{3}}$; б) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}\cdot 49^{-\frac{1}{2}}+2^{-1}\cdot(-2)^{-2}$.

28. Сравнить числа:

а) $\sqrt[7]{3^3}$ и $9^{\frac{2}{7}}$ б) 3^{60} и 5^{40}.

29. Вычислить:

а) $\sqrt{12{,}5^2 - 3{,}5^2}$; б) $\sqrt{17{,}5^2 - 10{,}5^2}$;

в) $\left(\sqrt{10} - \sqrt{7}\right)^3\left(\sqrt{10} + \sqrt{7}\right)^3$; г) $\left(\sqrt{5} - 2\right)^4\left(\sqrt{5} + 2\right)^4$.

30. Вычислить:

а) $\sqrt{21 - 8\sqrt{5}} + \sqrt{21 + 8\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$.

31. Упростить выражение и вычислить его значение при данных x и y:

а) $\dfrac{x^2 - xy}{x^2 - 2xy + y^2}, x = 16, y = 8$;

б) $\dfrac{xy + 2y}{x^2 + 4x + 4}, x = 11, y = 39$;

в) $\dfrac{x^2 - xy + y^2}{x^3 + y^3} + \dfrac{9x - 9y}{x^2 - y^2}, x = 6, y = 4$;

г) $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^3 - y^3} + \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}, x = 16, y = 13$.

32. Решить линейные уравнения:

а) $x - \dfrac{x}{5} = 4$; б) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 5$.

33. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 - 6x = 0$; б) $x^2 + 9x = 0$;

в) $x^2 + 6 = 7x$; г) $x(x - 8) + 15 = 0$.

34. Решить биквадратные уравнения:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; б) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

35. Решить дробно-рациональные уравнения:

а) $\dfrac{x^2 - 8x + 7}{2x - 2} = 0$; б) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 0$;

в) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{10-x}{x^2-4}$; г) $\dfrac{3}{x}-\dfrac{6}{x^2-3x}=\dfrac{3x-7}{3-x}$.

36. Решить уравнения с модулем:

а) $|2x+9|=5$; б) $|2x-5|=1$.

37. Решить иррациональные уравнения:

а) $\sqrt{x^2-5}=2$; б) $\sqrt{x^2-9}=4$;

в) $x-4\sqrt{x-2}+1=0$; г) $x+\sqrt{x}=2$.

38. Найти комплексные корни уравнения:

а) $z^2-2z+2=0$;

б) $z^2+4z+5=0$;

в) $z^2-6z+25=0$.

39. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases}3x-y=3,\\ x+2y=8;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x-y=3,\\ x+5y=6;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y}=1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-3}=3,\\ 4\sqrt{x-1}-\sqrt{y-3}=3;\end{cases}$

д) $\begin{cases}y-2x=6,\\ x^2-xy+y^2=12;\end{cases}$ е) $\begin{cases}3x-y=10,\\ x^2+xy-y^2=20.\end{cases}$

40. Решить неравенства:

а) $5x-16\geq x$; б) $7x-15\geq 2x$;

в) $x\geq 2(x-4)$; г) $4x\leq 5(x-1)$.

41. Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}\geq\dfrac{x-2}{3},\\ 2x\geq 3x-4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{3}\geq\dfrac{2x+8}{6},\\ x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{4}\leq 10.\end{cases}$

42. Решить двойные неравенства:

а) $-7 \leq 2x + 1 \leq 9$; б) $4 \leq 4x - 4 \leq 12$.

43. Решить неравенства:

а) $\dfrac{x-4}{x-6} < 0$; б) $\dfrac{2x-4}{3x-9} > 0$;

в) $\dfrac{x}{(x+2)(x-4)} \geq 0$; г) $\dfrac{x-2}{x(x-5)} \geq 0$.

44. Решить неравенства:

а) $\dfrac{(x-1)^2}{(x-4)(x-6)} \geq 0$; б) $\dfrac{(x-2)^2}{x(x-4)} \geq 0$;

в) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} < 0$; г) $\dfrac{x}{x^2-7x+10} < 0$.

45. Решить неравенства с модулем:

а) $|x-1| - 3 \leq 0$; б) $|x-2| - 4 \leq 0$;

в) $|x-4| - 1 > 0$; г) $|x+1| - 2 > 0$.

46. Решить иррациональные неравенства:

а) $\sqrt{2x-4} - 2 < 0$; б) $\sqrt{1-x} - 2 < 0$.

47. Найти область определения функций:

а) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-5}{x-6}}$; б) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;

в) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2-25}$.

48. Исследуйте функции на четность и нечетность:

а) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; б) $f(x) = x^3 + x$.

49. Построить обратную функцию:

а) $y = 4x + 8$;   б) $y = -2x + 6$.

50. Даны координаты двух точек прямой A и B. Вычислить угловой коэффициент прямой, проходящий через заданные точки:

а) $A(1; 4), B\ (3; 8)$;   б) $A(-2; 3), B\ (0; 9)$.

51. Построить графики функций:

а) $f(x) = (x - 4)^2$;   б) $f(x) = x^2 + 3$;

в) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$;   г) $f(x) = (x + 1)^2 + 3$.

52. Построить графики функций:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 10$;   б) $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

53. Решить квадратные неравенства:

а) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$;   б) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$.

54. На рис. 41 изображен график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c – целые. Найдите значение $f(7)$.

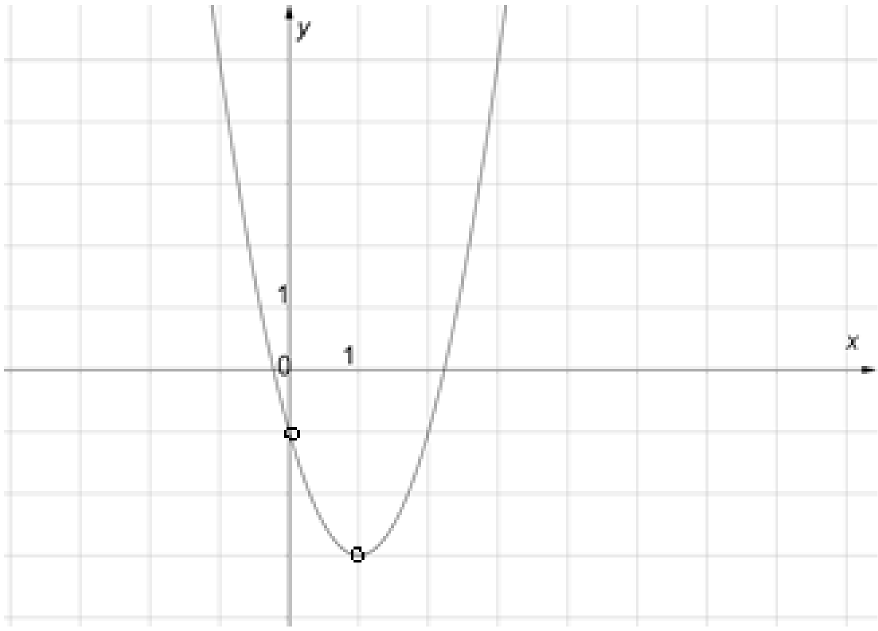


Рис. 41. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$

55. Построить графики функций:

а) $y = \dfrac{1}{x-3} + 2;$ б) $y = \dfrac{1}{x+2} - 3.$

в) $= -\dfrac{1}{x-2} + 1;$ г) $= -\dfrac{1}{x+2} - 1.$

56. Построить графики функций:

а) $f(x) = |(x-3)^2 - 4|;$ б) $f(x) = |x^2 - 6x + 7|;$

в) $y = \left|\dfrac{1}{x-1} - 2\right|;$ г) $f(x) = ||x-1| - 1|.$

57. Построить окружность, заданную уравнением:

а) $x^2 + y^2 - 4x = 0;$ б) $x^2 + y^2 - 2y = 0;$

в) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0;$ г) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0.$

58. Построить график неявной функции:

а) $y^2 - 9x^2 = 0;$ б) $2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0.$

59. Последовательность задана формулой $a_n = 3n - 1$. Найдите номер члена последовательности, равного 122.

60. Выписать первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:

а) $u_1 = 2, u_n = 3 - u_{n-1};$ б) $u_1 = 2, u_n = 5 - 2u_{n-1};$

в) $u_1 = 1, u_2 = 1,$ $u_n = u_{n-2} - u_{n-1};$ г) $u_1 = 0, u_2 = 1,$ $u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}.$

61. Исследовать последовательность (u_n) на монотонность:

а) $u_n = 3 - 5n;$ б) $u_n = 1{,}2^n.$

62. При каких значениях параметра p последовательность

$$u_n = \frac{n+2p}{n+4}$$

ограничена сверху числом 1?

63. При каких значениях параметра p последовательность

$$u_n = \frac{3n+p}{n+1}$$

ограничена снизу числом 3?

64. Даны два члена арифметической прогрессии $a_3 = 5$ и $a_8 = 15$. Вычислить разность прогрессии.
65. Известны два члена арифметической прогрессии $a_1 = 1$ и $a_7 = 15$. Найдите четвертый член прогрессии.
66. В арифметической прогрессии сумма второго и десятого членов равна 20. Найдите сумму первых одиннадцати членов прогрессии.
67. Даны два члена геометрической прогрессии $b_1 = 1$ и $b_4 = 27$. Найти знаменатель прогрессии.
68. Дан первый член и знаменатель геометрической прогрессии $b_1 = 1$ и $q = 2$. Вычислить сумму первых пяти членов прогрессии.
69. Известны первый член $b_1 = 4$ и знаменатель бесконечной геометрической прогрессии $q = 0{,}2$. Вычислить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
70. Решить уравнение

$$x - x^2 + x^3 - \cdots = 0{,}2,$$

если известно, что $|x| < 1$.

71. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^2 - a^2}{4x - 12 - a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $(-\infty;\ -4) \cup (-4; 0) \cup (0; 12) \cup (12;\ +\infty)$.

72. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 4x^2 + 8|x| - 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ: $a < -2, a = 0$ и $a > 2$.

73. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2 - a)^2 = |x - 2 + a| + |x - a + 2|$$

имеет единственный корень.

Ответ: 0; 4.

74. Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a+1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0, \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Ответ: $a \in \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{3}; -1\right) \cup \left(-1; -\frac{3}{5}\right) \cup \left(-\frac{3}{5}; \frac{-2+\sqrt{2}}{3}\right)$.

75. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ (x-2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: 3; $\sqrt{65} + 2$.

76. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

А. Может ли последовательность состоять их двух членов?

Б. Может ли последовательность состоять из трех членов?

В. Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Ответ: А. Нет. Б. Да. В. 549.

77. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

А. Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

Б. Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

В. Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111?

Ответ: А. Да. Б. 39. В. 3, 6.

2. ТРИГОНОМЕТРИЯ

2.1. Тригонометрические функции острого угла

Изучение тригонометрии начнем с рассмотрения *тригонометрических функций острого угла*.

Построим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Обозначим острый угол, противолежащий катету a, буквой α (рис. 42). Второй острый угол $\beta = 90° - \alpha$.

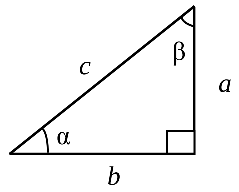


Рис. 42. Прямоугольный треугольник

Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Из определений тангенса и котангенса следует:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \ \text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \ \text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}.$$

Очевидно, что пропорциональное увеличение и уменьшение длин сторон треугольника не влияет на значения тригонометрических функций. Разделим длины всех сторон прямоугольного треугольника на c. В результате получим треугольник с единичной гипотенузой (рис. 43). Катеты этого треугольника будут равны соответственно

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

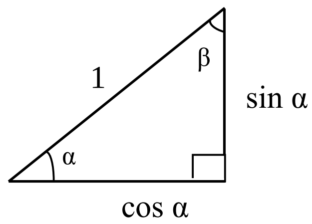


Рис. 43. Треугольник с единичной гипотенузой

Применив теорему Пифагора к треугольнику с единичной гипотенузой, получим *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Пример. Известно, что α – острый угол. Найдите значение $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2\alpha + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = 1;\ \ \sin^2\alpha + \frac{2}{5} = 1;\ \ \sin^2\alpha = \frac{3}{5};\ \ \sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}\,.$$

Так как тригонометрические функции острого угла могут принимать только положительные значения, в решении мы оставляем только положительные корни.

Ответ: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Разделив обе части основного тригонометрического тождества на $\cos^2\alpha$, получим *первое следствие* из основного тригонометрического тождества:

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Разделив обе части основного тригонометрического тождества на $\sin^2\alpha$, получим *второе следствие*:

$$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Пример. Упростите выражение $2(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)\cos^2\alpha + 1$.

Решение. Воспользуемся первым следствием из основного тригонометрического тождества:

$$2(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)\cos^2\alpha + 1 = \frac{2}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Ответ: 3.

По определению имеем

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha; \quad \beta = 90^\circ - \alpha,$$

следовательно,

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha.$$

Путем аналогичных рассуждений найдем:

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha, \beta = 90^\circ - \alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha, \beta = 90^\circ - \alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha;$$

$$\mathrm{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha, \beta = 90^\circ - \alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha.$$

Таким образом, получено еще четыре формулы, которые называются *формулами дополнительного угла*. Выпишем эти формулы еще раз:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha;$

$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha, \qquad \mathrm{ctg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha.$

Пример. Найдите значение выражения $\sin^2 24° + \cos^2 66° + 2$.

Решение.

$24° + 66° = 90°;\ \ 66° = 90° - 24°;$

$\sin 66° = \sin(90° - 24°) = \cos 24°;$

$\sin^2 24° + \cos^2 24° + 2 = 1 + 2 = 3$.

Ответ: 3.

Существуют три стандартных угла, для которых значения тригонометрических функций можно найти без использования измерительных инструментов.

Пусть $\alpha = 30°$. Воспользуемся известной из геометрии теоремой: длина катета, противолежащего углу $\alpha = 30°$, равна половине длины гипотенузы, т.е. $a = \frac{c}{2}$. Подставив выражение $a = \frac{c}{2}$ в формулу для синуса, получим

$$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2}.$$

Из основного и тригонометрического тождества найдем

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По известным значениям синуса и косинуса найдем значения тангенса и котангенса:

$$\mathrm{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{ctg}30° = \frac{1}{\text{tg}30°} = \sqrt{3}.$$

Пусть $\alpha = 45°$. Второй угол равен $\beta = 90° - 45° = 45°$. Следовательно, $\cos 45° = \sin 45°$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1,$$

$$\cos 45° = \sin 45°,$$

$$\sin^2 45° + \sin^2 45° = 1,$$

$$2\sin^2 45° = 1,$$

$$\sin^2 45° = \frac{1}{2},$$

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как $\cos 45° = \sin 45°$, тангенс и котангенс данного угла равны единице:

$$\text{tg}45° = \text{ctg}45° = 1.$$

Пусть $\alpha = 60°$. Воспользуемся формулами дополнительного угла:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg}60° = \text{tg}(90° - 30°) = \text{ctg}30° = \sqrt{3};$$

$$\text{ctg}60° = \text{ctg}(90° - 30°) = \text{tg}30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Выпишем значения основных тригонометрических функций для трех стандартных значений острого угла еще раз.

Таблица 1

Значения тригонометрических функций для стандартных значений углов

Функция	Угол		
	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Пример. Найдите значение выражения $\sqrt{2}\sin 45° + 4\cos 60° + \mathrm{tg}45°$.

Решение.

$$\sqrt{2}\sin 45° + 4\cos 60° + \mathrm{tg}45° = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1 + 2 + 1 = 4\,.$$

Ответ: 4.

2.2. Тригонометрические функции произвольного угла

Обобщим понятия тригонометрических функций на случай произвольного угла α.

Построим *тригонометрический круг* – круг единичного радиуса на координатной плоскости, центр которого совпадает с началом координат. Отметим на круге произвольную точку M. Обозначим через α угол, который образует единичный радиус OM с положительным направлением оси Ox.

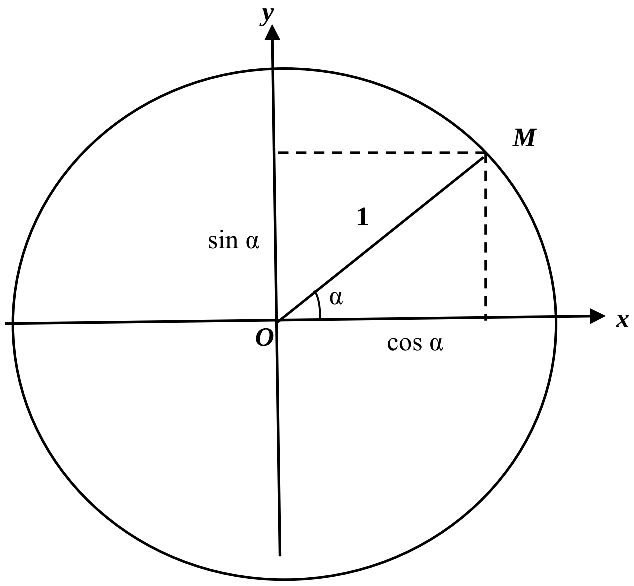


Рис. 44. Тригонометрический круг

Синусом угла α называется проекция точки M на ось Oy.

Косинусом угла α называется проекция точки M на ось Ox.

Тангенсом угла α называется отношение синуса этого угла к косинусу того же угла, т.е. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к синусу того же угла, т.е. $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Координатные оси делят тригонометрический круг на четыре четверти.

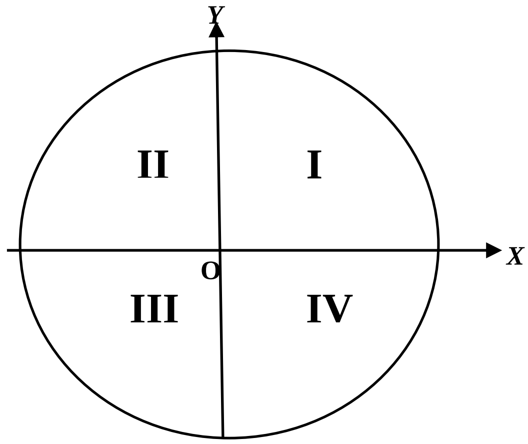


Рис. 45. Четверти тригонометрического круга

Знаки основных тригонометрических функций в каждой из четвертей тригонометрического круга представлены в табл. 2.

Таблица 2

Знаки основных тригонометрических функций

Функция	Четверть тригонометрического круга			
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\mathrm{tg}\alpha$	+	–	+	–
$\mathrm{ctg}\alpha$	+	–	+	–

Таким образом, *в первой четверти* все тригонометрические функции принимают *положительные значения*. В остальных четвертях тригонометрические функции могут принимать как *положительные,* так и *отрицательные* значения.

Пример. Известно, что угол α находится во второй четверти. Найдите значение $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1;\ \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1;\ \cos^2\alpha = \frac{16}{25};$$

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Косинус угла, находящегося во второй четверти, – величина отрицательная, поэтому в решении мы оставляем только отрицательный корень.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Если единичный радиус совершает поворот *против часовой стрелки*, то угол α считается *положительным*, если же единичный радиус совершает поворот *по часовой стрелке, – отрицательным.*

При помощи тригонометрического круга нетрудно установить справедливость следующих равенств (рис. 46):

$$\sin(-\alpha) = \sin\alpha; \ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

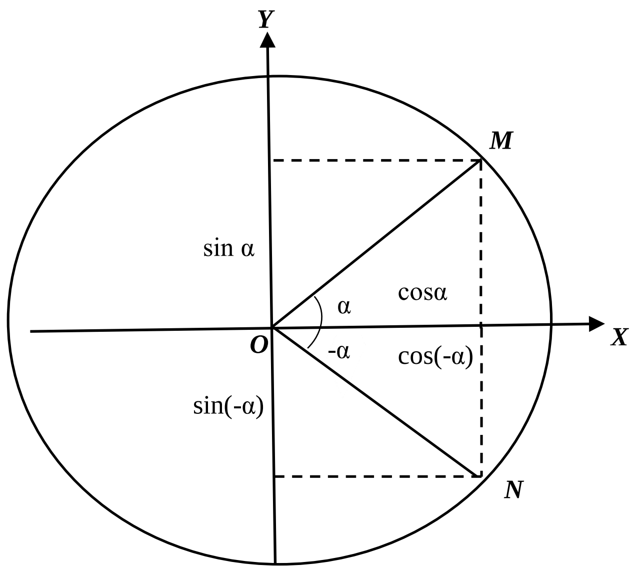


Рис. 46. Равенства $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$ и $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Действительно, рассмотрим два угла: α и $(-\alpha)$. Проекции на ось OX точек M и N, задающих эти углы, одинаковы, проекции на ось OY отличаются только знаком. Таким образом, синус как функция угла α является *нечетной* функцией, а косинус – *четной* функцией.

Значения синуса и косинуса по определению не изменяются при повороте единичного радиуса на угол, кратный 360°, т.е.

$$\sin(\alpha \pm 360°n) = \sin\alpha; \ \ \cos(\alpha \pm 360°n) = \cos\alpha,$$

где n – любое целое число. Это свойство называется *периодичностью.*

Пример. Найдите значение выражения

$\sqrt{2}\sin(-45°) + 2\sqrt{3}\cos(-30°) - 4\cos420°$.

Решение.

$\sqrt{2}\sin(-45°) + 2\sqrt{3}\cos(-30°) - 4\cos420° =$

$= -\sqrt{2}\sin45° + 2\sqrt{3}\cos30° - 4\cos60° =$

$= -\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \dfrac{1}{2} = -1 + 3 - 2 = 0.$

Ответ: 0.

Формулы, позволяющие выразить значения тригонометрических функций углов $90° \pm \alpha$, $180° \pm \alpha$ и $270° \pm \alpha$ через функцию угла α, называются *формулами приведения*. Эти формулы являются обобщением формул дополнительного угла на случай тригонометрических функций произвольного угла.

Углы $180° \pm \alpha$ принято называть углами, откладываемыми от *горизонтального диаметра*, а углы $90° \pm \alpha$ и $270° \pm \alpha$ – углами, откладываемыми от *вертикального диаметра*.

Сформулируем *правило приведения*:

1. Если угол откладывается от горизонтального диаметра, то наименование функции не меняется, если же угол откладывается от вертикального диаметра, то наименование функции меняется на сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс и т.д.).

2. Знак в правой части формулы определяется по знаку функции, стоящей в левой части, при этом угол α считается острым независимо от его величины.

Применив данное правило, получим, в частности:

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$;

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$;

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$;

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(270° + \alpha) = \sin\alpha$.

Пример. Найдите значение выражения

$4\sqrt{3}\sin 120° - \sqrt{2}\sin 135° + 2\sin 150°$.

Решение.

$4\sqrt{3}\sin 120° - \sqrt{2}\sin 135° + 2\sin 150° =$

$= 4\sqrt{3}\sin(90° + 30°) - \sqrt{2}\sin(90° + 45°) + 2\sin(180° - 30°) =$

$= 4\sqrt{3}\cos 30° - \sqrt{2}\cos 45° + 2\sin 30° =$

$= 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 6 - 1 + 1 = 6.$

Ответ: 6.

2.3. Основные тригонометрические формулы

Формулы сложения позволяют выразить тригонометрические функции углов $\alpha \pm \beta$ через функции углов α и β. Выпишем шесть основных формул сложения для синуса, косинуса и тангенса.

Формулы *синуса суммы и разности* двух аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Формулы *косинуса суммы и разности* двух аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Формулы *тангенса суммы и разности* двух аргументов:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta};$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}.$$

Пример. Вычислить $\cos(\alpha - \beta)$, если

$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\beta = -\frac{3}{5}$; $180° < \alpha < 270°$; $270° < \beta < 360°$.

Решение. При помощи основного тригонометрического тождества найдем значения $\sin\alpha$ и $\cos\beta$ с учетом четверти, которой принадлежат углы α и β:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Подставив найденные значения в формулу косинуса разности двух аргументов, получим:

$$\cos(\alpha-\beta) = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{25}.$$

Ответ: $-\frac{7}{25}$.

Из формул сложения, положив $\beta = \alpha$, получим *формулы двойного угла:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Пример. Вычислить значение выражения $\frac{6\sin 22°\sin 68°}{\cos 46°}$.

Решение.

$$\frac{6\sin 22°\sin 68°}{\cos 46°} = \frac{6\sin 22°\cos 22°}{\sin 44°} = \frac{3\sin 44°}{\sin 44°} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример. Упростить выражение

$1-\cos(180°-2\alpha)-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha.$

Решение.

$1-\cos(180°-2\alpha)-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha =$

$1+\cos 2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) =$

$= 1+\cos 2\alpha-\cos 2\alpha = 1.$

Ответ: 1.

Используя основное тригонометрическое тождество, можно получить еще две дополнительные формулы для косинуса двойного угла:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Выразив из двух последних формул предыдущего параграфа величины $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$, получим *формулы понижения степени:*

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Пример. Вычислить $\sin^2\alpha$, если $\cos 2\alpha = 0{,}2$.

Решение.

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}2}{2} = 0{,}4\ .$$

Ответ: 0,4.

Отметим, что формулы понижения степени можно представить следующим образом:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}.$$

При помощи формул сложения для синуса и косинуса можно получить следующие формулы *преобразования произведения тригонометрических функций в сумму*:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

Пример. Упростить выражение $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \cos 2\alpha$.

Решение.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos 2\alpha=$$

$$=2\frac{\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha}{2}-\cos 2\alpha=$$

$$=\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2\alpha-\cos 2\alpha=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

С помощью тождеств

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\,,\qquad \beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и формул сложения можно получить следующие формулы *преобразования суммы тригонометрических функций в произведение*:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Пример. Преобразовать сумму $\sin 4\alpha+\sin 2\alpha$ в произведение.

Решение.

$\sin 4\alpha+\sin 2\alpha=2\sin 3\alpha\cos\alpha.$

Ответ: $2\sin 3\alpha\cos\alpha$.

Из формулы двойного угла для тангенса можно получить выражение тангенса через тангенс половинного угла:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формула для синуса получается в результате следующих преобразований:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогично выводится формула для косинуса:

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Пример. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = 3$.

Решение.

$$\sin\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 3}{1+3^2} = \frac{6}{10} = 0{,}6;$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-3^2}{1+3^2} = \frac{-8}{10} = -0{,}8.$$

Ответ: $\sin\alpha = 0{,}6$; $\cos\alpha = -0{,}8$.

Пример. Вычислить $13\sqrt{3}\mathrm{tg}(60^\circ - \alpha)$, если $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Воспользуемся формулой суммы

$$13\sqrt{3}\mathrm{tg}(60^\circ - \alpha) = 13\sqrt{3}\cdot\frac{\mathrm{tg}60^\circ - \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}60^\circ\mathrm{tg}\alpha} = 13\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha}.$$

Найдем $\mathrm{tg}\alpha$:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}} = 4\sqrt{3}.$$

Вычислим значение выражения

$$13\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\cdot\mathrm{tg}\alpha} = 13\sqrt{3}\cdot\frac{-3\sqrt{3}}{1+12} = -9.$$

Ответ: –9.

2.4. Тригонометрические функции числового аргумента

В тригонометрии, кроме градусной меры, используется также *радианная мера* угла. Связь между радианной мерой φ и градусной мерой α устанавливается из пропорции

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°},$$

где π – постоянная, равная отношению длины окружности к ее диаметру ($\pi \approx 3{,}14$). Из последнего равенства получим формулу, позволяющую переводить градусную меру в радианную:

$$\varphi = \frac{\pi\alpha}{180°}.$$

Пример. Перевести угол $\alpha = 20°$ из градусной меры в радианную меру.

Решение.

$$\varphi = \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{\pi \cdot 20}{180} = \frac{\pi}{9}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{9}$.

Приведем значения углов в радианах для стандартного набора значений углов в градусной мере (табл. 3).

Таблица 3

Перевод градусной меры углов в радианную

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Пример. Вычислить $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + 4\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 4.$$

Ответ: 4.

Использование радианной меры позволяет считать углом любое действительное число, следовательно, тригонометрические функции можно рассматривать как *функции числового аргумента.* Воспользуемся общепринятыми для функций обозначениями: x – независимая переменная (аргумент); y – зависимая переменная (функция).

Графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ представлены на рис. 47, 48.

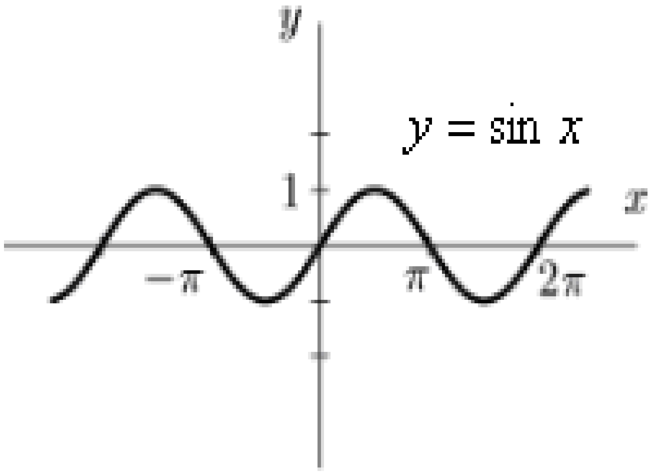


Рис. 47. Синус как функция числового аргумента x

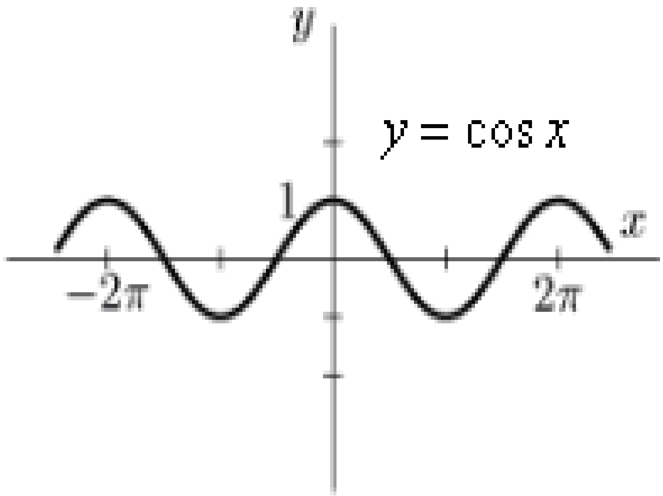


Рис. 48. Косинус как функция числового аргумента x

Область определения синуса и косинуса – все действительные числа, а множество значений – отрезок [–1; 1]. Синус – нечетная функция, косинус – четная функция. Наименьший положительный период этих функций равен 2π.

Обозначив через Z множество целых чисел, запишем решения простейших тригонометрических уравнений:

$\sin x = 0, x = \pi n, n \epsilon \mathrm{Z};$

$\sin x = 1, x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon \mathrm{Z};$

$\sin x = -1, x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon \mathrm{Z};$

$\cos x = 0, x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon \mathrm{Z};$

$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \epsilon \mathrm{Z};$

$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \epsilon \mathrm{Z}.$

Пример. Решить уравнение $\cos^2 x - 3\cos x = 0$.

Решение.

$\cos^2 x - 3\cos x = 0;$

$\cos x(\cos x - 3 = 0).$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0; \\ \cos x = 3.\end{array}\right.$$

Первое из них имеет решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon \mathrm{Z}$. Второе уравнение не имеет решений, так как $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon \mathrm{Z}$.

Ниже представлены графики функций $y = \mathrm{tg} x$ и $y = \mathrm{ctg} x$ (рис. 49, 50).

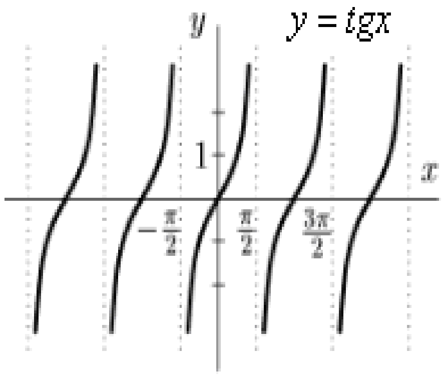


Рис. 49. Тангенс как функция числового аргумента x

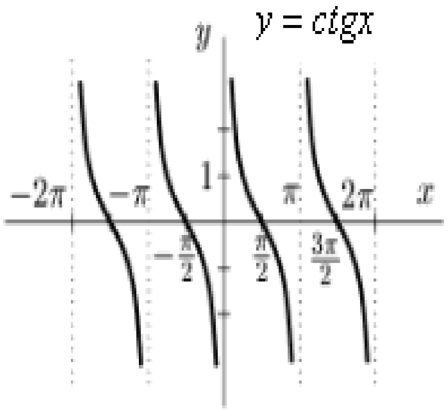


Рис. 50. Котангенс как функция числового аргумента x

Область определения тангенса – все действительные числа, за исключением точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \epsilon Z$. Область определения котангенса – все действительные числа, за исключением точек $x = \pi n, n \epsilon Z$. Множество значений функций тангенса и котангенса – все действительные числа. Тангенс и котангенс – нечетные функции. Наименьший положительный период тангенса и котангенса равен π.

2.5. Обратные тригонометрические функции

Арксинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется *угол* из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. Арксинус обозначается $\arcsin a$. Например,

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{так как } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \text{так как } \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{так как } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. График функции приведен на рис. 51.

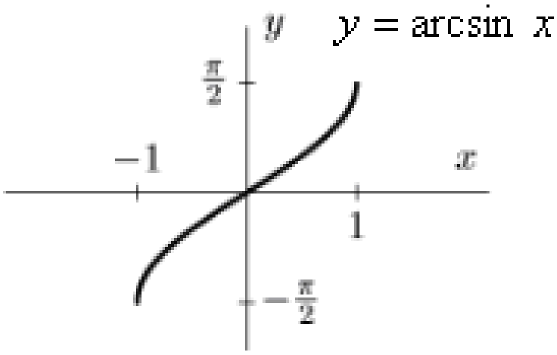


Рис. 51. Функция $y = \arcsin x$

Областью определения арксинуса служит отрезок [–1; 1], а множеством значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Арксинус – нечетная функция, т.е.

$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$

*Пример***.** Вычислить $\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin 0$.

Решение.

$$\arcsin 1 + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

Арккосинусом числа a ($|a| \leq 1$) называется *угол* из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a. Арккосинус обозначается $\arccos a$. Например,

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{так как} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \text{так как} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{так как} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Функция $y = \arccos x$ является обратной к функции $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$. График функции приведен на рис. 52.

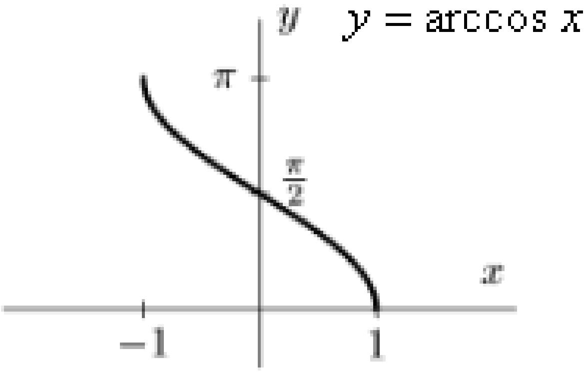


Рис. 52. Функция $y = \arccos x$

Область определения арккосинуса – отрезок [–1;1], а множество значений – отрезок $[0; \pi]$. Для арккосинуса справедливо равенство $\mathrm{arcccos}(-x) = \pi - \arccos x$.

Пример. Вычислить $\arccos 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 0$.

Решение.

$$\arccos 1 + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 0 = 0 \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{6}$.

Арктангенсом числа aназывается *угол* из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. Арктангенс обозначается $\mathrm{arctg}\, a$. Например,

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \text{так как } \mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}, \text{так как } \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{так как } \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Функция $y = \mathrm{arctg}\, x$ является обратной к функции $y = \mathrm{tg}\, x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. График функции приведен на рис. 53.

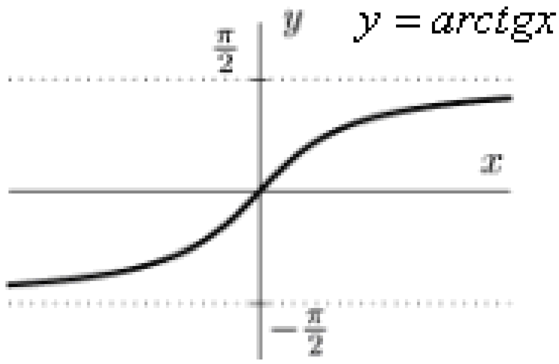


Рис. 53. Функция $y = \mathrm{arctg}x$

Область определения арктангенса – все действительные числа, а множество значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Арктангенс – нечетная функция, т.е. $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x$.

Пример. Вычислить $\mathrm{arctg}1 + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \mathrm{arctg}0$.

Решение.

$$\mathrm{arctg}1 + \mathrm{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 0 = \frac{\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{12}$.

Арккотангенсом числа a называется *угол* из промежутка $(0;\pi)$, котангенс которого равен a. Арккотангенс обозначается $\mathrm{arcctg}a$. Например,

$$\mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \text{так как } \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3};$$

$$\mathrm{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}, \text{так как } \mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}, \text{так как } \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Функция $y = \mathrm{arcctg}x$ является обратной к функции $y = \mathrm{tg}x$ на промежутке $(0;\pi)$. График функции приведен на рис. 54.

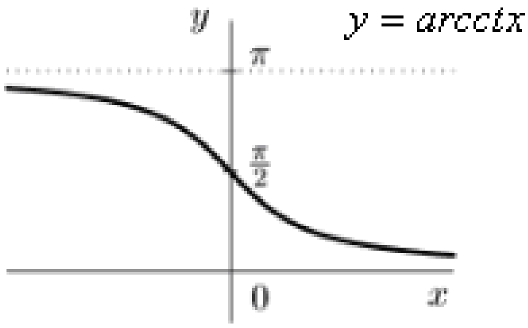


Рис. 54. Функция $y = \mathrm{arcctg}x$

Область определения арктангенса – все действительные числа, а множество значений – интервал $(0;\pi)$. Для арккотангенса справедливо равенство $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}x$.

Пример. Вычислить $\mathrm{arcctg}1 + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \mathrm{arcctg}0$.

Решение.

$$\mathrm{arcctg}1 + \mathrm{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \mathrm{arcctg}0 = \frac{\pi}{4} + \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{19\pi}{12}$.

2.6. Тригонометрические уравнения

Сначала рассмотрим уравнения вида

$$\sin x = a, \qquad \cos x = a,$$

где $|a| \leq 1$. При $|a| > 1$ эти уравнения, очевидно, не имеют решений.

Построим числовую окружность, т.е. окружность радиусом 1 с центром в начале координат и начальной точкой A (рис. 55). Отметим на окружности точку $M(\cos x;\ \sin x)$. Здесь x – угол, откладываемый от оси абсцисс против часовой стрелки; $\cos x$ – абсцисса точки M; $\sin x$ – ордината точки M. Угол x измеряется в радианах, т.е. его величина по абсолютному значению равна длине дуги AM числовой окружности.

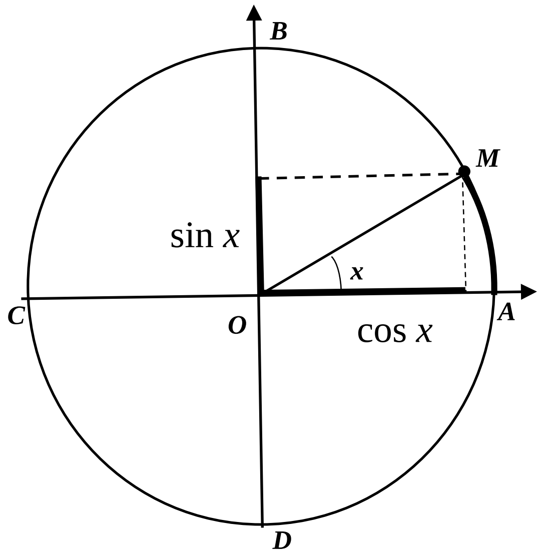


Рис. 55. Определение x, $\sin x$ и $\cos x$

Пример. Решить уравнение $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Решение. На промежутке $[0; 2\pi]$ ординате $\sin x = 1/2$ соответствуют углы $x = \pi/6$ и $x = 5\pi/6$. Другими словами, на промежутке $[0; 2\pi]$ данное уравнение имеет два решения. Будем называть их базовыми решениями (рис. 56).

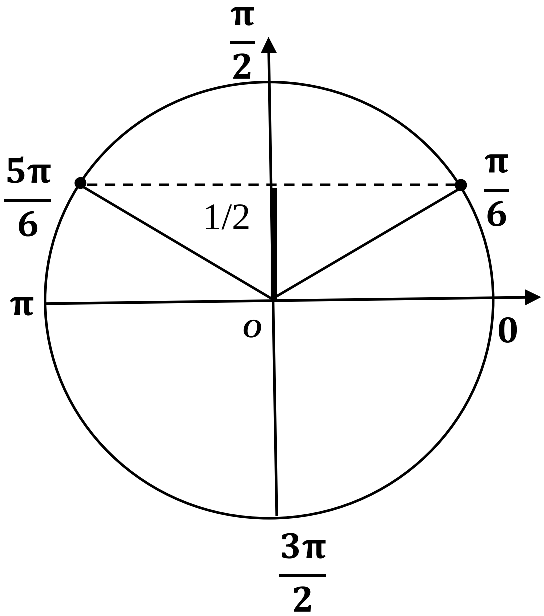


Рис. 56. Решение уравнения $\sin x = 1/2$ на промежутке $[0; 2\pi]$

Вследствие периодичности функции $y = \sin x$ общее решение уравнения на всей числовой оси можно представить в виде совокупности двух общих решений:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z; \;\; x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Нетрудно проверить, что полученную совокупность решений можно записать в виде одной формулы

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z;$$

Действительно, подставив в последнюю формулу значение $k = 2n$, получим первую формулу совокупности решений:

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

Подставив значение $k = 2n + 1$, получим вторую формулу совокупности решений:

$$x = (-1)^{2n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n = x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Формула корней уравнения

$$\sin x = a,$$

где $|a| \leq 1$, в общем случае имеет вид

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z.$$

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x = 0.$

Решение.

$\sqrt{2}\sin^2 x - \sin x = 0; \sqrt{2}\sin x \left(\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Первое из них имеет решение

$x = \pi n, n \in Z.$

Решение второго уравнения представим в виде

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi k, k \in Z.$$

Подставив значение

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

в последнюю формулу, получим

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z;\ x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Пример. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}.$

Решение. При построении базовых решений простейших тригонометрических уравнений можно выбрать любой промежуток, длина которого равна периоду рассматриваемой тригонометрической функции. В данном случае наиболее предпочтительным является промежуток $[-\pi;\ \pi]$. На промежутке $[-\pi;\ \pi]$ абсциссе $\cos x = 1/2$ соответствуют углы $x = \pi/3$ и $x = -\pi/3$. Другими словами, на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ данное уравнение имеет два решения (рис. 57).

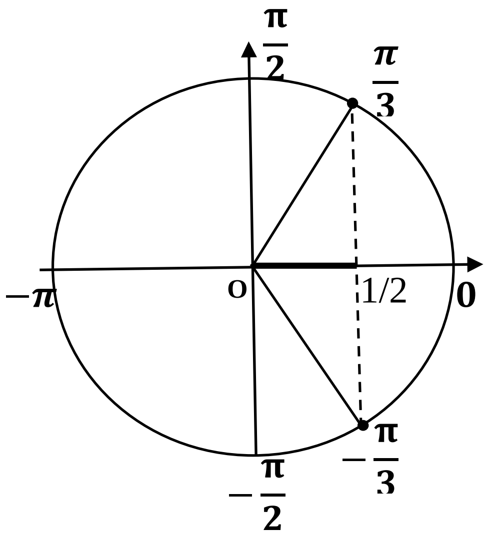


Рис. 57. Решение уравнения $\cos x = 1/2$ на промежутке $[-\pi;\ \pi]$

Вследствие периодичности функции $y = \cos x$ общее решение уравнения на всей числовой оси можно представить в виде совокупности двух общих решений:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \; x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Полученную совокупность решений можно записать в виде одной формулы:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Формула корней уравнения

$$\cos x = a,$$

где $|a| \leq 1$ в общем случае имеет вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z.$$

Пример. Решить уравнение $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$.

Решение.

$$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0; \;\; 2\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Первое из них имеет решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Решение второго уравнения представим в виде

$$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Подставив значение $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ в последнюю формулу, получим

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \; x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Теперь рассмотрим уравнения вида

$$\mathrm{tg}x = a; \ \ \mathrm{ctg}x = a.$$

Линией тангенсов называется касательная к числовой окружности, проведенная через начальную точку параллельно оси ординат (рис. 58).

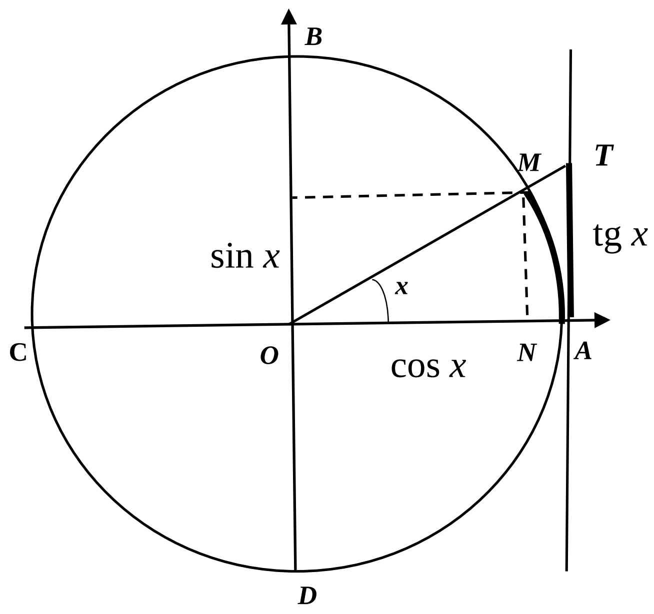


Рис. 58. Линия тангенсов

Из подобия треугольников ONM и OAT следует:

$$\frac{AT}{OA} = \frac{NM}{ON}; \ \ AT = \frac{NM}{ON} \cdot OA.$$

Но $OA = 1, NM = \sin x, ON = \cos x$, поэтому $AT = \mathrm{tg}x$. Таким образом, тангенс угла x равен ординате точки T, которая является точкой пересечения линии тангенсов и прямой OM.

Пример. Решить уравнение $\mathrm{tg}x = 1$.

Решение. На промежутке $[0; \pi]$ ординате $\mathrm{tg}x = 1$ соответствует один угол $x = \pi/4$, т.е. на заданном промежутке данное уравнение имеет только один корень.

Период тангенса равен π, следовательно, общее решение данного простейшего уравнения можно представить в виде (рис. 59)

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$$

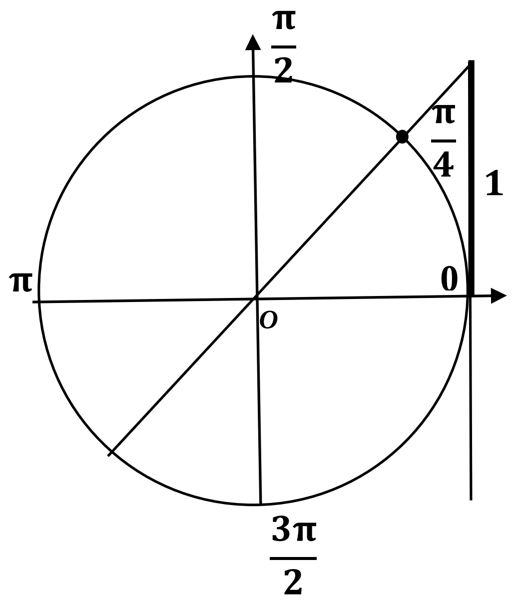


Рис. 59. Решение уравнения $\mathrm{tg}x = 1$ на промежутке $[0; \pi]$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$

Формула корней уравнения

$$\mathrm{tg}x = a$$

в общем случае имеет вид

$$x = \mathrm{arctg}a + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$$

Линией котангенсов называется касательная к числовой окружности, проведенная через точку *B* параллельно оси абсцисс (рис. 60).

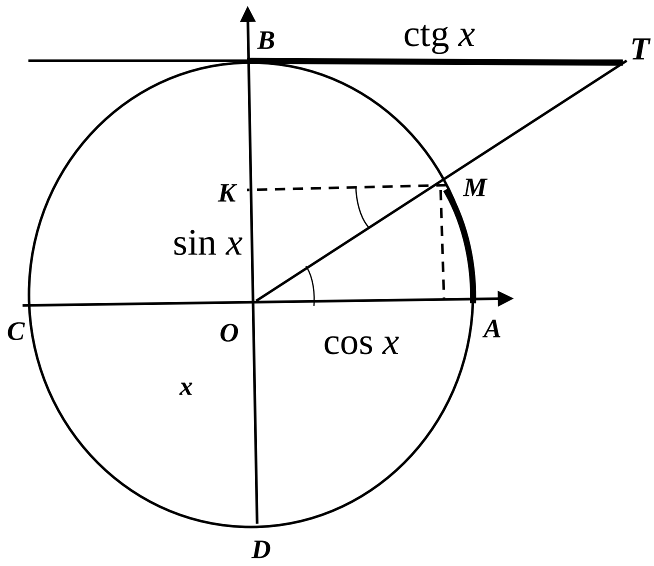


Рис. 60. Линия котангенсов

Из подобия треугольников OKM и OBT следует

$$\frac{BT}{OB} = \frac{KM}{OK}; \ \ BT = \frac{KM}{OK} \cdot OB.$$

Но $OB = 1, KM = \cos x, OK = \sin x$, поэтому $BT = \mathrm{ctg} x$. Таким образом, котангенс угла x равен абсциссе точки T, которая является точкой пересечения линии котангенсов и прямой OM.

Формула корней уравнения

$$\mathrm{ctg} x = a$$

имеет вид

$$x = \mathrm{arcctg} a + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$$

Отметим, если $a \neq 0$, то уравнение $\mathrm{ctg} x = a$ можно преобразовать к уравнению $\mathrm{tg} x = 1/a$.

Пример. Решить уравнение $\mathrm{ctg} x = \sqrt{3}$.

Решение. На промежутке $[0; \pi]$ ординате $\mathrm{ctg} x = \sqrt{3}$ соответствует один угол $x = \pi/6$, т.е. на заданном промежутке данное уравнение имеет только один корень (рис. 61).

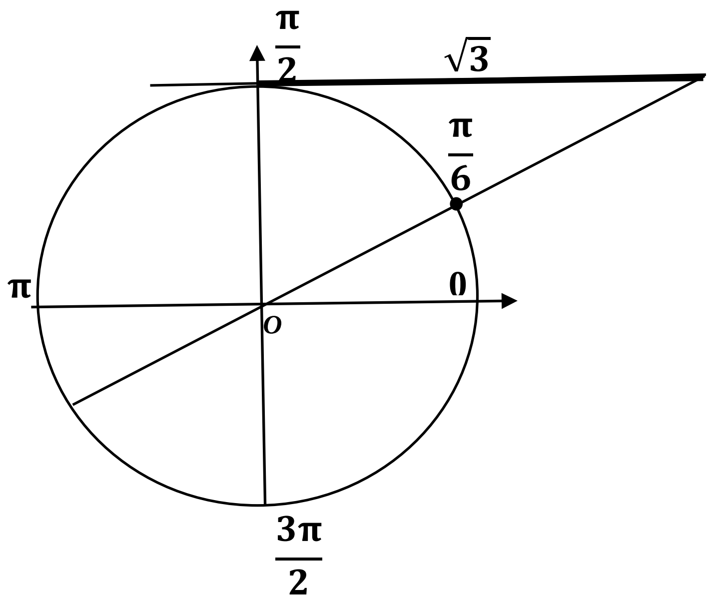


Рис. 61. Решение уравнения $\text{ctg}x = \sqrt{3}$ на промежутке $[0; \pi]$

Период котангенса равен π, следовательно, общее решение данного простейшего уравнения можно представить в виде

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathrm{Z}.$

2.7. Задачи повышенного уровня сложности

Приведем примеры решения тригонометрических уравнений с отбором корней на тригонометрической окружности.

Пример. А. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \sin x = 0.$

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие

отрезку $[1{,}5\pi; 2{,}5\pi]$.

Решение. А. Воспользуемся формулой приведения:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = -\sin 2x;$

$-\sin 2x + \sin x = 0.$

Воспользуемся формулой синуса двойного угла:

$-2\sin x\cdot\cos x+\sin x=0;$

$-2\sin x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0.$

Таким образом, получаем совокупность

$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

Следовательно,

$\left[\begin{array}{l}x=\pi n, n\in Z;\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$

Б. Отбор корней проведем при помощи тригонометрической окружности (рис. 62).

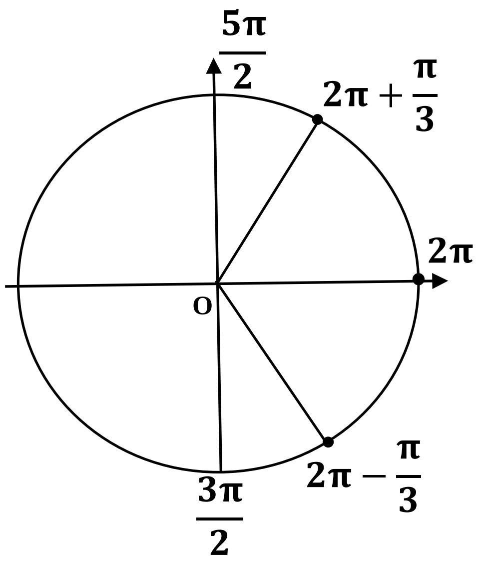


Рис. 62. Отбор корней на промежутке $[1{,}5\pi; 2{,}5\pi]$

Промежутку $[1{,}5\pi; 2{,}5\pi]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{3}$; 2π; $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: А. $\pi n, n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; Б. $\frac{5\pi}{3}$; 2π; $\frac{7\pi}{3}$.

Пример. А. Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin 2x=0.$

Б. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

Формула приведения:

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x.$

Формула синуса двойного угла:

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x.$

Подставив последние выражения в исходное уравнение, получим

$2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 0.$

Вынесем за скобки $2\sin x$:

$2\sin x\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right) = 0.$

Таким образом, получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0. \end{array}\right.$$

Решение первого уравнения совокупности:

$x = \pi n, n \in \mathrm{Z}.$

Второе уравнение преобразуем следующим образом:

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0;\ \sqrt{3}\sin x = \cos x;\ \sqrt{3}\mathrm{tg}x = 1; \mathrm{tg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Таким образом, решение второго уравнения имеет вид

$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathrm{Z}.$

Б. Отбор корней проведем при помощи тригонометрической окружности (рис. 63).

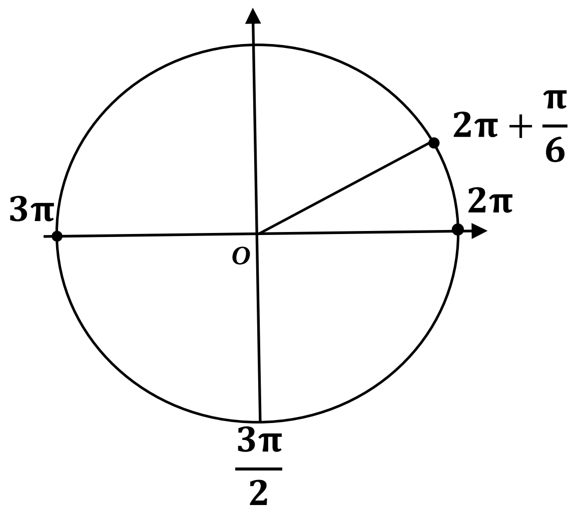


Рис. 63. Отбор корней на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

Промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ принадлежат корни 2π; $\frac{13\pi}{6}$; 3π.

Ответ: А. $\pi n, n \in$ Z; $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. Б. 2π; $\frac{13\pi}{6}$; 3π.

Пример. А. Решите уравнение $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. Введем новую переменную $t = \cos x$. Уравнение примет вид

$2t^3 - t^2 + 2t - 1 = 0$.

Разложим левую часть на множители:

$t^2(2t - 1) + (2t - 1) = 0;\ (2t - 1)(t^2 + 1) = 0$.

Таким образом, получаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 2t - 1 = 0, \\ t^2 + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности не имеет решений.

Решение первого уравнения:

$$t = \frac{1}{2}.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \text{Z}.$$

Б. Отбор корней проведем при помощи тригонометрической окружности (рис. 64).

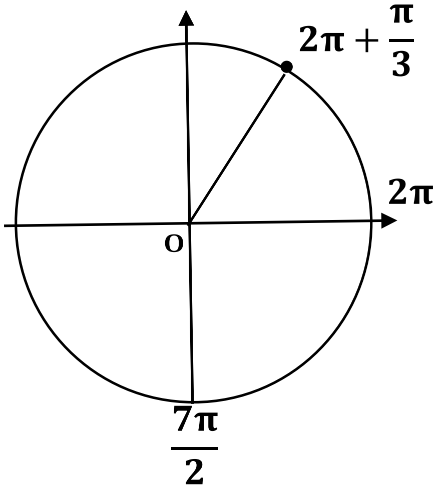


Рис. 64. Отбор корней на промежутке $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Таким образом, промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ принадлежит корень $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: А. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; Б. $\frac{7\pi}{3}$.

Пример. А. Решите уравнение $\sin 2x = 2\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + 1$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. А. Воспользуемся формулами

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x;\ \ \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x.$$

Исходное уравнение примет вид

$$2\sin x\cos x = 2\sin x - \cos x + 1.$$

Преобразуем полученное уравнение следующим образом:

$$2\sin x(\cos x - 1) + (\cos x - 1) = 0;\ (\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0.$$

Таким образом, получаем совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 1;\\ \sin x = -\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Решив полученную совокупность уравнений, получим

$$x = 2\pi n, x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z.$$

Б. Отбор корней проведем при помощи тригонометрической окружности (рис. 65).

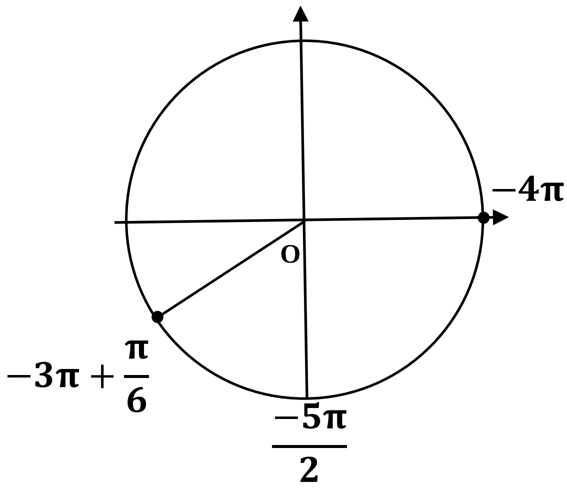


Рис. 65. Отбор корней на промежутке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

Ответ: А. $2\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n; -\frac{5\pi}{6}+\pi n; n \in Z;$ Б. $-4\pi;\ \ -\frac{17\pi}{6}.$

Пример. А. Решите уравнение: $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x.$

Б. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$

Решение. Синус суммы:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x).$$

Уравнение примет вид

$2\sin^2 x+\sin x+\cos x=\cos x.$

Преобразуем полученное уравнение:

$2\sin^2 x+\sin x=0;\ \sin x(2\sin x+1)=0.$

Таким образом, получим совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0;\\ \sin x=-\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Решив полученную совокупность, получим

$x = \pi n, x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in Z.$

Б. С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 66). Получим: $-2\pi;\ -\pi;\ -\frac{5\pi}{6}$.

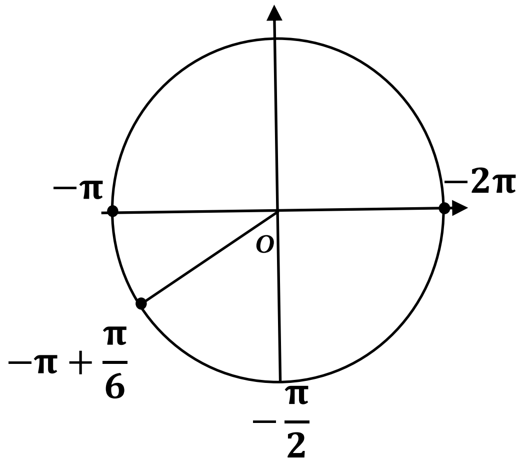


Рис. 66. Отбор корней на промежутке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

Ответ: А. $\pi n;\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ n \in Z$; Б. $-2\pi;\ -\pi;\ -\frac{5\pi}{6}$.

2.8. Упражнения

1. Известно, что α – острый угол. Найдите значение $\sin\alpha$ по заданному значению $\cos\alpha$:

а) $\cos\alpha = 0{,}6$; б) $\cos\alpha = 0{,}8$.

2. Упростите выражение:

а) $2(\mathrm{tg}^2\alpha + 1)\cos^2\alpha + 3$; б) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\left(1 + \dfrac{1}{\cos^4\alpha}\right) - 2$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sin^2 32° + \cos^2 58° + 1$; б) $\mathrm{tg}^2 13° \cdot \mathrm{ctg}^2 77° + 1$.

4. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 30° + 4\cos 60°$; б) $2\mathrm{tg}45° + \sqrt{3}\mathrm{ctg}30°$.

5. Известно, что угол α находится во второй четверти. Найдите значение $\cos\alpha$ по известному значению $\sin\alpha$:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$; б) $\sin\alpha = 0{,}8$.

6. Известно, что угол α находится в третьей четверти. Найдите значение $\cos\alpha$ по известному значению $\sin\alpha$:

а) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; б) $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

7. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2}\sin(-45°) + \sqrt{3}\cos(-30°)$; б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-30°) - 2\mathrm{ctg}(-45°)$.

8. Найдите значение выражения:

а) $3\sin150° + \sqrt{2}\sin135°$; б) $6\cos120° + \sqrt{2}\cos135°$.

9. Найдите значение выражения:

а) $4\sin390° + \sqrt{2}\cos405°$; б) $2\sqrt{3}\sin420° + 6\cos300°$.

10. Найдите значение выражения:

а) $\sin27°\cos63° + \cos27°\sin63°$; б) $\cos22°\cos68° - \sin22°\sin68°$.

11. Найдите значение выражения:

а) $\frac{6\sin27°\sin63°}{\cos36°}$; б) $\frac{2\cos^2 19° - 1}{\sin52°}$.

12. Вычислить $\cos2\alpha$ по известному $\sin\alpha$:

а) $\sin\alpha = 0{,}4$; б) $\sin\alpha = 0{,}8$.

13. Вычислить $\cos2\alpha$ по известному $\cos\alpha$:

а) $\cos\alpha = 0{,}8$; б) $\cos\alpha = 0{,}2$.

14. Вычислить $\sin^2\alpha$ по известному $\cos2\alpha$:

а) $\cos2\alpha = 0{,}4$; б) $\cos2\alpha = 0{,}2$.

15. Вычислить $\cos^2\alpha$ по известному $\cos2\alpha$:

а) $\cos2\alpha = 0{,}6$; б) $\cos2\alpha = 0{,}8$.

16. Упростить выражение:

а) $\sin(30° - \alpha)\sin(30° + \alpha)$; б) $\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha)$.

17. Преобразовать сумму в произведение:

а) $\sin 4\alpha + \sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha + \cos 6\alpha$.

18. Вычислить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по заданному значению $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

а) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

19. Вычислить значение выражения по заданному значению $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

а) $\dfrac{6\sin\alpha + 9\cos\alpha}{9\sin\alpha + 5\cos\alpha}, \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1/2$; б) $\dfrac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{3\sin\alpha - \cos\alpha}, \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

20. Вычислить значение выражения по заданному значению $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

а) $7\operatorname{tg}(45° - \alpha), \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1/2$; б) $\sqrt{2}\sin(45° - \alpha), \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 1/2$.

21. Перевести угол α из градусной в радианную меру:

а) $\alpha = 10°$; б) $\alpha = 40°$.

22. Вычислить:

а) $2\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi}{3} + 4\sin\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$; б) $\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}$.

23. Вычислить:

а) $4\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3\arcsin\dfrac{1}{2}$; б) $4\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 3\arccos\dfrac{1}{2}$.

24. Вычислить:

а) $4\operatorname{arctg}1 + 6\operatorname{arctg}(\sqrt{3})$; б) $8\operatorname{arcctg}1 + 6\operatorname{arcctg}(\sqrt{3})$.

25. Решить уравнения:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x = 0$; б) $4\cos^2 x - 6\cos x = 0$.

26. А. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \sin x = 0$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: А. $\pi n, n \in Z$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. Б. $-\frac{4\pi}{3}; -\pi;\ -\frac{2\pi}{3}$.

27. А. Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: А. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. Б. $-\frac{15\pi}{4}; -\frac{7\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}$.

28. А. Решить уравнение $2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: А. $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$. Б. $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$.

29. А. Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: А. $\pi + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in Z$. Б. $-3\pi;\ -\frac{5\pi}{3}$.

30. А. Решите уравнение: $\sqrt{6}\sin^2 x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Б. Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: А. $\pi n;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n \in Z$. Б. $3\pi;\ 4\pi;\ \frac{17\pi}{4}$.

3. МНОГОЧЛЕНЫ

3.1. Действия с многочленами. Теорема Безу

Многочлен степени n относительно переменной x в общем случае имеет вид

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где n – натуральное число, а $a_0, a_1, \ldots a_n$ – действительные числа, коэффициенты многочлена, причем $a_n \neq 0$. Одночлен $a_n x^n$ называют старшим членом многочлена, коэффициент a_n – коэффициентом при старшем члене. Если $a_n = 1$, то многочлен называют приведенным.

Многочлены можно складывать, вычитать, умножать, возводить в натуральную степень. В результате этих действия снова получается многочлен. В некоторых случаях выполнимо и деление многочленов.

Многочлен $P(x)$ делится на $S(x)$, если существует такой многочлен $Q(x)$, что выполняется равенство

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x).$$

Здесь $P(x)$ – делимое; $S(x)$ – делитель; $Q(x)$ – частное. Например, многочлен $x^2 - 3x + 2$ делится на многочлен $x - 1$, поскольку

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Здесь $(x - 1)$ – делитель; $(x - 2)$ – частное многочлена $x^2 - 3x + 2$.

Как и для натуральных чисел, для многочленов рассматривают деление с остатком. Справедливо следующее утверждение: для любых двух многочленов ненулевой степени $P(x)$ и $S(x)$ существует пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ такая, что выполняется тождество

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x).$$

Здесь $Q(x)$ – неполное частное; $R(x)$ – остаток. Степень остатка должна быть меньше степени делителя $S(x)$. Например, многочлен $x^2 - 3x + 5$ делится на многочлен $x - 1$ с остатком, поскольку

$$x^2 - 3x + 5 = (x - 1)(x - 2) + 3.$$

Здесь $(x-2)$ – неполное частное многочлена x^2-3x+2, а остаток от деления равен 3.

Для деления многочленов можно применять правило деления уголком, похожее на правило деления натуральных чисел:

1. Делят старший член делимого на старший член делителя. Получают старший член частного.

2. Старший член частного умножают на делитель и вычитают это произведение из делимого. Получают остаток от деления.

3. Если степень остатка меньше степени делителя, процесс деления прекращают. В противном случае остаток рассматривают как делимое и повторяют процедуру деления с первого шага.

Пример. Разделить многочлен

$$x^3-x^2-x-2$$

на многочлен

$$x^2+x+1.$$

Решение.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & - & x^2 & - & x & - & 2 & x^2+x+1 \\
\cline{8-8}
x^3 & + & x^2 & + & x & & & x-2 \\
\hline
 & - & 2x^2 & - & 2x & - & 2 & \\
 & - & 2x^2 & - & 2x & - & 2 & \\
\cline{2-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Остаток равен 0, следовательно, многочлен можно представить в виде

$$x^3-x^2-x-2=(x^2+x+1)(x-2).$$

Ответ: $Q(x)=x-2$; $R(x)=0$.

Пример. Разделить многочлен

$$2x^2-x-3$$

на двучлен

$$x-2.$$

Решение.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^2 & - & x & - & 3 & x - 2 \\ \cline{1-3} \cline{6-6}
2x^2 & - & 4x & & & 2x + 3 \\ \cline{1-5}
 & & 3x & - & 3 & \\
 & & 3x & - & 6 & \\ \cline{1-5}
 & & & & 3 &
\end{array}
$$

Остаток равен 3, следовательно, многочлен можно представить в виде

$$2x^2 - x - 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3.$$

Ответ: $Q(x) = 2x + 3$; $R(x) = 3$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ ненулевой степени на двучлен $x - a$ равен $P(a)$, т.е. значению многочлена при $x = a$.

Например, остаток от деления многочлена $2x^2 - x - 3$ на двучлен $x - 2$ можно найти сразу, минуя процедуру деления многочленов:

$$P(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 - 3 = 3.$$

Пример. При каких значениях параметра a многочлен

$$P(x) = x^6 - x^5 + x^2 - ax - 16$$

делится на двучлен $x - 2$ без остатка?

Решение. По теореме Безу остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - 2$ равен

$$P(2) = 2^6 - 2^5 + 2^2 - 2a - 16 = 20 - 2a.$$

По условиям задачи остаток должен быть равен нулю:

$$20 - 2a = 0; \;\; a = 10.$$

Ответ: $a = 10$.

3.2. Схема Горнера

Для деления многочленов на двучлен $x - a$ можно использовать ***схему Горнера***. Поясним суть этой схемы на примере многочлена третьей степени.

Пусть $P(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. Разделив $P(x)$ на двучлен $x - a$, получим

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Здесь $Q(x)$ – многочлен второй степени

$$Q(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

коэффициенты которого нам пока неизвестны. Найдем эти коэффициенты.

Имеем:

$$b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = (x - a)(c_2x^2 + c_1x + c_0) + R.$$

В правой части равенства раскроем скобки и соберем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = c_2x^3 + (c_1 - c_2a)x^2 + (c_0 - c_1a)x + R - c_0a.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим

$b_3 = c_2$; $b_2 = c_1 - c_2a$; $b_1 = c_0 - c_1a$; $b_0 = R - c_0a$.

Из этих равенств получим формулы для нахождения коэффициентов многочлена $Q(x)$:

$c_2 = b_3$; $c_1 = b_2 + c_2a$; $c_0 = b_1 + c_1a$; $R = b_0 + c_0a$.

Эти формулы удобно представить в следующем виде:

	b_3	b_2	b_1	b_0
a	$c_2 = b_3$	$c_1 = b_2 + c_2a$	$c_0 = b_1 + c_1a$	$R = b_0 + c_0a$

Первый столбец первой строки остается пустым. В остальных столбцах записываются коэффициенты делимого – заданного многочлена $P(x)$.

В первом столбце второй строки записывается число a. В остальных столбцах второй строки сначала записываются коэффициенты частного $Q(x)$, а в последнем столбце – остаток R.

Пример. Разделить многочлен $x^3 - x^2 - x + 2$ на двучлен $x - 2$ по схеме Горнера.

Решение. Результаты деления представлены в табличном виде.

	1	-1	-1	2
2	1	$-1+1\cdot 2=1$	$-1+1\cdot 2=1$	$2+1\cdot 2=4$

Таким образом, частное и остаток соответственно равны:

$$Q(x) = x^2 + x + 1;\ \ R = 4.$$

Значит,

$$x^3 - x^2 - x + 2 = (x-2)(x^2 + x + 1) + 4.$$

Ответ: $Q(x) = x^2 + x + 1;\ \ R = 4.$

3.3. Разложение многочленов

Представление многочлена в виде произведения многочленов называется *разложением многочлена на множители*. Эта операция, например, необходима при решении алгебраических уравнений степени выше двух.

Процесс разложения многочлена на множители представляет собой, как правило, комбинацию следующих приемов:

1) вынесение общего множителя за скобки;

2) способ группировки;

3) использование формул сокращенного умножения;

4) разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

Пример. Разложить на множители многочлен $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

Решение. Сначала выполним группировку

$$(x^3 - 3x^2) + (-4x + 12).$$

В первой группе вынесем за скобки общий множитель x^2, во второй группе – множитель (–4):

$$x^2(x - 3) - 4(x - 3).$$

Вынесем общий множитель $(x - 3)$ за скобки:

$$(x - 3)(x^2 - 4).$$

Применив формул разности квадратов к сомножителю $(x^2 - 4)$, получим

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$$

Итак,

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 3)(x - 2)(x + 2).$$

Ответ: $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$.

Пример. Разложить на множители многочлен $x^4 - 5x^2 + 4$.

Решение. Введем новую переменную $t = x^2$. Получим квадратный трехчлен

$$t^2 - 5t + 4.$$

Найдем корни трехчлена:

$$t_1 = 1;\ \ t_2 = 4.$$

Разложим квадратный трехчлен по корням:

$$(t - 1)(t - 4).$$

Выполним обратную замену:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Применив формулу разности квадратов к каждому сомножителю, получим

$$(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Итак,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

Ответ: $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

Если число a является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен можно представить в виде

$$P(x) = (x-a)Q(x).$$

Это утверждение дает еще один прием разложения многочлена на множители. Этот прием обычно используют в сочетании со следующей теоремой о многочлене с целыми коэффициентами.

Теорема. Пусть все коэффициенты многочлена $P(x)$ – целые числа. Если целое число a является корнем многочлена $P(x)$, то a – делитель свободного члена многочлена $P(x)$.

Пример. Разложить на множители $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Решение. Свободный член многочлена равен 6. Целочисленные корни многочлена, согласно теореме о многочлене с целыми коэффициентами, следует искать среди делителей свободного члена:

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6.$$

Будем поочередно подставлять возможные целочисленные значения корня в многочлен $P(x)$:

$$P(-1) = 8 \neq 0;\ P(1) = 0.$$

Таким образом, $x = 1$ – корень многочлена, поэтому многочлен можно представить в виде

$$P(x) = (x-1)Q(x).$$

Многочлен $Q(x)$ найдем по схеме Горнера.

	1	-2	-5	6
1	1	$-2+1\cdot 1=-1$	$-5-1\cdot 1=-6$	$6-6\cdot 1=0$

Таким образом, частное и остаток соответственно равны:

$$Q(x) = x^2 - x - 6;\ R = 0.$$

Разложим квадратный трехчлен $Q(x)$ по корням. Корни квадратного трехчлена найдем по теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_1 x_2 = -6.$$

Подбором находим корни:

$$x_1 = -3;\ x_2 = 2.$$

Следовательно,

$$Q(x) = (x + 3)(x - 2).$$

Таким образом,

$$P(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2).$$

Ответ: $(x - 1)(x + 3)(x - 2)$.

3.4. Уравнения высших степеней

Рассмотрим уравнение вида

$$P(x) = 0,$$

где $P(x)$ – многочлен, степень которого выше двух. Существует два основных метода решения таких уравнений:

– метод разложения на множители;

– метод введения новой переменной.

Пример. Решите уравнение $x^4 = (4x - 5)^2$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$x^4 - (4x - 5)^2 = 0,$$

$$(x^2)^2 - (4x - 5)^2 = 0.$$

Применив в левой части последнего уравнения формулу разности квадратов, получим

$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x - 5) = 0.$$

Таким образом, получаем совокупность уравнений

$$x^2 - 4x + 5 = 0,$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Дискриминант первого уравнения меньше нуля, т.е. первое уравнений не имеет действительных корней.

Второе уравнение имеет корни

$$x_1 = -5;\ \ x_2 = 1.$$

Ответ: –5; 1.

Пример. Решить уравнение

$$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 24.$$

Решение. Введем новую переменную $t = x^2 - 3x$. Уравнение принимает вид

$$t(t + 2) = 24.$$

Преобразуем уравнение следующими образом:

$$t^2 + 2t - 24 = 0.$$

Корнями этого квадратного уравнения служат числа

$$t_1 = -6 \text{ и } t_2 = 4.$$

Выполнив обратную замену, получаем два квадратных уравнения:

$$x^2 - 3x = -6 \text{ и } x^2 - 3x = 4.$$

Первое уравнение не имеет действительных корней; корнями второго уравнения служат числа

$$x_1 = -1;\ \ x_2 = 4.$$

Ответ: –1; –4.

3.5. Задачи повышенного уровня сложности

Пример. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + a)^2 = 2x^4 + 2(x + a)^2$$

имеет единственный корень.

Решение. Выполним преобразования:

$$x^4 + 2x(x+a) + (x+a)^2 = 2x^4 + 2(x+a)^2,$$
$$-x^4 + 2x(x+a) - (x+a)^2 = 0,$$
$$-(x^4 - 2x(x+a) + (x+a)^2) = 0,$$
$$-\left(x^2 - (x+a)\right)^2 = 0,$$
$$x^2 - x - a = 0.$$

Квадратное уравнение имеет единственный корень, если дискриминант равен нулю:

$$1 + 4a = 0;\ \ a = -\frac{1}{4} = -0{,}25.$$

Ответ: –0,25.

Пример. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + 2x + 2a^2 + 9)^2 = 8a^2(x^2 + 2x + 9)$$

не имеет корней.

Решение. Введем новую переменную $t = x^2 + 2x + 9$. Исходное уравнение примет вид

$$(t + 2a^2)^2 = 8a^2 t.$$

Выполним преобразования:

$$t^2 + 4a^2 t + (2a^2)^2 = 8a^2 t,$$
$$t^2 - 4a^2 t + (2a^2)^2 = 0,$$
$$(t - 2a^2)^2 = 0,$$
$$t - 2a^2 = 0.$$

Выполнив обратную замену, получим квадратное уравнение

$$x^2 + 2x + 9 - 2a^2 = 0.$$

Уравнение не имеет действительных корней, если дискриминант уравнения меньше нуля, т.е.

$$4 - 4(9 - 2a^2) < 0.$$

Выполним преобразования:

$$1 - 9 + 2a^2 < 0, 2a^2 < 8;\ \ a^2 < 4.$$

Решив последнее неравенство, получим

$$-2 < a < 2.$$

Ответ: (–2; 2).

Пример. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6 + (a - 2x)^3 + 9x^2 + 3a = 6x$$

не имеет корней.

Решение. Перенесем второе и четвертое слагаемые из левой части в правую часть:

$$27x^6 + 9x^2 = (2x - a)^3 + 6x - 3a.$$

Представим уравнение в виде

$$(3x^2)^3 + 3 \cdot (3x^2) = (2x - a)^3 + 3(2x - a).$$

Исследуем левую часть уравнения. Пусть $t = 3x^2$, тогда левая часть уравнения примет вид $t^3 + 3t$.

Исследуем правую часть уравнения. Пусть $t = 2x - a$, тогда правая уравнения примет вид $t^3 + 3t$.

Таким образом, выражения в левой и правой частях уравнения вычисляются по одному и тому же правилу, то есть задана одна и та же функция $f(t) = t^3 + 3t$.

Следовательно, уравнение можно представить в виде

$$f(3x^2) = f(2x - a).$$

Функция $f(t)$ – монотонно возрастающая, так как представляет собой сумму монотонно возрастающих функций, следовательно,

$$3x^2 = 2x - a.$$

Таким образом, получаем квадратное уравнение

$$3x^2 - 2x + a = 0.$$

Квадратное уравнение не имеет корней, если его дискриминант меньше нуля:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a = 4 - 12a < 0.$$

Решив неравенство, найдем

$$a > \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

3.6. Упражнения

1. Найдите частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$, $Q(x) = x^2 - 3x - 1$;

б) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$, $Q(x) = x^2 + x - 4$;

в) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 1$, $Q(x) = x^2 + 2x - 1$;

г) $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1$, $Q(x) = 2x^2 + 2x + 1$.

2. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$:

а) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, $a = 1$;

б) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$, $a = -1$;

в) $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 7$, $a = 2$;

г) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, $a = -2$.

3. Найдите частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ по схеме Горнера:

а) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6$, $a = 3$;

б) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$, $a = -3$;

в) $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 4$, $a = 4$;

г) $P(x) = x^3 + 4x^2 + x + 8$, $a = -4$.

4. Разложить многочлен $P(x)$ на множители

а) $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$;

б) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$;

в) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$;

г) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$.

5. При каких значениях параметра a многочлен

$$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - ax - 15$$

делится на двучлен $(x - 3)$ без остатка?

6. Решить уравнения:

а) $x^4 - (x-2)^2 = 0$; б) $x^4 = (2x-3)^2$.

7. Решить уравнения:

а) $(x^2 + 4x + 4)(x^2 + 4x + 6) = 3$;

б) $(x^2 + 1{,}5x)(x^2 + 1{,}5x + 5) = 6$.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + 2x + 2a)^2 = 5x^4 + 5(x+a)^2$$

имеет единственный корень.

Ответ: –0,125.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + 4x + a^2 + 13)^2 = 4a^2(x^2 + 4x + 13)$$

не имеет корней.

Ответ: (–3; 3).

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x+a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$.

4. СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Степенными функциями называются функции вида

$$y = x^r,$$

где r – это любое действительное число. Рассмотрим некоторые частные случаи этой функции.

4.1. Степенная функция с целым показателем

Сначала рассмотрим случай, когда показатель степени r является натуральным числом, т.е. $r = n$, где $n \in N$.

Если $n = 1$, получаем простейшую линейную функцию $y = x$, графиком которой служит прямая.

Если $n = 2$, получаем функцию $y = x^2$, графиком которой служит парабола. Область определения – вся числовая прямая. Множество значений этой функции – луч $[0; +\infty)$. Функция является четной, т.е. график этой функции симметричен относительно оси ординат.

При $n = 3$ получаем функции $y = x^3$, график которой называется кубической параболой. Область определения – вся числовая прямая. Множеством значений также служит вся числовая прямая. Функция монотонно возрастает на всей числовой прямой. Функция является нечетной, т.е. график этой функции симметричен относительно начала координат.

Свойства степенной функции у $= x^n$ в случае четных n совпадают со свойствами параболы ($n = 2$), а в случае нечетных n – со свойствами кубической параболы ($n = 3$) (рис. 67).

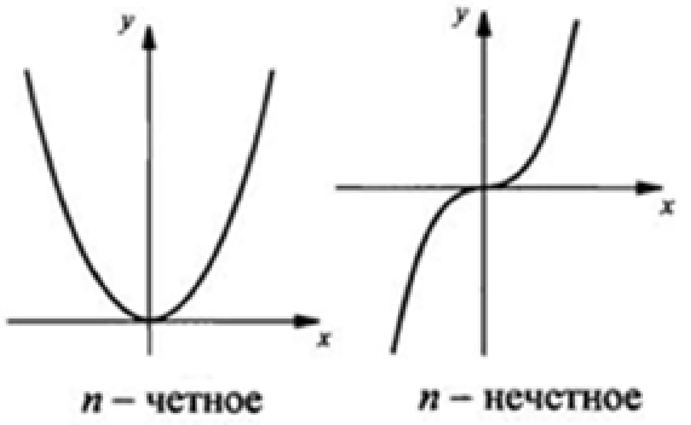


Рис. 67. Степенные функции с положительными показателями степени

Пример. Принадлежит ли точка с координатами (6; 212) графику функции $f(x) = x^3 - 4$?

Решение. Подставив значение $x = 6$ в формулу, получим

$$f(6) = 6^3 - 4 = 216 - 4 = 212.$$

Таким образом, точка с координатами (6; 212) принадлежит графику функции.

Ответ: точка с координатами (6; 212) принадлежит графику функции.

Пример. Чему равно n, если график функции $y = (x-3)^n - 2$ проходит через точку с координатами $(5; 14)$?

Решение. Подставив координаты точки в формулу, получим

$$(5-3)^n - 2 = 14;\ 2^n = 16;\ 2^n = 2^4;\ \ n = 4.$$

Ответ: 4.

Рассмотрим случай, когда показатель степени r является отрицательным целым числом, т.е. $r = -n$, где $n \in N$. По определению степени с отрицательным показателем степени имеем

$$\text{y} = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad x \neq 0.$$

Если n – четное число, то соответствующая функция будет четной. Область определения функции $D(y) = (-\infty; 0;) \cup (0; +\infty)$. Множество значений функции $E(y) = (0; +\infty)$.

Если n – нечетное число, то соответствующая функция будет нечетной (рис. 68). Область определения функции $D(y) = (-\infty; 0;) \cup (0; +\infty)$. Множество значений функции $E(y) = (-\infty; 0;) \cup (0; +\infty)$.

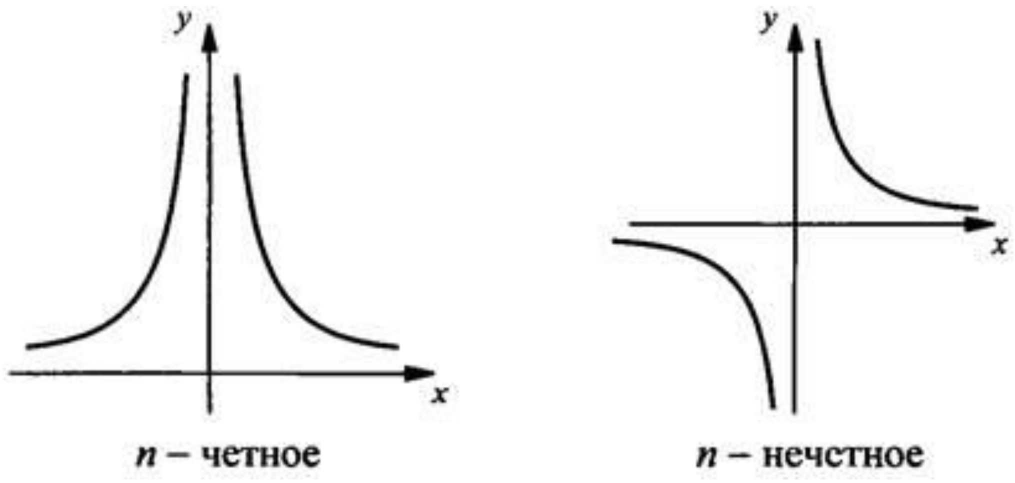


Рис. 68. Степенные функции с отрицательными показателями степени

Пример. Принадлежит ли точка с координатами (0,5; 13) графику функции $f(x) = x^{-4} - 3$?

Решение. Подставив значение $x = 0{,}5$ в формулу, получим

$$f(6) = 0{,}5^{-4} - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - 3 = 2^4 - 3 = 16 - 3 = 13.$$

Таким образом, точка с координатами (0,5; 13) принадлежит графику функции.

Ответ: точка с координатами (0,5; 13) принадлежит графику функции.

При $r = 0$ имеем функцию $y = x^0 = 1$ $(x \neq 0)$. Графиком такой функции является горизонтальная прямая $y = 1$ с выколотой точкой $x = 0$.

4.2. Функция корня *n*-й степени

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[n]{x}$ для неотрицательных значений аргумента x. Она является обратной для функции $y = x^n$. Поэтому график функции $y = \sqrt[n]{x}$ симметричен графику функции $y = x^n$ относительно прямой $y = x$ для $x \geq 0$ (рис. 69).

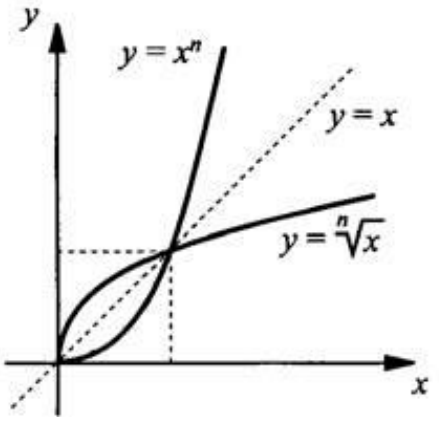


Рис. 69. Функции $y = \sqrt[n]{x}$ и $y = x^n$

Основные свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$:

- область определения $D(y) = [0;\ +\infty)$;
- множество значений $E(y) = [0;\ +\infty)$;
- функция общего вида (ни четная, ни нечетная);
- монотонно возрастает на своей области определения.

Пример. Построить график функции $y = \sqrt[4]{x-1} + 2$.

Решение. Чтобы построить график данной функции надо:

1. Построить график функции $y = \sqrt[4]{x}$.

2. Сдвинуть график функции $y = \sqrt[4]{x}$ на единицу вправо. В результате поучаем график функции $y = \sqrt[4]{x-1}$.

3. Сдвинуть график функции $y = \sqrt[4]{x-1}$ на две единицы вверх. В результате получаем требуемый график функции $y = \sqrt[4]{x-1} + 2$ (рис. 70).

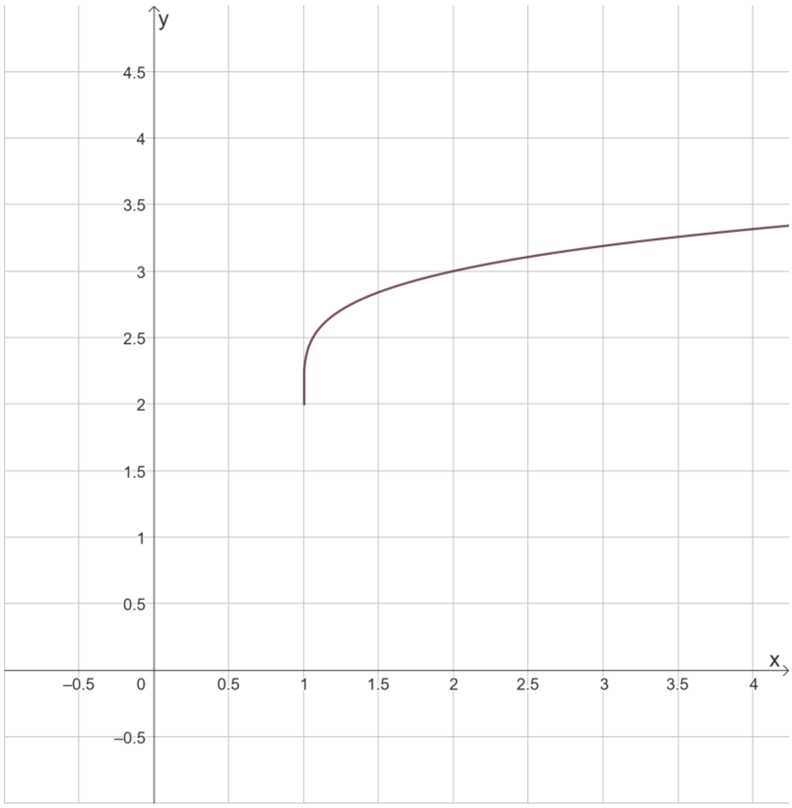


Рис. 70. График функции $y = \sqrt[4]{x-1} + 2$

Пример. Решить графически уравнение $\sqrt[4]{x} = 2 - x$.

Решение. Построим графики функций $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = 2 - x$. Эти графики пересекаются в единственной точке с абсциссой $x = 1$ (рис. 71).

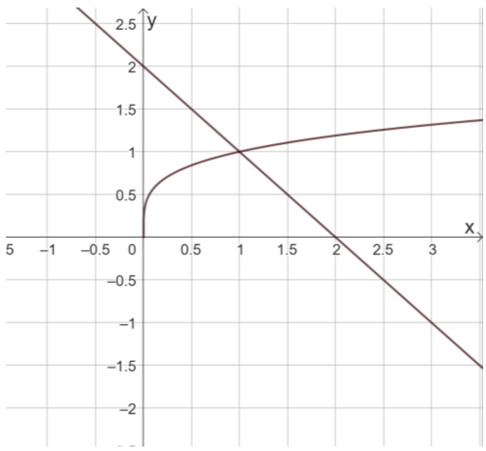


Рис. 71. График функции $y = \sqrt[4]{x-1} + 2$

Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пусть показатель корня является нечетным числом. В этом случае, как известно, можно извлекать корни из отрицательных чисел, т.е. областью определения функции $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетных значениях n служит вся числовая прямая.

Основные свойства функции $y = \sqrt[n]{x}$ (n – нечетное число) (рис. 72):

- область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- множество значений $E(y) = (-\infty; +\infty)$;
- функция нечетная;
- монотонно возрастает на своей области определения.

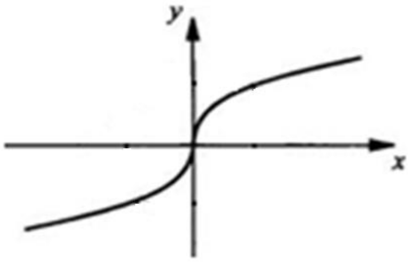


Рис. 72. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ с нечетным показателем степени

Пример. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x-1} + 2$.

Решение. Чтобы построить график данной функции, надо:

1. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x}$.

2. Сдвинуть график функции $y = \sqrt[3]{x}$ на единицу вправо. В результате поучаем график функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

3. Сдвинуть график функции $y = \sqrt[3]{x-1}$ на две единицы вверх. В результате получаем требуемый график функции $y = \sqrt[3]{x-1} + 2$ (рис. 73).

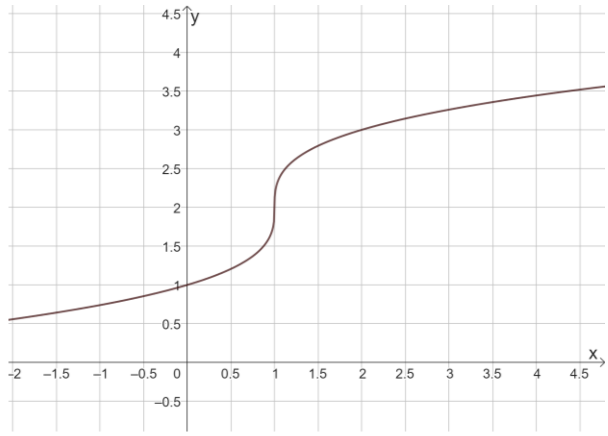


Рис. 73. График функции $y = \sqrt[3]{x-1} + 2$

4.3. Степенная функция с рациональным показателем

Степенная функция с рациональным показателем имеет вид

$$y = x^{\frac{m}{n}},$$

где m– целое число, а n – натуральное число ($n > 1$). Свойства этой функции зависят от показателя степени $\frac{m}{n}$.

Пусть показатель степени $\frac{m}{n}$ – неправильная положительная дробь, т.е.

$$\frac{m}{n} > 1.$$

Основные свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ (рис. 74):

- область определения $D(y) = [0; +\infty)$;
- множество значений $E(y) = [0; +\infty)$;
- функция общего вида (ни четная, ни нечетная);
- монотонно возрастает на своей области определения.

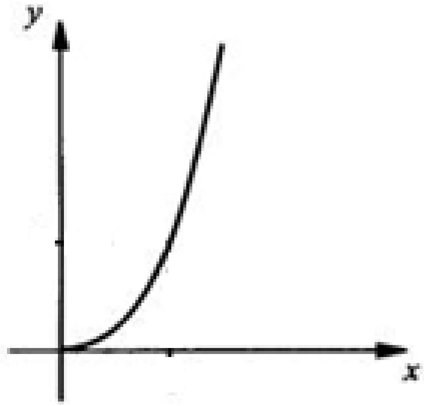


Рис. 74. Функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ – неправильная дробь)

Пример. Построить график функции $y = x^{1,5} + 2$.

Решение. Чтобы построить график данной функции, надо:

1. Построить график функции $y = x^{1,5}$.

2. Сдвинуть график функции $y = x^{1,5}$ на две единицы вверх. В результате получаем требуемый график функции $y = x^{1,5} + 2$ (рис. 75).

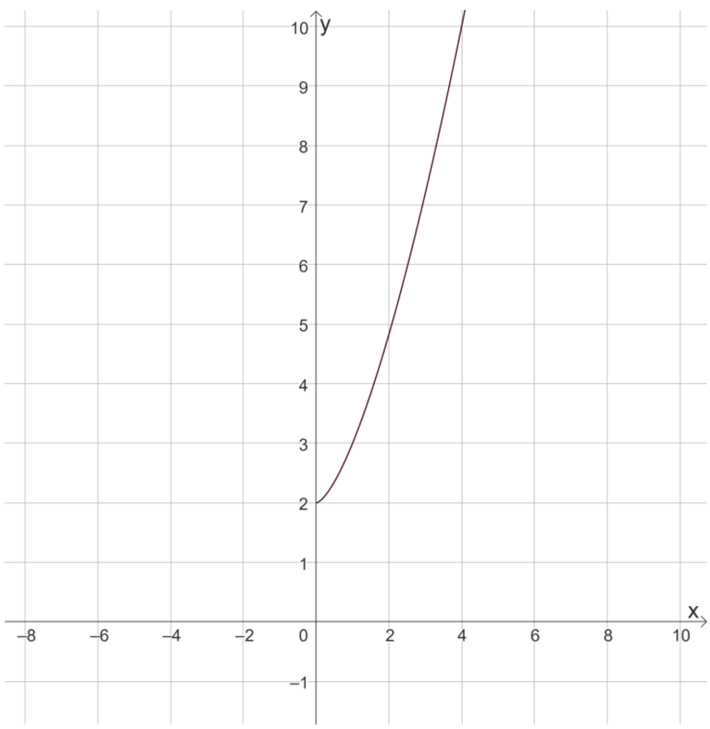


Рис. 75. Функция $y = x^{1,5} + 2$

Пусть показатель степени $\frac{m}{n}$ – правильная положительная дробь, т.е.

$$0 < \frac{m}{n} < 1.$$

Основные свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ (рис. 76):

- область определения $D(y) = [0; +\infty)$;
- множество значений $E(y) = [0; +\infty)$;
- функция общего вида (ни четная, ни нечетная);
- монотонно возрастает на своей области определения.

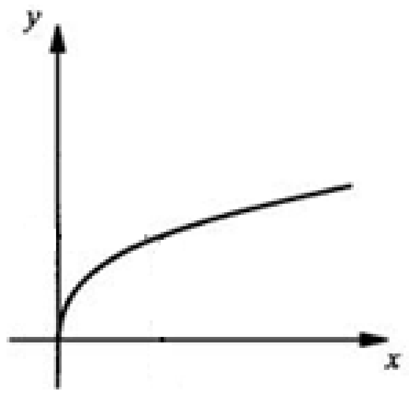


Рис. 76. Функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ – правильная дробь)

Пример. Построить график функции $y = x^{\frac{2}{3}} + 2$.

Решение. Чтобы построить график данной функции, надо:

1. Построить график функции $y = x^{2/3}$.

2. Сдвинуть график функции $y = x^{2/3}$ на две единицы вверх. В результате получаем требуемый график функции $y = x^{2/3} + 2$ (рис. 77).

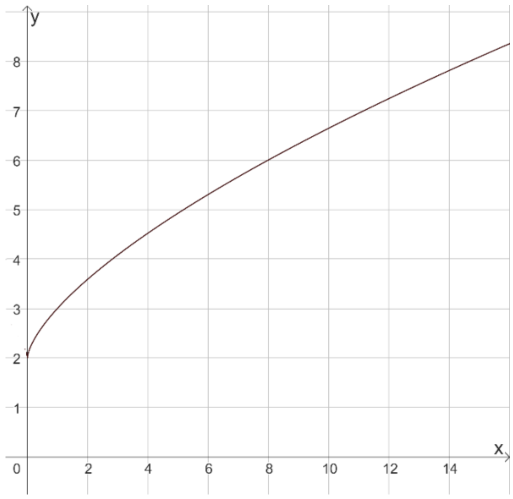


Рис. 77. График функции $y = x^{2/3} + 2$

Пусть показатель степени $\frac{m}{n}$ – отрицательная дробь, т.е.

$$\frac{m}{n} < 0.$$

Основные свойства функции $y = x^{\frac{m}{n}}$ (рис. 78):

- область определения $D(y) = (0; +\infty)$;
- множество значений $E(y) = (0; +\infty)$;
- функция общего вида (ни четная, ни нечетная);
- монотонно убывает на своей области определения.

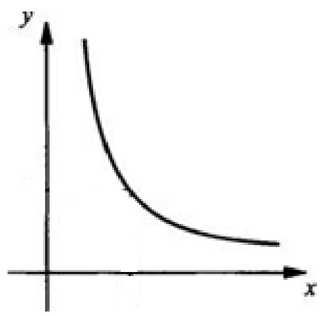


Рис. 78. Функция $y = x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ – отрицательная дробь)

Пример. Построить график функции $y = (x + 1)^{-1,5}$.

Решение. Чтобы построить график данной функции, надо:

1. Построить график функции $y = x^{1,5}$.

2. Сдвинуть график функции $y = x^{-1,5}$ на единицу влево. В результате получаем требуемый график функции $y = (x+1)^{-1,5}$ (рис. 79).

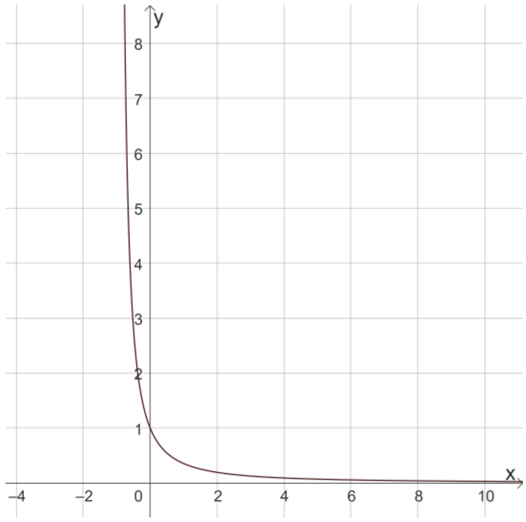


Рис. 79. График функции $y = (x+1)^{-1,5}$

4.4. Упражнения

1. Принадлежит ли точка с координатами $(x_0; y_0)$ графику функции $y = f(x)$?

а) $f(x) = -(x+6)^3, (-8; -8)$; б) $f(x) = (x-2)^3 + 200, (-8; -800)$.

2. Чему равно n, если график функции $y = f(x)$ проходит через точку с координатами $(x_0; y_0)$?

а) $f(x) = (x+2)^n - 1, (2; 255)$; б) $f(x) = (x-2)^n + 1, (4; 9)$.

3. Принадлежит ли точка с координатами $(x_0; y_0)$ графику функции $y = f(x)$?

а) $f(x) = x^{-3} + 6, (-0{,}5; -2)$; б) $f(x) = x^{-3} - 40, (0{,}25; 24)$.

4. Вычислить значение $f(x)$ при $x = x_0$.

а) $f(x) = \sqrt[5]{2x+4} - 1, x_0 = 14$; б) $f(x) = \sqrt[3]{3x-6} - 4, x_0 = 11$.

5. Построить график функции $y = f(x)$.

а) $f(x) = \sqrt[4]{x+1} + 3$; б) $f(x) = \sqrt[4]{x-1} - 3$.

6. Решить графически уравнение.

а) $\sqrt[4]{x-1}+x=3$; б) $\sqrt[4]{x+3}+x+1=0$.

7. Построить график функции $y=f(x)$.

а) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+2$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}-2$.

8. Вычислить значение $f(x)$ при $x=x_0$.

а) $f(x)=(2x-4)^{2/3}, x_0=6$; б) $f(x)=(4x+8)^{2/5}, x_0=6$.

9. Вычислить значение $f(x)$ при $x=x_0$.

а) $f(x)=(2x-1)^{-\frac{1}{3}}, x_0=\frac{9}{16}$; б) $f(x)=\left(3x-\frac{2}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}, x_0=\frac{1}{27}$.

10. Построить график функции $y=f(x)$.

а) $f(x)=(x-1)^{1,5}+1$; б) $f(x)=(x-1)^{-1,5}+1$.

5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

5.1. Показательная функция

Показательной функцией называется функция вида

$$y=a^x,$$

где a – некоторое положительное число, отличное от 1.

Областью определения этой функции служат все действительные числа, т.е. $D(y)=(-\infty;\ +\infty)$. Множество значений – все положительные числа, т.е. $E(y)=(0;+\infty)$.

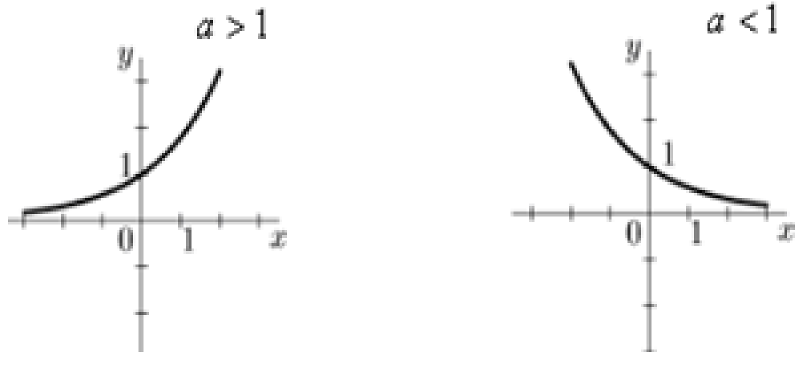


Рис. 80. Показательная функция $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$

Если $a > 1$, функция является возрастающей, если $0 < a < 1$ – убывающей (рис. 80).

При любых действительных значениях x и y справедливы равенства:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \ (a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x; \ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Пример. Упростить выражение $3^{2x+1} \cdot 9^{-x}$.

Решение.

$3^{2x+1} \cdot 9^{-x} = 3^{2x+1} \cdot 3^{-2x} = 3^{2x+1-2x} = 3.$

Ответ: 3.

Пример. Упростить выражение $2^{2x} \cdot 3^x - 2^x 6^x$.

Решение.

$2^{2x} \cdot 3^x - 2^x 6^x = 4^x \cdot 3^x - 2^x \cdot 6^x = 12^x - 12^x = 0.$

Ответ: 0.

Пример. Решить уравнение $2^{x^2+2} = 8^x$.

Решение.

$2^{x^2+2} = 8^x; \ 2^{x^2+2} = (2^3)^x; \ 2^{x^2+2} = 2^{3x};$

$x^2 + 2 = 3x; \ x^2 - 3x + 2 = 0.$

Таким образом, получаем квадратное уравнение, корни которого можно найти, например, по теореме Виета: $x_1 = 1; \ x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 1; \ x_2 = 2$.

При решении показательных неравенств следует помнить, что при $a > 1$ показательная функция является возрастающей, а при $0 < a < 1$ – убывающей.

Пример. Решить неравенство $2^x \geq 8$.

Решение. Перепишем неравенство следующим образом:

$2^x \geq 2^3$.

В данном случае $a = 2 > 1$. Функция является возрастающей, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции:

$x \geq 3$.

Таким образом, решение неравенства имеет вид

$x \in [3; +\infty)$.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \leq 27$.

Решение. Перепишем неравенство следующим образом:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

В данном случае $a = \frac{1}{3} < 1$. Функция является убывающей, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции:

$x + 5 \geq -3;\ x \geq 8$.

Таким образом, решение неравенства имеет вид $x \in [8; +\infty)$

Ответ: $[8; +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leq 0$.

Решение. Введем новую переменную $t = 2^x$. Неравенство примет вид

$t^2 - 6t + 8 \leq 0$.

В левой части неравенства стоит квадратичная функция, графиком которой является парабола. Ветви параболы направлены вверх, следовательно, график функции лежит ниже оси Ot на промежутке $[t_1, t_2]$, где t_1, t_2 – корни квадратного трехчлена (рис. 81).

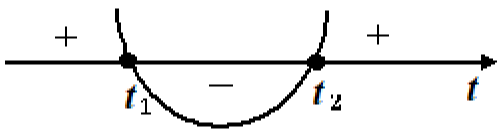


Рис. 81. Решение квадратного неравенства $t^2 - 6t + 8 \leq 0$

Применив теорему Виета, получим $t_1 = 2,\ t_2 = 4$.

Таким образом, $2 \leq t \leq 4$, следовательно, $2 \leq 2^x \leq 4$; $1 \leq x \leq 2$.

Ответ: $[1; 2]$.

Пример. Решить неравенство $\dfrac{3^x-1}{3^x-9}<0.$

Решение. Введем новую переменную $t=3^x$. Неравенство примет вид $\dfrac{t-1}{t-2}<0$.

Решим это неравенство методом интервалов (рис. 82).

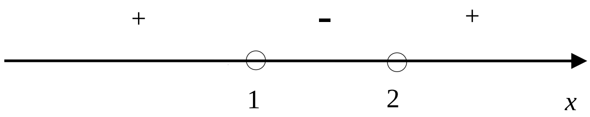


Рис. 82. Решение неравенства $\frac{t-1}{t-2}<0$

Получим $1<t<9$, следовательно, $1<3^x<9$; $0<x<2$.

Ответ: $(0;2)$.

Пример. На рис. 83 изображен график показательной функции $f(x)=a^x$. Найдите $f(3)$.

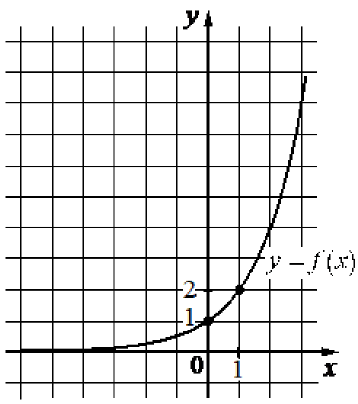


Рис. 83. График показательной функции

Решение. График функции проходит через точку и (1; 2). Подставив координаты точки в функцию $f(x)=a^x$, получим $2=a^1, a=2$.

Следовательно, $f(x)=2^x$.

Вычислим значение $f(3)$:

$f(3)=2^3=8$.

Ответ: 8.

5.2. Логарифмическая функция

Рассмотрим показательное уравнение в общем виде

$$a^x = b.$$

Очевидно, что данное уравнение имеет решение только при $b > 0$. Корень этого уравнения называется *логарифмом* числа b по основанию a и обозначается следующим образом:

$$x = \log_a b.$$

Например, корнем показательного уравнения

$$2^x = 6$$

является число

$$x = \log_2 6.$$

Таким образом, логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b.

Пример. Найти значение выражения $\log_3 81 + \log_5 25 + \log_2 1$.

Решение. По определению логарифма имеем

$\log_3 81 = 4$, так как $3^4 = 81$;

$\log_5 25 = 2$, так как $5^2 = 25$;

$\log_2 1 = 0$, так как $2^0 = 1$.

$\log_2 1 = 0$, так как $2^0 = 1$.

Следовательно,

$\log_3 81 + \log_5 25 + \log_2 1 = 4 + 2 + 0 = 6.$

Ответ: 6.

Из определения логарифма следует *основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Пример. Найти значение выражения $3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5}$.

Решение. Из основного логарифмического тождества следует:

$3^{\log_3 7} = 7$; $2^{\log_2 5} = 5$.

Следовательно,

$3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5} = 7 + 5 = 12.$

Ответ: 12.

Сформулируем *основные теоремы о логарифмах*.

1. Логарифм произведения двух положительных чисел x и y равен сумме логарифмов сомножителей, т.е.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел x и y равен разности логарифмов сомножителей, т.е.

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

3. Логарифм степени положительного числа x равен произведению показателя степени этого числа на логарифм ее основания, т.е.

$$\log_a x^n = n\log_a x.$$

Пример. Найти значение выражения $\log_4 12 + \log_4 \frac{1}{3}$.

Решение.

$\log_4 12 + \log_4 \frac{1}{3} = \log_4\left(12 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_4 4 = 1$.

Ответ: 1.

Пусть a, b и c – положительные числа, причем $a \neq 1$ и $c \neq 1$. Справедлива следующая *формула перехода* от основания a к основанию c:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Из этой формулы, в частности, для $c = b \neq 1$ имеем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

Пример. Найти значение выражения $\log_5 49 \cdot \log_7 5$.

Решение.

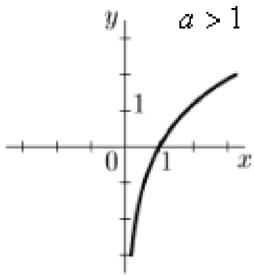
$\log_5 49 \cdot \log_7 5 = \log_5 7^2 \cdot \log_7 5 = 2\log_5 7 \cdot \log_7 5 = 2 \cdot 1 = 2$.

Ответ: 2.

Для обозначения *десятичных логарифмов* (логарифмов по основанию 10) принята специальная запись: вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$. Логарифм по основанию e ($e = 2{,}718281828\ldots$) называют *натуральным логарифмом* и обозначают $\ln b$.

Введение понятия логарифма позволяет из равенства $y = a^x$ выразить величину x через величину y: $x = \log_a y$. Если в последнем равенстве поменять обозначения x на y и y на x, получим $y = \log_a x$.

Функция $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) называется *логарифмической*. Эта функция является *обратной* функцией к показательной функции. Графики логарифмической функции при $a > 1$ и $0 < a < 1$ представлены на рис. 84.



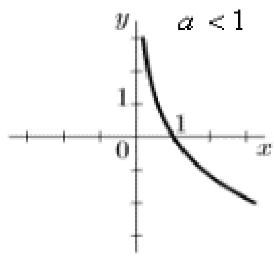


Рис. 84. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0,\ a \neq 1$)

Областью определения логарифмической функции являются все положительные числа, т.е. $D(y) = (0;\ +\infty)$; множеством значений служат все действительные числа, т.е. $E(y) = (-\infty; +\infty)$. При $a > 0$ функция возрастает, а при $0 < a < 1$ – убывает.

Пример. Найти область определения функции $f(x) = \log_2(6 - 3x)$.

Решение. Выражение под знаком логарифма по определению должно быть больше нуля: $6 - 3x > 0$.

Решив данное неравенство, получим $x < 2$.

Таким образом, $x \in (-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$.

При решении логарифмических уравнений и неравенств следует помнить, что выражение под знаком логарифма должно быть положительным.

Пример. Решить уравнение $\log_4(2x-4) = \log_4(3x-5)$.

Решение. Согласно определению логарифма имеем

$2x - 4 = 3x - 5$.

Решив данное уравнение, получим

$x = 1$.

Проверим выполнение условий:

$$\begin{cases} 2x - 4 > 0, \\ 3x - 5 > 0. \end{cases}$$

$2x - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2 < 0$.

Проверять второе условие необязательно, так как корень уравнения был найден из условия:

$2x - 4 = 3x - 5$.

Таким образом, найденное значение величины x не удовлетворяет условиям положительности выражений под знаком логарифма. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

Пример. Решить уравнение $\log_4(2x-4) = 0{,}5$.

Решение. Согласно определению логарифма имеем

$2x - 4 = 4^{0,5}$; $2x - 4 = (2^2)^{0,5}$;

$2x - 4 = 2$; $2x = 6$; $x = 3$.

Отметим, что в данном примере нет необходимости проверять условие положительности выражения под знаком логарифма, так как в правой части равенства $2x-4=4^{0,5}$ стоит положительное число $4^{0,5}$, что автоматически обеспечивает выполнение условия $2x-4>0$.

Ответ: $x=3$.

Пример. Решить неравенство $\log_3(x-1)<2$.

Решение. При решении логарифмических неравенств в дополнение к условию положительности выражения под знаком логарифма следует учитывать также величину основания. Здесь $a=2>1$, следовательно, функция является возрастающей, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Таким образом, имеем

$x-1<3^2;\ \ x<10.$

Выражение под знаком логарифма должно быть положительным, то есть $x-1>0;\ \ x>1$.

Таким образом, решение исходного неравенства определяется условиями

$$\begin{cases} x<10, \\ x>1. \end{cases}$$

Следовательно,

$x\in(1;10)$.

Ответ: $(1;10)$.

Пример. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x-3)<-2$.

Решение. Здесь $a=\frac{1}{2}<1$, следовательно, функция является убывающей, т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Таким образом, имеем

$$x-3>\left(\frac{1}{2}\right)^{-2};\ \ x-3>4;\ \ x>7.$$

Записывать условие $x-3>0$ нет необходимости, так как при $x>7$ это условие выполняется автоматически.

Таким образом, решение исходного неравенства имеет вид

$x\in(7;\ +\infty)$.

Ответ: $(7;\ +\infty)$.

Пример. Решить неравенство $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \leq 0$.

Решение. Введем новую переменную $t = \log_3 x$. Неравенство примет вид $t^2 - 3t + 2 \leq 0$.

Решив это квадратное неравенство, получим $1 \leq t \leq 2$.

Следовательно,

$1 \leq \log_3 x \leq 2$,

$3 \leq x \leq 9$.

Ответ: $[3;\ 9]$.

Пример. На рис. 85 изображен график функции $f(x) = \log_a x$. Найдите $f(8)$.

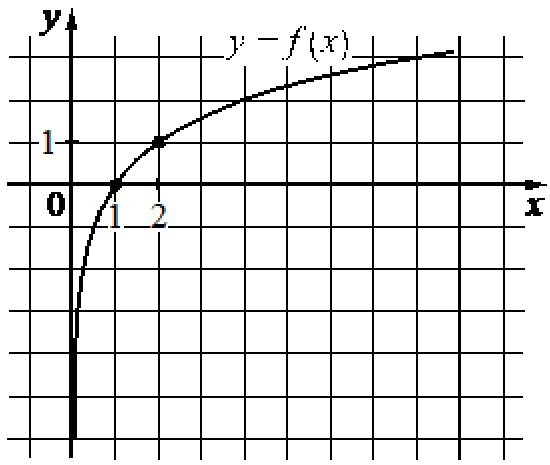


Рис. 85. Логарифмическая функция

Решение. График функции проходит через точку и (2; 1). Подставив координаты точки в функцию $f(x) = \log_a x$, получим

$1 = \log_a 2$; $a^1 = 2$; $a = 2$.

Следовательно,

$f(x) = \log_2 x$.

Вычислим значение $f(3)$:

$f(3) = \log_2 8 = 3$.

Ответ: 3.

5.3. Задачи повышенного уровня сложности

Приведем примеры решений уравнений и неравенств, содержащих показательные и логарифмические функции.

Пример. А. Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

А. Преобразуем исходное уравнение:

$(2 \cdot 5)^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$;

$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

Величина $2^{\sin x}$ строго больше нуля при любых значениях x, следовательно, обе части последнего уравнения можно разделить на эту величину без потери корней:

$5^{\sin x} = 5^{-\cos x}$.

Выполнив логарифмирование, получим

$\sin x = -\cos x$.

Разделив обе части на $\cos x$, получим простейшее тригонометрическое уравнение

$\mathrm{tg} x = -1$.

Следовательно,

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathrm{Z}$.

Б. Для отбора корней, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, воспользуемся методом двойных неравенств.

По условию имеем

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x \leq -\pi.$$

Подставив вместо x полученное выше решение, получим

$$-\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + \pi n \le -\pi.$$

Требуется найти все целые значения n, удовлетворяющие данному двойному неравенству.

Выполним преобразования:

$$\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{2} \le \pi n \le -\pi + \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{9\pi}{4} \le \pi n \le -\frac{3\pi}{4},$$

$$-\frac{9}{4} \le n \le -\frac{3}{4}.$$

Полученное неравенство имеет только два целых решения:

$n = -1$ и $n = -2$.

Подставив найденные n в формулу общего решения, получим

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{5\pi}{4};$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{9\pi}{4}.$$

Ответ: А. $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; Б. $-\frac{9\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{4}$.

Пример. Решить неравенство

$$9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \ge 0.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$(3^2)^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \ge 0,$$

$$\left(3^{4x-x^2-1}\right)^2 - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \ge 0.$$

Введем новую переменную:

$$t = 3^{4x-x^2-1} > 0.$$

Неравенство примет вид

$$t^2 - 36t + 243 \ge 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства, принадлежащие промежутку $(0; +\infty)$. По теореме Виета имеем

$t_1 + t_2 = 36,$

$t_1 t_2 = 243.$

Подбором находим корни

$t_1 = 9, t_2 = 27.$

Графиком квадратного трехчлена является парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 86).

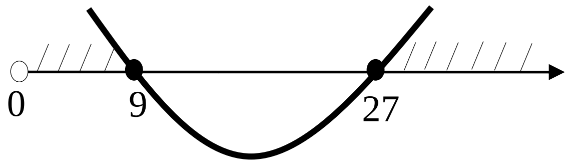


Рис. 86. Решение неравенства $t^2 - 36t + 243 \geq 0$

На рис. 86 видно, что на промежутке $(0; +\infty)$ решением неравенства служит совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 9, \\ t \geq 27. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} 3^{4x-x^2-1} \leq 9, \\ 3^{4x-x^2-1} \geq 27. \end{array}\right.$$

Значит,

$$\left[\begin{array}{l} 4x - x^2 - 1 \leq 2, \\ 4x - x^2 - 1 \geq 3. \end{array}\right.$$

Преобразуем первое неравенство последней совокупности:

$4x - x^2 - 1 \leq 2,$

$4x - x^2 - 3 \leq 0.$

Умножим обе части последнего неравенство на (–1):

$x^2 - 4x + 3 \geq 0.$

Найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства. По теореме Виета имеем

$x_1 + x_2 = 4,$

$x_1 x_2 = 3.$

Подбором находим корни: $x_1 = 1; x_2 = 3$.

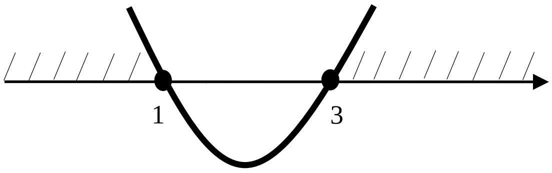


Рис. 87. Решение неравенства $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

На рис. 87 видно, что решением неравенства служит совокупность

$$\left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 3. \end{array}\right.$$

Преобразуем второе неравенство:

$4x - x^2 - 1 \geq 3,$

$4x - x^2 - 4 \geq 0.$

Умножим обе части последнего неравенства на (–1):

$x^2 - 4x + 4 \leq 0.$

По формуле сокращенного умножения получим

$(x - 2)^2 \leq 0.$

Решением неравенства служит точка $x = 2$.

Объединив полученные решения, получим

$(-\infty;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ +\infty).$

Ответ: $(-\infty;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ +\infty).$

Пример. Решить неравенство

$$\frac{7 - 2 \cdot 2^x}{4^x - 12 \cdot 2^x + 32} \geq 0{,}25.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на 4:

$$\frac{28 - 8 \cdot 2^x}{4^x - 12 \cdot 2^x + 32} \geq 1.$$

Перенесем единицу в левую часть:

$$\frac{28 - 8 \cdot 2^x}{4^x - 12 \cdot 2^x + 32} - 1 \geq 0.$$

Введем новую переменную $t = 2^x$.

Неравенство примет вид

$$\frac{28 - 8 \cdot t}{t^2 - 12t + 32} - 1 \geq 0.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{28 - 8 \cdot t - t^2 + 12t - 32}{t^2 - 12t + 32} \geq 0.$$

Выполним преобразования:

$$\frac{-t^2 + 4t - 4}{t^2 - 12t + 32} \geq 0;$$

$$\frac{-(t^2 - 4t + 4)}{t^2 - 12t + 32} \geq 0;$$

$$\frac{-(t-2)^2}{t^2 - 12t + 32} \geq 0;$$

$$\frac{(t-2)^2}{t^2 - 12t + 32} \leq 0.$$

Разложим на множители знаменатель дробного выражения. По теореме Виета имеем

$t_1 + t_2 = 12,$

$t_1 t_2 = 32.$

Подбором находим

$t_1 = 4;\ t_2 = 8.$

Таким образом,

$t^2 - 12t + 32 = (t-4)(t-8).$

Неравенство запишется в виде

$$\frac{(t-2)^2}{(t-4)(t-8)} \leq 0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов (рис. 88).

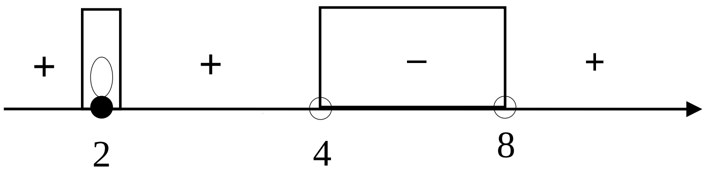


Рис. 88. Решение неравенства $\frac{(t-2)^2}{(t-4)(t-8)} \leq 0$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ 4 < t < 8. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, найдем

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2, \\ 4 < 2^x < 8. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ 2 < x < 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1\} \cup (2; 3)$.

Пример. Решить неравенство

$$\frac{4^x - 2^{x+4} + 30}{2^x - 2} + \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leq 2^{x+1} - 14.$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{4^x - 2^x \cdot 2^4 + 30}{2^x - 2} + \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leq 2^x \cdot 2 - 14;$$

$$\frac{4^x - 16 \cdot 2^x + 30}{2^x - 2} + \frac{4^x - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leq 2 \cdot 2^x - 14;$$

$$\frac{(2^x)^2 - 16 \cdot 2^x + 30}{2^x - 2} + \frac{(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x + 3}{2^x - 7} \leq 2 \cdot 2^x - 14.$$

Введем новую переменную $t = 2^x$:

$$\frac{t^2 - 16t + 30}{t - 2} + \frac{t^2 - 7t + 3}{t - 7} \leq 2t - 14.$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\frac{t^2 - 16t + 30}{t - 2} = \frac{(t - 2)(t - 14) + 2}{t - 2} = t - 14 + \frac{2}{t - 2}.$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\frac{t^2 - 7t + 3}{t - 7} = \frac{t(t - 7) + 3}{t - 7} = t + \frac{3}{t - 7}.$$

Подставим найденные выражения в левую часть неравенства:

$$t - 14 + \frac{2}{t - 2} + t + \frac{3}{t - 7} \leq 2t - 14.$$

Выполним преобразования:

$$2t - 14 + \frac{2}{t - 2} + \frac{3}{t - 7} \leq 2t - 14;$$

$$\frac{2}{t-2}+\frac{3}{t-7}\le 0;$$
$$\frac{2t-14+3t-6}{(t-2)(t-7)}\le 0;$$
$$\frac{5t-20}{(t-2)(t-7)}\le 0;$$
$$\frac{t-4}{(t-2)(t-7)}\le 0.$$

Решаем последнее неравенство методом интервалов (рис. 89).

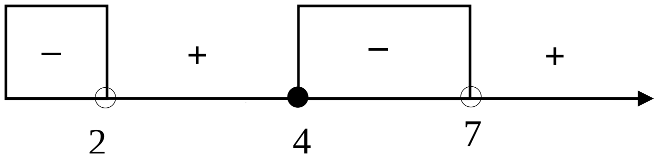


Рис. 89. Решение неравенства $\frac{t-4}{(t-2)(t-7)}\le 0$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} t<2, \\ 4\le t<7. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} 2^x<2, \\ 4\le 2^x<7. \end{array}\right.$$

Решив полученную совокупность неравенств, получим

$$\left[\begin{array}{l} x<1, \\ 2\le x<\log_2 7. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$x\in(-\infty;1)\cup[2;\ \log_2 7)$.

Ответ: $(-\infty;1)\cup[2;\ \log_2 7)$.

Пример. А. Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x)-5\log_3(2\cos x)+2=0$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

А. Введем новую переменную $t=\log_3(2\cos x)$.

Уравнение примет вид

$2t^2 - 5t + 2 = 0.$

Найдем корни уравнения по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(2\cos x) = 2, \\ \log_3(2\cos x) = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos x = 9, \\ 2\cos x = \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Таким образом, получим совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 4{,}5; \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет решений. Решение второго уравнения имеет вид

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}.$$

Б. Отбор корней проведем при помощи тригонометрической окружности (рис. 90).

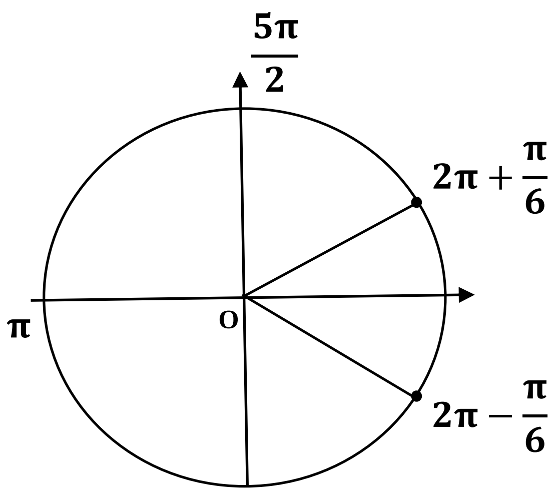


Рис. 90. Отбор корней на промежутке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Таким образом, промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: А. $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; Б. $\frac{11\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6}$.

Пример.

А. Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 1) = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{2x^4 + 42}$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$\log_2(9x^2 + 1) = \log_{2^{\frac{1}{2}}}(2x^4 + 42)^{\frac{1}{2}} - 1;$$

$$\log_2(9x^2 + 1) = \log_2(2x^4 + 42) - \log_2 2;$$

$$\log_2(9x^2 + 1) = \log_2\frac{2x^4 + 42}{2};$$

$$\log_2(9x^2 + 1) = \log_2(x^4 + 21);$$

$$9x^2 + 1 = x^4 + 21;$$

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0.$$

Получили биквадратное уравнение. Введем новую переменную $t = x^2$.

Уравнение примет вид

$$t^2 - 9t + 20 = 0.$$

Найдем корни по теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} t = 4; \\ t = 5. \end{array}\right.$$

Выполним обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 4; \\ x^2 = 5. \end{array}\right.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm 2; \\ x = \pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Б. Выполним отбор корней. Поскольку

$$-\sqrt{5} < -2 < \frac{3}{2} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{6{,}25} = \frac{5}{2},$$

следовательно, отрезку $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ принадлежат корни $x = 2$ и $x = \sqrt{5}$.

Ответ: А. $\pm\sqrt{5}$; ± 2; Б. $\sqrt{5}$; 2.

Пример. Решить неравенство

$$\log_4^2(64 - x^2) - 5\log_4(64 - x^2) + 6 \geq 0.$$

Решение. Введем новую переменную

$$t = \log_4(64 - x^2).$$

Неравенство примет вид

$$t^2 - 5t + 6 \geq 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена в левой части неравенства по теореме Виета: $t_1 = 2;\ t_2 = 3$.

Графиком квадратного трехчлена является парабола, ветви которой направлены вверх (рис. 91).

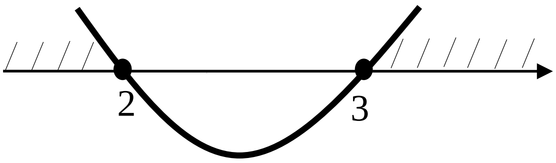


Рис. 91. Решение квадратного неравенства $t^2 - 5t + 6 \geq 0$

На рис. 91 видно, что решением неравенства служит совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 2, \\ t \geq 3. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} \log_4(64 - x^2) \leq 2, \\ \log_4(64 - x^2) \geq 3. \end{array}\right.$$

Решим первое неравенство полученной совокупности:

$$\begin{cases} 64 - x^2 > 0, \\ 64 - x^2 \leq 16. \end{cases}$$

Умножив обе части каждого из неравенств на (–1), получим

$$\begin{cases} x^2 - 64 < 0, \\ x^2 - 48 \geq 0\,. \end{cases}$$

Решением первого квадратного неравенства служит промежуток

$(-8; 8)$ (рис. 92).

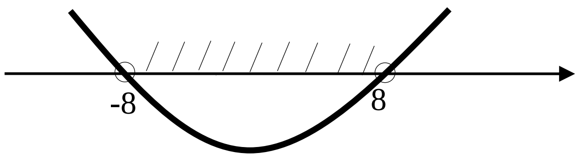


Рис. 92. Решение неравенства $x^2 - 64 < 0$

Решением второго неравенства служит объединение промежутков $\left(-\infty;\ -\sqrt{48}\right] \cup \left[\sqrt{48};\ +\infty\right)$ (рис. 93).

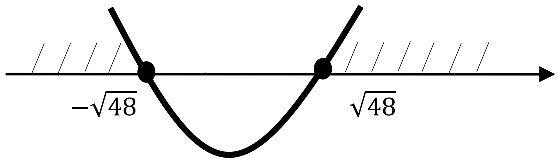


Рис. 93. Решение неравенства $x^2 - 48 \geq 0$

Таким образом, решением первого неравенства служит множество $\left(-8;\ -\sqrt{48}\right] \cup \left[\sqrt{48};\ 8\right)$.

Решим второе неравенство совокупности:

$64 - x^2 \geq 64;\ -x^2 \geq 0;\ \ x^2 \leq 0.$

Решением второго неравенства служит точка $x = 0$.

Объединяем полученные решения:

$\left(-8;\ -\sqrt{48}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{48};\ +8\right)$.

Ответ: $\left(-8;\ -\sqrt{48}\right] \cup \{0\} \cup \left[\sqrt{48};\ +8\right)$.

Пример. Решить неравенство

$$\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4(64x)} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

Решение. Преобразуем неравенство

$$\frac{\log_4 64 + \log_4 x}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 64 + \log_4 x} \geq \frac{4\log_4 x + 16}{\log_4^2 x - 9},$$

$$\frac{3 + \log_4 x}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{3 + \log_4 x} \geq \frac{4\log_4 x + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

Введем новую переменную $t = \log_4 x$.

С учетом новой переменной неравенство примет вид

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3} \geq \frac{4t+16}{t^2-9}.$$

Перенесем выражение из правой части в левую часть:

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}-\frac{4t+16}{t^2-9} \geq 0.$$

Приведем к общему знаменателю:

$$\frac{(t+3)^2+(t-3)^2-(4t+16)}{t^2-9} \geq 0.$$

Выполним преобразования:

$$\frac{t^2+6t+9+t^2-6t+9-4t-16}{t^2-9} \geq 0,$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{t^2-9} \geq 0, \quad \frac{2(t^2-2t+1)}{t^2-9} \geq 0,$$

$$\frac{2(t-1)^2}{t^2-9} \geq 0, \qquad \frac{(t-1)^2}{t^2-9} \geq 0, \qquad \frac{(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов (рис. 94).

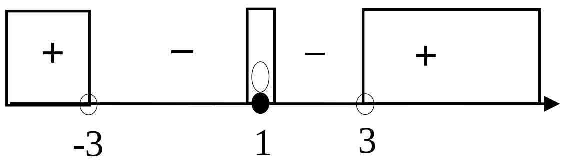


Рис. 94. Решение неравенства $\frac{(t-1)^2}{(t-3)(t+3)} \geq 0$ методом интервалов

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} t<-3, \\ t=1, \\ t>3. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x<-3, \\ \log_4 x=1, \\ \log_4 x>3. \end{array}\right.$$

Решив полученную совокупность неравенств, найдем

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{64}, \\ x=4, \\ x>64. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$x \in \left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \{4\} \cup (64; +\infty).$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{64}\right) \cup \{4\} \cup (64; +\infty)$.

5.4. Упражнения

1. Упростить выражения:

а) $4^{2x+2} \cdot 16^{-x}$; б) $3^{2x} \cdot 4^{x} - 12^{x}3^{x}$.

2. Найдите значения показательной функции $y = a^x$ при заданных значениях x:

а) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x, x = \frac{1}{2}$; б) $y = (8)^x, x = -\frac{1}{3}$; в) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x, x = -2$.

3. Найдите значения аргумента x, при котором функция $y = 2^x$ принимает заданное значение:

а) $8\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{32\sqrt{2}}$.

4. Найдите значения аргумента x, при котором функция $y = 0{,}2^x$ принимает заданное значение:

а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{1}{25\sqrt{5}}$; в) $625\sqrt{5}$.

5. Расположить числа в порядке возрастания:

а) $2^{\frac{1}{2}};\ 2^{-\frac{1}{2}};\ 2^{\sqrt{2}};\ 1;\ 2^{-\sqrt{2}}$; б) $0{,}2^{\frac{1}{3}};\ 0{,}2^{-\frac{1}{3}};\ 0{,}2^{\sqrt{3}};\ 0{,}2^{-\sqrt{3}}$.

6. На рис. 95 изображен график функции $f(x) = a^x$. Найдите $f(2)$.

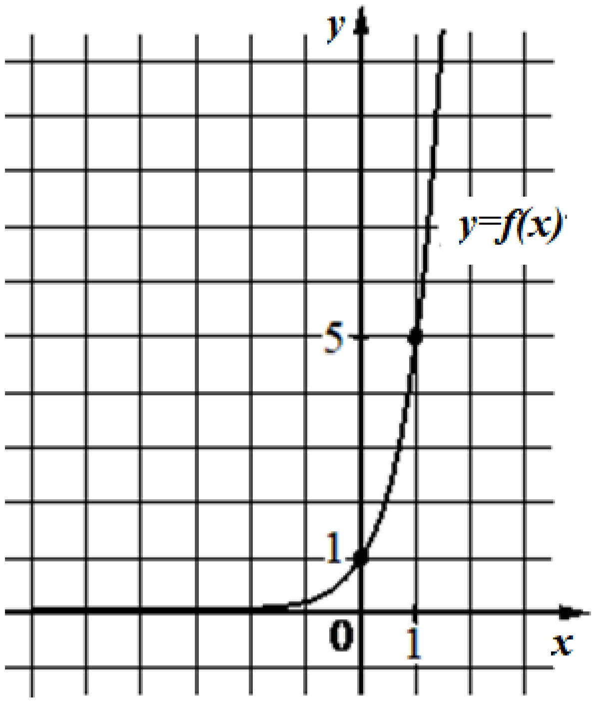


Рис. 95. График показательной функции

7. Построить график функции:

а) $y = 2^{|x|} - 1$; б) $y = 0{,}5^{|x|} + 1$; в) $y = \left|2^{|x|} - 1\right|$.

8. Решить уравнения :

а) $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1} = 1{,}5^{2x-3}$; в) $0{,}2^{2x-1} = 5^{x-8}$.

Ответ: а) –2; б) 0,2; в) 3.

9. Решить уравнения:

а) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 32 = 0$.

Ответ: а) 3; б) –3.

10. Решить уравнения:

а) $2^{x^2+2x-6} - 2^{7-2x-x^2} = \frac{7}{2}$; б) $3^{2x^2+x} - 3^{3-x-2x^2} = 26$.

Ответ: а) –4; 2; б) –1,5; 1.

11. Решить уравнения:

а) $\left(2 - \sqrt{3}\right)^x + \left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 4$;

б) $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^x + \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^x = 6$.

Ответ: а) ± 1; б) ± 1.

12. Решить уравнения:

а) $\dfrac{2^x+1}{2^{x+2}-2}=1$; б) $\dfrac{5^{4x-1}+3}{5^{4x}-3}=2$.

Ответ: а) 0; б) $0{,}25$.

13. Решить уравнения:

а) $18^x-8\cdot 6^x-9\cdot 2^x=0$; б) $12^x-6^{x+1}-8\cdot 3^x=0$.

Ответ: а) 2; б) $1, 2$.

14. Решить уравнения:

а) $3\cdot 2^{2x}+6^x-2\cdot 3^{2x}=0$; б) $2\cdot 2^{2x}-3\cdot 10^x-5\cdot 5^{2x}=0$.

Ответ: а) 1; б) -1.

15. Решить неравенства:

а) $3^x\geq 9$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+3}\leq\dfrac{1}{8}$; в) $9^x-4\cdot 3^x+3\leq 0$.

16. Вычислить:

а) $\log_6\dfrac{36}{\sqrt{6}}$; б) $\log_{0,2}\dfrac{25}{\sqrt{5}}$.; в) $\log_{0,1}10\sqrt{1000}$.

Ответ: а) 1,5; б) –1,5; в) –2,5.

17. Вычислить:

а) $\log_3\dfrac{3^7\cdot 3^{-2,7}}{(3^{-0,2})^4}$; б) $\log_2\dfrac{2^{9,5}\cdot 2^{-0,7}}{(2^{-0,2})^4}$; в) $\log_2\dfrac{5^{\sqrt{3}}\cdot 5^{\sqrt{3}+2}}{(5^{\sqrt{3}})^2\cdot 5}$.

Ответ: а) 5,1; б) 9,6; в) 5.

18. Вычислить:

а) $4^{\log_4 9}-2^{\log_2 3}$; б) $2^{\log_3 1}+5^{\log_5 9}$.

19. Вычислить:

а) $\log_8 14+\log_8\dfrac{32}{7}$; б) $\log_5 15-\log_5 3$.

20. Вычислить:

а) $\dfrac{\log_9 28}{\log_9 7}+\log_7\dfrac{7}{4}$; б) $\dfrac{\log_5 2}{\log_5 13}+\log_{13}0{,}5$ в) $\dfrac{\log_7 40}{\log_7 8}+\log_8 0{,}2$.

Ответ: а) 2; б) 0; в) 1.

21. Вычислить:

а) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$; б) $\log_3 25 \cdot \log_5 27$.

22. Вычислить:

а) $4\log_{1,25} 5 \cdot \log_5 0{,}8$; б) $2\log_{0,6} 5 \cdot \log_5 \frac{5}{3}$; в) $3\log_{1,2} 2 \cdot \log_2 \frac{5}{6}$.

Ответ: а) –4; б) –2; в) –3.

23. Расположить числа в порядке возрастания:

а) $\log_2 0{,}7$; $\log_2 2{,}6$; $\log_2 0{,}1$; $\log_2 3{,}7$;

б) $\log_{0,2} 7$; $\log_{0,2} 27$; $\log_{0,2} 0{,}7$; $\log_{0,2} 3$.

24. На рис. 96 изображен график функции $f(x) = \log_a x$. Найдите $f(16)$.

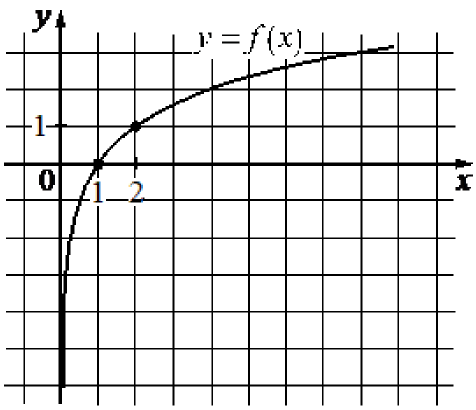


Рис. 96. График логарифмической функции

Ответ: 4.

25. Найти область определения функции:

а) $y = \log_6(4x - 1)$; б) $y = \log_{\frac{1}{9}}(7 - 2x)$; в) $y = \log_9(8x + 9)$.

26. Найти область определения функции:

а) $y = \log_5(x^2 - 5x + 6)$; б) $y = \log_{\frac{2}{3}}(-x^2 - 5x + 14)$.

27. Построить график функции:

а) $y = \log_2(x - 1)$; б) $y = \log_2 x + 1$; в) $y = \log_2(x + 1) - 1$.

28. Построить график функции:

а) $y = \log_2|x|$; б) $y = |\log_2 x|$; в) $y = |\log_2|x||$.

29. Решить уравнения:

а) $\log_4(4x-6) = \log_4(5x+4)$;

б) $\log_{\sqrt{3}}(2x-9) = 2$;

в) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 = 0$.

30. Решить неравенства:

а) $\log_2(x-1) < 1$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} x < -1$;

в) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 \leq 0$.

31. А. Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Ответ: А. $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. Б. $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$.

32. $\dfrac{13 - 5 \cdot 3^x}{9^x - 12 \cdot 3^x + 27} \geq 0{,}5$;

Ответ: $\{0\} \cup (1; 2)$.

33. $4^{6x-x^2-4} - 34 \cdot 2^{6x-x^2-4} + 64 \geq 0$.

Ответ: $(-\infty;\ 1] \cup \{3\} \cup [5;\ +\infty)$.

34. А. Решите уравнение $2\log_4^2(4\cos x) - 7\log_4(4\cos x) + 3 = 0$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ: А. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. Б. $\frac{5\pi}{3}$.

35. А. Решите уравнение $1 + log_2(9x^2+5) = log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}$.

Б. Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

Ответ: А. $\pm\sqrt{2}$; $\pm\frac{1}{2}$. Б. $\pm\frac{1}{2}$.

Решить неравенства:

36. $\log_2^2(16-x^2)-6\log_2(16-x^2)+8\geq 0.$

Ответ: $\left(-4;\ -\sqrt{12}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{12};4\right).$

37. $\dfrac{\log_3(81x)}{\log_3 x-4}+\dfrac{\log_3 x-4}{\log_3(81x)}\geq\dfrac{24-\log_3 x^8}{\log_3^2 x-16};$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{81}\right)\cup\left\{\frac{1}{9}\right\}\cup(81;+\infty).$

6. НАЧАЛА АНАЛИЗА

6.1. Пределы

Число a называют пределом последовательности (u_n), если для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_0, что для всех номеров больших n_0 выполняется неравенство

$$|u_n-a|<\varepsilon.$$

Последнее неравенство можно переписать следующим образом:

$$a-\varepsilon<u_n<a+\varepsilon.$$

Интервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки a, а величина ε – радиусом окрестности. Этот интервал можно трактовать как «ловушку», в которую попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера n_0.

В математической форме предел записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=a.$$

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

Решение. В данном примере $a=0$. Пусть радиус окрестности равен ε. По определению имеем

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

Выполним преобразования

$$\frac{1}{n} < \varepsilon;$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

В качестве n_0 можно взять целую часть числа $1/\varepsilon$, т.е.

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right].$$

Таким образом, доказано что для любого положительного числа ε существует номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Например, если $r = 0{,}01$, то n_0 = 10.

Аналогично предыдущему примеру можно получить, например:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0;\ \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0;\ \ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Последний пример можно обобщить следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{если } |q| < 1.$$

Отметим также, что предел константы k равен этой же константе k:

$$\lim_{n\to\infty} k = k.$$

Например,

$$\lim_{n\to\infty} 2 = 2.$$

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Например, последовательность

$$1, 2, \dots, \dots, 1000, \dots, n, \dots$$

является расходящейся.

Пусть x_n и y_n – заданные последовательности, а k – заданная константа. Перечислим основные *правила* вычисления пределов:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{n\to\infty} kx_n = k\lim_{n\to\infty} x_n.$$

2. Предел суммы (разности) двух последовательностей равен сумме (разности) пределов слагаемых

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n,$$

если оба эти предела существуют.

3. Предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

если оба эти предела существуют.

4. Предел отношения двух последовательностей равен отношению пределов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

если оба эти предела существуют и предел знаменателя не равен нулю.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 2+0-2\cdot 0 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+1}$.

Решение. Преобразуем выражение под знаком предела следующим образом:

$$\frac{4n+1}{2n+1} = \frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{4+0}{2+0} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}$.

Решение. Преобразуем дробное выражение следующим образом:

$$\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}=\frac{n^2(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})}=\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+5\cdot 0+4\cdot 0}{1+2\cdot 0}=3.$$

Ответ: 3.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{n+1}\right)^4$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{n+1}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{n+1}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^4=3^4=81.$$

Ответ: 81.

Число A называется пределом функции $y=f(x)$ на плюс бесконечности, если для любого $\varepsilon>0$ (эпсилон) существует такое $M>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$x>M,$$

верно неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Математическая запись:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

Прямая $y=A$ представляет собой правостороннюю горизонтальную асимптоту функции $y=f(x)$.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ на минус бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ (эпсилон) существует такое $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$x < -M,$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Математическая запись:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

Прямая $y = A$ представляет собой левостороннюю горизонтальную асимптоту функции $y = f(x)$.

Если одновременно выполняются соотношения

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \text{ и } \lim_{x\to+\infty} f(x) = A,$$

то можно объединить их одной записью

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Прямая $y = A$ представляет собой двустороннюю горизонтальную асимптоту функции $y = f(x)$.

Исходя из определения предела можно показать, например, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0;\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0\,;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0; \lim_{x\to-\infty} 2^x = 0.$$

Правила вычисления пределов функции на бесконечности формулируются аналогично правилам вычисления предела последовательности.

Пример. Вычислить предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+3}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Ответ: 2.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любой последовательности (x_n), сходящейся к a, последовательность $f(x_n)$ сходится к A.

Математическая запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Из определения предела, в частности, следует, что

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

Функция называется *непрерывной в точке* $x = a$, если выполняется соотношение

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Функцию $y = f(x)$ называют *непрерывной на промежутке* X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Теорема. Если выражение $f(x)$ составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, то функция $f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f\left(\lim_{x \to a} x\right) = f(a),$$

где a принадлежит области определения данной функции.

Замечание. Теорема справедлива также в случае когда выражение $f(x)$ содержит показательные и логарифмические функции.

Например,

$$\lim_{x \to 3} x^2 = \left(\lim_{x \to 3} x\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Правила вычисления предела функции в точке формулируются аналогично правилам вычисления предела последовательности.

6.2. Производная и дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и придадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$ («дельта икс»). Тогда функция получит приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это отношение называется *относительным приращением функции* на промежутке $(x; x + \Delta x)$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел относительного приращения функции при $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Из определения производной следует, что производная константы равна нулю, то есть $(k)' = 0$, где $k = const$.

На основе определения производной можно составить таблицу производных основных элементарных функций (табл. 4).

Таблица 4

Производные основных элементарных функций

№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$	№	$f(x)$	$f'(x)$
1	x	1	5	$\sin x$	$\cos x$	9	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	x^n	nx^{n-1}	6	$\cos x$	$-\sin x$	10	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	e^x	e^x	7	$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	11	$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
4	$\ln x$	$1/x$	8	$\mathrm{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	12	$\mathrm{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 0{,}25$.

Решение. Найдем производную

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Подставив числовое значение, получим

$$y'(0{,}25) = \frac{1}{2\sqrt{0{,}25}} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ: $y'(0{,}25) = 1$.

Пример. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$ при $x = 0{,}1$.

Решение. Найдем производную

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Подставив числовое значение, получим

$$y'(0{,}1) = -\frac{1}{0{,}1^2} = -\frac{1}{0{,}01} = -100.$$

Ответ: $y'(0{,}1) = -100$.

Производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной в данной точке. В этом состоит геометрический смысл производной (рис. 97).

$$y'(x_0) = k = \text{tg}\alpha.$$

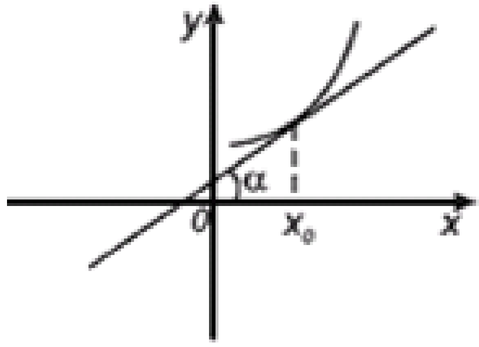


Рис. 97. Геометрический смысл производной

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример. Составить уравнения касательной к графику функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Сначала вычислим значение функции в точке $x_0 = 2$:

$f(2) = 2^2 = 4.$

Найдем производную функции:

$f'(x) = 2x.$

Вычислим значение производной в точке $x_0 = 2$:

$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$

Подставив найденные значения функции и ее производной в точке в уравнение касательной, получим

$y = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4.$

Ответ: $y = 4x - 4.$

Физический смысл производной состоит в следующем. Если $s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t:

$$v = s'(t).$$

Последняя формула допускает обобщение: если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, *линейная относительно приращения* аргумента Δx. Дифференциал обозначается dy и вычисляется по формуле

$$dy = y'\Delta x.$$

Найдем дифференциал функции $y = x$. Производная $y' = 1$, следовательно,

$$dy = dx = y'\Delta x = \Delta x,$$

откуда

$$dx = \Delta x,$$

т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменой. На этом основании формулу для дифференциала функции можно представить в виде

$$dy = y'dx,$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

Пример. Вычислить дифференциал функции $y = x^2$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Сначала найдем дифференциал:

$dy = y'dx = 2xdx.$

Подставив числовые значения, получим

$dy = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2.$

Ответ: $dy = 2.$

6.3. Правила вычисления производных

Пусть k – константа, а $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда справедливы следующие правила дифференцирования:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(ku)' = ku'.$$

2. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Отметим, что данное правило можно обобщить на случай алгебраической суммы нескольких функций.

3. Производная произведения двух функций вычисляется по формуле

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

4. Производная отношения двух функций вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Пример. Найти значение производной функции

$y = 2x^4 + 2\sqrt{x} + \dfrac{4}{x} + 1$ при $x = 1$.

Решение. Воспользуемся правилом вычисления производной суммы нескольких функций:

$$y' = 8x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}.$$

Подставив значение $x = 1$, получим

$$y'(1) = 8 \cdot 1^3 + \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{4}{1^2} = 5.$$

Ответ: $y'(1) = 5$.

Пример. Найти значение производной функции $y = 6e^x + 2x$ при $x = \ln 2$.

Решение.

$$y' = 6e^x + 2.$$

Подставив значение $x = \ln 2$, получим

$$y'(\ln 2) = 6e^{\ln 2} + 2 = 6 \cdot 2 + 2 = 14.$$

Ответ: $y'(\ln 2) = 14$.

Пример. Найти значение производной функции $y = 12\ln x + 3x$ при $x = 3$.

Решение.

$$y' = \frac{12}{x} + 3.$$

Подставив значение $x = 3$, получим

$$y'(3) = \frac{12}{3} + 3 = 7.$$

Ответ: $y'(3) = 7$.

Пример. Найти значение производной функции $y = 12\sin x + \mathrm{tg}x$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$y' = 12\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Подставив значение $x = \frac{\pi}{3}$, получим

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}} = 6 + 4 = 10.$$

Ответ: $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10.$

Пример. Найти значение производной функции

$y = 10\mathrm{arctg}x + \sqrt{3}\arcsin x$ при $x = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$y' = \frac{10}{1 + x^2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Подставив значение $x = \frac{1}{2}$, получим

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 8 + 2 = 10\,.$$

Ответ: $y'\left(\frac{1}{2}\right) = 10.$

Пример. Вычислить производную функции $y = e^x \sin x$.

Решение. Используя правило вычисления производной произведения двух функций и табличные значения производных, получим

$$y' = (e^x \sin x)' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x).$$

Ответ: $y' = e^x(\sin x + \cos x).$

Пример. Вычислить производную функции $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Решение. Воспользуемся правилом вычисления производной отношения двух функций:

$$y' = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x)'(x^2+1\,) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Ответ: $y = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

Найдем производную логарифмической функции общего вида $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Используя формулу перехода к новому основанию, представим логарифмическую функцию в виде

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Найдем производную последнего выражения:

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x ln a}.$$

Таким образом, производная логарифмической функции общего вида вычисляется по формуле

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

Например,

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x\ln 2}.$$

Пусть $y = f(z)$ есть функция от переменной z, а переменная z, в свою очередь, является функцией $z = g(x)$ от переменной x, т.е. задана сложная функция $y = f(g(x))$.

Если $y = f(z)$ и $z = g(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то *производная сложной функции* равна производной данной функции по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = y'_z \cdot z'_x.$$

Пример. Вычислить производную функции $y = (3x + 2)^7$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$y' = ((3x + 2)^7)' = 7(3x + 2)^6(3x + 2)' =$

$= 7(3x + 2)^6 \cdot 3 = 21(3x + 2)^6$.

Ответ: $y' = 21(3x + 2)^6$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \frac{1}{(3x+2)^7}$.

Решение. Представим функцию в виде

$$y = \frac{1}{(3x + 2)^7} = (3x + 2)^{-7}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$y' = ((3x + 2)^{-7})' = -7(3x + 2)^{-8}(3x + 2)' =$

$$= -7(3x + 2)^{-8} \cdot 3 = -\frac{21}{(3x + 2)^8}.$$

Ответ: $y' = -\frac{21}{(3x+2)^8}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = e^{4x+3}$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$y' = (e^{4x+3})' = e^{4x+3}(4x + 3)' = 4e^{4x+3}$.

Ответ: $y' = 4e^{4x+3}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \ln(6x + 5)$.

Решение. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (\ln(6x + 5))' = \frac{1}{6x + 5}(6x + 5)' = \frac{6}{6x + 5}.$$

Ответ: $y' = \frac{6}{6x+5}$.

Пример. Вычислить производную функции $y = \sin^2 x$.

Решение. Представим функцию в виде

$y = \sin^2 x = (\sin x)^2$.

По правилу вычисления сложной функции имеем

$y' = ((\sin x)^2)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$

Ответ: $y' = \sin 2x$.

Найдем производную показательной функции общего вида $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$.

Используя основное логарифмическое тождество, представим показательную функцию в виде

$y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}.$

Применив формулу дифференцирования сложной функции, получим

$y' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = e^{\ln a^x} \cdot \ln a = a^x \ln a.$

Таким образом, производная показательной функции общего вида вычисляется по формуле

$(a^x)' = a^x \ln a.$

Например, $(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$.

6.4. Исследование функций на экстремум

Теорема. Если *производная* функции $y = f(x)$ *положительна* внутри некоторого промежутка X, то функция *возрастает* на этом промежутке.

Например, производная функции $y = x^3 + x + 1$ равна

$$y' = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1.$$

Очевидно, что $y' > 0$, следовательно, данная функция является возрастающей.

Теорема. Если *производная* функции $y = f(x)$ *отрицательна* внутри некоторого промежутка X, то функция *убывает* на этом промежутке.

Например, производная функции $y = -x^5 - 3x + 2$ равна

$$y' = (-x^5 - 3x + 2)' = -5x^4 - 3.$$

Очевидно, что $y' < 0$, следовательно, данная функция является убывающей.

Геометрический смысл теорем: если касательная к графику функции образует с осью абсцисс острый угол, то функция возрастает, если тупой – убывает (рис. 98).

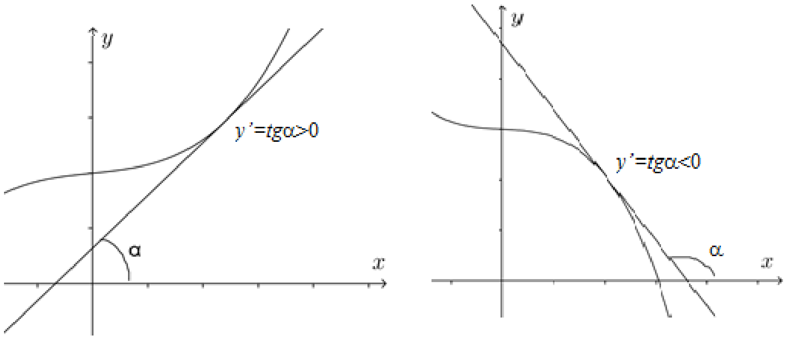


Рис. 98. Геометрическая иллюстрация условий монотонности функции

Пример. На рис. 99 изображены график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс $x_1, x_2, \dots, x_8$. В скольких из точек производная функции положительна?

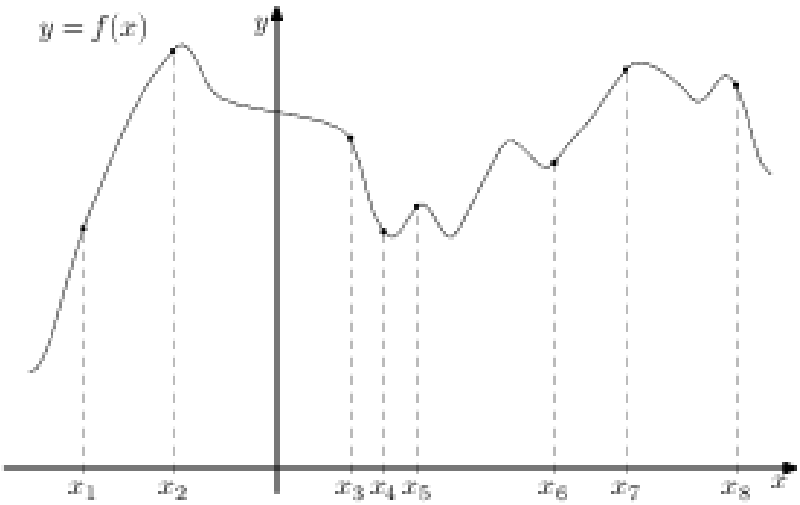


Рис. 99. График функции $y = f(x)$

Решение. В точках $x_1,\ x_2,\ x_5,\ x_6,\ x_7$ касательная к графику функции образует острый угол. Следовательно, производная в этих точках положительна.

Ответ: 5.

Точки на оси абсцисс, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, называются *точками экстремума.*

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток возрастания, а справа – промежуток убывания, то эта точка называется *точкой максимума.*

Если к точке экстремума слева примыкает промежуток убывания, а справа – промежуток возрастания, то эта точка называется *точкой минимума.*

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно *максимумом и минимумом функции.* Максимум или минимум функции называются общим термином *экстремум функции* (рис. 100).

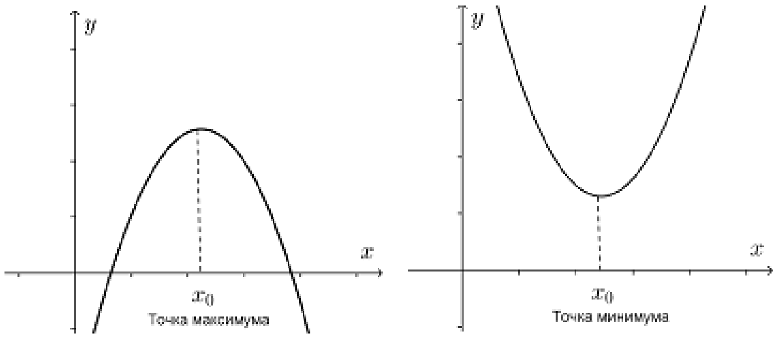


Рис. 100. Геометрическая иллюстрация экстремумов функции

Теорема (необходимые условия экстремума). В точке экстремума $x = x_0$ производная равна нулю

$$f'(x_0) = 0.$$

Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными*.

Пример. На рис. 101 изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-1;\ 13)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $y = f(x)$ равна 0.

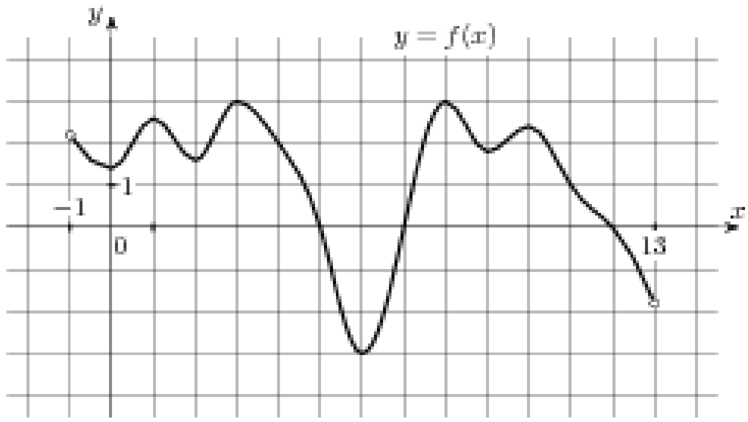


Рис. 101. График функции $y = f(x)$

Решение. Из геометрического смысла производной следует, что она равна нулю в тех точках графика функции, где касательные параллельны оси Ox. На рис. 101 видно, что касательные параллельны оси Ox в восьми точках.

Ответ: 8.

При формулировке необходимого условия экстремума предполагалось, что функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0. Однако возможны случаи, когда в точках экстремума производная не существует. Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими.*

Теорема. Пусть x_0 – критическая точка. Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум, а если с минуса на плюс – минимум. Если при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то в точке x_0 экстремума нет.

Алгоритм исследования на экстремум при помощи первой производной:

1. Находим производную.

2. Находим критические точки.

3. Исследуем знаки первой производной и находим экстремумы функции.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 10$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции:

$f'(x) = (2x^3 - 6x + 10)' = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x - 1)(x + 1)$.

Приравнивая производную нулю

$6(x - 1)(x + 1) = 0$,

найдем критические точки:

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Экстремумы могут быть только в этих точках. Нанесем критические точки на числовую ось (рис. 102). Исследуем знак производной

$f'(x) = 6(x - 1)(x + 1)$.

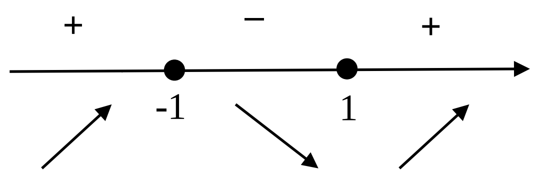


Рис. 102. Знаки производной

Найдем экстремумы функции $f(x) = 2x^3 - 6x + 10$:

$y_{\max} = f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) + 10 = 14$;

$y_{\min} = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 10 = 6$.

Ответ: $y_{\max} = f(-1) = 14$; $y_{\min} = f(1) = 6$.

Пример. Найти экстремумы функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$.

Решение. Представим данную функцию в виде

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}.$$

Найдем производную:

$$f'(x) = (x + x^{-1})' = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2} = 0.$$

Решив уравнение, найдем критические точки:

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Точка $x = 0$ не является критической, так как функция не определена в этой точке.

Нанесем критические точки и точку $x = 0$ на числовую ось (рис. 103). Исследуем знаки производной.

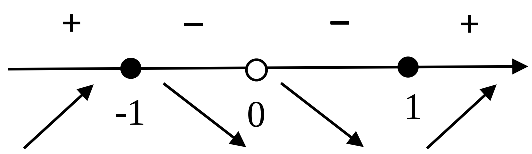


Рис. 103. Знаки производной

Таким образом, $x = -1$ – точка максимума, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем экстремумы функции $f(x) = x + 1/x$:

$$y_{\max} = f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2;$$

$y_{\min} = f(1) = 1 + 1/1 = 2$.

Ответ: $y_{\max} = f(-1) = -2$; $y_{\min} = f(1) = 2$.

Пример. Найдите наименьшее значение функции

$y = 9\cos x + 10x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем производную

$y' = -9\cos x + 10$.

Функция $\cos x \leq 1$, следовательно,

$y' = -9\cos x + 10 > 0$.

Значит, функция y является возрастающей. Наименьшее значение возрастающей функции достигается на левой границе:

$y_{\text{нм}} = y(0) = 9 \cdot \cos 0 + 10 \cdot 0 + 7 = 16$.

Ответ: 16.

Пример. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \cos x + \frac{4}{\pi}x + 3$$

на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Найдем производную

$y' = -\sin x + \frac{4}{\pi}$.

Число $\frac{4}{\pi} > 1$, а $\sin x \leq 1$, следовательно,

$y' = -\sin x + \frac{4}{\pi} > 0$.

Значит, функция является возрастающей. Наибольшее значение возрастающей функции достигается на правой границе:

$y_{\text{нб}} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + 3 = 5.$

Ответ: 5.

Пример. Найти точку минимума функции

$$y = x^{3/2} - 18x + 29.$$

Решение. Найдем производную

$y' = \frac{3}{2}x^{1/2} - 18.$

Найдем критические точки:

$y' = 0,$

$\frac{3}{2}x^{1/2} - 18 = 0,$

$x^{1/2} = 12, \qquad x = 144.$

Исследуем знак производной (рис. 104).

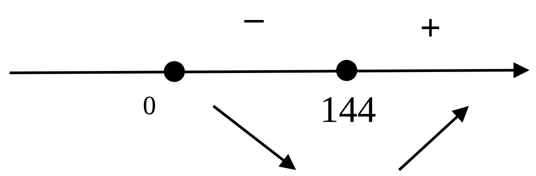


Рис. 104. Знаки производной

Из рис. 104 следует, что $x = 144$ – точка минимума.

Ответ: 144.

Пример. Найдите точку минимума функции $y = (x-2)e^{x-4}$.

Решение. Найдем производную:

$y' = e^{x-4} + (x-2)e^{x-4} = e^{x-4}(1+x-2) = e^{x-4}(x-1)$.

Найдем критические точки:

$y' = 0$,

$e^{x-4}(x-1) = 0$,

$x = 1$.

Исследуем знак производной (рис. 105).

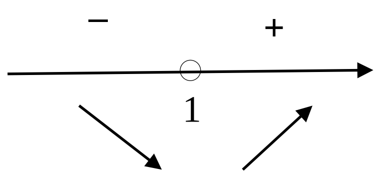


Рис. 105. Знаки производной

На рис. 105 видно, что $x = 1$ – точка минимума.

Ответ: 1.

Пример. Найдите точку максимума функции

$$y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 1.$$

Решение. Функция определена только при $x > 0$.

Найдем производную:

$y' = 4x - 13 + \frac{9}{x}$.

Найдем критические точки:

$y' = 0$,

$4x - 13 + \frac{9}{x} = 0$,

$4x^2 - 13x + 9 = 0$,

$x = 1; x = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

Исследуем знак производной (рис. 106).

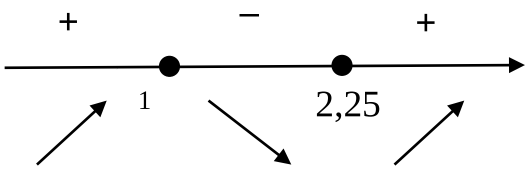


Рис. 106. Знаки производной

Из рис. 106 следует, что $x = 1$ – точка максимума.

Ответ: 1.

Пример. Произведение двух положительных чисел равно 36. Найдите эти числа, если известно, что их сумма принимает наименьшее значение.

Решение. Пусть x, y – данные положительные числа, а $z = x + y$. По условиям задачи

$$xy = 36.$$

Выразим y через x

$$y = 36/x.$$

Подставим найденное выражение для y в формулу для z

$$z = x + \frac{36}{x}.$$

Исследуем функцию z на экстремум. Найдем производную:

$$z'(x) = 1 - \frac{36}{x^2} = \frac{x^2 - 36}{x^2} = \frac{(x-6)(x+6)}{x^2}.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\frac{(x-6)(x+6)}{x^2} = 0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень $x = 6$.

Исследуем знаки производной на промежутке $(0; +\infty)$ (рис. 107).

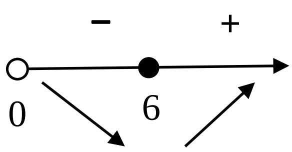


Рис. 107. Знаки производной

Таким образом, $x = 6$ – точка минимума. Найдем y:

$$y = \frac{36}{x} = \frac{36}{6} = 6.$$

Ответ: $x = y = 6$.

Пример. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах, на которых производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 руб., а на заводе, расположенном во втором городе, — 300 руб.

Вадим готов выделять 1 200 000 руб. в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе – y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $x + y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $200x^2 + 300y^2 = 1\,200\,000$.

Выразим y через x:

$$200x^2 + 300y^2 = 1\,200\,000,$$

$$2x^2 + 3y^2 = 12\,000;\ y = \sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}.$$

При извлечении корня здесь учтено, что y – величина неотрицательная.

Таким образом, данная задача сводится к поиску наибольшего значения функции

$$Q(x) = x + \sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}\,.$$

Область определения этой функции задается условием

$$4000 - \frac{2}{3}x^2 \geq 0.$$

Решив полученное неравенство, получим

$$x \leq \sqrt{6000}.$$

Отметим также, что по смыслу задачи $x \geq 0$.

Исследуем эту функцию на экстремум. Для этого найдем производную функции $Q(x)$:

$$Q'(x) = 1 - \frac{2x}{3 \cdot \sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}}.$$

Найдем критические точки из условия

$$Q'(x) = 0.$$

Подставив в левую часть предыдущего равенства выражение для производной, получим

$$1 - \frac{2x}{3\sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}} = 0.$$

Выполним ряд несложных преобразований и найдем положительный корень уравнения:

$$1 = \frac{2x}{3\sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2}}\,,\ \sqrt{4000 - \frac{2}{3}x^2} = \frac{2x}{3};$$

$$4000 - \frac{2x^2}{3} = \frac{4x^2}{9}, 4000 = \frac{10x^2}{9},$$

$$x^2 = 3600, \qquad x = 60.$$

Полученное значение x удовлетворяет условию $x \leq \sqrt{6000}$, т.е. принадлежит области определения исследуемой функции.

Наибольшее значение функции, заданной на отрезке, достигается либо в критической точке, либо на концах отрезка. Найдем значения функции в найденной критической точке и на концах отрезка $[0; \sqrt{6000}]$:

$$Q(60) = 60 + \sqrt{4000 - \frac{2}{3} \cdot 60^2} == 60 + \sqrt{1600} = 100,$$

$$Q(\sqrt{6000}) = \sqrt{6000} + \sqrt{4000 - \frac{2}{3} \cdot 6000} = \sqrt{6000} + 0 = \sqrt{6000},$$

$$Q(0) = 0 + \sqrt{4000 - \frac{2}{3} \cdot 0} = \sqrt{4000}.$$

Наибольшее значение функции $Q(x)$ достигается в точке $x = 60$ и равно 100.

Ответ: 100.

6.5. Исследование функций на выпуклость и вогнутость

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой на некотором промежутке X.

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой* (*выпуклой вверх*) на промежутке X, если график функции $y = f(x)$ расположен ниже касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка X (рис. 108, *а*).

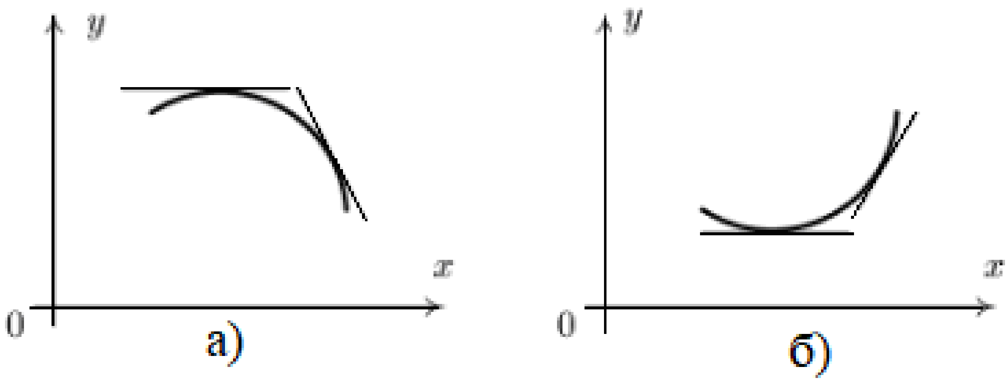


Рис. 108. Графики функций: а – выпуклой; б – вогнутой

Функция $y = f(x)$ называется *вогнутой* (*выпуклой вниз*) на промежутке X, если график функции $y = f(x)$ расположен выше касательной, проведенной к графику в любой точке промежутка X (рис. 108, *б*).

Теорема. Если вторая производная функции $y = f(x)$ внутри данного промежутка X положительна, то функция $y = f(x)$ вогнута (выпукла вниз); если же вторая производная отрицательна, то функция на данном промежутке выпукла (выпукла вверх).

Точка, в которой меняется направление выпуклости функции, называется *точкой перегиба* (рис. 109).

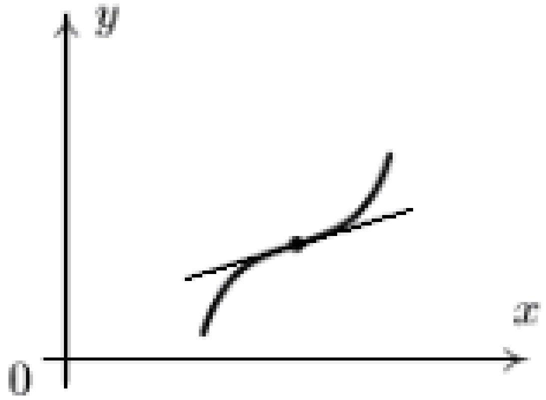


Рис. 109. Точка перегиба

Теорема (необходимое условие перегиба). В точке перегиба $x = x_0$ вторая производная функции $y = f(x)$ равна нулю

$$f''(x_0) = 0$$

или не существует.

Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками второго рода.*

Теорема (достаточное условие перегиба). Если вторая производная функции $y = f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Из этих теорем вытекает следующая схема исследования на выпуклость и вогнутость функций:

1) найти вторую производную;

2) найти точки, в которых вторая производная равна нулю
или не существует;

3) исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод о характере выпуклости исследуемой функции.

Пример. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^3 - 3x + 1$.

Решение. Найдем вторую производную данной функции:

$y'' = ((x^3 - 3x + 1)')' = (3x^2 - 3)' = 6x.$

Приравняв вторую производную нулю

$6x = 0,$

получим

$x = 0.$

Точка $x = 0$ – критическая точка второго рода. Точка $x = 0$ разбивает область определения второй производной на два интервала: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

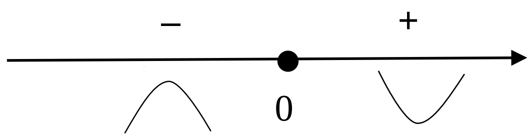


Рис. 110. Точка перегиба

Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба (рис. 110).

Найдем значение функции в точке перегиба:

$y_п = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$

Ответ: $x = 0$ – точка перегиба.

6.6. Построение графиков многочленов

При исследовании многочленов и построении их графиков можно рекомендовать следующую схему:

1) найти интервалы монотонности и экстремумы (при помощи первой производной);

2) найти интервалы выпуклости-вогнутости и точки перегиба (при помощи второй производной);

3) найти дополнительные точки и построить график.

Пример. Построить график многочлена $y = x^3 - 3x + 1$.

Решение.

1. Найдем производную:

$y' = 3x^2 - 3$.

Приравняв производную нулю $y' = 0$, получим уравнение

$3x^2 - 3 = 0$.

Корни этого уравнения

$x = -1$ и $x = 1$.

Таким образом, имеем две критические точки: $x = -1$ и $x = 1$.

Исследуем знак производной. Для этого представим производную в виде $y = 3(x+1)(x-1)$.

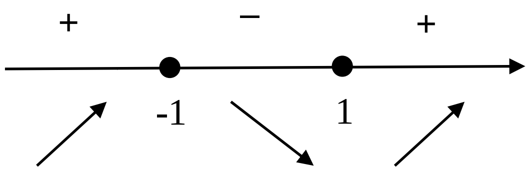


Рис. 111. Знаки производной

Таким образом, $x = -1$ – точка максимума; $x = -1$ – точка минимума (рис. 11).

Найдем экстремумы:

$y_{\max} = y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3;$

$y_{\min} = y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1.$

2. Найдем вторую производную:

$y'' = (y')' = (3x^2 - 3)' = 6x.$

Приравняв вторую производную нулю, получим уравнение

$6x = 0.$

Корень этого уравнения $x = 0$. Таким образом, $x = 0$ – критическая точка второго рода.

Исследуем знак второй производной (рис. 112).

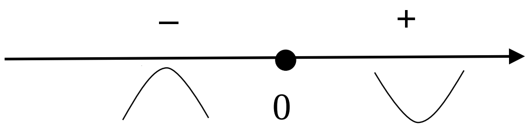


Рис. 112. Знаки второй производной

Таким образом, точка $x = 0$ – точка перегиба. Найдем значение функции в этой точке:

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$

3. В качестве дополнительных характерных точек выберем

$x = -2,\ \ y(-2) = -1;$

$x = 2,\ \ y(2) = 3.$

Построим график функции (рис. 113).

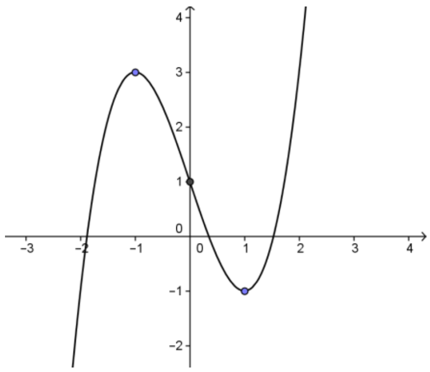


Рис. 113. График функции

Пример. Построить график многочлена $y = x^3 + 3x + 1$.

Решение.

1. Найдем производную:

$y' = 3x^2 + 3 > 0.$

Производная больше нуля, следовательно, функция является возрастающей. Точек экстремума нет.

2. Найдем вторую производную:

$y'' = (y')' = (3x^2 + 3)' = 6x.$

Приравняв вторую производную нулю, получим уравнение

$6x = 0.$

Корень этого уравнения $x = 0$. Таким образом, $x = 0$ – критическая точка второго рода.

Исследуем знак второй производной (рис. 114).

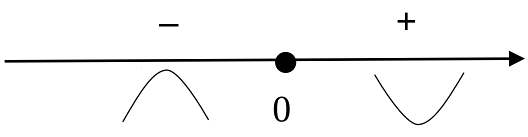


Рис. 114. Знаки второй производной

Таким образом, точка $x = 0$ – точка перегиба. Найдем значение функции в этой точке:

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$

3. В качестве дополнительных характерных точек выберем

$x = -1,\ \ y(-1) = -3;$

$x = 1,\ \ y(1) = 5.$

Построим график функции (рис. 115).

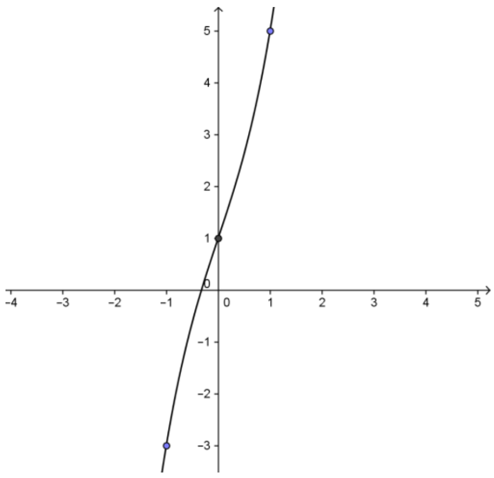


Рис. 115. График функции

Пример. Построить график многочлена $y = x^4 - 4x + 1$.

Решение.

1. Найдем производную:

$y' = 4x^3 - 4$.

Приравняв производную нулю $y' = 0$, получим уравнение

$4x^3 - 4 = 0; 4x^3 = 4; x^3 = 1; x = 1$.

Таким образом, имеем одну критическую точку $x = 1$.

Исследуем знак производной (рис. 116).

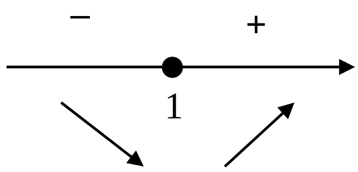


Рис. 116. Знаки производной

Таким образом, $x = 1$ – точка минимума.

Найдем минимум функции:

$y_{\min} = y(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 + 1 = -2$.

2. Найдем вторую производную:

$y'' = (y')' = (4x^3 - 4)' = 12x^2$.

Приравняв вторую производную нулю, получим уравнение

$12x^2 = 0$.

Корень этого уравнения $x = 0$. Таким образом, $x = 0$ – критическая точка второго рода.

Исследуем знак второй производной (рис. 117).

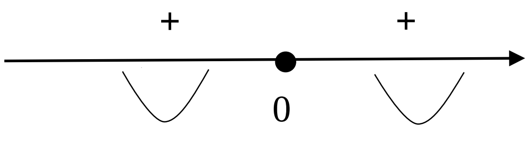


Рис. 117. Знаки второй производной

Таким образом, точка $x = 0$ не является точкой перегиба.

3. В качестве дополнительных характерных точек выберем

$x = 0, \ y(0) = 1;$

$x = 2, \ y(2) = 9.$

Построим график функции (рис. 118).

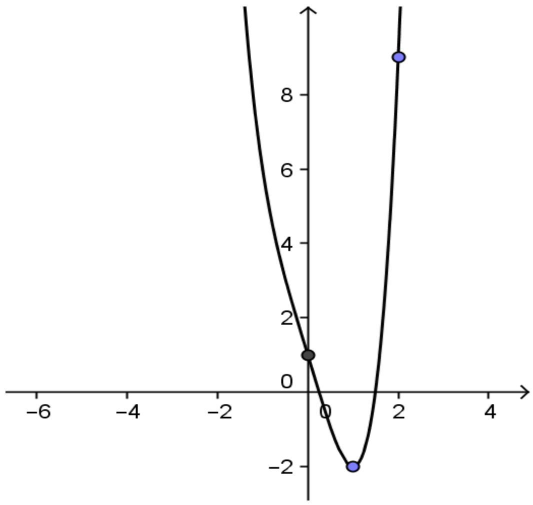


Рис. 118. График функции

6.7. Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если в каждой точке этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$, так как

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Нетрудно убедиться, что функции $\frac{x^3}{3} + 1$, $\frac{x^3}{3} + 5$ и вообще $\frac{x^3}{3} + C$, где C – некоторое произвольное число, также являются первообразными для функции $f(x) = x^2$. Действительно, по определению первообразной имеем

$$\left(\frac{x^3}{3}+1\right)' = x^2; \left(\frac{x^3}{3}+5\right)' = x^2; \left(\frac{x^3}{3}+C\right)' = x^2.$$

Таким образом, для заданной функции $f(x)$ ее первообразная $F(x)$ определяется неоднозначно.

Пусть $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. Можно показать, что выражение вида $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, описывает *все первообразные* функции $f(x)$.

Совокупность функций $F(x)+C$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Таким образом, по определению имеем

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием* этой функции.

Из определения неопределенного интеграла, в частности, следует, что неопределенный интеграл от постоянной величины k представляет собой линейную функцию

$$\int kdx = kx + C,$$

где $k = \mathrm{const}$. Действительно,

$$\left(\int kdx\right)' = (kx+C)' = k.$$

Например,

$$\int 5dx = 5x + C.$$

На основе формул, по которым вычислялись производные элементарных функций, можно получить таблицу неопределенных интегралов (табл. 5).

Таблица 5

Таблица неопределенных интегралов

№ п/п	$f(x)$	$\int f(x)dx$	№ п/п	$f(x)$	$\int f(x)dx$
1	1	$x + C$	6	e^x	$e^x + C$
2	$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	7	$\sin x$	$-\cos x + C$
3	$1/x$	$\ln\lvert x\rvert + C$	8	$\cos x$	$\sin x + C$
4	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x + C$	9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$
5	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	10	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sqrt{x}dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C.$$

Ответ: $2\sqrt{x} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -2x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Ответ: $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$.

Сформулируем правила нахождения неопределенных интегралов:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

где k – некоторое заданное число.

2. Интеграл суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx\,.$$

Пример. Найти интеграл $\int (6x^2 + 1)dx$.

Решение.

$$\int (6x^2 + 1)dx = 6\int x^2dx + \int dx = 6\frac{x^3}{3} + x = 2x^3 + x + C.$$

Ответ: $2x^3 + x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}\right)dx$.

Решение.

$$\int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}\right)dx = 3\int x^{-2}dx + 4\int \frac{dx}{x} = 3 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4\ln|x| =$$

$$= -\frac{3}{x} + 4\ln|x| + C.$$

Ответ: $-\frac{3}{x} + 4\ln|x| + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение.

$$\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = 3\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x}(x+1) + C.$$

Ответ: $2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \left(\frac{3}{x^2+1} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$.

Решение.

$$\int \left(\frac{3}{x^2+1} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 3\mathrm{arctg}x + 2\arcsin x + C.$$

Ответ: $3\mathrm{arctg}x + 2\arcsin x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \left(\cos x + \frac{2}{\cos^2 x}\right) dx$.

Решение.

$$\int \left(\cos x + \frac{2}{\cos^2 x}\right) dx = \sin x + 2\mathrm{tg}x + C.$$

Ответ: $\sin x + 2\mathrm{tg}x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2-1}{x+1} dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^2-1}{x+1} dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} dx = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx = \int \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= 3\int x^2dx - 2\int xdx + \int \frac{dx}{x} = x^3 - x^2 + \ln|x| + C.$$

Ответ: $x^3 - x^2 + \ln|x| + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$.

Решение.

$$\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int (\frac{1}{\cos^2 x} - 1)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.$$

Ответ: $\mathrm{tg}x - x + C$.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, где $f(x)$ – заданная непрерывная функция, x – переменная интегрирования. Положим $x = \varphi(t)$, где t – новая переменная, а $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

которая называется формулой *замены переменной* в неопределенном интеграле. Введем обозначение

$$g(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

С его учетом формула замены переменной принимает вид

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt.$$

Здесь $g(t)$ – более удобная для интегрирования функция, чем функция $f(x)$. После интегрирования по переменной t следует вернуться к исходной переменной x при помощи обратной подстановки $t = \psi(x)$, где $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ – обратная функция.

Пример. Вычислить интеграл $\int 12(2x+1)^5\, dx$.

Решение. Введем новую переменную:

$t = 2x + 1.$

Выразим переменную x через t:

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt = \frac{dt}{2}.$$

Найдем интеграл:

$$\int 12(2x+1)^5\,dx = 12\int t^5\frac{dt}{2} =$$

$$= 6\int t^5 dt = 6\frac{t^6}{6} = t^6 = (2x+1)^6 + C.$$

Ответ: $(2x+1)^6 + C$.

Пример. Найти интеграл $\int 3\sqrt{2x-4}\,dx$.

Решение. Введем новую переменную:

$$t = 2x - 4.$$

Выразим из последнего равенства переменную x через новую переменную t:

$$x = \frac{t+4}{2} = \frac{t}{2} + 2.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = \frac{1}{2}dt,$$

следовательно,

$$\int 3\sqrt{2x-4} = 3\int \sqrt{t}\frac{dt}{2} = \frac{3}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{3}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = t^{\frac{3}{2}} = (2x-4)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ответ: $(2x-4)^{\frac{3}{2}} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{2dx}{2x+1}$.

Решение. Введем новую переменную:

$t = 2x + 1.$

Выразим переменную x через t:

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt = \frac{dt}{2}.$$

Найдем интеграл:

$$\int \frac{2dx}{2x+1} = 2\int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|2x+1| + C.$$

Ответ: $\ln|2x+1| + C.$

Пример. Найти интеграл $\int 2e^{2x+1}\,dx.$

Решение. Введем новую переменную:

$t = 2x + 1.$

Выразим переменную x через t:

$$x = \frac{t-1}{2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt\,.$$

Найдем интеграл:

$$\int 2e^{2x+1}dx = 2\int e^t \frac{dt}{2} = e^t = e^{2x+1} + C.$$

Ответ: $e^{2x+1} + C.$

Пример. Найти интеграл $\int 2\cos(2x+1)\,dx.$

Решение. Введем новую переменную:

$t = 2x + 1.$

Выразим переменную x через t:

$$x = \frac{t-1}{2}\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)' dt = \frac{1}{2}dt.$$

Найдем интеграл:

$$\int 2\cos(2x+1)dx = 2\int \cos t\frac{dt}{2} = \sin t = \sin(2x+1) + C.$$

Ответ: $\sin(2x+1) + C$.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$, где a – некоторое число.

Решение. Преобразуем функцию под знаком интеграла:

$$\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}.$$

Введем новую переменную:

$$t = \frac{x}{a}.$$

Выразим x через t:

$$x = at.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = adt.$$

Найдем интеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{t^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}t = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Ответ: $\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, где – a – некоторое число.

Решение. Преобразуем функцию под знаком интеграла:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Введем новую переменную:

$$t=\frac{x}{a}.$$

Выразим x через t:

$$x=at.$$

Найдем дифференциал:

$$dx=adt.$$

Найдем интеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{adt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Ответ: $\arcsin\frac{x}{a}+C$.

Пример. Найти интеграл $\int a^x dx$, где a^x – показательная функция.

Решение. Воспользуемся формулой

$$a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}.$$

Введем новую переменную:

$$t=x\ln a.$$

Выразим x через t:

$$x=\frac{t}{\ln a}.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot t\right)' dt = \frac{1}{\ln a} \cdot dt = \frac{dt}{\ln a}.$$

Найдем интеграл:

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \int e^t dt = \frac{1}{\ln a} e^t =$$

$$= \frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} e^{\ln a^x} = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Таким образом,

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Например,

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Ответ: $\frac{a^x}{\ln a} + C$.

Пример. Найти интеграл $\int x\sqrt{x-6}\, dx$.

Решение. Введем новую переменную:

$$t = \sqrt{x-6}.$$

Выразим из последнего равенства переменную x через новую переменную t:

$$x = t^2 + 6.$$

Найдем дифференциал:

$$dx = 2tdt,$$

следовательно,

$$\int x\sqrt{x-6}\, dx = \int (t^2+6)t \cdot 2tdt = 2\int (t^4 + 6t^2)dt =$$

$$2\left(\frac{t^5}{5} + 2t^3\right) = \frac{2}{5}t^5 + 4t^3 = \frac{2}{5}(x-6)^{5/2} + 4(x-6)^{3/2} + C.$$

Ответ: $\frac{2}{5}(x-6)^{5/2} + 4(x-6)^{3/2} + C$.

В некоторых случаях для упрощения подынтегрального выражения вместо прямой подстановки $x = \varphi(t)$ удобнее применять *обратную подстановку* $t = \psi(x)$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Решение. Введем новую переменную:

$t = x^2 + 4$.

В отличие от рассмотренных выше примеров, в данном случае нет необходимости строить явное выражение для функции $x = \varphi(t)$.

Найдем дифференциал:

$dt = 2xdx$.

Исходное подынтегральное выражение содержит в числителе произведение xdx. Выразив xdx через dt, получим

$xdx = \frac{dt}{2}$,

следовательно,

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \int \frac{1}{t}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$.

Использование обратной подстановки $t = \psi(x)$ оправдывается, если в составе подынтегрального выражения $f(x)dx$ содержится множитель $\psi'(x)dx$, дающий дифференциал новой переменной dt. В предыдущем примере подстановка $t = x^2 + 4$ себя оправдала, так как подынтегральное выражение данного интеграла содержало множитель $xdx = \frac{dt}{2}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{3\ln^2 xdx}{x}$.

Решение. Введем новую переменную:

$t = \ln x$.

Найдем дифференциал:

$$dt = \frac{1}{x} dx,$$

следовательно,

$$\int \frac{3\ln^2 x dx}{x} = 3\int t^2 dt = 3 \cdot \frac{t^3}{3} + C = t^3 + C = \ln^3 x + C.$$

Ответ: $\ln^3 x + C$.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$.

Решение. Введем новую переменную:

$t = \sin x$.

Найдем дифференциал:

$dt = \cos x dx$.

Исходное подынтегральное выражение содержит множитель $\cos x dx$, следовательно,

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{\sin^4 x}{4} + C .$$

Ответ: $\frac{\sin^4 x}{4}$.

6.8. Определенный интеграл

Исторически понятие определенного интеграла возникло в связи с *задачей о вычислении площади фигуры.*

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$. Требуется найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью абсцисс $y = 0$ (рис. 119).

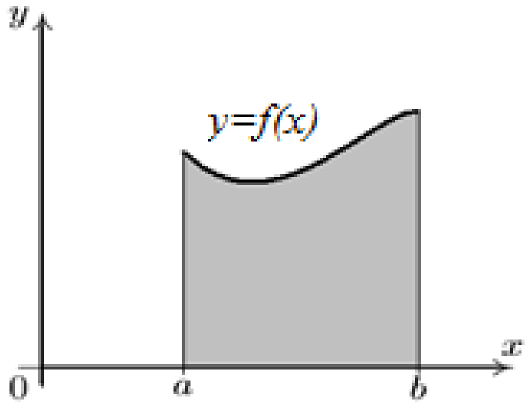


Рис. 119. Криволинейная трапеция

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n сегментов точками $x_0, x_1, \dots x_n$ (рис. 120):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

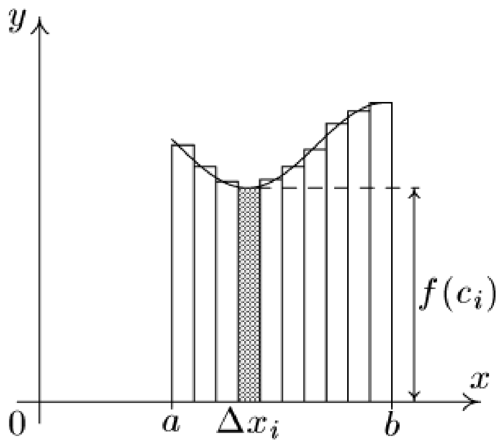


Рис. 120. Разбивка фигуры

Внутри каждого сегмента длиной

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \ (i = 1, 2, \dots, n)$$

выберем произвольную точку c_i и вычислим значение $f(c_i)$. Произведение $f(c_i)\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$. Сумма площадей всех прямоугольников

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

приближенно равна площади криволинейной трапеции. Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим через λ максимальную из длин сегментов $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} S_n = S.$$

Числа a и b называются *нижним* и *верхним пределами* интегрирования функции соответственно.

В общем случае, когда функция $y = f(x)$ может принимать не только положительные, но и отрицательные значения, условимся считать площади частей фигуры под осью OX отрицательными.

Ранее предполагалось, что $a < b$. Понятие определенного интеграла можно обобщить и на случай $a \geq b$, полагая по определению

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

Из последнего равенства, в частности, следует

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a; b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула носит название *формулы Ньютона–Лейбница*. Для сокращения записи решения приращение первообразной обозначают следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Таким образом, основная формула интегрального исчисления принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Формула Ньютона–Лейбница позволяет свести вычисление определенного интеграла к отысканию неопределенного интеграла (первообразной). Действительно, чтобы вычислить определенный интеграл, достаточно найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x)$ (постоянное слагаемое C можно не записывать, так как оно все равно уничтожится при вычитании), подставить в найденное выражение сначала верхний предел, затем нижний предел и вычесть из первой величины вторую.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^2 3x^2dx.$

Решение.

$$\int_1^2 3x^2dx = \frac{3x^3}{3}|_1^2 = x^3|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 8 - 1 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^4 5x\sqrt{x}dx.$

Решение.

$$\int_1^4 5x\sqrt{x}dx = 5\int_1^4 x^{3/2}dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}|_1^4 = 2x^{\frac{5}{2}}|_1^4 = 2(4^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}) = 2(32 - 1) = 62.$$

Ответ: 62.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}.$

Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \text{arctg}x|_0^1 = \text{arctg}1 - \text{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \pi/4.$$

Ответ: $\pi/4$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение.

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln|x|\,|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x|_0^{\frac{\pi}{4}} = \text{tg}\frac{\pi}{4} - \text{tg}0 = 1 - 0 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x^2$, $x = 0, x = 1$ и $y = 0$.

Решение. Построим фигуру, ограниченную заданными линиями (рис. 121).

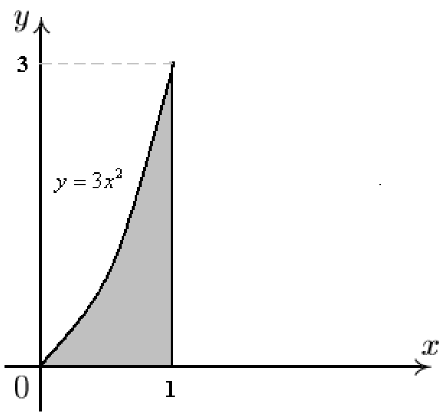


Рис. 121. Фигура, ограниченная линиями $y = 3x^2, x = 0, x = 1$ и $y = 0$.

Здесь $f(x) = 3x^2, a = 0, b = 1$.

$$S = \int_0^1 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3}\Big|_0^1 = x^3\Big|_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x(2 - x),\ y = 0$.

Решение. Найдем пределы интегрирования a и b. Вычислим координаты точек пересечения графика функции $y = 3x(2 - x)$ с осью Ox $(y = 0)$:

$3x(2 - x) = 0$;

$x = 0, x = 2$.

Таким образом, $a = 0, b = 2$ (рис. 122).

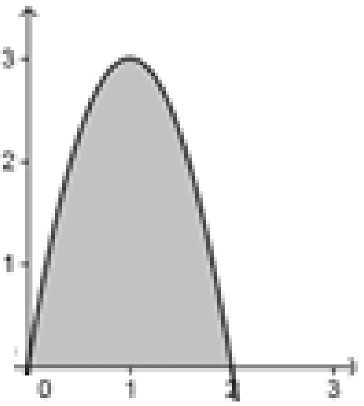


Рис. 122. Фигура, ограниченная линиями $y = 3x(2 - x),\ y = 0$

Найдем площадь фигуры:

$$S = \int_0^2 (6x - 3x^2) = (6x - 3x^2) = 12 - 8 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример. Вычислить площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение. Найдем пределы интегрирования a и b. Вычислим координаты точек пересечения указанных кривых, для чего решим уравнение

$x^2 = \sqrt{x}$.

Возведем обе части уравнения в квадрат

$x^4 = x$.

Приведем это уравнение к виду

$x^4 - x = 0,\ x(x^3 - 1)$.

Решив последнее уравнение, получим

$x = 0, \qquad x = 1$.

Таким образом, нижний и верхний пределы интегрирования соответственно равны $a = 0,\ b = 1$ (рис. 123).

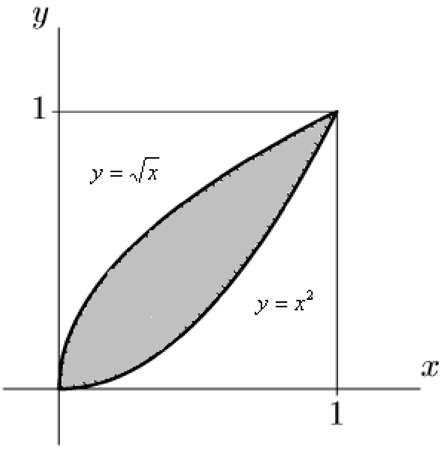


Рис. 123. Фигура, ограниченная линиями $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$

Теперь найдем площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ на отрезке $[0; 1]$:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 1/3.

При помощи определенного интеграла можно находить не только площади фигур, но и объемы тел.

Пусть $S = S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, которая перпендикулярна оси Ox. В курсе высшей математики доказано, что объем этого тела равен $V = \int_a^b S(x)dx$.

Здесь a и b – левая и правая границы изменения x. Предполагается, что $S(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a; b]$(рис. 124).

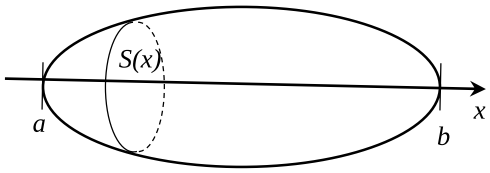


Рис. 124. Сечение тела

Будем считать, что сечение является либо кругом, либо многоугольником.

Докажем, что объем конуса высотой H и радиусом основания R (рис. 125) вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

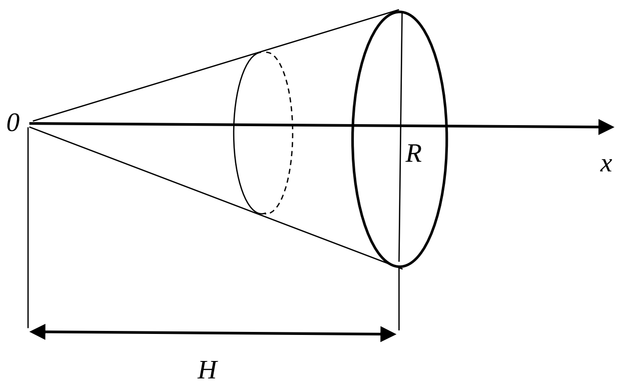


Рис. 125. Вычисление объема конуса

Функция $S(x)$ в данном случае имеет вид

$$S(x) = \pi R^2 \left(\frac{x}{H}\right)^2,$$

где $0 \leq x \leq H$.

Подставив функцию в формулу вычисления объема, получим

$$V = \int_0^H \pi R^2 \left(\frac{x}{H}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Докажем, что объем пирамиды (рис. 126) высотой H и площадью основания S вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} SH.$$

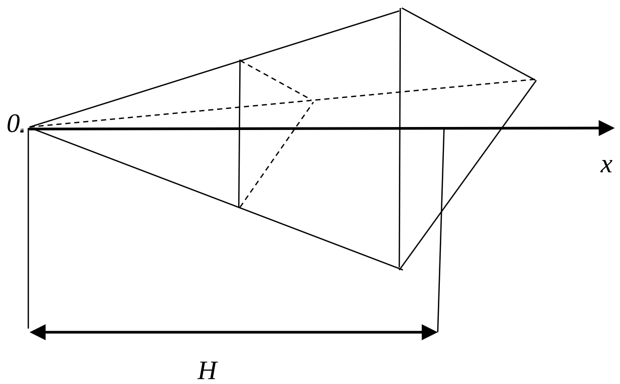


Рис. 126. Вычисление объема пирамиды

Функция $S(x)$ в данном случае имеет вид

$$S(x) = S\left(\frac{x}{H}\right)^2,$$

где $0 \le x \le H$.

Подставив функцию в формулу вычисления объема, получим

$$V = \int_0^H S\left(\frac{x}{H}\right)^2 dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} SH.$$

Докажем, что объем шара (рис. 127) радиусом R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

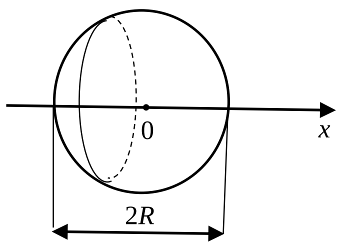


Рис. 127. Вычисление объема шара

Функция $S(x)$ в данном случае имеет вид

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2),$$

где $-R \le x \le R$.

Подставив функцию в формулу вычисления объема, получим

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \int_{-R}^{R} x^2 dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

6.9. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x \ge a$ и интегрируема на любом отрезке $[a;\ z]$. Тогда

$$\lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ и обозначается

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, в противном случае – *расходится*.

Пример. Найти интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

Решение. Сначала вычислим интеграл:

$$\int_0^z e^{-x} dx = -e^{-x}\big|_0^z = -e^{-z} - (-e^0) = -\frac{1}{e^z} + 1 = 1 - \frac{1}{e^z}.$$

Теперь найдем предел:

$$\lim_{z\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^z}\right)=1\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1.$$

Ответ: 1.

Пусть функция $y=f(x)$ определена при $x\le b$ и интегрируема на любом отрезке $[z;\ b]$. Тогда

$$\lim_{z\to-\infty}\int_z^b f(x)dx$$

называется *несобственным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от $-\infty$ до b и обозначается

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{z\to-\infty}\int_z^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, в противном случае – *расходится*.

Пример. Найти интеграл $I=\int_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Решение. Сначала вычислим интеграл:

$\int_z^1\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}|_z^{-1}=-(-1)-\left(-\frac{1}{z}\right)=1+\frac{1}{z}$.

Теперь найдем предел:

$$\lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)=1.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Ответ: 1.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на всей числовой оси. *Несобственным интегралом* от функции $f(x)$ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ называется следующая сумма:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

в предположении, что оба несобственных интеграла справа являются сходящимися. Можно доказать, что введенное определение не зависит от выбора числа c.

Пример. Найти интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение. По определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

Найдем первый интеграл:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{z \to -\infty} \int_{z}^{0} \frac{dx}{x^2+1};$$

$$\int_{z}^{0} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x)|_z^0 = (\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(z) = -\operatorname{arctg}(z);$$

$$\lim_{z \to -\infty}\left(-\operatorname{arctg}(z)\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Найдем второй интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{z \to +\infty} \int_{0}^{z} \frac{dx}{x^2+1};$$

$$\int_{0}^{z} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x)|_0^z = (\operatorname{arctg}(z) - \operatorname{arctg}(0) = \operatorname{arctg}(z);$$

$$\lim_{z\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(z)\right) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ответ: π.

6.10. Упражнения

1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$.

2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n-1}{3n+2}$.

3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2-n+3}{2n^2+4n+1}$.

4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$.

5. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{n+2}\right)^3$.

6. Найти значения производных при данном x:

а) $y = 3x^2 - 2x + \dfrac{4}{x}$, $x = 2$; б) $y = \dfrac{8}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} + 2x$, $x = 4$.

7. Найти значения производных при данном x:

а) $y = 6\ln x - x^2$, $x = 2$; б) $y = 3\sin x + 2\operatorname{tg} x$, $x = \frac{\pi}{3}$.

8. Найти производные следующих функций:

а) $y = (2x-1)(x+1)$; б) $y = (x^2+1)(e^x-1)$.

9. Найти производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^2}{2x^2+1}$; б) $y = \dfrac{e^x}{x+1}$.

10. Найти производные следующих функций:

а) $y = (3x+2)^7 - \dfrac{1}{2x+1}$; б) $y = e^{6x} - \ln(2x+3)$.

11. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = x^3 - 3x + 4$; б) $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 6$.

12. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x-3}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x-2}$.

13. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x + 6x + 3$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: 8.

14. Найдите точку минимума функции $y = x^{3/2} - 21x + 11$.

Ответ: 196.

15. Найдите точку минимума функции $y = (x+16)e^{x-16}$.

Ответ: –17.

16. Найдите точку максимума функции $y = x^2 - 28x + 90\ln x + 5$.

Ответ: 5.

17. А. Произведение двух положительных чисел равно 81. Найдите эти числа, если известно, что их сумма принимает наименьшее значение.

Б. Разность двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

18. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 руб., а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 руб.

Вадим готов выделять 1 200 000 руб. в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ: 80.

19. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости функции:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$ б) $y = 2x^3 - 3x^2.$

20. Построить графики многочленов:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 1;$ б) $y = -x^3 + 3x^2 + 2.$

21. Найти интегралы:

а) $\int x^2\sqrt{x}dx\,;$ б) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x}}.$

22. Найти интегралы:

а) $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2}dx\,;$ б) $\int \frac{x^2 - 9}{x - 3}dx.$

23. Найти интегралы:

а) $\int (2x + 1)^5 dx\,;$ б) $\int \sqrt[3]{3x + 1}dx.$

24. Найти интегралы:

а) $\int \frac{x - 1}{x + 2}dx;$ б) $\int \frac{x + 5}{x + 4}dx.$

25. Найти интегралы:

а) $\int 3\cos(3x + 2)\,dx;$ б) $\int 4\sin(2x + 1)\,dx.$

26. Найти интегралы:

а) $\int x\sqrt{x - 1}dx\,;$ б) $\int \frac{x}{\sqrt{x - 1}}dx.$

27. Найти интегралы:

а) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$; б) $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$.

28. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^3 (x^2+2x+1)dx$; б) $\int_1^e \frac{3dx}{x}$.

29. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y = x^2 + 2,$ $x = -1, x = 2, y = 0$; б) $y = x^2 + 2x + 0{,}5,$ $x = 0, x = 1, y = 0$.

30. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y = 6x^2 + 18,$ $y = 24x$; б) $y = 2x + 6,$ $y = x^2 + 3$.

7. ВЕРОЯТНОСТЬ

7.1. Классическое определение вероятности

Теория вероятностей – это раздел математики, изучающий закономерности массовых случайных событий.

Событие – это результат некоторого испытания. Например, подбрасывание монеты – это испытание, а выпадение герба – событие.

Достоверное событие – это событие, которое обязательно произойдет в результате испытания. Например, если в урне находятся только черные шары, то извлечение черного шара – это достоверное событие. Достоверное событие будем обозначать буквой Ω.

Невозможное событие – это событие, которое заведомо не может произойти в результате испытания. Например, если в урне находятся только черные шары, то извлечение белого шара – невозможное событие. Невозможное событие будем обозначать буквой $\varnothing$.

Случайное событие – это событие, которое в результате испытания может произойти, а может и не произойти. Например, если в урне находятся три белых и пять черных шаров, то извлечение белого шара – случайное событие. Случайные события будем обозначать заглавными латинскими буквами *A*, *B*, *C* и т.д.

События называются *равновозможными*, если в результате испытаний ни одно из них не является более возможным, чем другое. Например, выпадение орла или решки при подбрасывании монетки – это равновозможные события.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает наступление другого события в одном и том же испытании. Например, событие «выпала цифра 3» при подбрасывании игрального кубика несовместно с событием «выпала цифра 6».

События называются *противоположными*, если они несовместны и одно из них обязательно произойдет в результате испытания. Например, выпадение герба или решки при подбрасывании монеты – противоположные события. Если одно из противоположных событий обозначено, например, буквой A, то другое событие принято обозначать той же буквой с чертой, например, $\bar{A}$.

Отметим, что при подбрасывании кубика события «выпала цифра 3» и «выпала цифра 6» не являются противоположными, так как в результате испытания может выпасть цифра, отличная от цифр 3 и 6.

События $A_1, A_2, \dots, A_k$, где k – количество испытаний, образуют *полную группу событий*, если они попарно несовместны и одно из этих событий обязательно произойдет. Например, при бросании игрального кубика события

A_1 – выпала цифра 1;

A_2 – выпала цифра 2;

A_3 – выпала цифра 3;

A_4 – выпала цифра 4;

A_5 – выпала цифра 5;

A_6 – выпала цифра 6

образуют полную группу, так как они попарно несовместны и одно из них обязательно произойдет.

Вероятностью события A называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу n всех равновозможных исходов, образующих полную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Из классического определения вероятности следует:

1. Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$.

2. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\emptyset) = 0$.

3. Вероятность произвольного события: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Пример. Из цифр 2, 6, 7 случайным образом составляют трехзначное число без повторяющихся цифр. Найти вероятность того, что получится:

а) число, кратное 3;

б) число, кратное 5.

Решение.

а) Событие A – трехзначное число делится на 3. Сумма цифр 2 + 6 + 7 = 15 делится на 3, следовательно, при любой расстановке цифр полученное число делится на 3, т.е. $P(A) = 1$.

б) Событие A – трехзначное число делится на 5. Среди данных цифр нет 5 и 0, следовательно, при любой расстановке цифр полученное число не делится на 5, т.е. $P(A) = 0$.

Ответ: а) 1; б) 0.

Пример. На экзамен вынесено 60 вопросов, студент не выучил 6 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

Решение. Событие A – на экзамене попался выученный вопрос. Число всех равновозможных исходов – общее число билетов $n = 60$.

Число благоприятных исходов – число выученных билетов:

$$m = 60 - 6 = 54.$$

Вероятность того, что студенту попадет выученный билет:

$$P(A) = \frac{54}{60} = 0{,}9.$$

Ответ: 0,9.

Пример. Найти вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 10 до 19 включительно делится на три.

Решение. Событие A – выбранное число делится на 3. Количество всех равновозможных $n = 10$. На 3 делятся числа 12, 15, 18. Таким образом, число благоприятных исходов $m = 3$. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Пример. Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Сережа и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Сережа и Маша окажутся рядом?

Решение. Событие A – Маша и Сережа окажутся рядом. Маша может встать на любое из 8 мест, так как одно уже занял Сережа, т.е. число всех равновозможных исходов $n = 8$. Благоприятных событий будет всего два из восьми, так как она может встать по обе стороны от Сережи. Значит, $m = 2$. Следовательно,

$P(A) = 2/8 = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

Пример. В классе 15 учеников. Из них 12 умеют кататься на лыжах, 8 – на коньках. Предполагается, что учеников, которые совсем не умеют кататься, в школе нет. Найти вероятность того, что наудачу выбранный ученик умеет кататься и на лыжах, и на коньках.

Решение. Событие A – наудачу выбранный ученик умеет кататься и на лыжах, и на коньках. Число всех равновозможных исходов – количество учеников в классе $n = 15$.

На лыжах умеют кататься 12 учеников, значит, не умеют кататься на лыжах

$$15 - 12 = 3 \text{ ученика.}$$

На коньках умеют кататься 8 учеников, значит, не умеют кататься на коньках

$$15 - 8 = 7 \text{ учеников.}$$

Следовательно, на коньках и лыжах умеют кататься

$$m = 15 - (7 + 3) = 5 \text{ учеников.}$$

Таким образом, вероятность события A:

$$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: 1/3.

Пример. Монету подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что в последний раз выпадет решка.

Решение. Событие A – в последний раз выпала решка. Построим дерево вариантов (рис. 128).

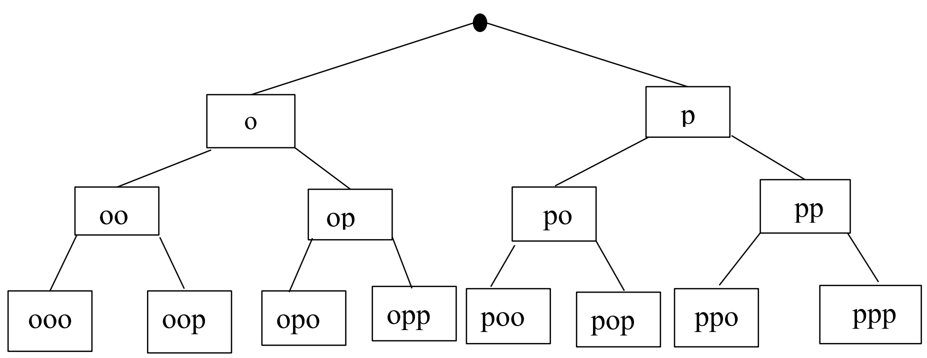


Рис. 128. Дерево вариантов

Буквой «р» обозначено выпадение решки, буквой «о» – выпадение орла. Всего возможно 8 комбинаций, т.е. количество равновозможных исходов $n = 8$. Решка выпадает в последний раз в четырех случаях, т.е. количество благоприятных исходов $m = 4$. Следовательно,

$$P(A) = 4/8 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример. Симметричную игральную кость бросили три раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало три очка»?

Решение. Событие A – хотя бы раз выпало три очка. После трех бросков сумма 6 очков могла получиться лишь при таких наборах очков (без учета порядка следования очков в сумме):

1 + 1 + 4;

1 + 2 + 3;

2 + 2 + 2.

За счет перестановок слагаемых получаем:

114, 141, 411 – 3 исхода;

123, 132, 213, 231, 312, 321 – 6 исходов;

222 – 1 исход.

Всех равновозможных исходов для получения в сумме 6 очков $n = 10$. Число событий, благоприятствующих событию «хотя бы раз выпало 3 очка», m = 6. Следовательно, вероятность этого события:

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

Пример. В городе 48 % взрослого населения мужчины. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин составляет 15 %. Для социологического опроса случайным образом выбран мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Решение. Событие A – выбранный мужчина является пенсионером.

Введем промежуточную переменную x – общее количество мужчин и женщин в городе. Тогда в городе проживает $0{,}48x$ мужчин и $0{,}52x$ женщин. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, значит, общее количество пенсионеров равно $0{,}126x$. Доля пенсионеров среди женщин составляет 15 %, следовательно, общее количество женщин пенсионеров равно

$$0{,}15 \cdot 0{,}52x = 0{,}078x.$$

Количество мужчин-пенсионеров, очевидно, равно

$$0{,}126x - 0{,}078x = 0{,}048x.$$

Вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером» равна

$$P(A) = \frac{0{,}048x}{0{,}48x} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

7.2. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что количество возможных исходов испытания конечно. На практике возможны случаи, что число возможных исходов бесконечно. Чтобы преодолеть этот недостаток классического определения, вводят понятие геометрической вероятности – вероятности попадания точки в область.

Пусть, например, плоская фигура g составляет часть плоской фигуры G. На фигуру G наудачу брошена точка. Предполагается, что вероятность события A – попадание брошенной точки на фигуру g – пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно G, ни от формы g. В этих предположениях вероятность попадания точки в область g определяется равенством

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}.$$

Пример. Внутри круга радиусом $R = 5$ см расположен круг радиусом $r = 1$ см. Найдите вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное данными кругами.

Решение. Событие A – попадание точки в кольцо. Площадь кольца:

$$S_g = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(5^2 - 1^2) = 24\pi.$$

Площадь большого круга:

$$S_G = \pi R^2 = \pi 5^2 = 25\pi.$$

Искомая вероятность события A:

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{24\pi}{25\pi} = \frac{24}{25} = 0{,}96.$$

Ответ: 0,96.

Приведенное определение является частным случаем общего определения геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через m, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу в область g – часть области G, определяется так:

$$P(A) = \frac{m_g}{m_G}.$$

Пример. На отрезок [1; 5] случайным образом поставлена точка. Найти вероятность того, эта точка окажется внутри отрезка [2; 4].

Решение. Событие A – попадание точки внутрь отрезка [2; 4]. Найдем длины отрезков:

$$l_g = 4 - 2 = 2; \;\; l_G = 5 - 1 = 4.$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{l_g}{l_G} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

7.3. Теоремы сложения и умножения

Суммой событий A и B называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: A или B. Обозначение: $A + B$.

Пусть события A и B – несовместные, причем вероятности этих событий известны. Вероятность наступления одного их двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара:

$$P(A) = \frac{10}{30} = 1/3.$$

Вероятность появления синего шара:

$$P(B) = \frac{5}{30} = 1/6.$$

События A и B – несовместные, следовательно,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1/2.

Пример. Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Событие A – чайник прослужит меньше двух лет, но больше года. Вероятность события $P(A)$ требуется найти.

Событие B – чайник прослужит больше двух лет. Вероятность события: $P(B) = 0{,}89$.

Событие $(A + B)$ – чайник прослужит больше года. Вероятность события равна $P(A + B) = 0{,}97$

События A и B – несовместные, следовательно,

$P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Подставив числовые значения, получим

$0{,}97 = P(A) + 0{,}89$.

$P(A) = 0{,}97 - 0{,}89 = 0{,}08$.

Ответ: 0,08.

Теорема сложения справедлива также и для произвольного числа попарно несовместных событий. Вероятности событий, образующих полную группу, удовлетворяют условию

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots P(A_k) = 1.$$

В частности, вероятности противоположных событий связаны равенством

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример. Бросается игральная кость. Какова вероятность того, что не выпадет цифра 3?

Решение. Пусть событие A – выпала цифра 3. Тогда противоположное событие $\bar{A}$ – не выпала цифра 3. Найдем вероятность события A.

Число всех равновозможных исходов – общее количество цифр на гранях игральной кости $n = 6$.

Число благоприятных исходов – выпадение цифры 3 на грани игральной кости $m = 1$.

Вероятность события A – выпала цифра 3:

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Вероятность противоположного события $\bar{A}$ – не выпала цифра 3:

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Произведением событий A и B называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают одновременно оба события: A и B. Обозначение: AB.

События A и B *называются независимыми*, если реализация одного из них никак не влияет на вероятность наступления другого события. Например, вероятности поражения цели первым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы. Вероятность одновременного наступления независимых событий A и B равна произведению вероятностей событий A и B:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, а вероятность попадания при стрельбе из второго орудия – 0,6. Найдите вероятность попадания одновременного попадания в цель обоими орудиями при залпе.

Решение. Событие A – попадание из первого орудия. Вероятность попадания равна $P(A) = 0{,}8$. Событие B – попадание из второго орудия. Вероятность попадания равна $P(B) = 0{,}6$. Событие AB – попадание в цель обоими орудиями. События A и B – независимые, следовательно, вероятность попадания при залпе $P(AB)$ равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$$

Ответ: 0,48.

Пример. В урне находятся три белых и два черных шара. Из урны извлекаются два шара, причем после извлечения первого шара он возвращается обратно в урну. Какова вероятность того, что будут извлечены два белых шара?

Решение. Событие A – в первый раз извлечен белый шар. Вероятность события A:

$$P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6\,.$$

Событие B – во второй раз извлечен белый шар. Вероятность события B равна

$$P(B) = \frac{3}{5} = 0{,}6\,.$$

Событие AB – извлечены два белых шара. Вероятность события AB:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36.$$

Ответ: 0,36.

Пример. Стрелок в тире стреляет по мишени. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,3 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы вероятность поражения цели была не меньше 0,6?

Решение. Сначала найдем вероятность промаха при каждом отдельном выстреле:

$$1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Пусть k – количество патронов, которое надо дать стрелку. По теореме об умножении независимых событий вероятность промаха при k выстрелах равна $0{,}7^k$. Следовательно, вероятность поражения цели при k выстрелах равна $1 - 0{,}7^k$. По условиям задачи $1 - 0{,}7^k \geq 0{,}6$. Найдем наименьшее целое решение этого неравенства:

– при $k = 1$:

$$1 - 0{,}7 = 0{,}3 < 0{,}6;$$

– при $k = 2$:

$$1 - 0{,}7^2 = 0{,}51 < 0{,}6;$$

– при $k = 3$:

$$1 - 0{,}7^3 = 0{,}657 > 0{,}6.$$

Таким образом, стрелку нужно дать три патрона.

Ответ: 3.

В общем случае вероятность одновременного наступления событий A и B вычисляется по формуле

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Здесь $P_A(B)$ – условная вероятность, т.е. вероятность события B, при условии что событие A уже произошло.

Пример. В урне находятся три белых и два черных шара. Из урны извлекаются два шара, причем после извлечения первого шара он не возвращается обратно в урну. Какова вероятность того, что будут извлечены два белых шара?

Решение. Событие A – в первый раз извлечен белый шар. Вероятность события:

$$P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6\,.$$

Событие B – во второй раз извлечен белый шар. Вероятность события B, при условии что событие A произошло (в первый раз извлечен белый шар):

$$P_A(B) = \frac{2}{4} = 0{,}5\,.$$

Событие AB – извлечены два белых шара. Вероятность события AB:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Пример. Студент выучил 33 из 45 экзаменационных вопросов. Какова вероятность того, что он знает ответы на предложенные ему экзаменатором два вопроса.

Решение. Событие A – студент знает ответ на первый вопрос. Событие B – студент знает ответ на второй вопрос. Вероятность, что студент знает ответ на первый вопрос:

$$P(A) = 33/45 = 11/15.$$

Вероятность, что студент знает ответ на второй вопрос при условии знания первого, составляет

$$P_A(B) = 32/44 = 8/11.$$

Найдем вероятность события AB:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{11}{15} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{15}.$$

Ответ: 8/15.

Пример. В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Решение. Поскольку синий фломастер извлечен третьим по счету, значит, в первый и второй разы были извлечены красные фломастеры. Пусть событие A – первый раз синий фломастер появится третьим по счету. Найдем вероятность события B – извлечены подряд два красных фломастера.

Вероятность события B_1 – в первый раз извлечен красный фломастер – равна

$$P(B_1) = 4/6 = 2/3.$$

Вероятность события B_2 – во второй раз извлечен красный фломастер при условии, что в первый раз был так же извлечен красный фломастер, – равна

$$P_{B_1}(B_2) = 3/5.$$

Вероятность события B равна

$$P(B) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, искомая вероятность события A равна

$$P(A) = P_B(A)P(B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

Два события называются *совместными,* если наступление одного из них не исключает наступление другого события в одном и том же испытании.

Например, *выпадение* четверки и выпадение четного числа очков при подбрасывании кубика – совместные события.

Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий A или B вычисляется по формуле

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство. Событие A или B наступит, если наступит одно из трех несовместных событий:

$A\bar{B}$ – наступит событие A, событие B не наступит;

$\bar{A}B$ – событие A не наступит, событие B наступит;

AB – наступят события A и B.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB).$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: $A\bar{B}$ или AB. По теореме сложения несовместных событий имеем

$$P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB).$$

Отсюда

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB).$$

Аналогично имеем

$$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB).$$

Отсюда

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB).$$

Подставив выражения для $P(A\bar{B})$ и $P(AB)$ в правую часть формулы для $P(A + B)$, получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

При использовании этой формул следует иметь в виду, что события A и B могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Для зависимых событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B).$$

Здесь $P_A(B)$ – условная вероятность, т.е. вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого орудия равна 0,8, а вероятность попадания при стрельбе из второго орудия – 0,6. Найдите вероятность того, что хотя бы одно из орудий попадет в цель при залпе.

Решение. Событие A – попадание из первого орудия. Вероятность попадания: $P(A) = 0{,}8$.

Событие B – попадание из второго орудия. Вероятность попадания: $P(B) = 0{,}6$.

События A и B – независимые, следовательно,

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$$

Найдем вероятность попадания в цель хотя бы одним из орудий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92.$$

Эту задачу можно было решить иначе. Действительно, найдем сначала вероятность противоположного события, т.е. оба орудия не попали в цель:

$$P(\overline{AB}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08.$$

По теореме о сумме противоположных событий получим

$$P(AB) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92.$$

Ответ: 0,92.

7.4. Формула полной вероятности

Пусть событие A может произойти лишь в результате осуществления одного из событий B_1 или B_2, образующих полную группу. Вероятность события A в этом случае вычисляется по формуле полной вероятности

$$P(A) = P_{B_1}(A)P(B_1) + P_{B_2}(A)P(B_2),$$

где $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$ – условные вероятности события A; $P(B_1)$, $P(B_2)$ – вероятности событий B_1 и B_2 соответственно. События B_1 и B_2 называют гипотезами.

Пример. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,7, а второго – 0,6. Найдите вероятность того, что наудачу взятая деталь (из набора, взятого наудачу) – стандартная.

Решение. Введем обозначения:

событие A – извлечена стандартная деталь;

событие B_1 – деталь извлечена из первого набора;

событие B_2 – деталь извлечена из второго набора.

События B_1 и B_2 – равновозможны, следовательно,

$$P(B_1) = P(B_2) = 1/2.$$

По условию событие A может наступить, если наступит одно из событий:

событие AB_1 – стандартная деталь извлечена из первого набора;

событие AB_2 – стандартная деталь извлечена из второго набора.

События AB_1 и AB_2 – несовместные, следовательно,

$$P(AB_1 + AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2).$$

Вероятность события AB_1 равна

$$P(AB_1) = P(B_1)P_{B_1}(A),$$

где $P_{B_1}(A)$ – вероятность извлечения стандартной детали из первого набора. По условиям задачи вероятность этого события равна 0,7.

Вероятность события AB_2 равна

$$P(AB_2) = P(B_2)P_{B_2}(A),$$

где $P_{B_2}(A)$– вероятность извлечения стандартной детали из второго набора. По условиям задачи вероятность этого события равна 0,6.

Таким образом, вероятность события A составляет

$$P(A) = P_{B_1}(A)P(B_1) + P_{B_2}(A)P(B_2).$$

Подставив числовые значения, получим

$$P(A) = 0{,}7 \cdot 1/2 + 0{,}6 \cdot 1/2 = 0{,}65.$$

Ответ: 0,65.

Формула полной вероятности может быть обобщена на случай k гипотез:

$$P(A) = P_{B_1}(A)P(B_1) + P_{B_2}(A)P(B_2) + \cdots + P_{B_k}(A)P(B_k).$$

Пример. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 5 черных шаров, во второй – 10 белых и в третьей – 10 черных шаров. Наудачу выбирается одна урна, и из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар черный?

Решение. Рассмотрим событие A – из наугад выбранной урны будет извлечён черный шар. Данное событие может произойти или не произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:

B_1 – будет выбрана 1-я урна;

B_2 – будет выбрана 2-я урна;

B_3 – будет выбрана 3-я урна.

Поскольку урна выбирается наугад, то выбор любой из трех урн равновозможен, следовательно,

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

В первой урне 4 + 7 = 11 шаров. Вероятность извлечения черного шара при условии, что будет выбрана 1-я урна, равна

$$P_{B_1}(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Во второй урне только белые шары, поэтому в случае ее выбора появление черного шара становится *невозможным*:

$$P_{B_2}(A) = 0.$$

И, наконец, в третьей урне одни черные шары, а значит, соответствующая условная вероятность извлечения черного шара составит

$$P(A/B_3) = 1.$$

По формуле полной вероятности находим вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен черный шар:

$$P(A) = \frac{1}{3}0{,}5 + \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}1 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

7.5. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить в результате появления одного из несовместных событий B_1, B_2, образующих полную группу. При условии, что событие A уже произошло, вероятности гипотез B_1 и B_2 *переоцениваются* по формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}; \quad P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)},$$

где $P(B_1)$, $P(B_2)$ – это априорные (оцененные до испытания) вероятности; $P_A(B_1), P_A(B_2)$ – это апосториорные (оцененные после испытания) вероятности.

Пример. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,7, а второго – 0,6. Наудачу взятая деталь (из набора взятого наудачу) оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь:

а) из первой партии,

б) из второй партии.

Решение. Введем обозначения:

событие A – извлечена стандартная деталь;

событие B_1 – деталь извлечена из первого набора;

событие B_2 – деталь извлечена из второго набора.

По условиям задачи имеем

$P(B_1) = P(B_2) = 1/2\,;\ P_{B_1}(A) = 0{,}6;\ \ P_{B_2}(A) = 0{,}6.$

Полная вероятность события A:

$$P(A) = P_{B_1}(A)P(B_1) + P_{B_2}(A)P(B_2) = 0{,}7 \cdot 1/2 + 0{,}6 \cdot 1/2 = 0{,}65.$$

а) Найдем вероятность того, что деталь извлечена из первого набора:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 0{,}7}{0{,}65} = \frac{7}{13} \approx 0{,}54.$$

б) Найдем вероятность того, что деталь извлечена из второго набора:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 0{,}6}{0{,}65} = \frac{6}{13} \approx 0{,}46.$$

Отметим, что вероятности $P(B_1/A)$ и $P(B_2/A)$ удовлетворяют условию

$$P_A(B_1) + P_A(B_2) = 1.$$

Как видно, до испытания вероятность гипотезы B_1 равнялась 0,5, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы изменилась и стала равна 0,54.

В заключение параграфа отметим, что формулы Байеса можно обобщить на k гипотез.

7.6. Применение комбинаторики в теории вероятностей

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий количество комбинаций, которые можно составить из элементов заданного конечного множества.

Правило умножения. Если объект M можно выбрать m способами, а объект N можно выбрать n способами, то пара объектов (M, N) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Пример. В буфете имеется 4 вида печенья и 3 вида сока. Сколько существует вариантов выбора сока с печеньем?

Решение. По правилу произведения имеется $4 \cdot 3 = 12$ вариантов выбора сока с печеньем.

Ответ: 12.

Отметим, что правило умножения верно не только для двух, но и для трех, и для четырех, и т.д. объектов.

Пример. В семье четыре человека: папа, мама, сын и дочь. Сколькими способами можно рассадить членов семьи на четырех стульях?

Решение. Предположим, что первым садится папа. У него имеется 4 варианта выбора стула. Второй садится мама: она выбирает стул из 3 оставшихся. У сына уже будет 2 варианта, а у дочери – 1 вариант. По правилу умножения получаем, что всего имеется

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

различных способов рассаживания.

Ответ: 24.

Произведение первых n подряд идущих натуральных чисел обозначают $n!$ и называют «эн факториал»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Основное свойство факториала:

$$n! = (n-1)!\, n.$$

Например, $4! = 3! \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$.

Перестановками из n элементов называются множества, составленные из данных n элементов с учетом порядка их следования. Число перестановок P_n из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!$$

Пример. В группе 10 студентов, из которых нужно выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Старосту можно выбрать 10 способами, а его заместителя – 9 способами. Следовательно, старосту и его заместителя можно выбрать $10 \cdot 9 = 90$ способами.

Ответ: 90.

Размещениями из n элементов по k называются множества, составленные из данных n элементов по k элементов в каждом с учетом порядка их следования. Число размещений A_n^k вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)).$$

При помощи факториала формулу для вычисления числа размещений A_n^k можно представить в виде

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Например,

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Отметим, что при $k = n$ получаем $A_n^n = P_n$.

Сочетаниями из n элементов по k называются множества, составленные из данных n элементов по k элементов в каждом без учета порядка их следования. Число сочетаний обозначается символом C_n^k . Число сочетаний из n элементов по k в P_k раз меньше числа размещений A_n^k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Подставив в последнюю формулу выражения для A_n^k и P_k, получим

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Например,

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10.$$

Пример. В группе 10 студентов, из которых нужно выбрать двух человек для участия в конференции. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. В данном примере порядок следования элементов несущественен, т.е. количество способов выбора студентов на конференцию равно числу сочетаний из 10 элементов по 2:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 8!} = 90/2 = 45.$$

Ответ: 45.

При $k = n$ получим $C_n^n = 1$.

В формуле $n!$ по определению принимается, что $0! = 1$. При такой договоренности, в частности, получается, что

$$C_n^0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Справедлива формула

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Например,

$$C_{15}^{13} = C_{15}^2 = 105.$$

Для произвольных чисел a и b и любого натурального n имеет место формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n,$$

называемая биномом Ньютона. По этой причине для чисел C_n^k , кроме названия «число сочетаний из n по k», часто используют термин «биноминальные коэффициенты».

Частными случаями этой формулы являются известные из элементарного курса алгебры формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2;$

$(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$

Рассмотрим примеры использования формул комбинаторики в задачах теории вероятностей.

Пример. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Карточки перемешиваются. Наудачу, одну за другой достают две карточки и укладывают их в порядке появления, затем читается двузначное число. Какова вероятность, что получится число 45?

Решение. Событие A – получено число 45. Число благоприятных исходов: $m = 1$. Для нахождения числа всех равновозможных исходов n воспользуемся формулой числа размещений:

$$n = A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3!} = 20.$$

Таким образом, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05.$$

Ответ: 0,05.

Пример. Буквы Р, Т, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в произвольном порядке и прикладывает их друг к другу. Какова вероятность того, что получится слово «ТОР»?

Решение. Событие A – получилось слово «ТОР». Число благоприятных исходов равно $m = 1$. Для нахождения числа всех равновозможных исходов n воспользуемся формулой числа перестановок:

$$n = P_3 = 3! = 6.$$

Таким образом, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: 1/6.

Пример. Из 10 студентов половина имеет спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

Решение. Событие A – выбранные 3 студента имеют спортивные разряды. Найдем число всех равновозможных исходов:

$$n = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6\cdot 7!} = 120.$$

Найдем количество благоприятных исходов:

$$m = C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 2} = 10.$$

Таким образом, вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: 1/12.

7.7. Формула Бернулли

Пусть производится n независимых повторных испытаний. Вероятность появления события A в каждом испытании одинакова и равна p; вероятность того, что событие A не наступит равна $q = 1 - p$. Вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k (биномиальный коэффициент).

Пример. Стрелок совершает 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,5. Найти вероятность того, что в мишени будет только одна пробоина.

Решение. Здесь $n = 3$; $k = 1$. Найдем коэффициент C_n^k:

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{3!}{1!\,2!} = 3\,.$$

Найдем вероятность противоположного события q:

$$q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Найдем вероятность того, что стрелок попадет только один раз:

$$P_3(1) = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^{3-1} = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}375.$$

Ответ: 0,375.

Пример. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов и известно, что вероятность поразить мишень одним выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Решение. Вероятность поразить мишень одним выстрелом равна 0,5. Значит, вероятность промаха при одном выстреле равна

$$1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Следовательно, вероятность, того, что стрелок промахнется оба раза, равна

$$q = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Значит, вероятность попадания с двух выстрелов равна

$$p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Вероятности событий «стрелок поразит ровно три мишени» и «стрелок поразит ровно две мишени» из пяти мишеней вычисляются по формулам соответственно:

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 (1-p)^2,$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 (1-p)^3.$$

Найдем отношение:

$$\frac{P_5(3)}{P_5(2)} = \frac{C_5^3 p^3 (1-p)^2}{C_5^2 p^2 (1-p)^3} = \frac{p}{1-p} = \frac{0{,}75}{0{,}25} = 3.$$

Ответ: 3.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие произойдет от k_1 до k_2 раз, равна

$$P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + \dots + P_n(k_2).$$

Пример. Найти вероятность того, что событие A появится в четырех независимых испытаниях менее трех раз, если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,2.

Решение. Здесь $n = 4, p = 0,2, q = 1 - p = 0,8$. Величина k может принимать значения 0, 1 и 2. Следовательно, вероятность того, что событие A наступит менее трех раз, равна

$$P_4(0) + P_4(1) + P_4(2).$$

Найдем величины $P_4(0), P_4(1)$ и $P_4(2)$:

$$P_4(0) = C_4^0 0,2^0 0,8^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0,4096 = 0,4096;$$
$$P_4(1) = C_4^1 0,2^1 0,8^3 = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,512 = 0,4096;$$
$$P_4(2) = C_4^2 0,2^2 0,8^2 = 6 \cdot 0,04 \cdot 0,64 = 0,1536.$$

Значит,

$$P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 0,4096 + 0,4096 + 0,1536 = 0,9728.$$

Ответ: 0,9728.

Число k_0 называется наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или не меньше) вероятности остальных возможных исходов. Наивероятнейшее число определяют из двойного неравенства

$$np - q \leq k_0 < np + p.$$

Пример. Производится 100 испытаний. Вероятность события A равна 0,2. Найти наивероятнейшее число наступлений события A.

Решение. Здесь $n = 100;\ p = 0,2$. Следовательно,

$$np = 20;\ q = 1 - p = 0,8.$$

Найдем k_0:

$$20 - 0,8 \leq k_0 < 20 + 0,2;\ 19,2 \leq k_0 < 20,2; k_0 = 20.$$

Ответ: 20.

7.8. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Если при больших значениях n величина np мала, то для вычисления вероятности $P_n(k)$ используется приближенная формула Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^n}{k!} e^{-\lambda} ,$$

где $\lambda = np$.

Формула Пуассона выражает закон распределения вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий. На практике этой формулой пользуются при $np \leq 10$.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. По условию $n = 5000$; $p = 0{,}0002$; $k = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1.$$

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}06 .$$

Ответ: 0,06.

Если n велико, а вероятность p не слишком мала, то для приближенного вычисления вероятности $P_n(k)$ можно использовать локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x)$ – функция Гаусса,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Пример. Найти вероятность того, что событие *А* наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $n = 400$; $k = 80$; $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$. По формуле Лапласа

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{8}.$$

Вычислим определяемое данными задачи значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{800 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{0}{8} = 0.$$

Определяем значение функции Гаусса при найденном x:

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}3989.$$

Искомая вероятность:

$$P_{400}(80) = \frac{0{,}3989}{8} = 0{,}04986.$$

Ответ: 0,04986.

Если n велико, то для приближенного вычисления вероятности того, что событие появится от k_1 до k_2 раз, можно воспользоваться интегральной теоремой Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Таблица значений функции Лапласа приведена в приложении. На практике локальной и интегральной теоремами Лапласа пользуются при выполнении условия $npq \geq 10$.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся непроверенными от 70 до 100 деталей.

Решение. Здесь $p = 0{,}2$; $q = 0{,}8$; $n = 400$; $k_1 = 70$; $k_2 = 100$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70 \leq k \leq 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_1 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70 \leq k \leq 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

По таблице значений функции Лапласа

$$\Phi(2{,}5) = 0{,}4938;\ \ \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Искомая вероятность:

$$P_{400}(70 \leq k \leq 100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Ответ: 0,8882.

7.9. Вероятность отклонения относительной частоты от теоретической вероятности

Вероятность того, что в n независимых испытаний абсолютная величина отклонения относительной частоты m/n от теоретической вероятности p не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$, приближенно можно вычислить по формуле

$$P(|m/n - p| \leq \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Эта формула является следствием интегральной теоремы Лапласа.

Пример. В результате многолетнего статистического исследования установлена вероятность рождения мальчика $p = 0{,}52$. С какой вероятностью можно утверждать, что среди следующей тысячи новорожденных относительная частота появления мальчика отклонится от соответствующей вероятности не более чем на 0,02?

Решение. Используем формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

По условию $p = 0{,}52$; $n = 1000$; $\varepsilon = 0{,}02$. Подставив числовые значения в формулу, получим

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0{,}52\right| \leq 0{,}02\right) = 2\Phi\left(0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0{,}52 \cdot 0{,}48}}\right) = 2\Phi(1{,}27).$$

По таблице значений функции Лапласа имеем

$$\Phi(1{,}27) = 0{,}3980.$$

Следовательно, искомая вероятность отклонения частоты от соответствующей вероятности равна

$$P\left(\left|\frac{m}{1000}-0{,}52\right|\le 0{,}02\right)=2\cdot 0{,}3980=0{,}796.$$

Ответ: 0,796.

7.10. Случайные величины

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин.

Дискретной случайной величиной называют случайную величину, которая с некоторой вероятностью принимает отдельные, изолированные значения. Число возможных значений может быть конечным или бесконечным, но счетным. Примеры дискретных случайных величин: число бракованных изделий в данной партии деталей, число телефонных звонков, число произведенных выстрелов до первого попадания в мишень, количество студентов, сдавших экзамен.

Правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины x_i и их вероятностями p_i, называется *законом распределения дискретной случайной величины*. Для дискретной случайной величины его обычно задают в виде таблицы:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Эта таблица называется *законом распределения случайной величины.*

Так как случайная величина обязательно принимает одно из своих возможных значений, то выполняется равенство

$$p_1+p_2+\cdots p_n=1$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n.$$

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\big(x_i - M(X)\big)^2 p_i.$$

Дисперсия служит мерой рассеяния (разброса) значений дискретной случайной величины X.

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться формулой

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \big(M(X)\big)^2.$$

Пример. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, закон распределения которой задан таблицей

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

Решение.

$M(X) = 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}1 = 8;$

$D(X) = (5-8)^2 \cdot 0{,}2 + (7-8)^2 \cdot 0{,}5 +$

$+(10-8)^2 \cdot 0{,}2 + (15-8)^2 \cdot 0{,}1 = 8;$

$\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

Ответ: $M(X) = 8;\ D(X) = 8;\ \sigma(X) = 2\sqrt{2}.$

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого промежутка. Примеры непрерывных случайных величин: срок службы телевизора, дальность полета снаряда, расход электроэнергии за месяц.

Очевидно, что непрерывную случайную величину нельзя задать перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Общий способ задания как дискретных, так и непрерывных случайных величин состоит во введении функции распределения случайных величин.

Функция $F(x)$, определяющая для каждого числа x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, называется *функцией распределения*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Плотностью вероятности $f(x)$ называют первую производную от интегральной функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Функцию $f(x)$ часто называют *дифференциальной функцией распределения*.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называют интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\,.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют интеграл

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(X)\big)^2 f(x)dx\,.$$

Для нахождения дисперсии также используют формулу

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \big(M(x)\big)^2\,.$$

Пример. Случайная величина X задана функцией плотности вероятности:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x<1,\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$$

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot 2xdx=\int_{0}^{1} x\cdot 2xdx=2\int_{0}^{1} x^2dx=\frac{2}{3}x^3|_0^1=\frac{2}{3}.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot 2xdx=\int_{0}^{1} x^2\cdot 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}x^4|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

Ответ: $M(X)=\frac{2}{3}$; $D(X)=1/18$.

Непрерывная случайная величина X, все возможные значения которой заполняют некоторый интервал $(a;b)$, называется *нормально распределенной*, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание; σ – среднеквадратическое отклонение непрерывной случайной величины X. Таким образом,

$$M(X)=a;\ D(X)=\sigma^2.$$

График плотности нормального распределения (кривая Гаусса) изображен на рис. 129.

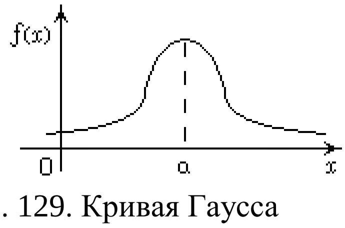


Рис. 129. Кривая Гаусса

Пример. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно $a=2$, среднеквадратическое отклонение составляет $\sigma=3$. Записать функцию плотности вероятности для данных значений математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

Решение. Подставив заданные значения a и σ в формулу плотности вероятности, получим

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 3^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}.$$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$.

Главная особенность, выделяющая нормальный закон распределения среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому при достаточно общих предположениях приближаются другие законы распределения.

7.11. Статистическое распределение и функция распределения выборки

Генеральной совокупностью называют вся подлежащая исследованию совокупность объектов. Полное исследование генеральной совокупности обычно невозможно или неэкономно. *Выборочной совокупностью*, или *выборкой*, называют часть объектов, которая отобрана для изучения из генеральной совокупности.

Объемом совокупности называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 объектов отобрано для обследования 100 объектов, то объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 100$.

С помощью выборки оценивают свойства генеральной совокупности. Чтобы оценки были достоверными, выборка должна быть *представительной* (репрезентативной), т.е. ее свойства должны совпадать или быть близкими к свойствам генеральной совокупности.

Представительную выборку можно получить, если выбирать объекты для исследований *случайно*, т.е. гарантировать всем объектам генеральной совокупности одинаковую вероятность подвергнуться исследованию.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем каждая величина x_i наблюдалась n_i раз $(i = 1, 2, \dots k)$. Наблюдаемые значения x_i называются *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*. Числа n_i называются *частотами*, а их отношения к объему выборки n называются *относительными частотами*:

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант и соответствующих им частот (или относительных частот).

Пример. Дана выборка: 2, 2, 6, 12, 6, 6, 6, 12, 12, 6, 2, 6, 6, 6, 12, 12, 12, 12, 6, 6. Написать ее статистическое распределение.

Решение. Составляем вариационный ряд: 2, 6, 12. Подсчитываем частоты:

• варианта 2 встречается три раза,

• варианта 6 – десять раз,

• варианта 12 – семь раз.

Объем выборки $n = 3 + 10 + 7 = 20$.

Статистическое распределение выборки имеет вид

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Пусть известно статистическое распределение выборки количественного признака X. Введем обозначения: n_x – число вариант, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x; n – объем выборки (общее число наблюдений).

Функцией распределения выборки (эмпирической функцией распределения) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$, т.е.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Пример. Построить функцию распределения выборки по данному статистическому распределению выборки:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Решение. Найдем объем выборки:

$$n = 12 + 18 + 30 = 60.$$

Наименьшая варианта равна 2, значит,

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \leq 2.$$

Значение $x_1 = 2$ наблюдалось 12 раз, следовательно,

$$F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2 \text{ при } 2 < x \leq 6.$$

Значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 6$ наблюдались 12 + 18 = 30 раз, следовательно,

$$F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5 \text{ при } 6 < x \leq 10.$$

Поскольку $x_3 = 10$ – наибольшее значение варианты, то

$$F^*(x) = 1 \text{ при } x > 10.$$

Таким образом, функция распределения выборки имеет вид

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 2, \\ 0{,}2 \text{ при } 2 < x \leq 6, \\ 0{,}5 \text{ при } 6 < x \leq 10, \\ 1 \text{ при } x > 10. \end{cases}$$

7.12. Полигон и гистограмма частот

Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots (x_k, n_k)$. Например, для статистического распределения

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

полигон частот имеет вид (рис. 130)

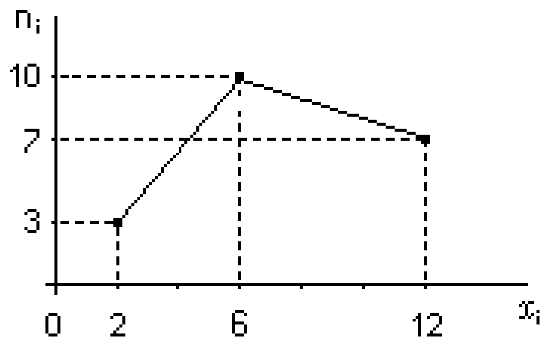


Рис. 130. Полигон частот

Полигоном относительных частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \dots, (x_k, w_k)$.

Статистическое распределение можно также задавать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот. В этом случае интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения вариант, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h. В качестве частоты, соответствующей частичному интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h. Высоты равны отношению n_i/h, где n_i – сумма частот вариант, попавших в -й интервал. Отношение n_i/h называется *плотностью частоты*. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки. Например, для распределения выборки

Частичный интервал	Сумма частот	Плотность частоты
5–10	4	0,8
10–15	6	1,2
15–20	16	3,2
20–25	36	7,2
25–30	24	4,8
30–35	10	2,0
35–40	4	0,8

гистограмма относительных частот имеет вид (рис. 131)

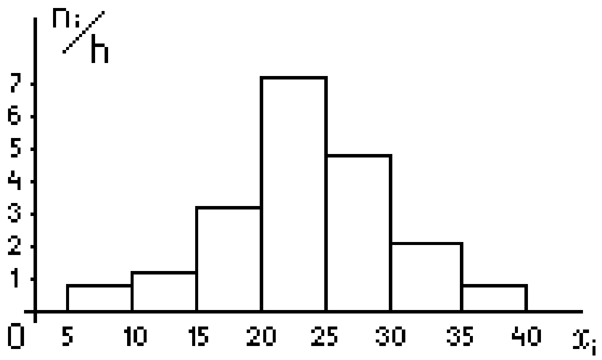


Рис. 131. Гистограмма частот

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению w_i/h, которое называется *плотностью относительной частоты*. Очевидно, площадь гистограммы относительных частот равна единице.

7.13. Числовые характеристики выборки

Пусть наблюдаются варианты $x_1, x_2, \dots, x_k$ с частотами $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно. Основными числовыми характеристиками выборки служат:

выборочное среднее

$$\overline{m} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n}$$

и *выборочная дисперсия*

$$\overline{s}^2 = \frac{(x_1 - \overline{m})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{m})^2 \cdot n_2 + \cdots + (x_k - \overline{m})^2 \cdot n_k}{n}.$$

Здесь $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ – объем выборки.

Пример. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную среднюю $\overline{m}$ и выборочную дисперсию $\overline{s}^2$.

Решение. Найдем объем выборки:

$$n = 20 + 15 + 10 + 5 = 50.$$

Вычислим выборочное среднее:

$$\overline{m} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{50} = 2.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$\overline{s}^2 = \frac{(1-2)^2 \cdot 20 + (2-2)^2 \cdot 15 + (3-2)^2 \cdot 10 + (4-2)^2 \cdot 5}{50} = 1.$$

Ответ: $\overline{m} = 2$; $\overline{s}^2 = 1$.

Стандартное (среднеквадратичное) отклонение определяется как квадратный корень из дисперсии:

$$\overline{s} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{m})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \overline{m})^2 \cdot n_2 + \cdots + (x_k - \overline{m})^2 \cdot n_k}{n}}.$$

Модой (Mo) называется варианта, которая имеет наибольшую частоту. Например, мода статистического распределения выборки, заданной таблицей

x_i	1	4	7	9
n_i	5	1	20	6

равна $Mo = 7$.

Медианой (Me) называется варианта, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариант.

Если число вариант нечетно, то медиана – значение серединного элемента, если число вариант четно – среднее арифметическое двух серединных элементов.

Например, медиана статистического распределения выборки

x_i	2	3	5	6	7
n_i	1	1	1	1	1

равна $Me = 5$.

Для статистического распределения выборки

x_i	2	3	5	6	7	9
n_i	1	1	1	1	1	1

медиана равна

$$Me = \frac{5+6}{2} = 5{,}5.$$

Размахом варьирования R называется разность между наибольшей и наименьшей вариантами:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Например, для статистического распределения выборки

x_i	1	3	4	5	10
n_i	1	2	1	3	1

размах варьирования равен

$$R = 10 - 1 = 9.$$

7.14. Упражнения

1. В сборнике билетов по биологии всего 55 билетов, в 11 из них встречается вопрос по ботанике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику будет вопрос по ботанике.

Ответ: 0,2.

2. На клавиатуре телефона 10 цифр – от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет четной?

Ответ: 0,5.

3. В группе 20 студентов знают английский язык, 15 – французский язык. Всего в группе – 25 человек. Известно, что каждый студент знает по крайней мере один из этих двух иностранных языков. Найти вероятность того, что наудачу выбранный студент знает оба языка.

Ответ: 0,4.

4. Симметричную игральную кость бросили три раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало четыре очка»?

Ответ: 0,3.

5. В городе 52 % взрослого населения женщины. Пенсионеры составляют 11 % взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин составляет 20 %. Для социологического опроса случайным образом выбран мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: 0,0125.

6. Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19.

Ответ: 0,38.

7. Стрелок стреляет по мишени два раза. Вероятность промаха при одном выстреле равна 0,2. Какова вероятность того, что стрелок промахнется оба раза?

Ответ: 0,04.

8. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: 0,81.

9. Стрелок в тире стреляет по мишени. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,4 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы вероятность поражения цели была не меньше 0,75?

Ответ: 3.

10. В ящике три красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

Ответ: 0,15.

11. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35 % этих стекол, вторая – 65 %. Первая фабрика выпускает 3 % бракованных стекол, а вторая – 5 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ: 0,043.

12. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

Ответ: 0,84.

13. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,5, а второго – 0,3. Наудачу взятая деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь: а) из первой партии; б) из второй партии.

Ответ: а) 0,625; б) 0,375.

14. На трех карточках написаны цифры 3, 4, 5. Карточки перемешиваются. Наудачу, одну за другой достают две карточки и укладывают их в порядке появления, затем читается двузначное число. Какова вероятность, что получится число 35?

Ответ: 1/6.

15. В классе учится 10 мальчиков и 10 девочек. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 ученика – мальчики?

Ответ: 2/19.

16. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых испытаниях менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события A равна 0,3.

Ответ: 0,52822.

17. Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более трех выстрелов и известно, что вероятность поразить мишень одним выстрелом равна 0,5. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно три мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно две мишени»?

Ответ: 7.

18. Производится 15 независимых испытаний. В каждом из них вероятность наступления события A равна 0,9. Найдите наивероятнейшее число появлений события A.

Ответ: 14.

19. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 4 раза в 1000 испытаний, если вероятность появления этого события в каждом испытании равно 0,005.

Ответ: 0,175.

20. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Ответ: 0,0006.

21. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

а) не менее 70 и не более 80 раз;

б) не более 70 раз.

Ответ: а) 0,745; б) 0,125.

22. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний $p=$ 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Ответ: 0,182.

23. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, закон распределения которой задан таблицей

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Ответ: $M(X)=3{,}9;\ D(X)=1{,}89;\ \sigma=1{,}37.$

24. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятности $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 0{,}5,\ \ 0<x\le 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Ответ: $M(X)=1;\ D(X)=1/3.$

25. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно $a = 4$ и среднеквадратическое отклонение равно $\sigma = 1$. Записать функцию плотности вероятности для данных значений математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{2}}$.

26. В результате выборки получены числа: 7, 7, 7, 2, 5, 5, 5, 7, 7, 7.

Построить статистическое распределение выборки.

27. Выборка задана в виде распределения частот:

x	2	5	7
n	1	3	6

Построить эмпирическую функцию распределения.

28. Выборка задана в виде распределения частот:

x	1	3	5
n	2	6	2

Построить полигон относительных частот выборки.

29. Выборка задана в виде

Интервал	Частота
1–3	3
3–5	4
5–7	3

Построить гистограмму плотности относительных частот.

30. Выборка задана в виде распределения частот:

x	0	2	4
n	2	3	5

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

31. Выборка задана в виде распределения частот:

x	3	5	7	9	11
n	1	2	4	2	1

Найти моду выборки.

32. Выборка задана в виде распределения частот

x	3	5	7	9	11
n	1	1	1	1	1

Найти медиану и размах выборки.

8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

8.1. Стандартные текстовые задачи

Пример. В сосуд, содержащий 4 литра 16-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 4 литра воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение. Найдем объем вещества:

$$\frac{16}{100} \cdot 4 = 0{,}64 \text{ (л)}.$$

Найдем объем жидкости:

4 + 4 = 8 (л).

Найдем концентрацию вещества:

$$\frac{0{,}64}{8} \cdot 100 = 8\ \%.$$

Ответ: 8 %.

Пример. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10 % никеля, второй – 30 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Решение. Пусть x – масса первого сплава, а y – масса второго сплава.

По условиям задачи имеем

$$x + y = 200.$$

Масса никеля в первом сплаве равна $0{,}1x$.

Масса никеля во втором сплаве равна $0{,}3y$.

Масса никеля в третьем сплаве: $0{,}25 \cdot 200 = 50$.

Составляем уравнение:

$$0{,}1\,x + 0{,}3y = 50.$$

Таким образом, получаем систему из двух уравнений относительно двух неизвестных x и y:

$$\begin{cases} x + y = 200, \\ 0{,}1\,x + 0{,}3y = 50; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 200, \\ x + 3y = 500. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое уравнение:

$(x - x) + (3y - y) = 500 - 300;$

$2y = 300;\ y = 150.$

$x + 150 = 200;\ x = 50.$

Решив эту систему, получим

$x = 50;\ y = 150.$

Таким образом, масса первого сплава меньше массы второго сплава на

150 – 50 = 100 кг.

Ответ: 100.

Пример. Виноград содержит 90 % влаги, а изюм – 5 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 20 килограммов изюма?

Решение. Найдем массу сухого вещества:

$\frac{95}{100} \cdot 20 = 19$ кг.

Пусть x – масса винограда.

Сухое вещество в винограде составляет

$100 - 90 = 10$ %.

Составим пропорцию:

$\frac{x}{19} = \frac{100}{10}$.

Следовательно,

$x = \frac{100}{10} \cdot 19 = 190$ кг.

Ответ: 190.

Пример. Четыре рубашки дешевле одной куртки на 8 %. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

Решение. Стоимость четырех рубашек составляет 92 % от стоимости куртки.

Следовательно, одна рубашка составляет 23 %.

Пять рубашек составляют $23 \cdot 5 = 115$ %.

Таким образом, пять рубашек дороже куртки на 15 %.

Ответ: 15.

Пример. В среду акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в четверг подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 36 % дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

Решение. Пусть C – первоначальная стоимость акций, а p – искомое количество процентов.

Стоимость акций в среду:

$$C_1 = C + \frac{p}{100} \cdot C = C\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Стоимость акций в четверг:

$$C_2 = C_1 - \frac{p}{100} \cdot C_1 = C_1\left(1 - \frac{p}{100}\right) = C\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 - \frac{p}{100}\right) =$$

$$= C\left(1 - \frac{p^2}{100^2}\right).$$

По условиям задачи

$$C_2 = 0{,}64C.$$

Следовательно,

$$0{,}64C = C\left(1 - \frac{p^2}{100^2}\right).$$

Сократив обе части на C, получим

$$0{,}64 = 1 - \frac{p^2}{100^2};\ \frac{p^2}{100^2} = 0{,}36;\ \frac{p}{100} = 0{,}6; p = 60\ \%.$$

Ответ: 60.

Пример. Два велосипедиста одновременно отправляются в 168-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x – скорость второго велосипедиста, тогда скорость первого велосипедиста равна $(x+2)$. Время пробега первого велосипедиста равно $\frac{168}{x+2}$. Время пробега второго велосипедиста составляет $\frac{168}{x}$.

Составляем уравнение:

$$\frac{168}{x} - \frac{168}{x+2} = 2.$$

Вынесем 168 за скобки:

$$168\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) = 2.$$

Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{168}.$$

Выполним очевидные преобразования:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{84}\ ;$$

$$\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{84}\ ;$$

$$168 = x(x+2);$$

$$x^2 + 2x - 168 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, получим

$$x_1 = -14;\ \ x_2 = 12.$$

Первый корень не подходит по физическому смыслу, следовательно, скорость второго велосипедиста равна 12 км/ч.

Ответ: 12.

Пример. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 437 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если собственная скорость теплохода равна 21 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 46 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x – скорость течения реки, тогда скорость теплохода по течению реки равна $(21+x)$, а против течения – $(21-x)$.

На весь путь теплоход затратил $46-4=42$ часа. Составляем уравнение:

$$\frac{437}{21+x}+\frac{437}{21-x}=42.$$

Выполним преобразования:

$$437\left(\frac{1}{21+x}+\frac{1}{21-x}\right)=42;$$

$$\frac{1}{21+x}+\frac{1}{21-x}=\frac{42}{437};$$

$$\frac{(21-x)+(21+x)}{(21+x)(21-x)}=\frac{42}{437};$$

$$\frac{42}{(21+x)(21-x)}=\frac{42}{437};$$

$$\frac{1}{21^2-x^2}=\frac{1}{437};$$

$$437=21^2-x^2;$$

$$x^2=441-437;$$

$$x^2=4.$$

Найдем корни уравнения:

$$x=\pm 2.$$

Положительный корень этого уравнения равен 2 (отрицательный корень лишен физического смысла).

Ответ: 2.

Пример. Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 192 деталей, на 4 часа раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 224 таких же деталей. Сколько деталей делает в час второй рабочий?

Решение. Пусть x – производительность второго рабочего, тогда производительность первого рабочего равна $(x+2)$.

Время, затраченное вторым рабочим на выполнение заказа, равно $\frac{224}{x}$. Время, затраченное первым рабочим на выполнение заказа, равно $\frac{192}{x+2}$.

Составляем уравнение:

$$\frac{224}{x} - \frac{192}{x+2} = 4.$$

Разделив обе части уравнения на 4, получим:

$$\frac{56}{x} - \frac{48}{x+2} = 1.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{56(x+2) - 48x}{x(x+2)} = 1;$$

$$\frac{56x - 48x + 112}{x^2 + 2x} = 1;$$

$$\frac{8x + 112}{x^2 + 2x} = 1;$$

$$8x + 112 = x^2 + 2x;$$

$$x^2 - 6x - 112 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем:

$$x_1 = -8; x_2 = 14.$$

Отрицательный корень не подходим по смыслу задачи, следовательно, производительность второго рабочего равна 14 деталей в час.

Ответ: 14.

Пример. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 320 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

Решение. Пусть x – производительность первой трубы, тогда производительность второй трубы равна $(x+4)$. Время заполнения резервуара первой трубой равно $\frac{320}{x}$. Время заполнения резервуара второй трубой равно $\frac{320}{x+4}$.

Составляем уравнение:

$$\frac{320}{x} - \frac{320}{x+4} = 4 .$$

Разделив обе части уравнения на 320, получим

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{80} .$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{4}{x(x+4)} = \frac{1}{80} ;$$

$$320 = x(x+4);$$

$$x^2 + 4x - 320 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем:

$$x_1 = -20;\ x_2 = 16.$$

Отрицательный корень не подходит по смыслу задачи, следовательно, производительность второй трубы равна 16 л/мин.

Ответ: 16.

Пример. Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 м, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 м тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

Решение. Воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n.$$

Здесь $n = 10;\ a_1 = 3;\ S_{10} = 500.$

Подставив числовые значения в формулу суммы, получим

$$500 = \frac{3 + a_{10}}{2} \cdot 10.$$

Выполнив очевидные преобразования, найдем a_{10}:

$$50 = \frac{3 + a_{10}}{2},$$

$$a_{10} + 3 = 100,$$

$$a_{10} = 97.$$

Ответ: 97.

8.2. Задачи с прикладным содержанием

Пример. При температуре 0 °С рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (\mathrm{C}^\circ)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение. Найдем разность между начальной и конечной длинами рельса:

$$\Delta = l(t) - l_0 = l_0(1 + \alpha t) - l_0 = l_0 + l_0 \alpha t - l_0 = l_0 \alpha t.$$

Следовательно,

$$\Delta = l_0 \alpha t;\ t = \frac{\Delta}{l_0 \alpha}.$$

По условиям задачи

$$\Delta = 3 \text{ мм} = 0{,}003 \text{ м},$$

$$l_0 = 10 \text{ м},$$

$$\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (\mathrm{C}^\circ)^{-1}.$$

Следовательно,

$$t = \frac{\Delta}{l_0 \alpha} = \frac{0{,}003}{10 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4}} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-5}} = \frac{3 \cdot 10^{2}}{12} = 25.$$

Ответ: 25.

Пример. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника, В; r – его внутреннее сопротивление, r = 1 Ом; R – сопротивление цепи, Ом. При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 25 % от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$. Ответ выразите в омах.

Решение. По условиям задачи имеем неравенство

$I \leq 0{,}25 I_{\text{кз}}$.

Подставив выражения для величин I и $I_{\text{кз}}$ в это неравенство, получим

$$\frac{\varepsilon}{R+r} \leq 0{,}25\frac{\varepsilon}{r}.$$

Разделив обе части неравенства на величину ε, получим

$$\frac{1}{R+r} \leq 0{,}25\frac{1}{r}.$$

По условиям задачи $r = 1$. Подставив данное значение в неравенство, получим

$$\frac{1}{R+1} \leq 0{,}25.$$

Умножим обе части на $(R+1)$:

$1 \leq 0{,}25 \cdot (R+1)$.

Умножим обе части на 4:

$4 \leq R + 1$.

Решив последнее неравенство, найдем

$R \geq 3$.

Наименьшим решением неравенства служит значение $R = 3$.

Ответ: 3.

Пример. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 90$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление представлено формулой $R_{общ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в омах.

Решение. По условиям задачи имеем неравенство

$R_{общ} \geq 9.$

Подставив выражение для величины $R_{общ}$ в это неравенство, получим (при $R_1 = 90$)

$$\frac{90R_2}{90 + R_2} \geq 9.$$

Разделим обе части на 9:

$$\frac{10R_2}{90 + R_2} \geq 1.$$

Умножим обе части на $(90 + R_2)$:

$10R_2 \geq 90 + R_2.$

Решив последнее неравенство, найдем

$R_2 \geq 10.$

Наименьшим решением неравенства служит значение $R_2 = 10.$

Ответ: 10.

Пример. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры $P = \sigma \cdot S \cdot T^4$, где

σ – постоянная, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$; площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{10^{22}}{2401}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $5{,}7 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ по шкале Кельвина.

Решение. Решение задачи сводится к нахождению наименьшего решения неравенства

$$P \geq 5{,}7 \cdot 10^{26}$$

при заданных значениях величин σ и S.

Подставив выражение для величины P в это неравенство, получим (при заданных значениях величин σ и S):

$$5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{10^{22}}{2401} \cdot T^4 \geq 5{,}7 \cdot 10^{26}.$$

Выполнив ряд преобразований, получим:

$$\frac{10^{14}}{2401} \cdot T^4 \geq 10^{26}, T^4 \geq 2401 \cdot 10^{12},$$

$$T \geq \sqrt[4]{2401 \cdot 10^{12}}, T \geq \sqrt[4]{49^2 \cdot 10^{12}};$$

$$T \geq \sqrt[4]{7^4 \cdot 10^{12}}, T \geq 7 \cdot 10^3,$$

$$T \geq 7000.$$

Наименьшим решением неравенства служит значение $T = 7000$.

Ответ: 7000.

Пример. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах; $T_0 = 1380$ К; $a = -15 \frac{К}{мин^2}$; $b = 165 \frac{К}{мин}$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Решение. Задача сводится к нахождению наименьшего корня уравнения

$$T_0 + bt + at^2 = 1800$$

при заданных значениях величин T_0, a и b.

Подставив числовые значения величин T_0, a и b в данное уравнение, получим

$1380 + 165t - 15t^2 = 1800.$

Разделив обе части уравнения на (-15), получим

$-92 - 11t + t^2 = -120.$

Преобразуем последнее уравнение следующим образом:

$t^2 - 11t + 28 = 0.$

Решив это уравнение, получим

$t = 4$ и $t = 7.$

Наименьший корень уравнения равен $t = 4$.

Таким образом, через 4 минуты прибор нагреется до 1800 К и его надо выключить.

Ответ: 4.

Пример. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 12t - 5t^2$, где h – высота, м; t – время, прошедшее с момента броска, с. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 5 м?

Решение. Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно 5 м. Для этого решим уравнение $h(t) = 5$.

Подставив в левую часть уравнения выражение для $h(t)$, получим

$5 = 1 + 12t - 5t^2.$

Преобразуем уравнение:

$-5t^2 + 12t - 4 = 0,$

$5t^2 - 12t + 4 = 0.$

Решив уравнение, получим

$t = 0{,}4;\ t = 2.$

Поскольку по условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0{,}4$ (с) мяч находился на высоте 5 м, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 2$ (с) мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее 5 м $2 - 0{,}4 = 1{,}6$ с.

Ответ: 1,6.

Пример. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой

$q = 55 - 5p$. Выручка предприятия за месяц (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = qp$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка r составит не менее 140 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Решение. Задача сводится к решению неравенства

$r \geq 140.$

Подставим выражение для q в формулу для выручки r:

$r = q \cdot p = (55 - 5p)p = 55p - 5p^2.$

Следовательно,

$55p - 5p^2 \geq 140.$

Преобразуем неравенство следующим образом:

$5p^2 - 55p + 140 \leq 0,$

$p^2 - 11p + 28 \leq 0.$

Решив неравенство, получим

$4 \leq p \leq 7.$

Таким образом, наибольшая цена $p = 7$.

Ответ: 7.

Пример. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_0 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_1 = 60\ ^\circ\mathrm{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T (°C), причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}$ (м), где c – теплоемкость воды, $c = 4200\frac{Дж}{кг\cdot°C}$; γ – коэффициент теплообмена, γ = 21 Вт/(м·°С); α – постоянная, α = 0,7. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 168 м?

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$\alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_1 - T_0}{T - T_0} = 168.$$

Подставив числа, получим

$$0{,}7\frac{4200\cdot 0{,}3}{21}\log_2\frac{60 - 20}{T - 20} = 168.$$

Выполним преобразования:

$$42\log_2\frac{40}{T - 20} = 168,$$

$$\log_2\frac{40}{T - 20} = 4,$$

$$\frac{40}{T - 20} = 16.$$

Решив последнее уравнение, найдем $T = 22{,}5$.

Ответ: 22,5.

Пример. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}\cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время, прошедшее с момента открытия крана, с; H_0 – начальная высота столба воды, $H_0 = 5$ м; k – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, $k = \frac{1}{900}$; g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10\frac{м}{с^2}$). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

Решение. Четверть первоначального объема воды в баке останется, когда высота столба воды будет

$5/4$ = 1,25 (м).

Задача сводится к решению уравнения

$$H(t) = \frac{H_0}{4}.$$

Подставив в левую часть уравнения выражение для $H(t)$, получим

$$H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2 = \frac{H_0}{4}.$$

Преобразуем уравнение следующим образом:

$$\frac{g}{2}k^2t^2 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{3H_0}{4} = 0.$$

Введем новую переменную $x = kt$. Уравнение примет вид

$$\frac{g}{2}x^2 - \sqrt{2gH_0} \cdot x + \frac{3H_0}{4} = 0.$$

Подставив числовые значения, получим

$$5x^2 - 10x + \frac{15}{4} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 5:

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0.$$

Найдем корни полученного квадратного уравнения:

$x_1 = 0{,}5;\ x_2 = 1{,}5.$

Выполним обратную замену:

$kt_1 = 0{,}5;\ kt_2 = 1{,}5.$

Следовательно,

$$t_1 = \frac{0{,}5}{k} = \frac{0{,}5}{1/900} = 450; t_2 = \frac{1{,}5}{1/900} = 1350.$$

Наименьший корень уравнения равен 450. Второй корень не имеет физического смысла. Таким образом, через 450 с после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды.

Ответ: 450.

Пример. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, мг; t – время, прошедшее от начального момента, мин; T – период полураспада, мин. В начальный момент времени масса изотопа m_0 = 24 мг. Период его полураспада $T = 2$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 3 мг?

Решение. Задача сводится к решению уравнения $m(t) = 3$.

Подставим в левую часть выражение для $m(t)$

$m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = 3.$

Подставив числовые значения, получим

$$24 \cdot 2^{-\frac{t}{2}} = 3;\ 2^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{8};\ 2^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2^3};\ 2^{-\frac{t}{2}} = 2^{-3};\ -\frac{t}{2} = -3; t = 6.$$

Ответ: 6.

8.3. Задачи повышенного уровня сложности

Пример. В июле 2020 г. планируется взять кредит в банке на сумму 545 000 руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 40 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (т.е. за три года)?

Решение. Введем обозначения:

C_0 – кредит;

C_1, C_2, C_3 – долги перед банком по годам;

p – процентная ставка;

m – коэффициент роста, $m = 1 + \frac{p}{100}$;

V – величина ежегодной выплаты.

Построим математическую модель:

$C_1 = C_0 m - V;$

$C_2 = C_1 m - V = (C_0 m - V)m - V = C_0 m^2 - (1 + m)V;$

$C_3 = C_2 m - V = C_0 m^3 - (1 + m + m^2)V.$

Через три года кредит должен быть погашен, т.е.

$C_3 = 0.$

Получаем уравнение

$C_0 m^3 - (1 + m + m^2)V = 0.$

Следовательно,

$$V = \frac{C_0 m^3}{1 + m + m^2}.$$

По условиям задачи

$$C_0 = 545\,000;\ \ m = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{40}{100} = 1{,}4.$$

Подставив числовые значение в формулу для выплат, получим величину ежегодной выплаты:

$$V = \frac{545\,000 \cdot 1{,}4^3}{1 + 1{,}4 + 1{,}4^2} = 343\,000\ (\text{руб.}).$$

Таким образом, общая сумма выплат за три года равна

$3V = 3 \cdot 343\,000 = 1\,029\,000\ (\text{руб.}).$

Ответ: 1 029 000.

Пример. В июле 2020 г. планируется взять кредит в банке на сумму 250 000 руб. Известно, что банк каждый год увеличивает сумму кредита на p %, после чего происходит платеж. Кредит был полностью выплачен за 2 года. Найдите p, если первый платеж составил 150 000 руб., а второй 180 000 руб.

Решение. Введем обозначения:

C_0 – кредит;

C_1, C_2 – долги перед банком по годам;

p – процентная ставка;

m – коэффициент роста, $m = 1 + \frac{p}{100}$;

V_1, V_2 – выплаты по годам.

Построим математическую модель:

$C_1 = C_0 m - V_1$,

$C_2 = C_1 m - V_2$.

Подставив в последнюю формулу выражение для C_1, получим

$C_2 = (C_0 m - V_1)m - V_2$.

По условиям задачи $C_2 = 0$, следовательно,

$(C_0 m - V_1)m - V_2 = 0$.

Раскроем скобки в последнем уравнении

$C_0 m^2 - V_1 m - V_2 = 0$.

Подставив числа, найдем

$250\,000m^2 - 150\,000m - 180\,000 = 0$.

Преобразуем уравнение следующим образом:

$25m^2 - 15m - 18 = 0$.

Найдем дискриминант уравнения:

$D = 15^2 + 4 \cdot 25 \cdot 18 = 3^2 \cdot 5^2 + 5^2 \cdot 72 = 5^2 \cdot 9^2 = 45^2$.

Найдем положительный корень уравнения:

$$m = \frac{15 + 45}{50} = \frac{60}{50} = 1{,}2.$$

Следовательно,

$$1 + \frac{p}{100} = 1{,}2;\ \frac{p}{100} = 0{,}2;\ p = 20\ \%.$$

Ответ: 20.

Пример. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн руб. на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн руб.?

Решение. Введем обозначения:

C_0 – кредит;

$C_1, C_2, \dots, C_n$ – долги перед банком по годам;

p – процентная ставка;

m – коэффициент роста, $m = 1 + \frac{p}{100}$;

$V_1, V_2, \dots, V_n$ – выплаты по годам;

n – количество выплат (количество лет).

Построим математическую модель.

Найдем величины выплат по годам:

$V_1 = C_0 m - C_1,$

$V_2 = C_1 m - C_2,$

… … … … … … …

$V_n = C_{n-1} m - C_n.$

По условиям задачи $C_n = 0$.

Найдем сумму выплат:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = C_0 m + m \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} C_i = C_0 m + (m-1) \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Величины $C_1, C_2, \dots, C_n$ образуют убывающую арифметическую прогрессию с шагом $d = \frac{C_0}{n}$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = \frac{C_1 + C_n}{2} \cdot n = \frac{C_1}{2} n = \frac{1}{2}\left(C_0 - \frac{C_0}{n}\right) n = \frac{C_0 n - C_0}{2} = \frac{C_0(n-1)}{2}.$$

Таким образом, получим общую формулу для нахождения суммы выплат:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = C_0 m + (m-1)\frac{C_0(n-1)}{2} = C_0\left(m + \frac{(m-1)(n-1)}{2}\right).$$

Подставив числовые значения, получим уравнение

$$16\left(1{,}25 + \frac{0{,}25(n-1)}{2}\right) = 40.$$

Решив уравнение, найдем $n = 11$.

Ответ: 11.

Пример. В июле 2026 г. планируется взять кредит на три года в размере 900 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– платежи в 2027 и 2028 гг. должны быть равны;

– к июлю 2029 г. долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платеж в 2029 г. составит 499 тыс. руб. Сколько рублей составит платеж в 2027 г.?

Решение. Введем обозначения:

C_0 – кредит, $C_0 = 900$;

C_1, C_2, C_3 – долги перед банком по годам;

p – процентная ставка, $p = 20$;

m – коэффициент роста, $m = 1{,}2$;

V_1, V_2, V_3 – выплаты по годам.

Построим математическую модель:

$C_1 = C_0 m - V_1$,

$C_2 = C_1 m - V_2 = (C_0 m - V_1)m - V_2$,

$C_3 = C_2 m - V_3 = \big((C_0 m - V_1)m - V_2\big)m - V_3$.

По условиям задачи $V_1 = V_2 = x$, $V_3 = 499$, $C_0 = 900$, $C_3 = 0$.

Следовательно,

$$\big((900m - x)m - x\big)m - 499 = 0.$$

Раскрыв скобки, получим

$$900m^3 - xm^2 - xm - 499 = 0.$$

Найдем x:

$$x(m^2 + m) = 900m^3 - 499;$$

$$x = \frac{900m^3 - 499}{m(m+1)} = \frac{900 \cdot 1{,}2^3 - 499}{1{,}2(1{,}2+1)} = \frac{1056{,}2}{2{,}64} = 400\ (\text{тыс. руб.}).$$

Ответ: 400 тыс. руб.

Пример. Зависимость количества Q ($0 \le Q \le 15000$), купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.), выражается формулой $Q = 15\,000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 1\,000\,000$ руб. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t руб. $(0 < t < 10\,000)$ с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - (3000Q + 1\,000\,000) - tQ$ руб., а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ руб.

Фирма производит такое количество товара, при котором ее прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Решение. Введем обозначения:

D – прибыль фирмы;

S – общая сумма налогов, собранных государством.

Найдем количество товара, при котором прибыль будет максимальной.

Прибыль фирмы составляет

$$D = PQ - 3000Q - 1\,000\,000 - tQ.$$

Количество товара Q от цены P выражается формулой

$$Q = 15\,000 - P.$$

Следовательно, цена товара

$P = 15\,000 - Q.$

Подставив вместо цены P ее выражение через Q, получим

$D = \left(15\,000 - Q\right)Q - 3000Q - 1\,000\,000 - tQ.$

После раскрытия скобок и приведения подобных найдем

$D = -Q^2 + \left(12\,000 - t\right)Q - 1\,000\,000.$

Эта величина является квадратичной функцией от Q. Графиком функции $D = D(Q)$ служит парабола, ветви которой направлены вниз. Следовательно, максимум достигается в вершине параболы, т.е. при

$$Q_0 = -\frac{12\,000 - t}{2 \cdot (-1)} = 6000 - \frac{t}{2}.$$

Найдем величину t, при которой общая сумма налогов будет максимальной. Общая сумма налогов равна $S = tQ$. Подставив вместо Q полученное выше выражение для Q_0, получим

$$S = t\left(6000 - \frac{t}{2}\right) = 6000t - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + 6000t.$$

Эта величина является квадратичной функцией от t. Графиком функции $S = S(t)$ служит парабола, ветви которой направлены вниз. Максимальное значение S достигается в вершине параболы, т.е. при

$$t_0 = -\frac{6000}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 6000\ (\text{руб.}).$$

Ответ: 6000 руб.

Пример. Каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9 по одному записывают на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

А. Может ли в результате получиться 0?

Б. Может ли в результате получиться 11?

В. Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение. А. Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому все произведение не может равняться нулю.

Б. Среди восьми данных чисел пять нечетных, т.е. нечетных чисел на 2 больше, чем четных. Значит, как минимум на двух карточках на обеих сторонах будут нечетные числа.

Сумма двух нечетных чисел – четное число. Если хотя бы один из сомножителей произведения нескольких чисел является четным числом, то и все произведение будет четным числом. Следовательно, произведение не может равняться 11.

В. Среди восьми данных чисел пять нечетных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечетные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек – четная. Произведение двух четных чисел делится на 4. Следовательно, все произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это само число 4. Чтобы получить наименьшее возможное произведение, надо под числом в первой строке (сторона № 1) записать ближайшее число с противоположным знаком (сторона № 2):

№ 1	1	–2	–3	4	–5	7	–8	9
№ 2	–2	1	4	–3	7	–5	9	–8
Сумма	–1	–1	1	1	2	2	1	1

Перемножив числа в последней строке, получим 4.

Ответ: А. Нет. Б. Нет. В. 4.

Пример. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно (-3), среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно (-8).

А. Сколько чисел написано на доске?

Б. Каких чисел написано больше – положительных или отрицательных?

В. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. А. Введем обозначения:

k – количество положительных чисел,

l – количество отрицательных чисел;

m – количество нулей.

Среднее арифметическое положительных чисел равно 4, а среднее арифметическое отрицательных чисел равно (–8), следовательно, сумма всех положительных чисел равна $4k$; сумма всех отрицательных чисел равна $(-8l)$.

По условиям задачи среднее арифметическое всех чисел равно (–3), следовательно, сумма всех чисел равна $(-3) \cdot (k + l + m)$.

Составляем уравнение:

$$4k - 8l = -3(k + l + m).$$

Разделив обе части уравнения на 4, получим

$$k - 2l = -\frac{3(k + l + m)}{4}.$$

В левой части уравнения стоит целая величина, следовательно, и в правой части должна стоять целая величина. Значит, сумма $(k + l + m)$ должна делится на 4. По условию

$$40 < k + l + m < 48,$$

поэтому

$$k + l + m = 44.$$

Таким образом, на доске написано 44 числа.

Б. Преобразуем уравнение

$$4k - 8l = -3(k + l + m)$$

к виду

$$5l - 7k = 3m.$$

В правой части последнего уравнения стоит неотрицательная величина, следовательно,

$$5l - 7k \geq 0,$$

$$5l \geq 7k > 5k.$$

Значит, $l > k$. Таким образом, отрицательных чисел больше, чем положительных.

В. Подставив значение $k + l + m = 44$ в правую часть уравнения

$$k - 2l = -\frac{3(k + l + m)}{4},$$

получим

$$k - 2l = -\frac{3 \cdot 44}{4} = -33.$$

Следовательно, $k = 2l - 33$.

Общее количество положительных и отрицательных чисел (без нулей), очевидно, удовлетворяет условию

$$k + l \leq 44.$$

Подставив значение $k = 2l - 33$ в это условие, получим

$$3l - 33 \leq 44;\ 3l \leq 77;$$

$$l \leq \frac{77}{3}.$$

Наибольшее целое решение последнего неравенства $l_{\max} = 25$. Следовательно, $k_{\max} = 2l_{\max} - 33 \leq 2 \cdot 25 - 33 = 17$.

Приведем пример, когда положительных чисел ровно 17.

Пусть на доске написано: 17 раз число 4, 25 раз число (–8), два раза число 0. Тогда среднее арифметическое этих чисел

$$\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25 + 2 \cdot 0}{44} = \frac{68 - 200}{44} = -\frac{132}{44} = -3.$$

Таким образом, указанный набор чисел полностью удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: А. 44. Б. Отрицательных чисел больше. В. 17.

Пример. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

А. Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться 1/25?

Б. Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться 1/35?

В. Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение. Введем обозначения:

x – наименьшая оценка;

z – наибольшая оценка;

y – сумма остальных оценок (без наибольшей и наименьшей).

Тогда рейтинг по старой системе $A = \frac{x+y+z}{7}$.

Рейтинг по новой системе $B = \frac{y}{5}$.

Разность рейтингов:

$$A - B = \frac{x+y+z}{7} - \frac{y}{5} = \frac{5x-2y+5z}{35}.$$

А. По условию

$$A - B = \frac{1}{25}.$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{5x-2y+5z}{35} = \frac{1}{25}.$$

Значит,

$$5x - 2y + 5z = \frac{35}{25} ;$$

$$5x - 2y + 5z = \frac{7}{5} .$$

В левой части равенства – целое число, а в правой – дробь. Получили противоречие. Следовательно, разность рейтингов не может равняться $1/25$.

Б. По условию

$$A - B = \frac{1}{35} .$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{5x - 2y + 5z}{35} = \frac{1}{35} .$$

Умножив обе части уравнения на 35, получим

$$5x - 2y + 5z = 1.$$

Получали одно уравнение с тремя неизвестными. Найдем одно из возможных решений подбором.

Пусть $x = 0$ – наименьшая оценка. Тогда уравнение примет вид

$$-2y + 5z = 1.$$

Выразим y через z:

$$y = \frac{5z - 1}{2} .$$

По условию y – целое число. Число z не может равняться 12, так как в результате получится, что y – дробь. Ближайшее к 12 число, при котором y получается целым числом, – это число 11. Подставив $z = 11$ в правую часть равенства, найдем

$$y = \frac{5 \cdot 11 - 1}{2} = 27.$$

Подберем пять чисел от 1 до 10 так, чтобы получить в сумме 27:

10 + 1 + 9 + 2 + 5 = 27.

Таким образом, разность рейтингов может равняться $1/35$.

Например, набор чисел 0, 1, 2, 5, 9, 10, 11 полностью удовлетворяет условиям задачи.

В. Разность рейтингов равна

$$A - B = \frac{5x - 2y + 5z}{35} = \frac{5x + 5z - 2y}{35}.$$

Найдем максимальное возможное значение этой разности. Чтобы разность $A - B$ была максимальной, очевидно, величина y должна принимать минимально возможное значение, т.е.

$$y = x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 = 5x + 15.$$

Подставив найденное выражение для y в правую часть формулы разности рейтингов, получим

$$A - B = \frac{5x + 5z - 2(5x + 15)}{35} = \frac{5z - 5x - 30}{35}.$$

Чтобы максимизировать последнее выражение для разности рейтингов, очевидно, надо задать минимально возможное значение x, т.е. $x = 0$. Подставив значение $x = 0$ в правую часть последнего равенства, получим

$$A - B = \frac{5z - 30}{35}.$$

Из структуры правой части последнего равенства видно, что максимально возможное значение разности рейтингов достигается при максимально возможном значении z, т.е. $z = 12$. Подставив значение $z = 12$ в правую часть последнего равенства, найдем максимально возможное значение разности рейтингов

$$A - B = \frac{60 - 30}{35} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}.$$

Оценки экспертов, соответствующие максимальной разности:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 12.

Ответ: А. Нет. Б. Да. В. 6/7.

Пример. За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трех звезд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трех звезд, на 6 пунктов при получении двух звезд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошел несколько уровней игры подряд.

А. Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

Б. Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звезд?

В. За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трех звезд, 5000 – при получении двух звезд и 2000 – при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звезд?

Решение. А. Введем обозначения:

a – количество уровней, за которые можно получить 1 звезду;

b – количество уровней, за которые можно получить 2 звезды;

c – количество уровней, за которые можно получить 3 звезды.

$9a + 6b + 3c = 32;$

$3(3a + 2b + c) = 32;$

$3a + 2b + c = 32/3.$

Получили противоречие, так как в левой части последнего равенства стоит целая величина, а в правой части – дробь. Таким образом, заряд аккумулятора не мог уменьшиться на 32 пункта.

Б. По условиям задачи

$a + 2b + 3c = 17$ (уравнение для звезд),

$9a + 6b + 3c = 33$ (уравнение для уровня заряда).

Таким образом, получаем систему из двух уравнений относительно трех неизвестных. Нас интересует общее количество пройденных уровней, т.е. величина $a + b + c$.

Упростим второе уравнение, разделив обе части на 3:

$3a + 2b + c = 11.$

Таким образом, система приобретает вид

$a + 2b + 3c = 17$,

$3a + 2b + c = 11$.

Сложив эти уравнения, получим

$4a + 4b + 4c = 28.$

Следовательно,

$a + b + c = 7.$

Таким образом, было пройдено 7 уровней.

В. Пусть K – общее количество очков. По условиям задачи

$K = 9000c + 5000b + 2000a = 1000(9c + 5b + 2a).$

Выразим величины a и c через b из системы

$a + 2b + 3c = 17$,

$3a + 2b + c = 11$.

Представим систему в виде

$a + 3c = 17 - 2b,$

$3a + c = 11 - 2b.$

Умножим второе уравнение системы на 3, а затем вычтем из полученного уравнения первое уравнение системы:

$8a = 16 - 4b.$

Значит,

$a = 2 - b/2.$

Умножим первое уравнение системы на 3, а затем из полученного уравнения вычтем второе уравнение системы:

$8c = 40 - 4b.$

Следовательно,

$c = 5 - b/2.$

Подставим найденные выражения для a и b в формулу для K:

$K = 1000(45 - 4{,}5b + 5b + 3c + 4 - b) = 1000(49 - b/2)$.

Очевидно, что наибольшего значения величина K достигает при $b = 0$. Подставив значение $b = 0$ в формулу для K, найдем наибольшее количество очков:

$$K = 1000\left(49 - \frac{0}{2}\right) = 4900.$$

По известному значению b можно найти a и c:

$a = 2 - 0/2 = 2$,

$c = 5 - 0/2 = 5$.

Ответ: А. Нет. Б. 7. В. 49 000.

Пример. Маша и Наташа делают фотографии. Каждый день каждая девочка делает на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. В конце Наташа сделала на 1001 фотографию больше, чем Маша.

А. Могло ли это произойти за 7 дней?

Б. Могло ли это произойти за 8 дней?

В. Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 40 фотографий?

Решение. А. Введем обозначения:

N – количество фотографий, сделанных Наташей в первый день;

M – количество фотографий, сделанных Машей в первый день;

K – количество дней.

Найдем количество фотографий, сделанных Наташей за K дней:

$$\frac{N + (N + K - 1)}{2}K.$$

Найдем количество фотографий, сделанных Машей за K дней:

$$\frac{M + (M + K - 1)}{2}K.$$

Наташа сделала за K дней на 1001 фотографий больше, чем Маша, следовательно,

$$\frac{2N+K-1}{2}K - \frac{2M+K-1}{2}K = 1001,$$

$$K\frac{2N+K-1-2M-K+1}{2} = 1001,$$

$$K\frac{2N-2M}{2} = 1001,$$

$$K(N-M) = 1001.$$

Представим последнее уравнение в виде

$$N-M = \frac{1001}{K}.$$

По условиям задачи K = 7, следовательно,

$$N-M = \frac{1001}{7} = 143.$$

Таким образом, если Наташа сделала в первый день на 143 фотографии больше, чем Маша, то условия задачи будут полностью выполнены. Например, Наташа сделала в 144 фотографии, а Маша – одну фотографию.

Б. По условиям задачи K = 8, следовательно,

$$N-M = \frac{1001}{8} = 125\frac{1}{8}.$$

Получили противоречие, разность $(N-M)$ не может быть дробной величиной. Таким образом, за 8 дней это не могло произойти.

В. Дополнительно условие записано для Маши. Поэтому сначала найдем максимальное количество фотографий, сделанных Машей.

В последний день Маша сделала $(M+K-1)$ фотографий. По условиям задачи

$$M+K-1 < 40;$$

$$M+K < 41;$$

$$K < 41-M.$$

Количество фотографий $M \geq 0$, следовательно, $K < 41.$ Чтобы уравнение

$$N - M = \frac{1001}{K}$$

имело смысл, число 1001 должно делиться на K. Разложим число 1001 на множители: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$ Таким образом, число K ($K < 41$) может принимать только три значения: $K = 7;$ $K = 11;$ $K = 13.$

Пусть $K = 7$, тогда в последний день Маша сделала $M + 6$ фотографий. По условиям задачи $M + 6 < 40;$ $M < 34.$ Следовательно, наибольшее возможное значение $M = 33$. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{33 + (33 + 6)}{2} \cdot 7 = 252.$$

Пусть K=11, тогда в последний день Маша сделала M+10 фотографий. По условиям задачи $M + 10 < 4,;$ $M < 30.$ Следовательно, наибольшее возможное значение M=29. Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{29 + (29 + 10)}{2} \cdot 11 = 374.$$

Пусть $K = 13$, тогда в последний день Маша сделала $M + 12$ фотографий. По условиям задачи $M + 12 < 40;$ $M < 28.$ Следовательно, наибольшее возможное значение $M = 27.$ Найдем общее количество фотографий:

$$\frac{27 + (27 + 12)}{2} \cdot 13 = 429.$$

Таким образом, наибольшее количество фотографий, сделанных Машей, равно 429. Следовательно, наибольшее количество фотографий, сделанных Наташей, равно 429 + 1001 = 1430.

Ответ: А. Да. Б. Нет. В. 1430.

8.4. Упражнения

1. В сосуд, содержащий 10 л 26%-го водного раствора некоторого вещества, добавили 3 л воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: 20.

2. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10 % никеля, второй – 35 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 150 кг, содержащий 30 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Ответ: 90.

3. Виноград содержит 90 % влаги, а изюм – 5 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 40 килограммов изюма?

Ответ: 380.

4. Семь рубашек дешевле куртки на 2 %. На сколько процентов десять рубашек дороже куртки?

Ответ: 40.

5. В среду акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в четверг подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 64 % дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

Ответ: 80.

6. Два велосипедиста одновременно отправляются в 100-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 5 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 20.

7. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 504 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 23 км/ч, стоянка длится 10 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 56 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 1.

8. Первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй рабочий, и заканчивает работу над заказом, состоящим из 117 деталей, на 4 часа раньше, чем второй рабочий выполняет заказ, состоящий из 143 таких же деталей. Сколько деталей делает в час первый рабочий?

Ответ: 11.

9. Первая труба пропускает на 1 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 240 л она заполняет на 2 мин дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 224 л?

Ответ: 15.

10. Рабочие прокладывают тоннель длиной 99 м, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 7 м тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 9 дней.

Ответ: 15.

11. При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha t)$, где α – коэффициент теплового расширения, $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (\mathrm{C}°)^{-1}$; t – температура, °C. При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: 37,5.

12. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника, В; r – его внутреннее сопротивление, r = 1 Ом; R – сопротивление цепи, Ом. При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 50 % от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$. Ответ выразите в омах.

Ответ: 1.

13. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 99$ Ом . Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление представлено формулой $R_{общ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 18 Ом. Ответ выразите в омах.

Ответ: 22.

14. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвертой степени температуры: $P = \sigma \cdot S \cdot T^4$, где σ – постоянная, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$; площадь S измеряется в квадратных метрах; температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{10^{21}}{216}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $3{,}42 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Ответ: 6000.

15. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время, мин; $T_0 = 1330$ К; $a = -15 \frac{К}{мин^2}$; $b = 165 \frac{К}{мин}$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 2.

16. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}8 + 10t - 5t^2$, где h – высота, м; t – время, прошедшее с момента броска, с. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 5 м?

Ответ: 1,2.

17. Зависимость объема спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 6 - 5p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r = qp$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка r составит не менее 160 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ: 8.

18. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_0 = 15$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_1 = 40$ °C. Расход проходящей через трубу воды $m = 0{,}4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T (°C), причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_1 - T_0}{T - T_0}$ (м), где $\alpha = 1{,}6$; γ – коэффициент теплообмена, $\gamma = 42$ Вт/(м · °C); c – теплоемкость воды, $c = 4200$ Дж/(кг · °C). До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 64 м?

Ответ: 27,5.

19. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t – время, прошедшее с момента открытия крана, с; H_0 – начальная высота столба воды, $H_0 = 5$; k – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, $k = \frac{1}{700}$; g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$). Через сколько

секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объема воды?

Ответ: 350.

20. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – начальная масса изотопа, мг; t – время, прошедшее от начального момента, мин; T – период полураспада, мин. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 88$ мг. Период его полураспада $T = 6$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 11 мг?

Ответ: 18.

21. В июле 2020 г. планируется взять кредит в банке на сумму 147 000 руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен двумя равными платежами, т.е. за два года?

Ответ: 169 400.

22. В июле 2020 г. планируется взять кредит в банке на сумму 400 000 руб. Известно, что банк каждый год увеличивает сумму кредита на p %, после чего происходит платеж. Кредит был полностью выплачен за 2 года. Найдите p, если первый платеж составил 330 000 руб., а второй – 121 000 руб.

Ответ: 10.

23. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн руб. на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 17,5 млн руб.?

Ответ: 14.

24. В июле 2026 г. планируется взять кредит на три года в размере 500 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежам часть долга;

– платежи в 2027 и 2028 гг. должны быть равны;

– к июлю 2029 г. долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платеж в 2029 г. составит 336 тыс. руб. Сколько рублей составит платеж в 2027 г.?

Ответ: 200 тыс. руб.

25. Зависимость количества Q ($0 \leq Q \leq 20\,000$) купленного у фирмы товара от цены P (руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20\,000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4\,000\,000$ руб. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10\,000$) с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4\,000\,000 - tQ$ руб., а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ руб.

Фирма производит такое количество товара, при котором ее прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

Ответ: 7000 руб.

26. Каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9, 10, –11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, –2, –3, 4, –5, 7, –8, 9, 10, –11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

А. Может ли в результате получиться 0?

Б. Может ли в результате получиться 13?

В. Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Ответ: А. Нет. Б. Нет. В. 4.

27. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно (–5), среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно (–18).

А. Сколько чисел написано на доске?

Б. Каких чисел написано больше – положительных или отрицательных?

В. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Ответ: А. 36. Б. Отрицательных чисел больше. В. 16.

28. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

А. Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $1/30$?

Б. Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $1/35$?

В. Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Ответ: А. Нет. Б. Да. В. 4/7.

29. За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трех звезд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 9 пунктов при получении трех звезд, на 12 пунктов при получении двух звезд и на 15 пунктов при получении одной звезды. Витя прошел несколько уровней игры подряд.

А. Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 50 пунктов?

Б. Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звезд?

В. За пройденный уровень начисляется 7000 очков при получении трех звезд, 6000 – при получении двух звезд и 3000 – при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звезд?

Ответ: А. Нет. Б. 6. В. 33 000

30. Маша и Наташа делают фотографии. Каждый день каждая девочка делает на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. В конце Наташа сделала на 855 фотографий больше, чем Маша.

А. Могло ли это произойти за 9 дней?

Б. Могло ли это произойти за 12 дней?

В. Какое максимальное количество фотографий могла сделать Наташа, если Маша в последний день сделала меньше 30 фотографий?

Ответ: А. Да. Б. Нет. В. 1235.

9. ПЛАНИМЕТРИЯ

9.1. Основные понятия

Планиметрия – это раздел геометрии, изучающий фигуры на плоскости. Основные геометрические фигуры на плоскости – это точка и прямая. Обычно точки обозначают большими латинскими буквами, например $A, B, C,$ а прямые – малыми латинскими буквами, например a, b, c. Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B, можно обозначить двумя точками: AB или BA.

Через любые две точки можно провести прямую, и только одну (*аксиома принадлежности.*).

Две различные прямые на плоскости имеют либо одну общую точку, т.е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т.е. не пересекаются.

Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. Параллельность прямых обозначается так: $a||b$.

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (*аксиома параллельных прямых*).

Отрезок – это часть прямой, лежащая между двумя данными ее точками. Эти точки называются концами отрезка. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, приятым за единицу длины. Если, например, за единицу длины принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. Длину отрезка иначе называют расстоянием между концами этого отрезка.

Луч – это часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной начальной точки.

Угол – это фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Эти лучи называют сторонами угла, а их общее начало – вершиной угла. Если обе стороны угла лежат на одной прямой, угол называют развернутым. Измерение углов основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. За единицу измерения угла обычно принимают градус – угол, равный 1/180 развернутого угла.

Прямой угол – это половина развернутого угла, то есть его градусная мера равна 90°. Прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжением одна другой, называются *смежными*. Сумма смежных углов равна 180°.

Пример. Внутри развернутого угла $\angle AOB$ проведен луч OC так, что угол $\angle AOC$ составляет $0{,}7$ угла $\angle AOB$ (рис. 132). Найдите величину угла $\angle COB$.

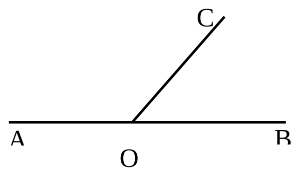


Рис. 132. Углы $\angle AOB$, $\angle AOC$ и $\angle COB$

Решение.

$\angle AOB = 180°$, $\angle AOC = 0{,}7 \cdot 180° = 126°$,

$\angle COB = 180° - 126° = 54°$.

Ответ: 54°.

Два угла называются *вертикальными*, если обе стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны (рис. 133).

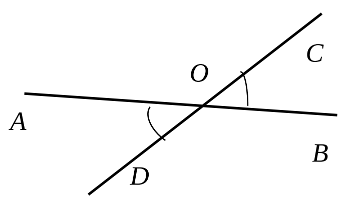


Рис. 133. Вертикальные углы

Ломаной называется фигура, которая состоит из точек и соединяющих эти точки отрезков. Точки называются *вершинами ломаной*, а отрезки – *звеньями ломаной*. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений. Ломаная называется *замкнутой,* если начальная точка ломаной совпадает с конечной точкой ломаной.

Многоугольник – это простая замкнутая ломаная линия. Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону (рис. 134).

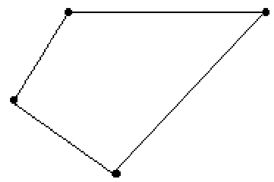


Рис. 134. Выпуклый многоугольник

Сумма длин всех сторон многоугольника называется *периметром*. Периметр многоугольника обозначается заглавной буквой P латинского алфавита.

Площадь – это количественная характеристика части плоскости, занимаемого плоской фигурой. За единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Например, квадрат со стороной 1 см называется квадратным сантиметром и обозначается см^2. Площадь многоугольника обычно обозначается заглавной буквой S латинского алфавита.

9.2. Признаки параллельности прямых

Пусть у нас есть две различные прямые. Если третья прямая пересекает эти две прямые, то она называется *секущей* по отношению к ним. В результате пересечения образуются 8 углов, которые имеют специальные названия (рис. 135):

накрест лежащие углы: 4 и 6, 3 и 5:

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

соответственные углы: 1 и 5, 2 и 6, 4 и 8, 3 и 7.

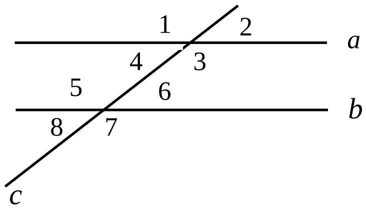


Рис. 135. Накрест лежащие, односторонние и соответственные углы

Прямые a и b *параллельны,* если:

1) накрест лежащие углы равны;

2) сумма односторонних углов равна 180°;

3) соответственные углы равны.

Пример. Прямые a и b (рис. 136) пересечены прямой c; $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Доказать, что прямые a и b параллельны.

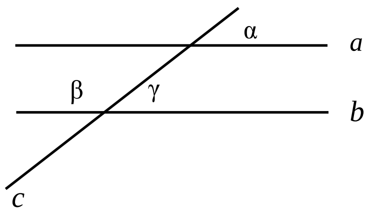


Рис. 136. Параллельные прямые a и b

Доказательство. Углы α и γ – смежные, следовательно,

$$\gamma = 180° - \beta = 180° - 120° = 60°.$$

Таким образом, соответственные углы α и γ равны, значит, прямые параллельны.

Теорема о пропорциональных отрезках (обобщенная теорема Фалеса). Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки (рис. 137).

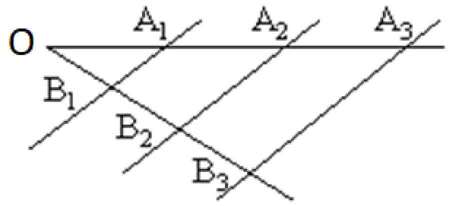


Рис. 137. Обобщенная теорема Фалеса

Пример. Прямые a и b параллельны. Найти x (рис. 138).

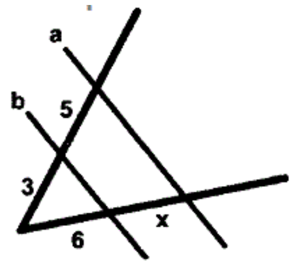


Рис. 138. Иллюстрация к задаче

Решение. По теореме о пропорциональных отрезках имеем

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{x}; \ \ x = 10.$$

Ответ: 10.

Обратная теорема. Если прямые отсекают на сторонах угла начиная от вершины пропорциональные отрезки, то эти прямые параллельны.

9.3. Окружность и круг

Окружностью называется множество точек на плоскости, находящихся от данной точки (центр окружности) на данном расстоянии (радиус окружности). Градусная мера окружности равна 360°.

Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности (рис. 139).

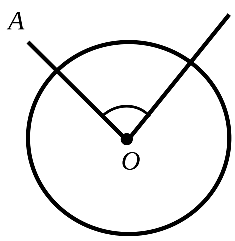


Рис. 139. Центральный угол

Градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей дуги окружности.

Пример. Найдите центральный угол, опирающийся на дугу, равную 1/12 длины окружности.

Решение. Градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей дуги, т.е.

$$\frac{360°}{12} = 30°.$$

Ответ: 30°.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом*.

Теорема о вписанном и центральном углах. Вписанный угол (рис. 140) измеряется *половиной* центрального угла, опирающегося на ту же самую дугу, т.е.

$$\angle AEB = \frac{\angle AOB}{2}.$$

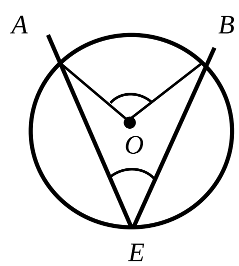


Рис. 140. Теорема о вписанном и центральном углах

Пример. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную 1/5 окружности.

Решение. Градусная мера центрального угла равна градусной мере соответствующей дуги, т.е.

$$\frac{360°}{5} = 72°.$$

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же самую дугу, т.е.

$$\frac{72°}{2} = 36°.$$

Ответ: 36°.

Из теоремы о вписанном и центральном углах следует, что *вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны*.

Длина окружности *C* вычисляется по формуле

$$C = 2\pi R.$$

Здесь R – радиус окружности.

Круг – это часть плоскости, ограниченной окружностью. Площадь круга *S* вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

Пример. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $10\sqrt{\pi}$.

Решение. Сначала найдем радиус окружности (круга):

$$2\pi R = 10\sqrt{\pi};\ \ R = \frac{10\sqrt{\pi}}{2\pi} = \frac{5}{\sqrt{\pi}}.$$

Подставив найденное значение радиуса в формулу площади круга, найдем

$$S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 25.$$

Ответ: 25.

Длина дуги l и площадь сектора S центрального угла α вычисляются по формулам

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180°};\ S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°},$$

где α – градусная мера центрального угла.

Пример. Найдите длину дуги окружности радиусом $R = 6$ и площадь сектора центрального угла α, если $\alpha = 60°$.

Решение.

$$l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60°}{180°} = 2\pi;\ S = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 60°}{360°} = 6\pi.$$

Ответ: $l = 2\pi;\ S = 6\pi.$

Если используется *радианная мера* угла, формулы вычисления длины дуги и площади сектора заметно упрощаются:

$$l = R\varphi;\ S = \frac{R^2\varphi}{2}.$$

Здесь φ – радианная мера центрального угла,

$$\varphi = \frac{\pi\alpha}{180°}.$$

9.4. Треугольники

Треугольник – это фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Точки называются вершинами треугольника, отрезки – сторонами треугольника.

Сумма внутренних углов произвольного треугольника равна 180°.

Пример. Дан треугольник ABC. Найдите величину угла $\hat{A}$ треугольника ABC, если угол $\hat{A}$ в 4 раза меньше угла $\hat{B}$ и на 18° больше угла $\hat{C}$.

Решение. По условиям задачи имеем

$$\hat{B} = 4\hat{A};\ \hat{C} = \hat{A} - 18°;$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.$$

Подставив в последнее равенство выражения для $\hat{B}$ и $\hat{C}$ через $\hat{A}$, получим

$$\hat{A} + 4\hat{A} + \hat{A} - 18° = 180°;\ 6\hat{A} = 192°;\ \hat{A} = 33°.$$

Ответ: 33°.

Для любого треугольника справедливо *утверждение*: сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны (*неравенство треугольника*).

Пример. Могут ли числа 3, 4, 6 быть сторонами треугольника?

Решение. Проверим выполнение неравенств треугольника:

$$3 + 4 > 6, 3 + 6 > 4, 4 + 6 > 3.$$

Таким образом, сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Ответ: да.

Два треугольника *равны*, если у них соответственно равны:

1) две стороны и угол между ними;

2) два угла и прилежащий к ним угол;

3) три стороны.

Два треугольника *подобны*, если:

1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника;

2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

Медиана треугольника – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны (рис. 141).

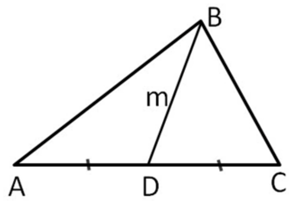


Рис. 141. Медиана треугольника

Медианы пересекаются в одной точке. В точке пересечения медианы треугольника делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

Биссектриса треугольника – это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне (биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий угол пополам) (рис. 142).

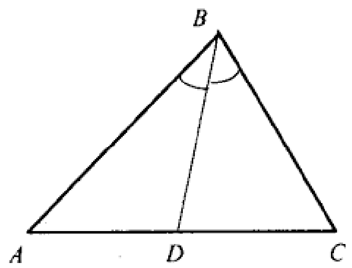


Рис. 142. Биссектриса треугольника

Биссектрисы пересекаются в одной точке. Точка пересечения биссектрис является центром окружности, вписанной в треугольник.

Биссектриса делит противолежащую сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Высота треугольника – это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону (рис. 143).

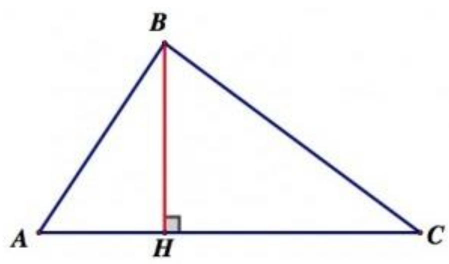


Рис. 143. Высота треугольника

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*.

Если из одной и той же вершины провести медиану, биссектрису и высоту, то *медиана* окажется *самым длинным отрезком*, а *высота – самим коротким отрезком*.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон этого треугольника. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны (рис. 144).

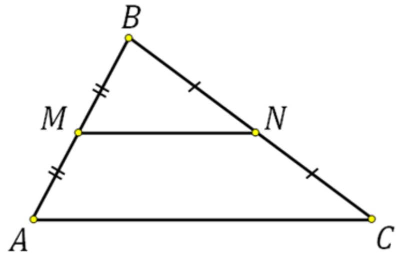


Рис. 144. Средняя линия треугольника

Если у треугольника две стороны равны, то такой треугольник называют *равнобедренным*. Равные стороны называют *боковыми*, а третью сторону – *основанием*. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Признаки равнобедренного треугольника:

1) если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный;

2) если в треугольнике медиана является высотой, то он равнобедренный;

3) если в треугольнике медиана является биссектрисой, то он равнобедренный;

4) если в треугольнике высота является биссектрисой, то он равнобедренный

Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним треугольником.* Очевидно, что каждый внутренний угол равностороннего треугольника равен 60°.

Прямоугольным треугольником называется треугольник, имеющий прямой угол (рис. 145).

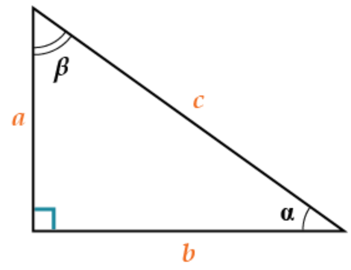


Рис. 145. Прямоугольный треугольник

Гипотенуза – сторона, противолежащая прямому углу. *Катеты* – стороны, прилежащие к прямому углу треугольника.

Свойства прямоугольного треугольника:

1. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (гипотенуза в два раза длиннее катета против угла в 30°).

Пусть a и b – катеты, α и β – углы, противолежащие катетам a и b соответственно, c – гипотенуза.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы треугольника равен сумме квадратов его катетов, т.е.

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Пример. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой. Найти катет BC, если $AB = 5, CA = 4$.

Решение. По теореме Пифагора

$AB^2 = CA^2 + BC^2;\ 5^2 = 4^2 + BC^2;\ BC^2 = 25 - 16 = 9;\ BC = 3.$

Ответ: 3.

Из определения тригонометрических функций острого угла следует:

$$a = c \cdot \sin, b = c \cdot \cos\alpha;$$

$$a = b \cdot \text{tg}\alpha, b = a \cdot \text{ctg}\alpha.$$

Пример. В прямоугольном треугольнике ABC угол $\hat{C}$ – прямой. Найти катет BC, если $AB = 10$, $\cos\hat{A} = 0{,}6$.

Решение. Найдем катет CA:

$$CA = AB\cos\hat{A} = 10 \cdot 0{,}6 = 6.$$

По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - CA^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Ответ: 8.

Площадь S прямоугольного треугольника с катетами a и b вычисляется по формуле

$$S = \frac{ab}{2}.$$

Рассмотрим произвольный треугольник со сторонами a, b и c Обозначим через α, β и γ углы, противолежащие сторонам a, b и c соответственно (рис. 146).

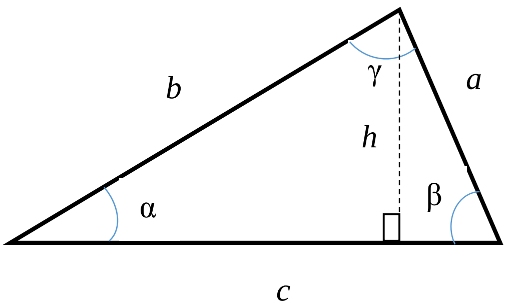


Рис. 146. Произвольный треугольник

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Теорема косинусов позволяет определить *вид треугольника* по его сторонам. Пусть c – наибольшая из трех сторон треугольника, тогда по теореме косинусов:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

с) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.

Пример. Определить вид треугольника, если его стороны равны 5, 12 и 13.

Решение. Квадрат наибольшей стороны:

$c^2 = 13^2 = 169.$

Найдем сумму квадратов двух других сторон:

$a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169.$

Таким образом, получаем

$c^2 = a^2 + b^2,$

следовательно, треугольник – прямоугольный.

Ответ: прямоугольный треугольник.

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Пример. Сторона a треугольника равна $4\sqrt{2}$, а противолежащий этой стороне угол $\alpha = 45°$. Найдите сторону b, если противолежащий этой стороне угол $\beta = 30°$.

Решение. По теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta};\ b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 4\sqrt{2}\frac{\sin 30°}{\sin 45°} = 4\sqrt{2}\frac{1/2}{1/\sqrt{2}} = 4.$$

Ответ: 4.

Площадь произвольного треугольника можно вычислить по одной из формул:

$$S=\frac{ch}{2};\ S=\frac{ab}{2}\sin\gamma;\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр треугольника, $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Пример. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание $c=8$, а боковая сторона $b=5$.

Решение. Построим треугольник ABC.

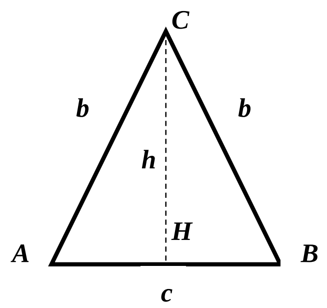


Рис. 147. Равнобедренный треугольник

Проведем из вершины, противолежащей основанию, высоту CH. Обозначим ее буквой h. В равнобедренном треугольнике эта высота одновременно является и медианой, т.е. делит основание на два равных отрезка.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACH. По теореме Пифагора

$$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3.$$

Найдем площадь треугольника:

$$S=\frac{ch}{2}=\frac{8\cdot 3}{2}=12.$$

Ответ: 12.

В равностороннем треугольнике все углы равны 60°. Для нахождения площади воспользуемся формулой

$$S=\frac{ab}{2}\sin\gamma.$$

Положив, что в этой формуле $b=a$, а угол $\gamma=60°$, получим

$$S = \frac{a^2}{2}\sin 60° = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Окружность называют *описанной* около треугольника, если все вершины треугольника расположены на окружности. Центр описанной окружности находится в *точке пересечения серединных перпендикуляров* к сторонам треугольника (рис. 148).

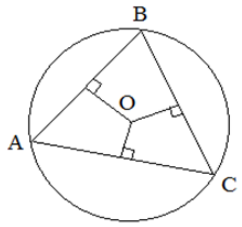


Рис. 148. Центр описанной окружности

Для *остроугольного треугольника* центр окружности находится *внутри треугольника*. Центр описанной окружности *тупоугольного треугольника* находится *вне треугольника*. В случае *прямоугольного треугольника* центр находится *на середине гипотенузы*.

Окружность называют *вписанной* в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности. Центр вписанной окружности находится в *точке пересечения биссектрис* треугольника (рис. 149).

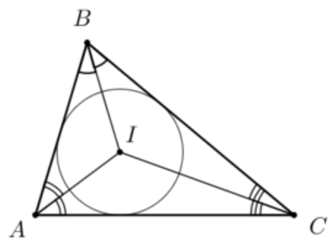


Рис. 149. Центр вписанной окружности

Так как биссектрисы углов треугольника всегда пересекаются внутри треугольника, то для *всех треугольников* центр вписанной окружности находится *внутри треугольника*.

Радиусы описанной и вписанной *в прямоугольный треугольник* окружности вычисляются по формулам:

$R = c/2$ – радиус описанной окружности;

$r = (a + b - c)/2$ – радиус вписанной окружности.

Здесь a и b – катеты, c – гипотенуза прямоугольного треугольника.

Пример. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите радиусы описанной и вписанной в прямоугольный треугольник окружностей.

Решение. Пусть $a = 6$, $b = 8$. По теореме Пифагора найдем гипотенузу:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Найдем радиусы описанной и вписанной в прямоугольный треугольник окружностей:

$$R = \frac{c}{2} = \frac{10}{2} = 5;\ r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{6 + 8 - 10}{2} = 2.$$

Ответ: $R = 5;\ r = 2.$

В случае *произвольного треугольника* (остроугольного или тупоугольного) со сторонами a, b и c с соответствующими углами α, β, γ для нахождения радиуса описанной окружности можно воспользоваться формулой

$$R = \frac{abc}{4R},$$

где S – площадь треугольника.

В некоторых задачах для нахождения радиуса описанной окружности удобнее использовать *расширенную теорему синусов:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Радиус вписанной окружности *произвольного треугольника* вычисляется по формуле

$$r = \frac{S}{p}.$$

где p – полупериметр треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Пример. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10, а высота, проведенная к основанию, равна 8. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решение. Пусть b – боковая сторона, $b = 10$, h – высота, проведенная к основанию с равнобедренного треугольника, $h = 8$ (рис. 150).

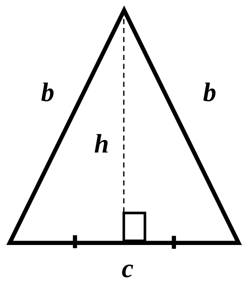


Рис. 150. Равнобедренный треугольник

В равнобедренном треугольнике высота h одновременно является и медианой, то есть делит основание на два равных отрезка. По теореме Пифагора

$$\frac{c}{2} = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6, c = 12.$$

Найдем площадь треугольника:

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48.$$

Найдем радиус описанной окружности:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = 6,25;$$

$$R = \frac{abc}{4R} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{100}{16} = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Найдем полупериметр равнобедренного треугольника:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+10+12}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

Радиус вписанной окружности будет таким:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3\,.$$

Ответ: $R = 6{,}25; r = 3$.

Пример. Одна из сторон треугольника равна 6, а противолежащий ей угол равен 30°. Найдите радиус описанной окружности.

Решение. Пусть $a = 6$, $\alpha = 30°$. Для нахождения радиуса описанной окружности воспользуемся расширенной теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R.$$

В последней формуле выразим радиус через сторону и синус противолежащего угла, а затем подставим числовые значения:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{6}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 6.$$

Ответ: 6.

В случае *равностороннего* треугольника со стороной a соответствующие формулы для радиусов описанной и вписанной окружностей приобретают вид:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3};\;\; r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,.$$

9.5. Четырехугольники

Четырехугольник – это фигура, состоящая из четырех точек, три из которых не лежат на одной прямой, и четырех последовательно соединяющих их отрезков. Четырехугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону. *Сумма внутренних углов* любого выпуклого четырехугольника равна $360°$.

Пример. Известно, что углы четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите сумму наименьшего и наибольшего углов четырехугольника.

Решение. Без ограничения общности считаем, что арифметическая прогрессия является возрастающей. Пусть α_1 и α_4 – наименьший и наибольший углы соответственно.

Воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии:
$$S = \frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} \cdot 4 = 2(\alpha_1 + \alpha_4);\ \alpha_1 + \alpha_4 = \frac{S}{2};\ \alpha_1 + \alpha_4 = \frac{360°}{2} = 180°.$$

Ответ: 180°.

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Пример. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle ACD, \angle CAD = \angle BCA$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм (рис. 151).

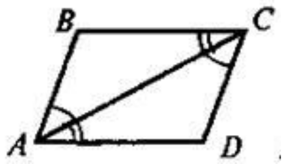


Рис. 151. Четырехугольник $ABCD$

Доказательство. Углы CAD и BCA равны по условию, следовательно, $AD||BC$. Углы ACD и BAC равны по условию, следовательно, $AB||CD$. Таким образом, у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, по определению $ABCD$ – параллелограмм.

Свойства параллелограмма:

1. Противоположные стороны параллелограмма равны.

2. Противоположные углы параллелограмма равны.

3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

4. Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной его стороне, равна 180°.

Признаки параллелограмма:

1. Две его противоположные стороны четырехугольника равны и параллельны.

2. Противоположные углы четырехугольника попарно равны.

3. Диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам.

Пример. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADB = \angle CBD, BC = AD$. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм (рис. 152).

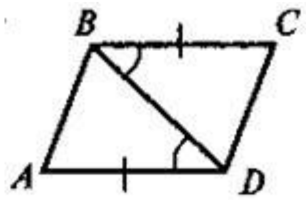


Рис. 152. Четырехугольник $ABCD$

Доказательство. Углы ADB и CBD равны по условию. Следовательно, BC||AD (по накрест лежащим углам). Таким образом, две противоположные стороны равны и параллельны, значит, по первому признаку четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Площадь S параллелограмма можно вычислить по одной из формул:

$$S = ah;\ S = ab \cdot \sin\gamma.$$

Здесь h – высота параллелограмма, проведенная к стороне a; γ – угол между сторонами a и b (рис. 153).

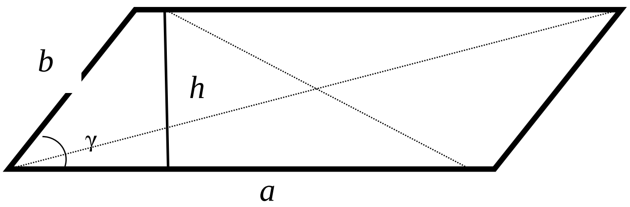


Рис. 153. Параллелограмм

Пример. Косинус угла между смежными сторонами параллелограмма равен 0,6. Найти площадь параллелограмма со сторонами 4 и 5.

Решение. Пусть $a = 4, b = 5$. По условиям задачи $\cos\gamma = 0{,}6$.

Из основного тригонометрического тождества найдем

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$$

Подставив найденное значение $\sin\gamma$ в формулу площади параллелограмма, получим

$$S = ab \cdot \sin\gamma = 4 \cdot 5 \cdot 0{,}8 = 16.$$

Ответ: 16.

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 154).

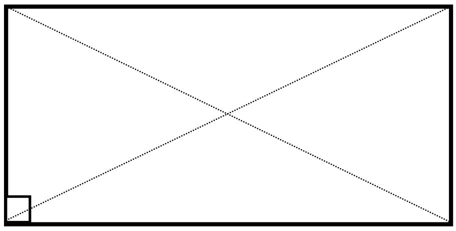


Рис. 154. Прямоугольник

Так как прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Свойство, присущее только прямоугольнику: диагонали прямоугольника равны.

Признаки прямоугольника:

1. Один из углов параллелограмма прямой.

2. Диагонали параллелограмма равны.

Площадь S прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле

$$S = ab.$$

Пример. Периметр прямоугольника равен 40. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 8.

Решение. Пусть $a = 8$. Найдем сторону b:

$$P = 2(a + b);\ 40 = 2(8 + b);\ 20 = 8 + b;\ b = 12.$$

Найдем площадь прямоугольника:

$$S = ab = 8 \cdot 12 = 96.$$

Ответ: 96.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 155).

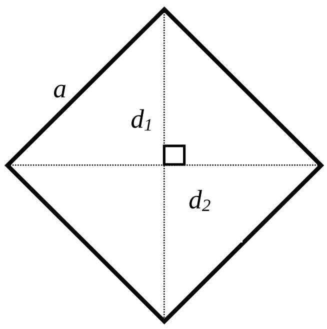


Рис. 155. Ромб

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма.

Свойства, присущее только ромбу:

1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

2. Диагонали ромба являются биссектрисами углов.

Пример. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle ABC = 60°, AC = 10$.

Решение. Треугольник ABC – равнобедренный. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, а угол при вершине равнобедренного треугольника $\angle ABC = 60°$. Отсюда следует, что $\angle BCA = \angle BAC = 60°$, то есть треугольник ABC – равносторонний. Так как $AC = 10$, следовательно, сторона ромба равна 10. Периметр ромба равен 40 (рис. 156).

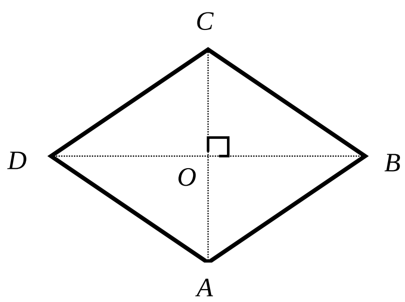


Рис. 156. Периметр ромба $ABCD$

Ответ: 40.

Площадь S ромба с диагоналями d_1 и d_2 вычисляется по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Пример. Найдите площадь ромба, если сторона ромба равна 5, а одна из диагоналей – 8.

Решение.

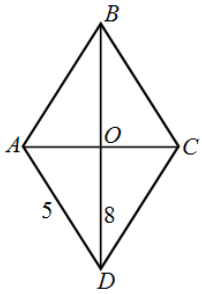


Рис. 157. Площадь ромба $ABCD$

Пусть BD – известная диагональ (рис. 157). По условиям задачи $BD = 8$. Согласно свойствам ромба его диагонали пересекаются под прямым углом и делятся в точке пересечения пополам. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOD. Найдем катет AO по теореме Пифагора:

$$AO = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3.$$

В точке пересечения диагонали делятся пополам, т.е.

$$AC = 2AO = 2 \cdot 3 = 6.$$

Найдем площадь ромба:

$$S = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

Ответ: 24.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 158).

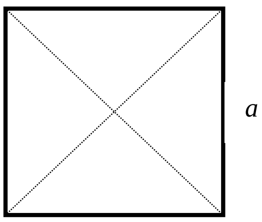


Рис. 158. Квадрат

Квадрат можно считать ромбом с прямыми углами или прямоугольником с равными сторонами, поэтому квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника.

Площадь S квадрата со стороной a вычисляется по формуле

$$S = a^2.$$

Пример. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 8 и 18.

Решение. Найдем площадь прямоугольника:

$$S_{\text{пр}} = 8 \cdot 18 = 144.$$

Длину стороны квадрата обозначим буквой a, а площадь квадрата – буквой $S_{\text{кв}}$. По условиям задачи имеем

$$S_{\text{кв}} = S_{\text{пр}}.$$

Следовательно,

$$a^2 = 144; \ \ a = 12.$$

Ответ: 12.

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны (рис. 159).

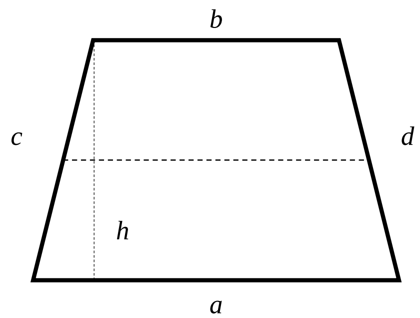


Рис. 159. Трапеция

Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями.* Стороны, которые не параллельны, называются *боковыми сторонами* трапеции.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме.

Трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям, называется *прямоугольной* трапецией.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобедренной.*

Свойства равнобедренной трапеции:

1. Углы при основаниях равнобедренной трапеции равны.

2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.

Площадь S трапеции с основаниями a, b и высотой h вычисляется по формуле

$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

Пример. В равнобедренной трапеции большее и меньшее основания равны соответственно $DA = 18, CB = 10$. Боковая сторона равна $AB = 5$. Найдите площадь трапеции.

Решение. Проведем высоты CF и BE (рис. 160). Прямоугольные треугольники DFC и AEB равны по катету и гипотенузе. Следовательно,

$$DF = FA = \frac{18-10}{2} = 4.$$

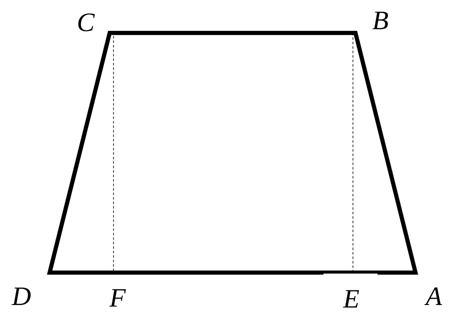


Рис. 160. Нахождение площади трапеции

Из прямоугольного треугольника AEB по теореме Пифагора получим

$$BE = \sqrt{AB^2 - EA^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Найдем площадь трапеции:

$$S = \frac{DA + CB}{2} \cdot BE = \frac{18 + 10}{2} \cdot 3 = 42.$$

Ответ: 42.

Площадь произвольного выпуклого четырехугольника с диагоналями d_1, d_2 и углом между диагоналями φ (рис. 161) вычисляется по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2}{2} \sin\varphi\,.$$

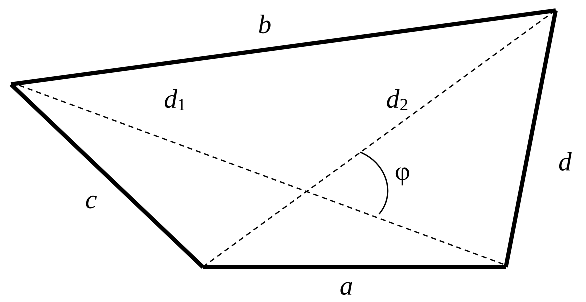


Рис. 161. Произвольный четырехугольник

Пример. Одна из диагоналей выпуклого четырехугольника равна 3, а вторая диагональ вдвое больше первой. Найдите площадь четырехугольника, если угол между диагоналями равен 30°.

Решение. Пусть $d_1 = 3$. Найдем вторую диагональ:

$$d_2 = 2d_1 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Площадь четырехугольника:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2} \sin\varphi = \frac{3 \cdot 6}{2} \sin 30° = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

Четырехугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется *вписанным в эту окружность*, а окружность называется описанной около четырехугольника (рис. 162).

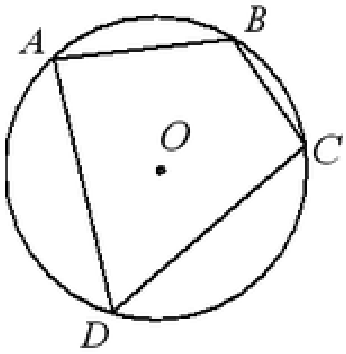


Рис. 162. Четырехугольник, вписанный в окружность

Не во все четырехугольники возможно вписать окружности, так как серединные перпендикуляры четырех сторон могут не пересекаться в одной точке.

Чтобы около четырехугольника можно было *описать окружность*, необходимо и достаточно, чтобы *сумма его противоположных углов равнялась 180°.*

Очевидно, что около прямоугольника и равнобедренной трапеции всегда можно описать окружность.

Пример. Стороны прямоугольника равны 5 и 12. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

Решение. Диагонали прямоугольника совпадают с диаметрами описанной окружности (рис. 163).

По теореме Пифагора найдем диагональ BD:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Радиус окружности равен половине диагонали BD:

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5.$$

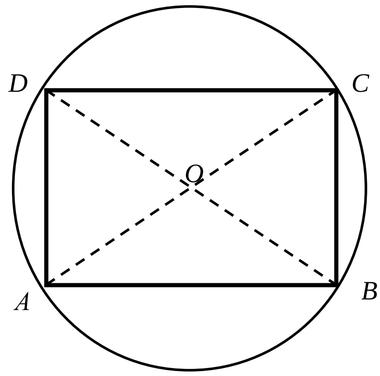


Рис. 163. Нахождение радиуса описанной окружности

Ответ: 6,5.

Пример. Диагональ равнобедренной трапеции равна $6\sqrt{3}$, а противолежащий ей острый угол трапеции равен 60°. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

Решение. Радиус описанной около трапеции окружности в данном случае совпадает с радиусом описанной окружности треугольника *ABD* (рис. 164)

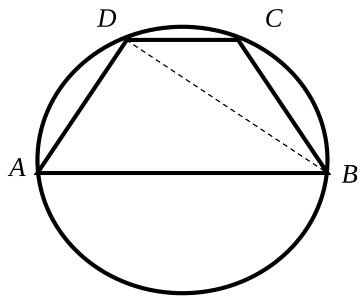


Рис. 164. Нахождение радиуса описанной трапеции

Пусть $\gamma = \angle BAD = 60°, c = BD = 6\sqrt{3}$. По расширенной теореме синусов радиус описанной окружности треугольника *ABD*:

$$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sin 30°} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 6.$$

Ответ: 6.

Если все стороны четырехугольника касаются окружности, то он называется четырехугольником, *описанным около этой окружности*, а окружность – вписанной в четырехугольник (рис. 165).

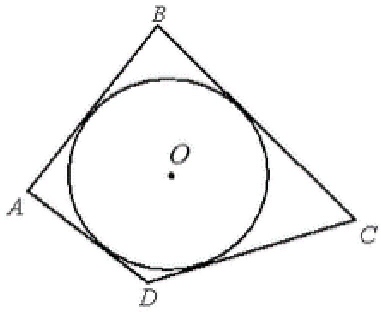


Рис. 165. Четырехугольник, описанный около окружности

Не все четырехугольники можно описать около окружности, так как биссектрисы четырех углов могут не пересекаться в одной точке.

Чтобы в четырехугольник можно было *вписать окружность*, необходимо и достаточно, чтобы *суммы противоположных сторон были равны.*

Пример. Средняя линия равнобедренной трапеции равна $10\sqrt{3}$, а острый угол трапеции равен $60°$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности.

Решение. Введем следующие обозначения: a, b – основания трапеции; m – средняя линия трапеции; c – боковая сторона трапеции; h – высота трапеции; γ – острый угол трапеции.

В трапецию окружность можно вписать тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны, то есть

$$a + b = c + c;\ a + b = 2c;\ c = \frac{a + b}{2}.$$

Таким образом, если в равнобедренную трапецию можно вписать окружность, ее боковая сторона равна средней линией трапеции:

$$c = m = 10\sqrt{3}.$$

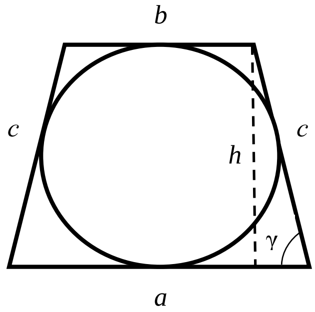


Рис. 166. Нахождение радиуса вписанной в трапецию окружности

Радиус вписанной окружности в данном случае равен половине высоты трапеции (рис. 166). Высота трапеции:

$$h = c\sin\gamma = 10\sqrt{3} \cdot \sin 60° = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15.$$

Следовательно,

$$r = \frac{h}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5.$$

Ответ: 7,5.

9.6. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все стороны и все углы, называется *правильным многоугольником* (рис. 167)

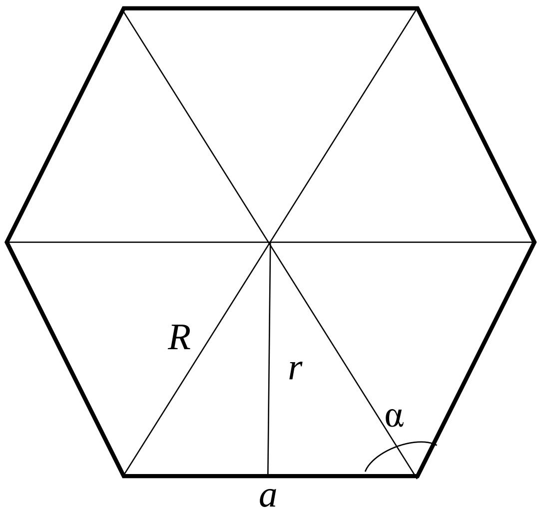


Рис. 167. Правильный многоугольник

Так как все углы правильного -угольника равны, то величина одного внутреннего угла такова:

$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n},$$

где n – число сторон.

Пример. Найдите внутренний угол правильного десятиугольника.

Решение.

$$\alpha = \frac{180°(10-2)}{10} = \frac{180° \cdot 8}{10} = 144°.$$

Ответ: 144°.

Площадь S правильного -угольника со стороной a вычисляется по формуле

$$S = \frac{a^2 n}{4\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}.$$

Около *любого* правильного многоугольника можно *описать и вписать* в него окружность, при этом совпадают центры обеих окружностей, и эту точку называют *центром многоугольника*. Вписанная окружность касается всех сторон, описанная окружность проходит через все вершины.

Радиусы описанной и вписанной окружностей правильного n-угольника со стороной a вычисляются по формулам соответственно:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}\ ;\ r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}.$$

Пример. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей правильного шестиугольника со стороной a.

Решение.

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}} = \frac{a}{2\sin 30°} = \frac{a}{2 \cdot \frac{1}{2}} = a,$$

$$r = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{180°}{n}} = \frac{a}{2\mathrm{tg}30°} = \frac{a}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $R = a;\ r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

9.7. Хорды, касательные и секущие

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности радиусом R, называется диаметром окружности. Диаметр окружности равен $D = 2R$.

Пример. Точка O – центр окружности. Через центр окружности проведены две хорды AB и CD. Найдите AC, если $AB = 3$, $\angle AOD = 120°$ (рис. 168).

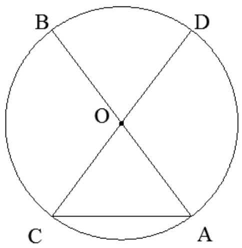


Рис. 168. Нахождение хорды AC

Решение. Отрезок OA – это радиус окружности, а хорда AB – диаметр окружности. Следовательно,

$$OA = \frac{AB}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Углы AOD и AOC – смежные. Следовательно,

$$\angle AOC = 180° - 120° = 60°.$$

Треугольник AOC – равнобедренный. У равнобедренного треугольника углы при основании равны, т.е.

$$\angle OCA = \angle OAC = 60°.$$

Таким образом, получили, что треугольник AOC – равносторонний, т.е.

$$AC = OC = OA = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Теорема о пересекающихся хордах. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков второй хорды (рис. 169).

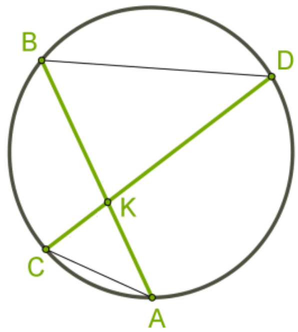


Рис. 169. Теорема о пересекающихся хордах: $AK \cdot BK = CK \cdot DK$

Пример. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K. Найдите AK, если $BK = 4, DK = 6, CK = 2$.

Решение. По теореме о пересекающихся хордах имеем

$$AK \cdot BK = CK \cdot DK.$$

Подставив числовые значения, получим

$$AK \cdot 4 = 2 \cdot 6;\ 4AK = 12;\ AK = 3.$$

Ответ: 3.

Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точке касания (рис. 170).

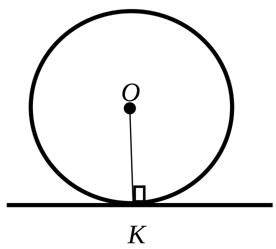


Рис. 170. Касательная к окружности

Пример. Окружность с центром в точке O касается треугольника AOK в точке K (рис. 171). Найдите радиус окружности, если $OA = 6$, $\angle OAK = 120°$.

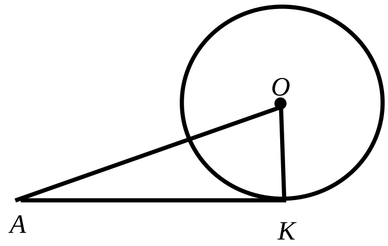


Рис. 171. Нахождение радиуса окружности

Решение. Треугольник AOK – прямоугольный. По свойству прямоугольного треугольника катет OK, противолежащий углу $30°$, равен половине гипотенузы OA:

$$OK = \frac{OA}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Ответ: 3.

Теорема о двух касательных. Отрезки двух касательных, проведенных из одной точки, равны (рис. 172).

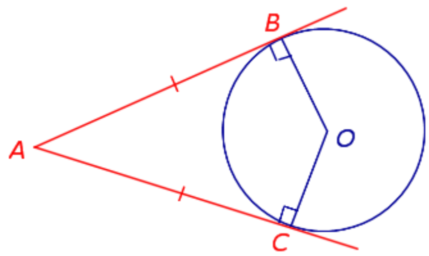


Рис. 172. Теорема о двух касательных: $AC = AB$

Секущей окружности называется прямая, имеющая с окружностью две общие точки.

Теорема о касательной и секущей. Если из одной точки проведены к окружности секущая и касательная, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной (рис. 173).

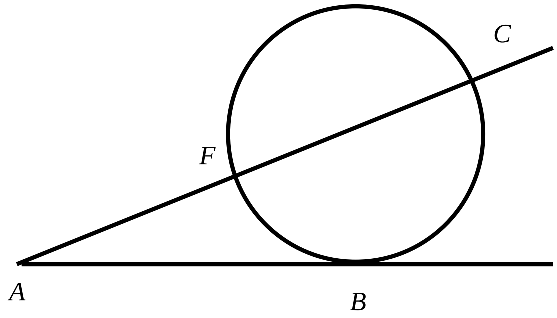


Рис. 173. Теорема о касательной и секущей: $AB^2 = AC \cdot AF$

Пример. Окружность проходит через вершину C треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке F и касается стороны AB в точке B (рис. 174). Найдите сторону AB, если $AF = 4, FC = 12$.

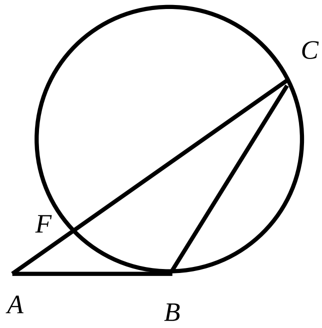


Рис. 174. Вычисление длины отрезка касательной

Решение. Найдем длину секущей AC :

$$AC = AF + FC = 4 + 12 = 16.$$

По теореме о касательной и секущей получим

$$AB^2 = 16 \cdot 4 = 64; \;\; AB = 8.$$

Ответ: 8.

Теорема о двух секущих. Если из одной точки проведены к окружности две секущие, то произведение первой секущей на ее внешнюю часть равно произведению второй секущей на ее внешнюю часть (рис. 175).

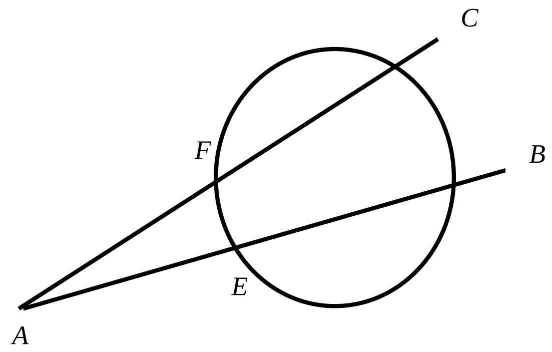


Рис. 175. Теорема о двух секущих: $AC \cdot AF = AB \cdot AE$

Пример. Из точки A проведены к окружности две секущие AC и AB. Найдите длину секущей AC, если $AF = FC, AE = 1, EB = 17$.

Решение. Пусть $AF = FC = x$. По теореме о двух секущих

$$2x \cdot x = AB \cdot AE;\ 2x^2 = 1 \cdot (1 + 17);\ x^2 = 9, x = 3.$$

Значит, $AC = 2x = 6$.

Ответ: 6.

9.8. Векторы

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок прямой с начальной точкой A и конечной точкой B (рис. 176). Вектор также обозначают одной буквой $\vec{a}$.

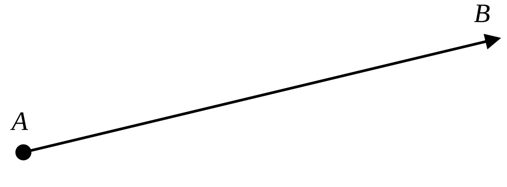


Рис. 176. Вектор с начальной точкой A и конечной точкой B

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор. Обозначается длина вектора $|\overrightarrow{AB}|$, или просто AB.

Если начало и конец вектора совпадают, вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Два коллинеарных вектора могут быть направлены в одном направлении или в противоположных направлениях. В первом случае коллинеарные векторы называются *сонаправленными,* а во втором – *противоположно направленными*. Запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ означает, что векторы сонаправлены, а запись $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – что векторы противоположно направлены.

Два вектора называются *равными,* если они имеют одинаковую длину и сонаправлены. Из определения равных векторов следует, что вектор можно перемещать параллельно самому себе без изменения длины и направления.

Введем правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Пусть $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Это правило сложения называется правилом треугольника (рис. 177).

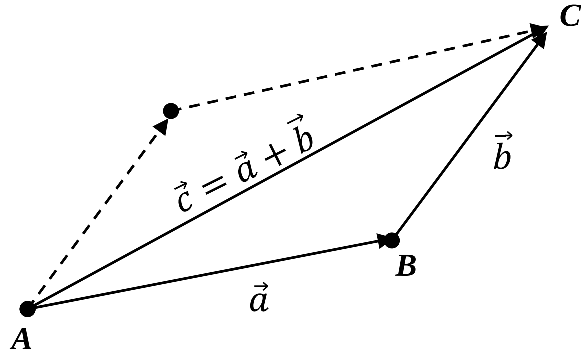


Рис. 177. Сумма векторов

Очевидно, что вектор $\vec{c}$ можно рассматривать как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (правило параллелограмма).

Сложение нескольких векторов выполняется следующим образом: первый вектор складывается со вторым, а затем их сумма – с третьим вектором и т.д. Из законов сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

Пример. Упростить выражение $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$.

Решение. Воспользуемся правилом сложения нескольких векторов:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Ответ: $\overrightarrow{AD}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$ (рис. 178).

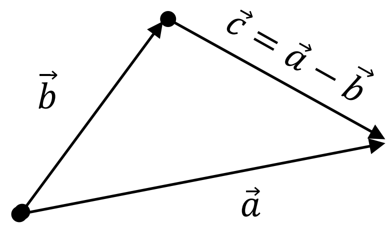


Рис. 178. Разность векторов

В этом случае начало вектора $\vec{c}$ совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец вектора $\vec{c}$ – с концом вектора $\vec{a}$, при условии что начало вектора $\vec{b}$ совпадет с началом вектора $\vec{a}$.

Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается так: $(-\vec{a})$. Например, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ являются противоположными: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $(-\vec{b})$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right),$$

Пример. Упростить выражение $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$.

Решение. Воспользуемся правилами сложения и разности векторов:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EK} =$

$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK}$.

Ответ: $\overrightarrow{AK}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* k называется вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$ и противоположно вектору $\vec{a}$ при $k < 0$.

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a});$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b};$$

$$(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные, то существует число $k \neq 0$, такое, что

$$\vec{b} = k\vec{a}.$$

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ – данные неколлинеарные векторы. Справедливо следующее утверждение: любой вектор $\vec{c}$ на плоскости можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}.$$

Числа k и l называются коэффициентами разложения. Отметим, что эти числа определяются единственным образом.

9.9. Метод координат

Построим прямоугольную систему координат с началом в точке O (рис. 179).

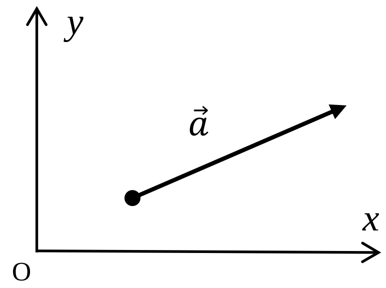


Рис. 179. Вектор $\vec{a}$ в системе координат Oxy

На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат единичный вектор, т.е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, а через $\vec{j}$ – единичный вектор оси ординат. Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовем координатными векторами. Очевидно, что эти векторы неколлинеарные. Поэтому любой вектор $\vec{a}$ на плоскости можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

Коэффициенты a_x и a_y называются координатами вектора $\vec{a}$. То, что вектор имеет координаты a_x и a_y, обозначают обычно так: $\vec{a} = (a_x; a_y)$. В некоторых учебниках координаты вектора записываются в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\{a_x; a_y\}$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан координатами начала – точки $A(x_A; y_A)$ и конца – точки $B(x_B; y_B)$, тогда каждая координата вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ равна разности соответствующих координат его конца и начала:

$$a_x = x_B - x_A;$$

$$a_y = y_B - y_A.$$

Пример. Вектор $\overrightarrow{AB}$ задан координатами начала – $A(-2;3)$ и конца – $B(-1;7)$. Найдите координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Решение.

$a_x = -1 - 2 = -3$; $a_y = 7 - 3 = 4$.

Следовательно, $\vec{a} = (-3;4)$.

Ответ: $\vec{a} = (-3;4)$.

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ и число k. Сформулируем правила, позволяющие по заданным координатам векторов и числу k находить координаты произведения вектора на число, а также координаты суммы и разности векторов.

1. Каждая координата произведения вектора $\vec{a} = (a_x, a_y)$ на число k равна произведению соответствующей координаты вектора на это число:

$$k\vec{a} = (ka_x, ka_y).$$

2. Каждая координата суммы двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$ равна сумме соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y).$$

3. Каждая координата разности двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$ равна разности соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y).$$

*Пример***.** Даны два вектора $\vec{a} = (2;-1)$ и $\vec{b} = (2;4)$. Найти вектор $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$

Решение. $\vec{c} = (2 + 2 \cdot 2; -1 + 2 \cdot 4) = (8;7)$.

Ответ: $\vec{c} = (8;7)$.

Если векторы $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$ коллинеарные, то $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, следовательно, выполняются равенства $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$. Отсюда следует условие коллинеарности векторов

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \lambda.$$

*Пример***.** Даны векторы $\vec{a} = (2, \alpha)$ и $\vec{b} = (6; 3)$. При каком значении α эти векторы коллинеарны?

Решение. Запишем условие коллинеарности данных векторов:

$$\frac{2}{6} = \frac{\alpha}{3}.$$

Следовательно, $\alpha = 1$.

Ответ: 1.

Длина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y)$ вычисляется по формуле

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

*Пример***.** Найдите длину вектора $\vec{a} = (6,8)$.

Решение.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Ответ: 10.

9.10. Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Скалярное произведение обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$. Таким образом, по определению имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

В координатной форме скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Если вектора ортогональны, то угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\cos\varphi = 0$. Получаем условие ортогональности векторов:

$$a_x b_x + a_y b_y = 0$$

Пример. При каком значении α векторы $\vec{a} = (\alpha, 3)$ и $\vec{b} = (2, -4)$ ортогональны?

Решение. Условие ортогональности имеет вид:

$$2\alpha - 12 = 0.$$

Следовательно, $\alpha = 6$.

Ответ: $\alpha = 6$.

Используя определение скалярного произведения, можно найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

или в координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} = (3,4)$ и $\vec{b} = (12, -5)$.

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 12 - 4 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{16}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{169}} = \frac{16}{65}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arccos\left(\frac{16}{65}\right).$$

Ответ: $\varphi = \arccos\left(\frac{16}{65}\right)$.

9.11. Задачи повышенного уровня сложности

Пример. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

А. Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

Б. Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырехугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

Решение. А. Углы BAC и KHB равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 180).

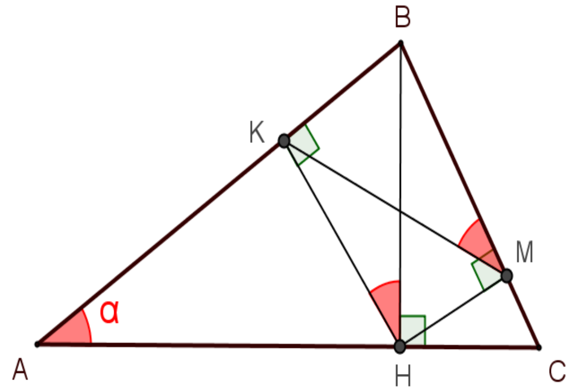


Рис. 180. Подобие треугольников MBK и ABC

Рассмотрим четырехугольник $BKHM$. По условиям задачи имеем

$$\angle BKH + \angle BMH = 90° + 90° = 180°,$$

то есть сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 180 градусам, следовательно, четырехугольник $BKHM$ вписан в окружность.

Углы KHB и KMB вписанного четырехугольника опираются на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Таким образом,

$$\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB.$$

Треугольники ABC и MBK имеют общий угол ABC и

$$\angle BAC = \angle KMB,$$

значит, эти треугольники подобны по двум углам. Что и требовалось доказать.

Б. Сначала найдем коэффициент подобия k треугольников ABC и MBK. Введем обозначение $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB = \alpha$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BKH. По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника, катет, противолежащий углу α, равен

$$BK = BH \cdot \sin\alpha.$$

Рассмотрим треугольник ABC. По обобщенной теореме синусов сторона BC, противолежащая углу α, равна

$$BC = 2R \cdot \sin\alpha.$$

Стороны BC и BK – сходственные стороны в подобных треугольниках ABC и MBK, следовательно, коэффициент подобия k равен

$$k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R\sin\alpha}{BH\sin\alpha} = \frac{8}{2} = 4.$$

Найдем отношение площади треугольника MBK к площади четырехугольника $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{1}{\frac{S_{ABC}}{S_{MBK}} - 1}.$$

Известно, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то есть

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MBK}} = k^2 = 16.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{15}.$$

Ответ: Б. 1/15.

Пример. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

А. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

Б. Найдите AD.

Решение. А. Вписанные углы BCA и CAD опираются на равные хорды AB и CD (рис. 181). Равные хорды стягивают равные дуги. Следовательно, углы BCA и CAD, опирающиеся на равные дуги, равны. Углы BCA и CAD являются внутренними накрест лежащими углами, полученными при пересечении двух прямых BC и AD третьей прямой. Значит, прямые BC и AD параллельны

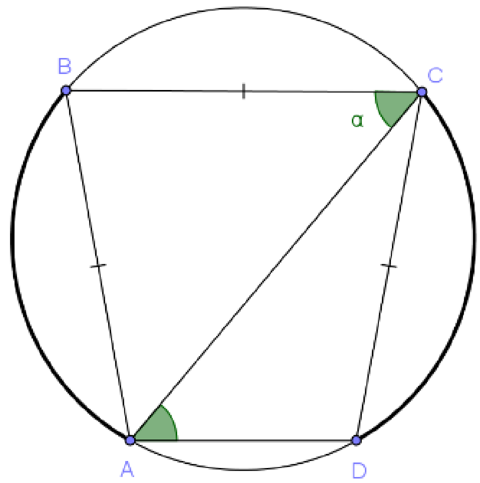


Рис. 181. Вписанный четырехугольник

Б. Пусть $\angle BCA = \alpha$. Треугольник ABC равнобедренный, значит,

$$\angle BAC = \angle BCA = \alpha.$$

Отсюда найдем $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 2\alpha$.

Четырехугольник $ABCD$ – равнобедренная трапеция, поэтому $\angle CDA = \angle BAD = 2\alpha$. Значит, $\angle ACD = 180° - \angle CAD - \angle CDA = 180° - 3\alpha$.

По обобщенной теореме синусов для треугольника ACD:

$$\frac{AD}{\sin(180° - 3\alpha)} = 2R.$$

Следовательно, $AD = 2R\sin 3\alpha$.

Получим формулу синуса тройного угла:

$$\begin{aligned}\sin3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \sin2\alpha\cdot\cos\alpha + \cos2\alpha\cdot\sin\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ &= (2\cos^2\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ &= (2(1-\sin^2\alpha) + 1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ &= (2 - 2\sin^2\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = (3-4\sin^2\alpha)\sin\alpha.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sin3\alpha = (3-4\sin^2\alpha)\sin\alpha.$$

Найдем $\sin\alpha$ из треугольника ABC по обобщенной теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R.$$

Следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Таким образом,

$$\sin3\alpha = (3-4\sin^2\alpha)\sin\alpha = \left(3 - 4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

Найдем длину стороны AD:

$$AD = 2R\sin3\alpha = 16\cdot\frac{9}{16} = 9.$$

Ответ: Б. 9.

Пример. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и MCD прямые.

А. Докажите, что $MA = MD$.

Б. Расстояние от M до AD равно BC, а угол ADC равен 55°. Найдите угол BAD.

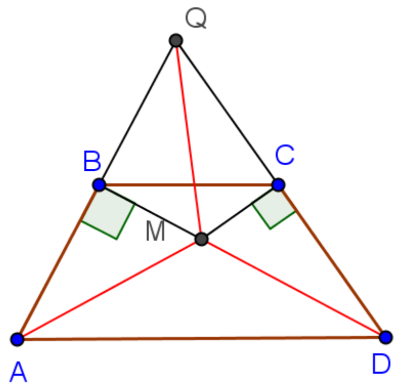


Рис. 182. Треугольник AQD

Решение. А. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке Q. Так как $BC = AD/2,$ то BC — средняя линия треугольника AQD (рис. 182). Тогда $QC = CD, QB = BA$.

Углы MCD и MBA прямые, следовательно, MC и MB — медианы и высоты, тогда треугольники QMD и QMA — равнобедренные, то есть

$$QM = MD, QM = MA.$$

Следовательно,

$$MD = MA.$$

Что и требовалось доказать.

Б. Треугольник AMD – равнобедренный (рис. 183), следовательно,

$$AN = ND = AD/2.$$

По условиям задачи

$$MN = BC = AD/2.$$

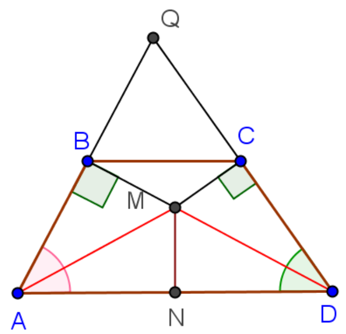


Рис. 183. Нахождение угла BAD

Следовательно, $MN = AN = ND,$ то есть точка N – центр описанной окружности с диаметром AD. Следовательно,

$$\angle AMD = 90°.$$

Рассмотрим треугольник ADQ. Точка M – центр описанной окружности. По теореме о центральном и вписанном углах

$$\angle AQD = \angle AMD/2 = 45°.$$

Таким образом,

$$\angle BAD = 180° - (55° + 45°) = 80°.$$

Ответ: Б. $80°$.

Пример. Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.

А. Докажите, что диагонали перпендикулярны.

Б. Найдите площадь трапеции.

Решение. А. Проведем через точку C прямую, параллельную BD, до пересечения с прямой AD. В результате получим точку C_1 (рис. 184). Четырехугольник BCC_1D – параллелограмм. В треугольнике ACC_1:

$AC = 15$; $CC_1 = BD = 8$; $AC_1 = AD + DC_1 = 17$.

Нетрудно проверить, что

$15^2 + 8^2 = 17^2$.

Следовательно,

$AC^2 + {CC_1}^2 = {AC_1}^2$.

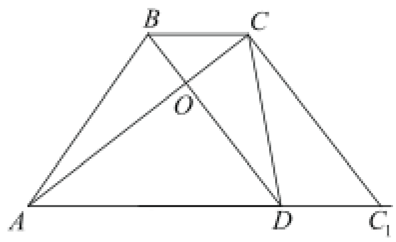


Рис. 184. Трапеция со взаимно перпендикулярными диагоналями

Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACC_1 – прямоугольный, угол ACC_1 – прямой.

Прямые BD и CC_1 параллельны по построению, следовательно, угол AOD – прямой. Что и требовалось доказать.

Б. Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними. Следовательно,

$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60.$$

Ответ: Б. 60.

9.12. Упражнения

1. Внутри развернутого угла $\angle AOB$ проведен луч OC так, что угол $\angle AOC$ составляет 0,6 угла $\angle AOB$. Найдите величину угла $\angle COB$.

2. Найдите центральный угол, опирающийся на дугу, равную 1/8 окружности.

3. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, равную 1/10 окружности.

4. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $6\sqrt{\pi}$.

5. Найдите длину дуги окружности радиусом $R = 12$ и площадь сектора центрального угла α, если $\alpha = 30°$.

6. Дан треугольник ABC. Найдите величину угла A треугольника ABC, если угол A в 3 раза меньше угла B и на 20° больше угла C.

7. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой. Найти катет BC, если $AB = 13$, $\cos A = 5/13$.

8. Определить вид треугольника, если его стороны равны 5, 10 и 11.

9. Сторона a треугольника равна $\sqrt{6}$, а противолежащий этой стороне угол $\alpha = 60°$. Найдите сторону b, если противолежащий этой стороне угол $\beta = 45°$.

10. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание $c = 10$, а боковая сторона $b = 13$.

11. Найдите площадь треугольника со сторонами $\sqrt{3}$ и 4, если угол между ними равен $60°$.

12. Найдите площадь треугольника со сторонами 3, 6 и $3\sqrt{5}$.

13. Одна из сторон параллелограмма равна 3. Найдите вторую сторону, если периметр параллелограмма равен 14.

14. Угол между смежными сторонами параллелограмма равен $45°$. Найти площадь параллелограмма со сторонами $4\sqrt{2}$ и 5.

15. Периметр прямоугольника равен 20. Найдите площадь прямоугольника, если одна из его сторон равна 4.

16. Найдите площадь ромба, если сторона ромба равна $\sqrt{10}$, а одна из диагоналей – 3.

17. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 4 и 9.

18. Одна из диагоналей выпуклого четырехугольника равна 2, а вторая диагональ втрое больше первой. Найдите площадь четырехугольника, если диагонали пересекаются под прямым углом.

19. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке K. Найдите AK, если $BK = 2, DK = 3, CK = 4$.

20. Окружность с центром в точке O касается треугольника AOK в точке K. Найдите радиус окружности, если $AO = 6\sqrt{2}$, $\angle OAK = 45°$.

21. Окружность проходит через вершину C треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке F и касается стороны AB в точке B. Найдите сторону AB, если $AF = 4, FC = 5$.

22. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите радиусы описанной и вписанной в прямоугольный треугольник окружностей.

23. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а высота, проведенная к основанию, равна 4. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

24. Одна из сторон треугольника равна $4\sqrt{3}$, а противолежащий ей угол равен $60°$. Найдите радиус описанной окружности.

25. Стороны прямоугольника равны 6 и 10. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

26. Диагональ равнобедренной трапеции равна $\sqrt{8}$, а противолежащий ей острый угол трапеции равен $45°$. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

27. Средняя линия равнобедренной трапеции равна $6\sqrt{3}$, а острый угол трапеции равен $60°$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности.

28. Найдите внутренний угол правильного восьмиугольника.

29. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей, также площадь правильного шестиугольника со стороной $4\sqrt{3}$.

30. Вектор $\overrightarrow{AB}$ задан координатами начала $A(0;\ 3)$ и конца $B(4;\ 6)$. Найдите координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

31. Даны векторы $\vec{a} = (3; 2)$ и $\vec{b} = (1; 2)$. Найти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

32. Даны векторы $\vec{a} = (3, \alpha)$ и $\vec{b} = (6; 4)$. При каком значении α эти векторы коллинеарны?

33. Найдите длину вектора $\vec{a} = (2; \sqrt{5})$.

34. При каком значении α векторы и $\vec{a} = (\alpha; 2)$ и $\vec{b} = (3; 6)$ ортогональны?

35. Найти угол между векторами $\vec{a} = (-3; 4)$ и $\vec{b} = (5; 12)$.

36. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

А. Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

Б. Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырехугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 9.

Ответ: Б. 1/80.

37. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R = 10$. Известно, что $AB = BC = CD = 6$.

А. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

Б. Найдите AD.

Ответ: Б. 15,84.

38. В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза больше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и MCD прямые.

А. Докажите, что $MA = MD$.

Б. Расстояние от M до AD равно BC, а угол ADC равен 50°. Найдите угол BAD.

Ответ: Б. 85°.

39. Дана трапеция с диагоналями равными 5 и 12. Сумма оснований равна 13.

А. Докажите, что диагонали перпендикулярны.

Б. Найдите площадь трапеции.

Ответ: Б. 30.

10. СТЕРЕОМЕТРИЯ

10.1. Основные понятия

Стереометрия – это раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве. Основными объектами стереометрии являются точка, прямая и *плоскость*. Точки обозначают латинскими прописными буквами A, B, C и т.д. Прямые обозначают строчными латинскими буквами a, b, c и т.д. или двумя прописными латинскими буквами AB, CD и т.д. Плоскость обозначают греческими буквами α, β, γ и т.д. Принадлежность точки A плоскости α обозначается так: $A \in \alpha$. Если точка M не принадлежит плоскости α, тогда пишем $M \notin \alpha$.

Многогранником называется поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются *гранями.* Стороны граней называются *ребрами,* а концы ребер – *вершинами*.

Объем – это количественная характеристика части пространства, занимаемого геометрическим телом. За единицу измерения объема принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Например, куб с ребром 1 см называется кубическим сантиметром и обозначается см^3. Объем геометрического тела обычно обозначается заглавной буквой V латинского алфавита.

10.2. Аксиомы стереометрии

Основные свойства точек, прямых и плоскостей выражаются через аксиомы. *Аксиома* – это утверждение, принимаемое без доказательства. Сформулируем *основные аксиомы стереометрии*.

А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна (рис. 185).

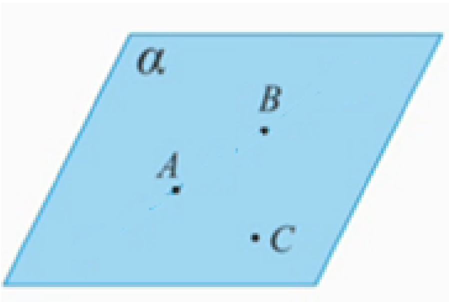


Рис. 185. Аксиома А1

А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости, т.е. прямая лежит в плоскости или плоскость проходит через прямую (рис. 186).

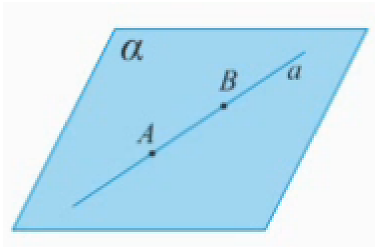


Рис. 186. Аксиома А2

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей (рис. 187).

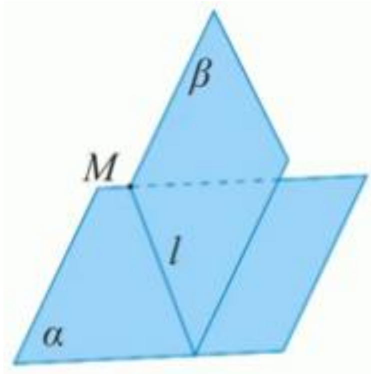


Рис. 187. Аксиома А3

Первая аксиома иллюстрирует способ задания плоскости, вторая – взаимное расположение прямой и плоскости, третья – взаимное расположение плоскостей.

Следствия из аксиом:

С1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, притом только одна (рис. 188).

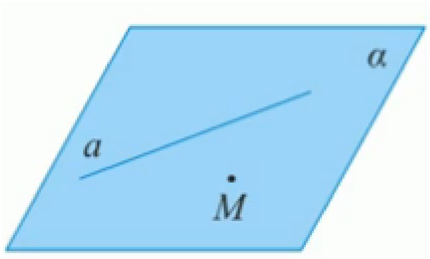


Рис. 188. Следствие С1

С2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, притом только одна (рис. 189).

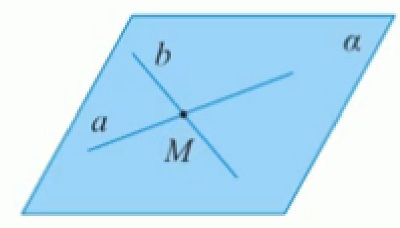


Рис. 189. Следствие С2

Пример. Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

А. Могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой?

Б. Могут ли прямые AB и CD пересекаться?

Решение.

А. Предположим, что любые три точки (например, A, B, C) лежат на одной прямой. Тогда через эту прямую и точку D проходит плоскость, и все четыре точки лежат в этой плоскости, что противоречит условию.

Ответ: нет.

Б. Нет, так как через пересекающиеся прямые можно провести плоскость, а тогда в этой плоскости содержатся все четыре точки, что противоречит условию.

Ответ: нет.

10.3. Параллельность прямых и плоскостей

Две прямые в пространстве называются *параллельными,* если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Признак параллельности прямых. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Пример. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB соответственно. Докажите, что $MNQP$ – параллелограмм (рис. 190).

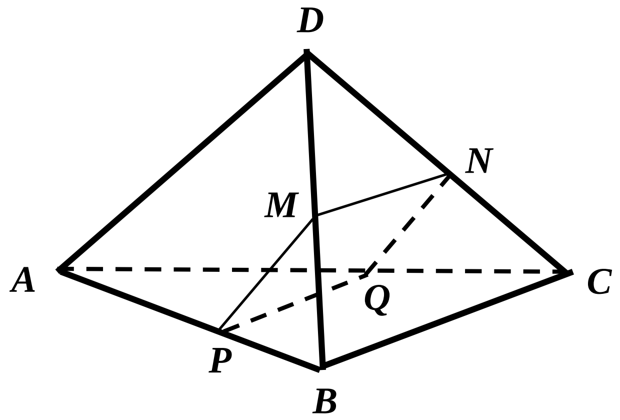


Рис. 190. Четырехугольник $MNQP$ – параллелограмм

Решение. А. Отрезок MN – средняя линия треугольника BCD, следовательно, $MN||BC$. Отрезок PQ – средняя линия треугольника ABC, следовательно, $PQ||BC$. Значит, по признаку параллельности прямых $MN||PQ$.

Отрезок MP – средняя линия треугольника ADB, следовательно, $PM||AD$. Отрезок QN – средняя линия треугольника ADC, следовательно, $QN||AD$. Значит, по признаку параллельности прямых $QN||PM$.

Таким образом, противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, следовательно, $MNQP$ – параллелограмм.

Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. В пространстве возможен случай, когда две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т.е. не пересекаются и не параллельны.

Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости. Скрещивающиеся прямые a и b обычно обозначают так: $a \dot{-} b$.

Углом между пересекающимися прямыми, как известно, называется наименьшим углом, полученным при пересечении этих прямых.

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны данным скрещивающимся прямым.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Определение. *Прямая и плоскость называются параллельными*, если они не имеют общих точек. Обозначение: $a||\alpha$.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой на этой плоскости, то эта прямая параллельна данной плоскости.

Пример. Точка M не лежит в плоскости прямоугольника $ABCD$. Докажите, что прямая CD параллельна плоскости ABM (рис. 191).

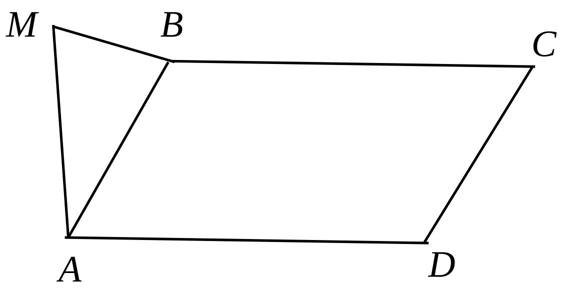


Рис. 191. Прямая CD параллельна плоскости ABM

Решение. В прямоугольнике $ABCD$ противоположные стороны параллельны, т.е. $CD||BA$. Прямая BA принадлежит плоскости ABM. Следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости $CD||ABM$.

Теорема 1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой (рис. 192).

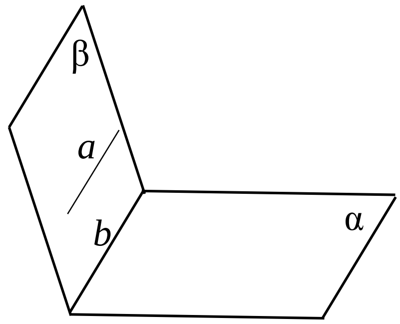


Рис. 192. Если $a||\alpha$, то $a||b$

Теорема 2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости (рис. 193).

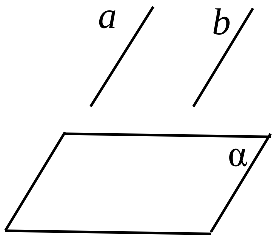


Рис. 193. Если $a||b$ и $a||\alpha$, то $b||\alpha$ или $b \in \alpha$

Две плоскости называются *параллельными,* если они не пересекаются.

Признак параллельности двух плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Пример. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC. Точки $M, N,$ и P – середины отрезков $DB, DC,$ и DA соответственно. Докажите, что PMN и ABC параллельны (рис. 194).

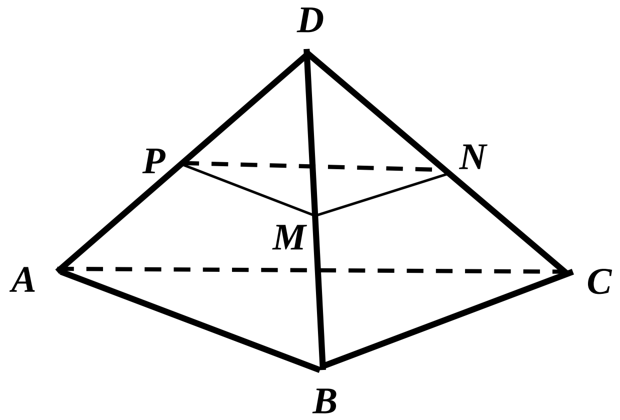


Рис. 194. Плоскости PMN и ABC параллельны

Решение. А. Отрезок MN – средняя линия треугольника BCD, следовательно, $MN||BC$. Отрезок PM – средняя линия треугольника ABD, следовательно, $PQ||AB$. Значит, по признаку параллельности плоскостей $PMN||ABC$.

Отрезок MP – средняя линия треугольника ADB, следовательно, $PM||AD$. Отрезок QN – средняя линия треугольника ADC, следовательно, $QN||AD$. Значит, по признаку параллельности прямых $QN||PM$.

***Теорема* 1**. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

***Теорема* 2**. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

10.4. Построение сечений многогранников

Секущей плоскостью многогранника называется любая плоскость, по обе стороны которой имеются точки данного многогранника. *Сечением многогранника* называется фигура, полученная в результате пересечения многогранника секущей плоскостью.

Построение сечений рассмотрим на примере двух простейших геометрических тел: тетраэдра и параллелепипеда.

Тетраэдр – это многогранник, составленный из четырех треугольников. Если грань ABC назвать основанием тетраэдра, тогда три другие грани называются боковыми гранями (рис. 195).

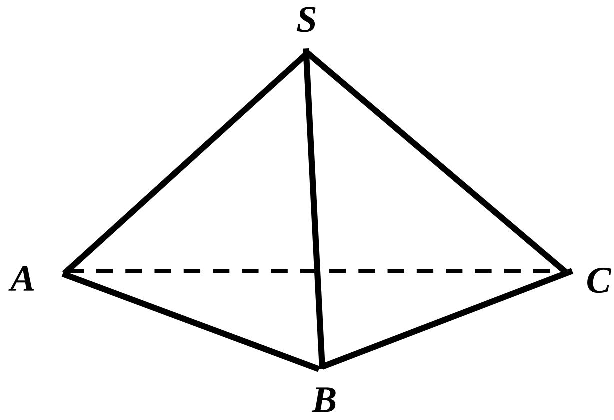


Рис. 195. Тетраэдр $SABC$

Параллелепипед – это многогранник, составленный из шести параллелограммов (рис. 196).

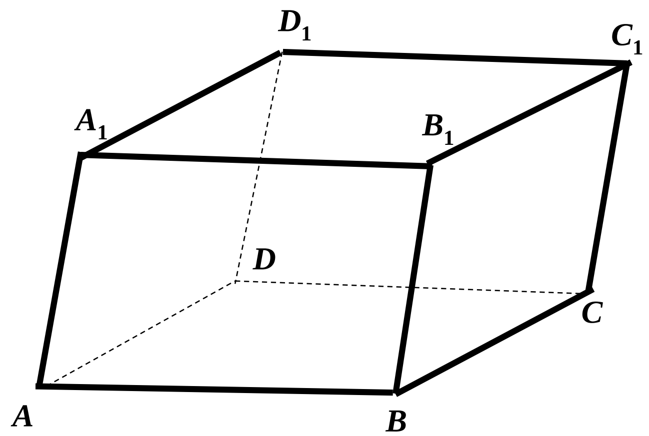


Рис. 196. Параллелепипед

При помощи признака параллельности плоскостей можно показать, что противоположные грани параллелепипеда параллельны. Если грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ назвать основаниями параллелепипеда, то остальные четыре грани называются боковыми гранями.

Пример. Через середины ребер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость параллельно ребру SB.

А. Построить сечение тетраэдра этой плоскостью.

Б. Найти периметр четырехугольника, если $SB = 4, AC = 6$.

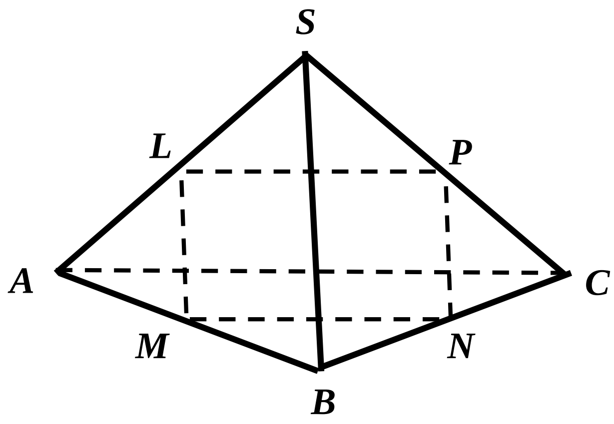


Рис. 197. Сечение $MNPL$

Решение.

А. Пусть M и N – середины ребер AB и BC соответственно, а φ – плоскость, проходящая через точки M и N параллельно ребру SB.

Плоскость ABS проходит через прямую SB, параллельную плоскости φ, и пересекает эту плоскость по прямой ML. Прямая ML параллельна прямой SB (по теореме о плоскости, проходящей через данную прямую, параллельную другой плоскости). По условиям задачи M – середина ребра AB. Следовательно, по теореме о пропорциональных отрезках точка L – середина отрезка AS.

Плоскость BCS проходит через прямую SB, параллельную плоскости φ, и пересекает эту плоскость по прямой NP. Прямая NP параллельна прямой SB (по теореме о плоскости, проходящей через данную прямую, параллельную другой плоскости). По условиям задачи N – середина ребра BC. Следовательно, по теореме о пропорциональных отрезках точка P – середина отрезка CS.

Соединив последовательно точки M, N, P и L, получим искомое сечение $MNPL$ (рис. 197).

Б. Прямые ML и NP параллельны одной и той же прямой SB. Значит, прямые ML и NP параллельны (по признаку параллельности прямых). Отрезок ML – средняя линия треугольника ABS, следовательно,

$$ML = SB/2.$$

Отрезок NP – средняя линия треугольника BCS, следовательно,

$$NP = SB/2.$$

Таким образом, отрезки ML и NP равны. В четырехугольнике $MNPL$ две противоположные стороны параллельны и равны, следовательно, четырехугольник $MNPL$ – параллелограмм.

Отрезок MN – средняя линия треугольника ABC, следовательно,

$$MN = AC/2.$$

Таким образом, периметр четырехугольника равен

$$P = 2(MN + ML) = 2(AC/2 + SB/2) = AC + SB = 6 + 4 = 10.$$

Ответ: Б. 10.

Пример. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Требуется:

а) построить его сечение плоскостью ABC_1;

б) доказать, что построенное сечение является параллелограммом.

Решение.

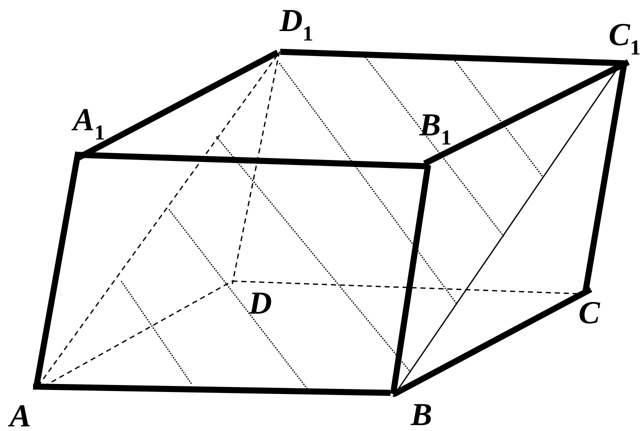


Рис. 198. Сечение параллелепипеда

А. Грани AA_1B_1B и DD_1C_1C параллельны, следовательно, прямая AB параллельна прямой, проходящей через точку C_1 (по теореме о параллельных плоскостях, пересеченных третьей плоскостью). По определению параллелепипеда $D_1C_1 || DC || AB$. Следовательно, по признаку параллельности прямых $D_1C_1 || AB$.

Через точку C_1 можно провести только одну прямую, параллельную прямой AB. Значит, прямая D_1C_1 – искомая линия пересечения секущей плоскости и параллелепипеда. Соединив последовательно точки A, B, C_1 и D_1, получим искомое сечение ABC_1D_1 (рис. 198).

Б. Покажем, что четырехугольник ABC_1D_1 – параллелограмм. По признаку параллельности прямых AB параллельна D_1C_1. Грани AA_1D_1D и BB_1C_1C параллельны, следовательно, прямые AD_1 и BC_1 также параллельны (по теореме о параллельных плоскостях, пересеченных третьей плоскостью). Таким образом, стороны четырехугольника ABC_1D_1 попарно параллельны. Следовательно, сечение ABC_1D_1 является параллелограммом.

10.5. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Две прямые в пространстве называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.

Теорема. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Пример. В тетраэдре $ABCD$ $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N середины ребер AB и AC.

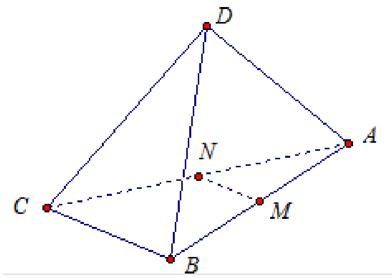


Рис. 199. Отрезок MN – средняя линия треугольника ABC

Решение. MN – средняя линия треугольника ABC (рис. 199). По свойству средней линии BC параллельна MN. Прямые BC и MN параллельны, а прямые BCи AD перпендикулярны. Значит, прямые AD и MN перпендикулярны.

Прямая называется *перпендикулярной к плоскости,* если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Теоремы о взаимно перпендикулярных прямых и плоскостях:

а) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна плоскости;

б) прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна к каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Пример. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая OM так, что $MA = MC$, $MB = MD$. Докажите, что прямая OM перпендикулярна к плоскости параллелограмма.

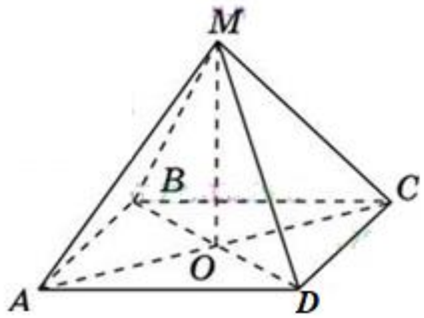


Рис. 200. Перпендикулярность прямой и плоскости параллелограмма

Решение. Диагонали параллелограмма $ABCD$ в точке пересечения делятся пополам (рис. 200). Следовательно, MO – медиана треугольников AMC и BMD. По условиям задачи $MA = MC$ и $MB = MD$, т.е. треугольники AMC и BMD – равнобедренные. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, совпадает с высотой. Следовательно, $MO \perp AC$ и

$MO \perp BD$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая OM перпендикулярна плоскости параллелограмма.

Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, – это отрезок, соединяющий данную точку с точкой на плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра.*

Наклонная, проведенная из данной точки плоскости, – любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой на плоскости, не являющийся перпендикуляром к данной плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной.*

Проекцией наклонной на плоскость называется отрезок, соединяющий основания наклонной и перпендикуляра.

Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости. Длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется *расстоянием от точки A до плоскости* α.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется *расстоянием между плоскостями*.

Расстояние от произвольной от произвольной точки прямой до плоскости называется *расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.*

Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми.*

Теорема о трех перпендикулярах. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна проекции прямой на эту плоскость.

Пример. Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника.

А. Докажите, что треугольник CBD прямоугольный.

Б. Найдите BD, если $BC = a,\ DC = b$.

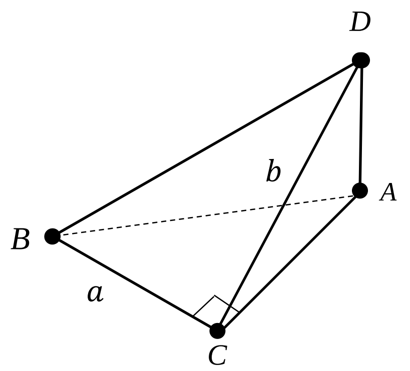


Рис. 201. Нахождение длины наклонной BD

Решение.

А. Отрезок DA – перпендикуляр к плоскости ABC, следовательно, отрезок AC является проекцией наклонной DC (рис. 201). По условию прямая BC, лежащая в плоскости треугольника, перпендикулярна проекции наклонной AC. Значит, по теореме о трех перпендикулярах она перпендикулярна и самой наклонной CD, т.е ΔBCD – прямоугольный.

Б. Найдем гипотенузу BD из прямоугольного треугольника CBD с помощью теоремы Пифагора:

$$BD = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ответ: $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

*Углом между прямой и плоскос*тью называется угол, образованный этой прямой и ее проекцией на данную плоскость. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними считается равным 0°.

Пример. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены перпендикуляр AH и наклонная AM. Найдите угол φ между наклонной и плоскостью α, если известно, что проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной (рис. 202).

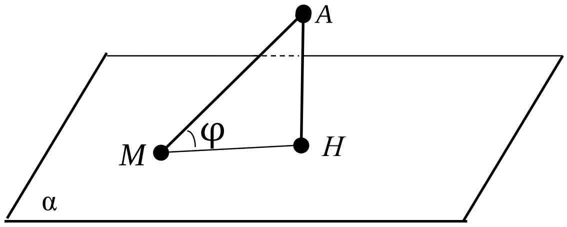


Рис. 202. Угол между наклонной и плоскостью

Решение. По условию $AM = 2MH$. В прямоугольном треугольнике имеем:

$$\cos\varphi = \frac{MH}{AM} = \frac{MH}{2MH} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\cos\varphi = \frac{1}{2},$$

следовательно, $\varphi = 60°$.

Ответ: $60°$.

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.

Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются *гранями.* Общая граница полуплоскостей называется *ребром двугранного угла* (рис. 203).

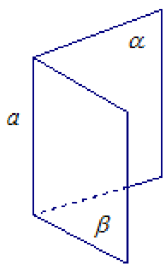


Рис. 203. Двугранный угол

Двугранный угол можно обозначить следующим образом: *BACD*, где *AC* – ребро, а точки *B* и *D* лежат в разных гранях угла.

Рассмотрим вопрос *об измерении двугранного угла*. На ребре двугранного угла выберем произвольную точку и в каждой грани из этой точки проведем луч перпендикулярно этому ребру.

Линейным углом двугранного угла называется угол, образованный двумя перпендикулярными к ребру лучами, проведенными в каждой грани из одной точки (рис. 204).

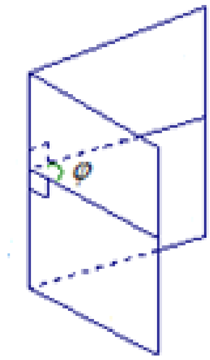


Рис. 204. Линейный угол двугранного угла

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. Двугранный угол называется прямым, если он равен 90°.

Пример. В тетраэдре $DABC$ все ребра равны. Точка M – середина ребра AC. Докажите, что угол DMB – линейный угол двугранного угла $BACD$, т. е. двугранного угла с ребром AC. Одна его грань – ACD, вторая – ACB.

Решение. Треугольник ADC – равносторонний, DM – медиана, а значит, и высота. Следовательно, $DM \perp AC$.

Треугольник ABC – равносторонний, BM – медиана, а значит, и высота. Следовательно, $BM \perp AC$ (рис. 205).

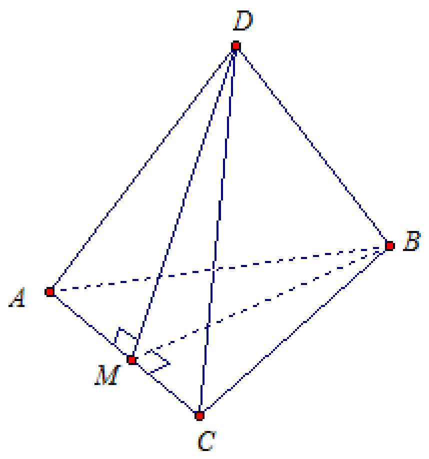


Рис. 205. Угол DMB – линейный угол двугранного угла $BACD$

Таким образом, из точки M ребра AC двугранного угла восстановлено два перпендикуляра DM и BM к этому ребру. Значит, $\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром. Если один из двугранных углов равен φ, то другие три угла равны соответственно 180°. В частности, если один из углов прямой (φ = 90°), то и остальные три угла прямые.

Углом между плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Очевидно, $0° < \varphi \leq 90°$.

Две плоскости называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90°.

Признак перпендикулярности двух плоскостей. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис. 206).

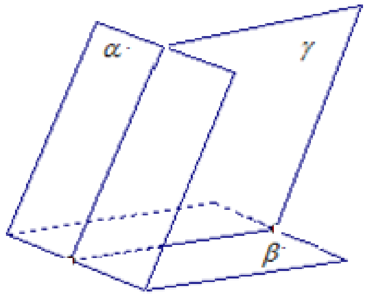


Рис. 206. Плоскость, перпендикулярная к двум плоскостям

10.6. Прямоугольный параллелепипед

Параллелепипед называется *прямоугольным*, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания представляют собой прямоугольники.

Введем обозначения: $a,\ b$ – длины сторон прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда; c – длина бокового ребра. Длины трех ребер, имеющих общую вершину называют *измерениями* прямоугольного параллелепипеда.

Отрезки, соединяющие противоположные вершины параллелепипеда, называются диагоналями.

Теорема. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений (рис. 207):

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

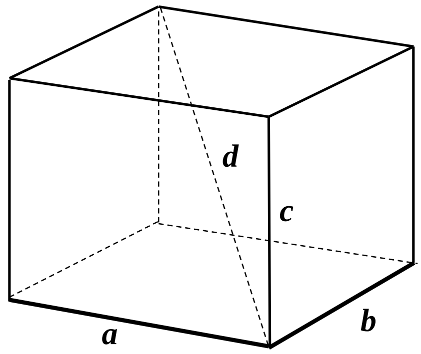


Рис. 207. Измерения и диагональ параллелепипеда

Пример. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $BB_1 = 16, A_1B_1 = 2, A_1D_1 = 8$. Найдите длину диагонали AC_1.

Решение. Пусть $d = AC_1$. Имеем (рис. 208):

$$a = AD = A_1D_1 = 8; b = AB = A_1B_1 = 2; c = AA_1 = BB_1 = 16.$$

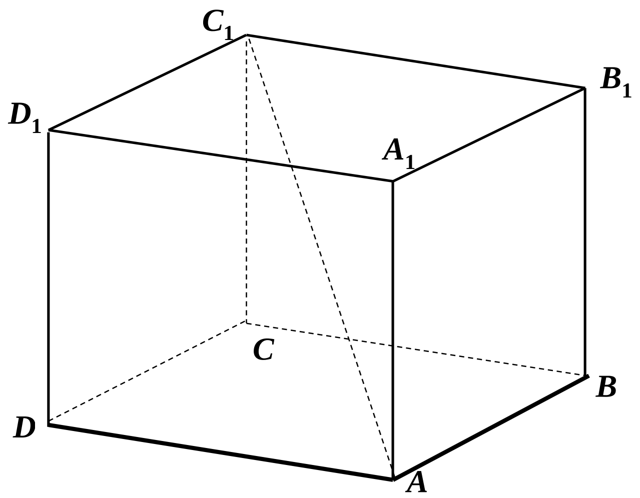


Рис. 208. Нахождение длины диагонали AC_1

Найдем длину диагонали:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{8^2 + 2^2 + 16^2} = \sqrt{364} = 18.$$

Ответ: 18.

Формула для вычисления площади полной поверхности S прямоугольного параллелепипеда имеет вид

$$S = 2ab + 2(a + b)c.$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений a, b, c:

$$V = abc.$$

Куб – это частный случай параллелепипеда, у которого все три измерения равны.

Формулы для вычисления площади полной поверхности и объема куба с ребром a имеют вид

$$S = 6a^2;\ \ V = a^3.$$

Пример. Свинцовый прямоугольный параллелепипед переплавили в куб. Найдите ребро куба, если ребра параллелепипеда были равны 2, 4 и 8.

Решение. Объем параллелепипеда равен

$$abc = 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64.$$

При переплавке объем тела не изменяется. Следовательно, объем куба

$$a^3 = 64.$$

Значит,

$$a = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Ответ: 4.

Отметим, что формулы для вычисления площади полной поверхности и объема прямоугольного параллелепипеда можно представить в виде

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}, V = S_{\text{осн}}H,$$

где

$S_{\text{осн}} = ab$ – площадь основания параллелепипеда;

$S_{\text{бок}} = PH$ – площадь боковой поверхности параллелепипеда;

$P = 2(a + b)$ – периметр основания параллелепипеда;

$H = c$ – высота параллелепипеда.

10.7. Призма

Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а все другие грани – параллелограммы. Равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называют *основаниями призмы*. Остальные грани – ее боковыми гранями. Стороны граней называют ребрами, а концы ребер – вершинами призмы. Ребра, не лежащие в основании призмы, именуют боковыми ребрами.

Призма называется *прямой,* если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям. *Высотой* призмы называется перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания к плоскости другого основания. В случае прямой призмы высота равна длине бокового ребра.

Площадь поверхности призмы в общем случае имеет вид

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Здесь $S_{\text{осн}}$ – площадь одного основания, $S_{\text{бок}}$ – сумма площадей боковых граней.

Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}}H.$$

Здесь $P_{\text{осн}}$ – периметр основания, H – высота призмы. В случае прямой призмы ее высота совпадает с длиной бокового ребра.

Пример. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра равна 6.

Решение. Введем обозначения:

a, b – катеты треугольника, лежащего в основании призмы;

c – гипотенуза этого треугольника.

По условиям задачи $a = 3$, $b = 4$.

По теореме Пифагора найдем гипотенузу треугольника:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

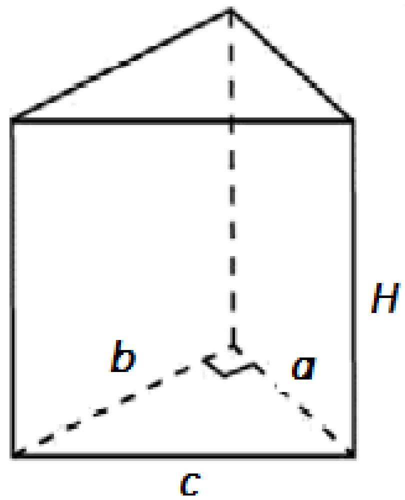


Рис. 209. Прямая призма

Периметр прямоугольного треугольника равен

$$P_{\text{осн}} = a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12.$$

Длина бокового ребра прямой призмы равна $H = 6$, следовательно,

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} H = 12 \cdot 6 = 72.$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 72$.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основаниями служат правильные многоугольники (рис. 210).

Пример. В основании правильной призмы лежит шестиугольник со стороной $a = 2$. Найдите полную площадь поверхности призмы, если длина бокового ребра $H = 4\sqrt{3}$.

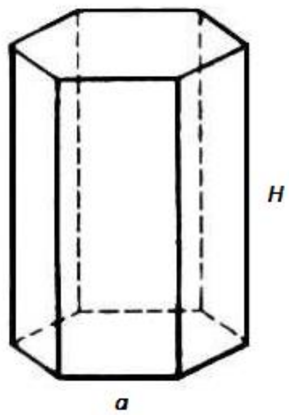


Рис. 210. Правильная шестиугольная призма

Решение. Найдем площадь основания:

$$S_{\text{осн}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} 2^2 = 6\sqrt{3}.$$

Периметр шестиугольника равен

$$P_{\text{осн}} = 6 \cdot 2 = 12.$$

Длина бокового ребра прямой призмы равна $H = 4\sqrt{3}$, следовательно,

$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} H = 12 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$;

$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 6\sqrt{3} + 48\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$.

Ответ: $S = 60\sqrt{3}$.

Объем призмы вычисляется по формуле

$$V = S_{\text{осн}}H.$$

Здесь $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, H – высота призмы.

Пример. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 2 и 7, боковое ребро призмы равно 6. Найдите объем призмы (рис. 211).

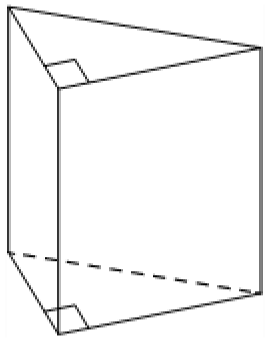


Рис. 211. Прямая треугольная призма

Решение. Найдем площадь основания:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 7 = 7.$$

Высота прямой призмы равна длине бокового ребра, т.е. $H = 6$.

Найдем объем призмы:

$$V = S \cdot H = 7 \cdot 6 = 42.$$

Ответ: 42.

10.8. Пирамида

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань (называемая основанием) является многоугольником, а все другие грани (называемые боковыми) – треугольники, имеющие общую вершину (называемую вершиной пирамиды). *Высотой пирамиды* называется отрезок перпендикуляра, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (рис. 212). Все боковые ребра правильной пирамиды равны между собой.

Пример. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 4, AC = 6$. Найдите боковое ребро SC.

Решение.

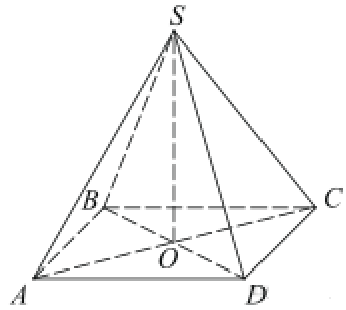


Рис. 212. Правильная четырехугольная пирамида

Рассмотрим треугольник SOC. Он прямоугольный, так как SO – высота, она перпендикулярна основанию $ABCD$, а значит, и прямой AC. Тогда по теореме Пифагора

$$SC = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Ответ: 5.

Площадь поверхности пирамиды равна

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Здесь $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, $S_{\text{бок}}$ – сумма площадей боковых граней. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}} = ph.$$

Здесь p – полупериметр основания, h – высота боковой грани (апофема).

Пример. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6.

Решение. Построим пирамиду $SABCD$ с вершиной в точке S. Проведем апофему SM. Обозначим ее буквой h (рис. 213).

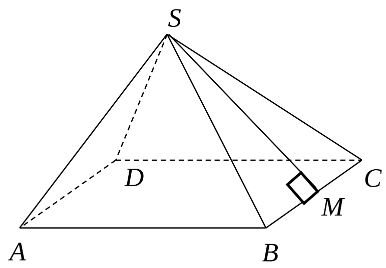


Рис. 213. Апофема правильной пирамиды

Рассмотрим прямоугольный треугольник SMB. По теореме Пифагора

$$h = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Полупериметр основания:

$$p = \frac{4 \cdot 6}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

Найдем площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = ph = 12 \cdot 4 = 48.$$

Ответ: 48.

Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H.$$

Здесь $S_{\text{осн}}$ – площадь основания, H – высота пирамиды.

Пример. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 5. Найдите ее объеме (рис. 214).

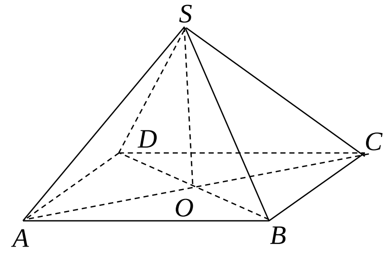


Рис. 214. Вычисление объема пирамиды по боковому ребру и высоте

Решение. Построим пирамиду $SABCD$ с вершиной в точке S. Основание высоты пирамиды SO совпадает с центром квадрата $ABCD$. Центр основания лежит на пересечении диагоналей AC и BD. Диагонали квадрата равны и в точке пересечения делятся пополам.

Введем обозначения: $AC = d, SO = H, AS = l$.

Найдем длину половины диагонали квадрата по теореме Пифагора

$$\frac{d}{2} = \sqrt{l^2 - H^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}.$$

Следовательно, $d = 2\sqrt{21}$.

Площадь основания равна половине квадрата его диагонали:

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{21}\right)^2 = 42.$$

Высота пирамиды по условиям задачи $H = 2$.

Найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H = \frac{1}{3} \cdot 42 \cdot 2 = 28.$$

Ответ: 28.

Теорема о боковых ребрах пирамиды. Если боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности.

Пример. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 6$ и $AC = 8$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем пирамиды.

Решение. Вершина пирамиды проектируется в центр описанной вокруг основания окружности (рис. 215). Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник. Центр описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы треугольника.

Найдем гипотенузу треугольника, лежащего в основании:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

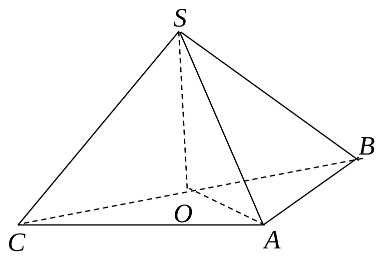


Рис. 215. Вычисление объема пирамиды с равнонаклонёнными ребрами

Радиус окружности равен половине длины гипотенузы:

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Найдем высоту H из прямоугольного треугольника SOA:

$$H = SO = R\cos 60° = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}5.$$

Найдем площадь основания:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$$

Найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 2{,}5 = 20.$$

Ответ: 20.

Теорема о боковых гранях пирамиды. Если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется в центр вписанной в основание окружности.

Пример. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 10$ и $BC = 12$. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Решение. Вершина пирамиды проектируется центр вписанной в треугольник окружности (рис. 216). Радиус вписанной окружности вычисляется по формуле

$$r = OK = OM = OK = \frac{S}{p}.$$

Здесь S и p – площадь и полупериметр треугольника соответственно.

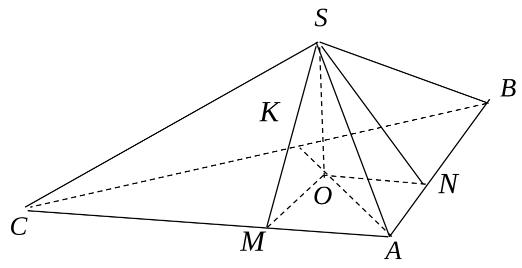


Рис. 216. Вычисление объема пирамиды с равнонаклонёнными гранями

Полупериметр треугольника равен

$$p = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16.$$

Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)} = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48.$$

Значит,

$$r = \frac{48}{16} = 3.$$

Рассмотрим треугольник SMO. Грани наклонены под углом 45°, следовательно, высота пирамиды SO совпадает с радиусом вписанной в треугольник окружности:

$$H = OM = r = 3.$$

Найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48.$$

Ответ: 48.

Пример. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 9, BC = 3, BB_1 = 8$.

Решение. Введем обозначения:

$H = BB_1$ – высота параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$,

$S_{\text{осн}}$ – площадь прямоугольника $ABCD$.

Многогранник $ABCDB_1$ – пирамида высотой BB_1, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$ (рис. 217).

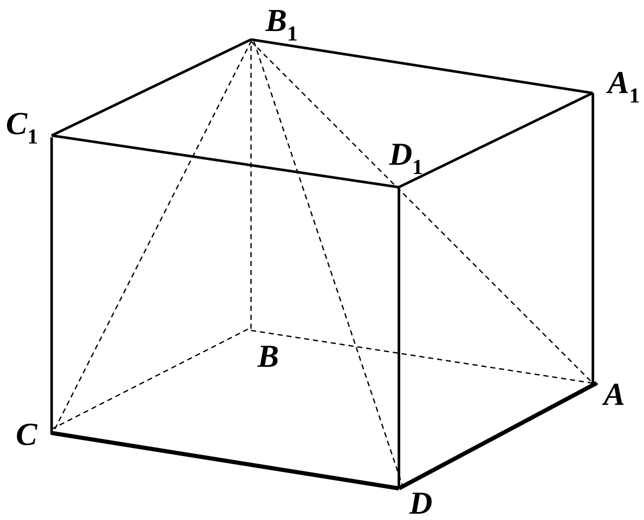


Рис. 217. Многогранник $ABCDB_1$ – пирамида

Объем пирамиды равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}H.$$

Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен

$$V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}}H.$$

Следовательно,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}V_{\text{пар}}.$$

Найдем объем параллелепипеда:

$$V_{\text{пар}} = 9 \cdot 3 \cdot 8 = 216.$$

Значит,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} V_{\text{пар}} = \frac{216}{3} = 72.$$

Ответ: 72.

10.9. Цилиндр

Цилиндр – это фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон (рис. 218).

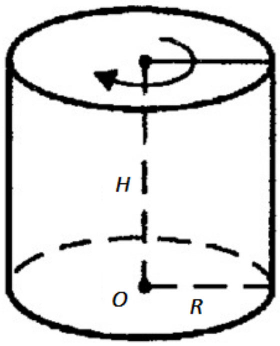


Рис. 218. Цилиндр радиусом R и высотой H

Основания цилиндра представляют собой круги радиусом R, лежащие в параллельных плоскостях. Высота цилиндра H – это расстояние между плоскостями его оснований.

Площадь боковой поверхности цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH.$$

Основаниями цилиндра служат круги радиусом R, следовательно, площадь одного основания:

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2.$$

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра имеет вид

$$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}.$$

Подставив в последнюю формулу выражения для $S_{бок}$ и $S_{осн}$через радиус и высоту цилиндра, получим

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

Пример. Цилиндр получен в результате вращения квадрата со стороной $a = 2$ вокруг одной из его сторон. Найдите полную площадь поверхности цилиндра.

Решение. По условиям задачи имеем

$$R = a, \qquad H = a.$$

Подставив эти значения в формулу полной площади поверхности, получим

$$S = 4\pi a^2.$$

Подставив числовые значения найдем

$$S = 4\pi a^2 = 4\pi 2^2 = 16\pi.$$

Ответ: $S = 16\pi$.

Пример. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.

Решение. Площадь боковой поверхности цилиндра радиусом R и высотой H вычисляется по формуле

$$S_{бок} = 2\pi RH.$$

По условиям задачи

$$S_{бок} = 12\pi, R = \frac{6}{2} = 3.$$

Подставив числовые значения для $S_{бок}$ и R в формулу площади боковой поверхности, получим

$$12\pi = 2\pi \cdot 3 \cdot H;\ 12\pi = 6\pi \cdot H;\ H = 2.$$

Ответ: 2.

Объем цилиндра радиусом R и высотой H равен

$$V = \pi R^2 H.$$

Пример. Дано два цилиндра. Объем первого цилиндра равен 15. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.

Решение. Объем цилиндра в общем случае вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 H.$$

Введем обозначения:

V_1, R_1, H_1 – объем, радиус и высота первого цилиндра;

V_2, R_2, H_2 – объем, радиус и высота второго цилиндра.

Составим отношение:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi R_2^2 H_2}{\pi R_1^2 H_1} = \frac{R_2^2 H_2}{R_1^2 H_1} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1}.$$

По условиям задачи

$$\frac{R_2}{R_1} = 2;\ \frac{H_2}{H_1} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, отношение объемов равно

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1} = 2^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Найдем объем второго цилиндра:

$$V_2 = \frac{4}{3} V_1 = \frac{4}{3} \cdot 15 = 20.$$

Ответ: 20.

Пример. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в см.

Решение. Введем обозначения:

V_1, H_1, D_1 – объем, уровень жидкости и диаметр первого сосуда;

$V_2\ H_2, D_2$ – объем, уровень жидкости и диаметр второго сосуда.

В общем случае объем жидкости высотой H в цилиндрическом сосуде радиусом R вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 H.$$

При переливании жидкости ее объем не изменится, т.е.

$$\pi R_2^2 H_2 = \pi R_1^2 H_1;\ \ R_2^2 H_2 = R_1^2 H_1 .$$

Следовательно, высота уровня жидкости во втором цилиндре равна

$$H_2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 H_1.$$

По условиям задачи

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{1}{2};\ \ H_1 = 48 \text{ см}.$$

Найдем уровень жидкости во втором сосуде:

$$H_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 48 = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12 \text{ (см)}.$$

Ответ: 12.

Пример. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 10 и 9. Боковые ребра призмы равны 2/π. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы (рис. 219).

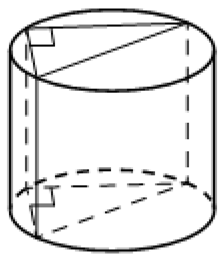


Рис. 219. Цилиндр, описанный вокруг призмы

Решение. Середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной окружности, т.е. радиус описанной окружности равен половине гипотенузы.

Найдем гипотенузу прямоугольного треугольника по теореме Пифагора

$$c = \sqrt{10^2 + 9^2} = \sqrt{181}.$$

Следовательно, радиус описанной окружности равен

$$R = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{181}}{2}.$$

Радиус цилиндра R совпадает с радиусом описанной окружности прямоугольного треугольника, а высота цилиндра H – с длиной боковых ребер призмы.

Объем цилиндра вычисляется по формуле

$$V = \pi R^2 H.$$

Подставив числовые значения, получим

$$V = \pi\left(\frac{\sqrt{181}}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{181}{4} \cdot 2 = \frac{181}{2} = 90{,}5.$$

Ответ: 90,5.

10.10. Конус

Конус – это фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащий катет (рис. 220).

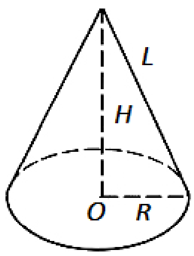


Рис. 220. Конус радиусом R, высотой H и образующей L

Основание конуса – круг радиусом R, высота конуса H – катет треугольника, принадлежащий оси вращения, а образующая конуса L – гипотенуза треугольника.

Пример. Диаметр основания конуса равен 40, а длина образующей – 25. Найдите высоту конуса.

Решение. Высоту конуса H найдем по теореме Пифагора:

$$H = \sqrt{L^2 - R^2}.$$

Здесь L, R – длина образующей и радиус основания конуса. По условиям задачи

$$L = 25; \ \ R = \frac{40}{2} = 20.$$

Подставив числовые значения в формулу для H, получим

$$H = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Ответ: 15.

Площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi RL.$$

Основанием конуса служит круг радиусом R, следовательно, площадь основания равна

$$S_{\text{осн}} = \pi R^2.$$

Таким образом, площадь полной поверхности конуса имеет вид

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}\,.$$

Подставив в последнюю формулу выражения для $S_{\text{бок}}$ и $S_{\text{осн}}$ через радиус и высоту конуса, получим

$$S = \pi R^2 + \pi RL.$$

Пример. Конус получен в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 вокруг большего катета. Найдите полную площадь поверхности конуса.

Решение. По условиям задачи имеем

$$R = 3, H = 4.$$

По теореме Пифагора найдем образующую конуса:

$$L = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Вычислим полную площадь:

$$S = \pi R^2 + \pi RL = \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 3 \cdot 5 = 24\pi.$$

Ответ: $S = 24\pi$.

Пример. Площадь полной поверхности конуса равна 35. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 3:2, считая от вершины конуса (рис. 221). Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса.

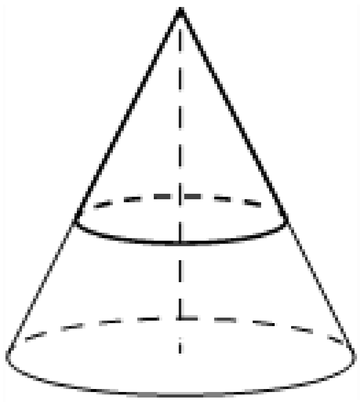


Рис. 221. Сечение конуса

Решение. Исходный и отсеченный конусы подобны. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Коэффициент подобия равен отношению соответствующих линейных размеров фигур. В данном случае коэффициент подобия можно вычислить как отношение высот отсеченного и исходного конусов:

$$k = 3/5.$$

Пусть S и S_0 – площади исходного и осеченного конусов. Тогда

$$\frac{S_0}{S} = k^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

Следовательно,

$$S_0 = \frac{9}{25}S = \frac{9}{25} \cdot 35 = 12{,}6$$

Ответ: 12,6.

Объем конуса радиусом R и высотой H равен

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Пример. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 9 раз, а радиус основания останется прежним?

Решение. Введем обозначения:

V_1, R_1, H_1 – объем, радиус и высота первого конуса;

V_2, R_2, H_2 – объем, радиус и высота второго конуса.

Составим отношение:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1/3\pi R_1^2 H_1}{1/3\pi R_2^2 H_2}=\frac{R_1^2 H_1}{R_2^2 H_2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\cdot\frac{H_1}{H_2}.$$

По условиям задачи

$$R_1=R_2, \qquad \frac{H_1}{H_2}=9\,.$$

Следовательно, отношение объемов равно

$$\frac{V_1}{V_2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\cdot\frac{H_1}{H_2}=9\,.$$

Ответ: 9.

Усеченный конус – это часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания (рис. 222).

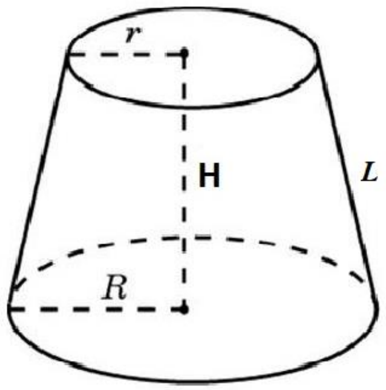


Рис. 222. Усеченный конус

Площадь боковой поверхности усеченного конуса:

$$S_{\text{бок}}=\pi(R+r)L.$$

Здесь R, r – радиусы нижнего и верхнего оснований конуса соответственно, L – образующая усеченного конуса.

Пример. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиусы оснований равны 3 и 6 см, а высота равна 4 см.

Решение. Сначала найдем образующую конуса L. Проведем $A_1M \perp OA$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AMA_1 (рис. 223). Найдем длины катетов этого треугольника:

$$AM = AO - MO = R - r = 6 - 3 = 3 \text{ (см)};\ A_1M = H = 4.$$

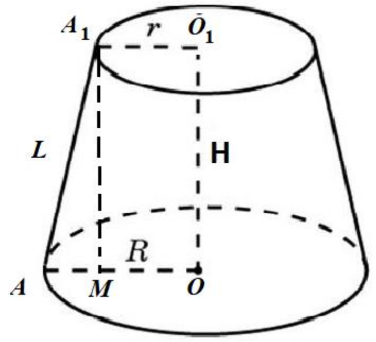


Рис. 223. Усеченный конус

Образующую L найдем по теореме Пифагора:

$$L = AA_1 = \sqrt{AM^2 + A_1M^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Вычислим площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = \pi(R + r)L = \pi(6 + 3) \cdot 4 = 36\pi.$$

Ответ: 36π.

Объем усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + \sqrt{Rr} + r^2\right)H,$$

где H – высота усеченного конуса; R, r – радиусы нижнего и верхнего оснований конуса соответственно.

Пример. Объем усеченного конуса равен 38π, радиусы нижнего и верхнего оснований равны 4 и 1 соответственно. Найдите высоту усеченного конуса.

Решение. Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + \sqrt{Rr} + r^2\right)H,$$

где H – высота усеченного конуса; R, r – радиусы нижнего и верхнего оснований конуса соответственно.

Выразим высоту H усеченного конуса через объем и радиусы оснований

$$H = \frac{3V}{\pi\left(R^2 + \sqrt{Rr} + r^2\right)}.$$

Подставив числовые значения в последнюю формулу, получим

$$H = \frac{3 \cdot 38\pi}{\pi\left(4^2 + \sqrt{4 \cdot 1} + 1^2\right)} = 6.$$

Ответ: 6.

10.11. Шар

Шар – это фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей диаметр круга (рис. 224).

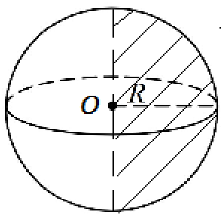


Рис. 224. Шар радиусом R

Площадь поверхности шара радиусом R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

Пример. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус увеличится в два раза?

Решение. Пусть R_1 и R_2 – радиусы первого и второго шаров соответственно. Отношение площадей шаров равно

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2.$$

По условиям задачи

$$\frac{R_2}{R_1} = 2.$$

Следовательно,

$$\frac{S_2}{S_1} = (2\,)^2 = 4.$$

Ответ: 4.

Объем шара радиусом *R* вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример. Во сколько раз увеличится объем шара, если радиус увеличится в четыре раза?

Решение. Пусть R_1 и R_2 – радиусы первого и второго шаров соответственно. Отношение объемов шаров равно

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_2^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3.$$

По условиям задачи

$$\frac{R_2}{R_1} = 4.$$

Следовательно,

$$\frac{V_2}{V_1} = (4\,)^3 = 64.$$

Ответ: 64.

Пример. Шар, объем которого равен 18, вписан в цилиндр. Найдите объем цилиндра (рис. 225).

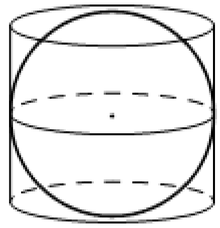


Рис. 225. Шар, вписанный в цилиндр

Решение. Пусть R – радиус вписанного шара. Площадь основания цилиндра S равна площади большого круга вписанного шара:

$$S = \pi R^2.$$

Высота цилиндра H равна диаметру вписанного шара:

$$H = 2R.$$

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту:

$$V_{ц} = SH = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Объем шара равен

$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{ц}}{V_{ш}} = \frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}; \ \ V_{ц} = \frac{3}{2} V_{ш} = \frac{3}{2} \cdot 18 = 27.$$

Ответ: 27.

Пример. Конус вписан в шар (рис. 226). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 12. Найдите объем шара.

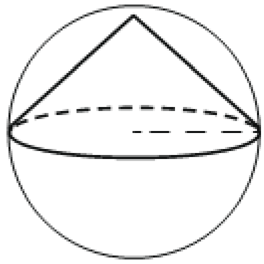


Рис. 226. Конус, вписанный в шар

Решение. Объем конуса радиусом R и высотой H вычисляется по формуле

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Высота конуса в данном случае совпадает с радиусом основания, следовательно,

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

Объем шара радиусом R вычисляется по формуле

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Следовательно,

$$\frac{V_{\text{ш}}}{V_{\text{к}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi R^3} = 4; \ \ V_{\text{ш}} = 4V_{\text{к}} = 4 \cdot 12 = 48.$$

Ответ: 48.

10.12. Векторы в пространстве

Основные понятия для *векторов в пространстве* вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок прямой с начальной точкой A и конечной точкой B (рис. 227). Вектор также обозначают одной буквой $\vec{a}$.

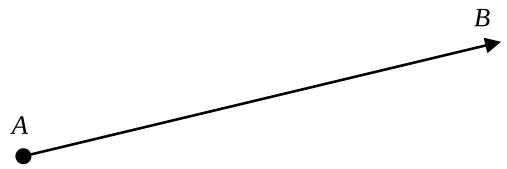


Рис. 227. Вектор $\overrightarrow{AB}$

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор. Обозначается длина вектора $|\overrightarrow{AB}|$, или просто AB.

Если начало и конец вектора совпадают, вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна нулю.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Два коллинеарных вектора могут быть направлены в одном направлении или в противоположных направлениях. В первом случае коллинеарные векторы называются *сонаправленными,* а во втором — *противоположно направленными*. Запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ означает, что векторы сонаправлены, а запись $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – что векторы противоположно направлены. Два вектора называются *равными,* если они имеют одинаковую длину и сонаправлены.

Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Пусть $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (правило треугольника):

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

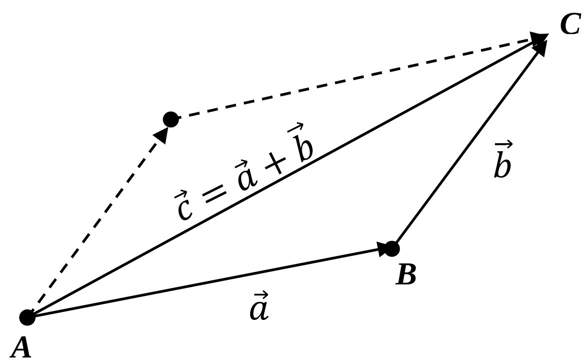


Рис. 228. Сумма векторов

Вектор $\vec{c}$ можно также рассматривать как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (правило параллелограмма).

Сложение нескольких векторов выполняется так: первый вектор складывается со вторым, а затем их сумма – с третьим вектором и т.д. (рис. 228). Из законов сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.

Пример. Упростить выражение $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$.

Решение. Воспользуемся правилом сложения нескольких векторов:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$.

Ответ: $\overrightarrow{AE}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$ (рис. 229).

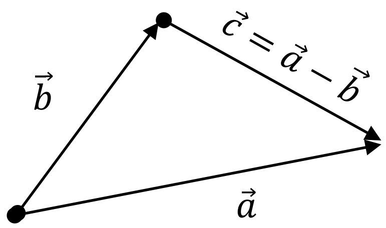


Рис. 229. Разность векторов

Два ненулевых вектора называются *противоположными*, если их длины равны и они противоположно направлены. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается так: $(-\vec{a})$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму вектора $\vec{a}$ и вектора $(-\vec{b})$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

Пример. Упростить выражение $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{MC}$.

Решение. Воспользуемся правилами сложения и разности векторов:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EK} =$$

$$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{AK}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AK}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$ и противоположно вектору $\vec{a}$ при $k < 0$.

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k(l\vec{a});$$

$$k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b};$$
$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a}+l\vec{a}.$$

Пример. Упростите выражение $3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}$.

Решение.

$$3(\vec{a}+\vec{b})-2(\vec{a}-\vec{b})-\vec{a} = 3\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{a} = 5\vec{b}.$$

Ответ: $5\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует число $k \neq 0$, такое, что

$$\vec{b} = k\vec{a}.$$

Пример. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Решение. Если векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны, то существует такое число k, что выполняется равенство

$$\vec{a}+\vec{b} = k(\vec{a}-\vec{b}).$$

Пусть $k=1$, тогда

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{a}-\vec{b}, \vec{b} = -\vec{b}, \vec{b} = \vec{0}.$$

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b} = \vec{0}$ будут коллинеарны, так как нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Пусть $k=-1$, тогда

$$\vec{a}+\vec{b} = -\vec{a}+\vec{b};\ \vec{a} = -\vec{a};\ \vec{a} = \vec{0}.$$

Таким образом, векторы $\vec{a} = \vec{0}$ и $\vec{b}$ будут коллинеарны, так как нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Пусть $k \neq \pm 1$, тогда

$$\vec{a}+\vec{b} = k\vec{a}-k\vec{b}, \vec{b}+k\vec{b} = k\vec{a}-\vec{a}, \vec{b}(1+k) = (k-1)\vec{a}, \vec{b} = \frac{k-1}{k+1}\vec{a}.$$

Обозначим

$$p = \frac{k-1}{k+1}.$$

Таким образом, существует такое ненулевое p, что выполняется равенство

$$\vec{b} = p\vec{a}.$$

Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Ответ: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Компланарными векторами называются векторы, расположенные в одной и той же плоскости или параллельные одной и той же плоскости.

Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. Справедливо следующее утверждение (признак компланарности): если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

где x, y – некоторые числа, то векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны. Справедливо также и обратное утверждение.

Пример. Отрезок EF соединяет середины ребер AC и BD тетраэдра $ABCD$. Доказать, векторы $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны.

Решение. Вектор $\overrightarrow{FE}$ можно представить следующим образом (рис. 230):

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE},$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}.$$

Сложив данные равенства, получим

$$2\overrightarrow{FE} = \left(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD}\right) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}.$$

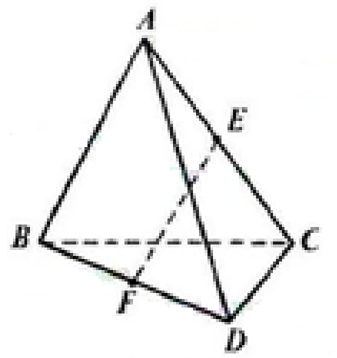


Рис. 230. Векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$

Следовательно,

$$2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC};\ \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

Таким образом, вектор $\overrightarrow{FE}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$. Значит, векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны.

Ответ: векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB, OC были его ребрами. Тогда вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ – сумма векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Это правило сложения некомпланарных векторов называется *правилом параллелепипеда.*

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – данные некомпланарные векторы. Справедливо следующее утверждение: любой вектор $\vec{p}$ в пространстве можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{p} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}.$$

Числа k, l и m называются коэффициентами разложения. Отметим, что эти числа определяются единственным образом.

10.13. Метод координат в пространстве

Построим пространственную прямоугольную систему координат с началом в точке O и осями Ox, Oy и Oz. Отложим от начала координат O единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ так, чтобы направление вектора $\vec{i}$ совпадало с направлением оси Ox, направление вектора $\vec{j}$ – с направлением оси Oy, а направление вектора $\vec{k}$ – с направлением оси Oz. Эти векторы называются координатными векторами. Очевидно, что эти векторы некомпланарные. Поэтому любой вектор $\vec{a}$ на плоскости можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} .$$

Коэффициенты a_x, a_y и a_z называются координатами вектора $\vec{a}$. То, что вектор имеет координаты a_x, a_y и a_z, обозначают обычно так: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. В некоторых учебниках координаты вектора записываются в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$.

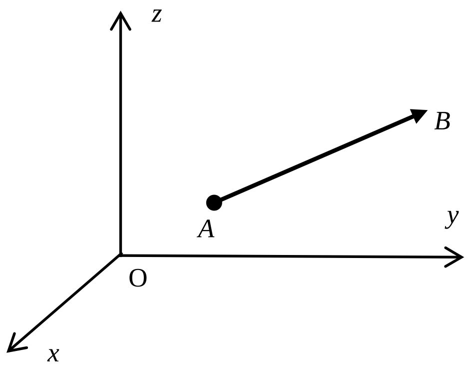


Рис. 231. Вектор в пространстве

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ (рис. 231) задан координатами начала – точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и конца – точки $B(x_B; y_B; z_B)$, тогда каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала:

$$a_x = x_B - x_A;$$

$$a_y = y_B - y_{A;}$$

$$a_z = z_B - z_A.$$

Пример. Вектор $\overrightarrow{AB}$ задан координатами начала – $A(5; 3; 1)$ и конца – $B(-1; 6; 1)$. Найдите координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Решение.

$$a_x = -1 - 5 = -6;$$

$$a_y = 6 - 3 = 3;$$

$$a_z = 1 - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\vec{a} = (-6; 3; 0).$$

Ответ: $\vec{a} = (-6; 3; 0)$.

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и число k. Сформулируем правила, позволяющие по заданным координатам векторов и числу k находить координаты произведения вектора на число, а также координаты суммы и разности векторов:

1. Каждая координата произведения вектора $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ на число k равна произведению соответствующей координаты вектора на это число:

$$k\vec{a} = \left(ka_x, ka_y, ka_z\right).$$

2. Каждая координата суммы двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ равна сумме соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\right).$$

3. Каждая координата разности двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ равна разности соответствующих координат этих векторов:

$$\vec{a} - \vec{b} = \left(a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\right).$$

Пример. Даны векторы $\vec{a} = (2; -1; 1)$ и $\vec{b} = (2; 4; 1)$. Найти координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение.

$\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b} = (2; -1; 1) + 2(2; 4; 1) = (2; -1; 1) + (4; 8; 2) = (6; 7; 3).$

Ответ: $\vec{c} = (6; 7; 3)$.

Условие *коллинеарности векторов* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ имеет вид

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Пример. Даны два вектора $\vec{a} = (\alpha, 2, 4)$ и $\vec{b} = (3, 6, \beta)$. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Решение. Составим условие коллинеарности векторов:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{\beta}.$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{2}{6}; \\ \dfrac{4}{\beta} = \dfrac{2}{6}. \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$\alpha = 1;\ \beta = 12.$$

Ответ: $\alpha = 1;\ \beta = 12$.

Длина вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Например, длина вектора $\vec{a} = (2; 1; 2)$ равна

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

10.14. Скалярное произведение векторов в пространстве

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (рис. 232):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi.$$

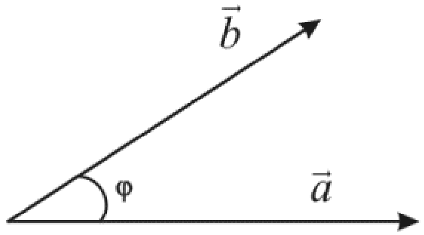


Рис. 232. Скалярное произведение векторов

Для обозначения скалярного произведения используют также $(\vec{a},\ \vec{b})$.

Из определения скалярного произведения следует:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Для координатных векторов, очевидно, имеем

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1;$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Представив векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде разложений по единичным ортам

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

после раскрытия скобок, получим выражение для скалярного произведения в координатной форме

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Таким образом, в координатной форме скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Пример. Даны два вектора $\vec{a} = (2;4;6)$ и $\vec{b} = (1;2;3)$. Найти скалярное произведение этих векторов.

Решение.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 2\cdot1 + 4\cdot2 + 6\cdot3 = 28.$$

Ответ: 28.

Если ненулевые векторы ортогональны, то угол $\varphi = 90°$ и $\cos\varphi = 0$, следовательно,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$$

В координатной форме условие *ортогональности векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Пример. Даны два вектора $\vec{a} = (\alpha;3;4)$ и $\vec{b} = (4;\alpha;-7)$. Определить, при каких значениях α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

Решение. Составим условие ортогональности векторов:

$$4\alpha + 3\alpha - 28 = 0.$$

Решив уравнение, получим $\alpha = 4$.

Ответ: $\alpha = 4$.

Используя определение скалярного произведения, можно найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} = (3; 4; 5)$ и $\vec{b} = (4; 5; -3)$.

Решение.

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} \cdot \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2}} = \frac{17}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \frac{17}{50}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arccos\frac{17}{50}.$$

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{17}{50}$.

10.15. Нахождение углов между прямыми и плоскостями

Ненулевой вектор $\vec{a}$ называется направляющим вектором прямой a, если он лежит либо на прямой a, либо на прямой, параллельной a.

Пусть $\vec{p} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{q} = (x_2, y_2, z_2)$ – направляющие векторы прямых p и q. Угол между прямыми, очевидно, равен острому углу между соответствующими направляющими векторами. Косинус этого угла равен

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если $A(3;\ -2;\ 4)$, $B\ (4;\ -1;\ 2), C\ (6;\ -3;\ 2), D\ (7;\ -3;\ 1)$.

Решение. Найдем координаты направляющих векторов прямых AB и CD соответственно

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 3; -1 + 2; 2 - 4) = (1; 1; -2);$$

$$\overrightarrow{CD} = (7 - 6; -3 + 3; 1 - 2) = (1; 0; -1).$$

Найдем угол между прямыми:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ: $\pi/6$.

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является ее нормальным вектором (перпендикулярен плоскости), то уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Например, уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 2; 4)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (2; 4; 5)$ имеет вид

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + 5(z - 4) = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных уравнение можно записать следующим образом:

$$2x + 4y + 5z - 30 = 0.$$

Уравнение плоскости в общем случае имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

где коэффициенты A, B, C одновременно не равны нулю. Таким образом, уравнение плоскости в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени относительно переменных x, y и z.

Пусть $\vec{p} = (a, b, c)$ – направляющий вектор прямой p, а $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормаль к плоскости α. Можно показать, что *угол между прямой и плоскостью* вычисляется при помощи формулы

$$\sin\varphi = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример. Найти угол между прямой EF и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

если $E(2;\ 1;\ 0)$, $F\ (1;\ 1;\ 1), A = 2, B = \sqrt{3}, C = 1, D = 0$.

Решение. Найдем координаты направляющего вектора прямой EF:

$$\vec{p} = \overrightarrow{EF} = (1 - 2{,}1 - 1, 1 - 0) = (-1; 0; 1).$$

Нормальный вектор плоскости имеет вид

$$\vec{n} = \left(2, \sqrt{3}, 1\right).$$

Найдем синус угла между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = \frac{|-1 \cdot 2 + 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arcsin(0{,}25).$$

Ответ: $\arcsin(0{,}25)$.

Пусть $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ – нормали к плоскостям α_1 и α_2 соответственно. Угол между плоскостями равен острому углу между соответствующими нормалями вычисляется при помощи формулы

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,.$$

Пример. Найти угол между плоскостями

$$2x + y + 2z = 0 \text{ и } \ x + y = 0.$$

Решение. Угол между плоскостями равен острому углу между соответствующими нормальными векторами:

$$\vec{n}_1 = (2; 1; 2) \text{ и } \vec{n}_2 = (1; 1; 0).$$

Найдем косинус острого угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\pi/4$.

Пусть коэффициенты A, B, C и D в общем уравнении плоскости не равны нулю. Перенесем свободный член D в правую часть общего уравнения плоскости, а затем разделим обе части уравнения на $(-D)$. В результате получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Здесь

$$a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}.$$

Коэффициенты a, b и c – это отрезки, отсекаемые по осям $0x, Oy$ и Oz соответственно. Полученное уравнение называется *уравнением плоскости в отрезках.*

10.16. Задачи повышенного уровня сложности

Пример. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

А. Докажите, что $AA_1 = AC$.

Б. Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 7$, $BC = 8$.

Решение. А. Прямая B_1C_1 перпендикулярна пересекающимся прямым A_1C_1 и CC_1. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости грани AA_1C_1C, следовательно, B_1C_1 перпендикулярна прямой CA_1 (рис. 233).

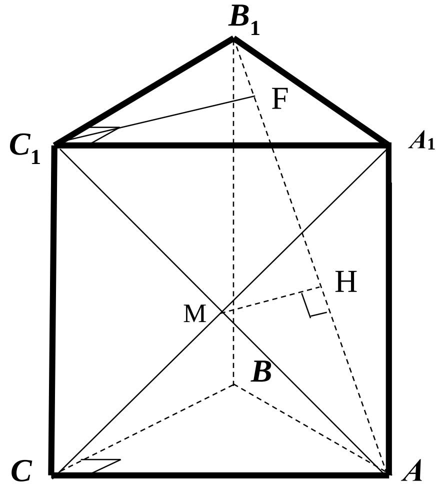


Рис. 233. Прямая треугольная призма

По условиям задачи прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны. Таким образом, прямая CA_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости AC_1B_1. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая CA_1 плоскости AC_1B_1, т.е. любой прямой лежащей в этой плоскости, в частности, прямой AC_1.

Таким образом, в прямоугольнике ACC_1A_1 диагонали перпендикулярны, поэтому он является квадратом, то есть $AA_1 = AC$. Что и требовалось доказать.

Б. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Прямая A_1C перпендикулярна плоскости AC_1B_1, т.е. перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Пусть M — точка пересечения диагоналей AC_1 и A_1C. В плоскости AC_1B_1 проведем перпендикуляр MH к прямой AB_1. Прямая MH перпендикулярна прямым A_1C и AB_1. Следовательно, отрезок MH является общим перпендикуляром этих прямых, а длина отрезка MH – искомое расстояние.

Пусть C_1F – высота прямоугольного треугольника AB_1C_1, проведенная к гипотенузе. Длина отрезка MH равна половине высоты прямоугольного треугольника.

Найдем последовательно катет AC_1, гипотенузу AB_1, высоту C_1F и расстояние MH:

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1{}^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2}.$$

$$AB_1 = \sqrt{AC_1{}^2 + B_1C_1{}^2} = \sqrt{\left(7\sqrt{2}\right)^2 + 8^2} = 9\sqrt{2}.$$

$$C_1F = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{AB_1} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 8}{9\sqrt{2}} = \frac{56}{9};\ MH = \frac{C_1F}{2} = \frac{28}{9}.$$

Ответ: Б. 28/9.

Пример. В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 17$, $PB = 10$, $\cos\angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

А. Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

Б. Найдите объем пирамиды *PABC*.

Решение. А. Отрезок PC – высота пирамиды, т.е. PC перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости ABC и, в частности, прямой BC (рис. 234)

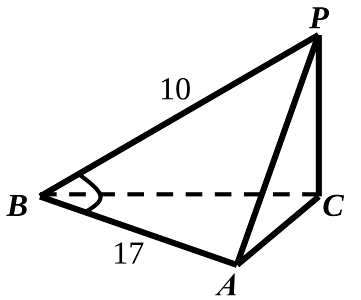


Рис. 234. Треугольная пирамида с основанием ABC

По условиям задачи прямая PA перпендикулярна прямой BC. Значит, прямая BC перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости PAC. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая ВС перпендикулярна плоскости PAC, а значит, и прямой AC.

Таким образом, угол BCA – прямой, т.е. треугольник ABC является прямоугольным. Что и требовалось доказать.

Б. Рассмотрим треугольник PBA. По теореме косинусов имеем

$$PA = \sqrt{PB^2 + AB^2 - 2PB \cdot AB\cos\angle PBA} = \sqrt{100 + 289 - 340 \cdot 32/85} = \sqrt{261}.$$

В треугольниках ABC, PAC и PBC по теореме Пифагора соответственно имеем:

$$AC^2 + BC^2 = 17^2;$$

$$AC^2 + PC^2 = \left(\sqrt{261}\right)^2;$$

$$BC^2 + PC^2 = 10^2.$$

Таким образом, получили систему уравнений относительно трех неизвестных AC^2, BC^2 и PC^2:

$$\begin{cases} AC^2 + BC^2 = 289, \\ AC^2 + PC^2 = 261, \\ BC^2 + PC^2 = 100. \end{cases}$$

Исключим из первого уравнения величину AC^2. Для этого вычтем из первого уравнения второе. В результате получим

$$\begin{cases} BC^2 - PC^2 = 28, \\ BC^2 + PC^2 = 100. \end{cases}$$

Сложив полученные уравнения, получим $2BC^2 = 128$. Следовательно, $BC^2 = 64$.

Найдем оставшиеся величины:

$$PC^2 = 100 - BC^2 = 100 - 64 = 36;$$

$$AC^2 = 261 - PC^2 = 261 - 36 = 225.$$

Таким образом, $BC = 8, PC = 6, AC = 15$.

Найдем площадь основания пирамиды $S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{15 \cdot 8}{2} = 60$.

Высота пирамиды равна $H = PC = 6$.

Объем пирамиды равен $V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 6 = 120$.

Ответ: Б. 120.

Пример. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

А. Докажите, что угол AB_1C_1 прямой.

Б. Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 8$, $BB_1 = 6$, $B_1C_1 = 15$.

Решение. А. Осевым сечением цилиндра, содержащим прямую AC_1, является прямоугольник AA_1C_1C (рис. 235).

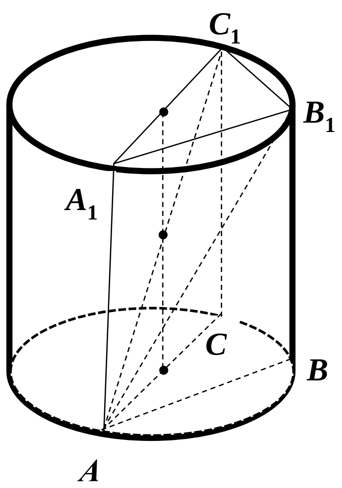


Рис. 235. Осевое сечение цилиндра

Отрезок A_1C_1 проходит через центр окружности основания цилиндра, т.е. является ее диаметром. Следовательно, угол $A_1B_1C_1$ прямой, т.е. прямая A_1B_1 перпендикулярна прямой B_1C_1.

Отрезок A_1B_1 – проекция наклонной AB_1 на плоскость верхнего основания. Следовательно, *по теореме о трех перпендикулярах* прямая AB_1

перпендикулярна прямой B_1C_1, т.е. угол AB_1C_1 прямой. Что и требовалось доказать.

Б. Поскольку прямые BB_1 и AA_1 параллельны, искомый угол равен углу $A_1A\,C_1$. В прямоугольнике AA_1B_1C противоположные стороны равны, следовательно, $A_1B_1 = AB = 8, AA_1 = BB_1 = 6$.

Треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный, следовательно,

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1{}^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17;$$

Треугольник AA_1C_1 – прямоугольный, следовательно,

$$\text{tg}\angle A_1AC_1 = \frac{A_1C_1}{AA_1} = \frac{17}{6};\ \angle A_1AC_1 = \text{arctg}\frac{17}{6}.$$

Ответ: Б. $\text{arctg}\frac{17}{6}$.

10.17. Упражнения

1. Через точку пересечения медиан грани BCD тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость, параллельная грани ABC.

А. Докажите, что сечение тетраэдра этой плоскостью есть треугольник, подобный треугольнику ABC.

Б. Найдите отношение площадей сечения и треугольника ABC.

Ответ: Б. 4/9.

2. Точка P – середина ребра параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

А. Построить сечение параллелепипеда плоскостью B_1D_1P.

Б. Доказать, что построенное сечение – трапеция.

3. Точка K – середина ребра AA_1, а точка L – середина ребра CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

А. Построить сечение параллелепипеда плоскостью BKL.

Б. Доказать, что построенное сечение – параллелограмм.

4. Прямая AM перпендикулярна к плоскости квадрата $ABCD$; AC и BD– диагонали квадрата. Доказать, что прямая BD перпендикулярна плоскости AMC.

5. Прямая AK перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC, M – середина стороны BC. Докажите, что $MK \perp BC$.

6. Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна 6. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 60°?

Ответ: 3.

7. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости правильного треугольника ABC, $AB = 6$, $CD = 3\sqrt{3}$. Найдите двугранный угол $DABC$.

Ответ: 45°.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AA_1 = 2, A_1B_1 = 1, A_1D_1 = 2$. Найдите длину диагонали AC_1.

Ответ: 3.

9. Свинцовый прямоугольный параллелепипед переплавили в куб. Найдите ребро куба, если ребра параллелепипеда были равны 1, 3 и 9.

Ответ: 3.

10. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если длина бокового ребра равна 4.

Ответ: 96.

11. Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсеченной треугольной призмы.

Ответ: 12.

12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 5$, $BC = 4$, $AA_1 = 3$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.

Ответ: 30.

13. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 52, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

Ответ: 13.

14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S – вершина, $SO = 5, AC = 24$. Найдите боковое ребро SC.

Ответ: 13.

15. В правильной шестиугольной пирамиде боковое ребро равно 6,5, а сторона основания равна 2,5. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: 6.

16. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если боковое ребро равно 10, а сторона основания равна 12.

Ответ: 12.

17. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите ее объем.

Ответ: 16.

18. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 6$ и $AC = 8$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 32,5.

19. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = AC = 5$ и $BC = 6$. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Ответ: 6.

20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 6$, $BC = 5$, $AA_1 = 4$. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1 .

Ответ: 20.

21. Цилиндр получен в результате вращения квадрата со стороной $a = 3$ вокруг одной из его сторон. Найдите полную площадь поверхности цилиндра.

Ответ: 36π.

22. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 12π, а диаметр основания равен 6. Найдите высоту цилиндра.

Ответ: 2.

23. Дано два цилиндра. Объем первого цилиндра равен 18. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра.

Ответ: 24.

24. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 98 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 7 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 2.

25. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра призмы равны $3/\pi$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

Ответ: 75.

26. Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса.

Ответ: 40.

27. Конус получен в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг большего катета. Найдите полную площадь поверхности конуса.

Ответ: 96π.

28. Площадь полной поверхности конуса равна 32,5. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении 4:1, считая от вершины конуса. Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса.

Ответ: 20,8.

29. Во сколько раз увеличится объем конуса, если радиус его основания увеличится в 11 раз, а высота останется прежней?

Ответ: 121.

30. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объем конуса, если объем цилиндра равен 150.

Ответ: 50

31. Объем усеченного конуса равен 399π, радиусы нижнего и верхнего оснований равны 9 и 4 соответственно. Найдите высоту усеченного конуса.

Ответ: 9.

32. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности шара, если его радиус уменьшить в пять раз?

Ответ: 25.

33. Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?

Ответ: 27.

34. Шар, объем которого равен 24, вписан в цилиндр. Найдите объем цилиндра.

Ответ: 36.

35. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объем конуса равен 8. Найдите объем шара.

Ответ: 32.

36. Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ED}$;

б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{EP} - \overrightarrow{MD}$;

в) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AE}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\vec{0}$.

37. Упростите выражение:

а) $2(\vec{a} + \vec{b}) - 3(4\vec{a} - \vec{b}) + \vec{a}$; б) $\vec{a} - 3(\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}) + 5(\vec{c} - 4\vec{a})$.

Ответ: а) $-9\vec{a} + \vec{b}$; а) $-14\vec{a} - 3\vec{b} + 2$а) $-9\vec{a} + 2\vec{c}$.

38. Векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{a} - 3\vec{b}$ коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

39. Векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны. Докажите, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ также не коллинеарны.

40. Даны параллелограммы $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Докажите, что векторы BB_1, CC_1 и DD_1 компланарны.

41. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти вектор $\vec{c}$.

а) $\vec{a} = (3; 2; 1)$; $\vec{b} = (0; -3; 2)$; $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$;

б) $\vec{a} = (-1; 3; 1)$; $\vec{b} = (1; 1; -1)$; $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$;

в) $\vec{a} = (4; 0; 2)$; $\vec{b} = (0; -1; 2,)$; $\vec{c} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$.

Ответ: а) $\vec{c} = (6; -5; 8)$; б) $\vec{c} = (-3; 5; 3)$; в) $\vec{c} = (12; 5; -5)$.

42. Даны векторы $\vec{a} = (-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{b} = (0; -5;\ -2)$ и $\vec{c} = (2;\ 1; -3)$. Найдите координаты векторов:

а) $3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$;

б) $3\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}$.

Ответ: а) $(4; -18; 9)$; б) $(5; 15; -5)$

43. Даны векторы $\vec{a} = (-1;\ 1;\ 1), \overrightarrow{b} = (0;\ 2; -2),\ \vec{c} = \ (-3;\ 2;\ 0)$ и $d = (-2;\ 1; -2)$. Найдите координаты векторов:

а) $3\vec{a}\ +\ 2\vec{b} - \vec{c}$;

б) $-\vec{a}\ +\ 2\vec{c} - \vec{d}$;

в) $0{,}1\vec{a} +\ 3\vec{b}\ + 0{,}7\vec{c} -\ 5\vec{d}$.

Ответ: а) $(0; 5; -1)$; б) $(-3; 2; 1)$; в) $(7{,}8; 2{,}5; 4{,}1)$.

44. Даны точки $A(3;\ -1;\ 5), B(2;\ 3;\ -4), C(7;\ 0;\ -1)$ и $C(8;\ —4;\ 8)$. Равны ли векторы:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$?

45. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные:

а) $\vec{a} = (\alpha; 2; 1)$, $\vec{b} = (2; 4; \beta)$;

б) $\vec{a} = (1; \alpha; \beta)$, $\vec{b} = (4; 8; 12)$;

в) $\vec{a} = (4; 1; 2)$, $\vec{b} = (8; \alpha; \beta + 1)$;

г) $\vec{a} = (15;\ \alpha;\ 1)$ и $\vec{b} = (18;\ 12;\ \beta)$;

д) $\vec{a} = (\alpha;\ 0{,}4;\ -1)$ и $\vec{b} = (-0{,}5; \beta; 5)$.

46. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если:

а) $A(3;\ -7;\ 8), B(-5;\ 4;\ 1), C(27;\ -40;\ 29)$;

б) $A(-5;\ 7;\ 12), B(4;\ -8;\ 3), C(13;\ -23;\ -6)$;

в) $A(-4;\ 8;\ -2), B(-3;\ -1;\ 7), C(-2;\ -10;\ -16)$?

47. Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a} = (-3;\ -3;\ 0), \vec{\imath} = (1; 0; 0)$ и $\vec{\jmath} = (0; 1; 0)$;

б) $\overrightarrow{b} = (2;\ 0;\ -3), \vec{\imath} = (1; 0; 0)$ и $\vec{\jmath} = (0; 1; 0)$?

48. Найдите длину вектора $\vec{a} = (2; \sqrt{5}; \sqrt{7})$.

49. Даны векторы $\vec{a} = (3;\ -2;\ 1), \overrightarrow{b} = (\ -2;\ 3;\ 1)$. Найдите: $|\vec{a}\ +\ \overrightarrow{b}|$ и $\left|\vec{a} - \ \vec{b}\right|$.

50. Даны точки $A\ (3/2;\ 1; -2\ ), B(2;\ 2; -3)$ и $C(2;\ 0; -1)$. Найдите периметр треугольника ABC.

51. Даны три точки A (9; 3; –5), B (2; 10; –5), C (2; 3; 2). Является ли треугольник ABC правильным?

52. Даны три точки А (3; 7; –4), B (5; –3; 2), C (1; 3; –10). Является ли треугольник ABC прямоугольным?

53. Определить, при каких значениях α векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

а) $\vec{a} = (-4; \alpha; 5)$, $\vec{b} = (4; 3; \alpha)$;

б) $\vec{a} = (-6; \alpha; 3)$, $\vec{b} = (4; \alpha; -4)$;

в) $\vec{a} = (\alpha; -2; 1)$, $\vec{b} = (\alpha; 2; 3)$.

54. Даны точки $A(0;\ 1;\ 2), B(\sqrt{2};\ 1;\ 2),\ \mathrm{C}(\sqrt{2};\ 2;\ 1)$ и $D\ (0;\ 2;\ 1)$. Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

55. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) $\vec{a} = (2; 2; 1)$, $\vec{b} = (2; 3; -6)$;

б) $\vec{a} = (1; 0; -4)$, $\vec{b} = (4; -8; 1)$;

в) $\vec{a} = (3; 0; 4)$, $\vec{b} = (0; 6; 8)$.

г) $\vec{a} = \left(2;\ —2;\ 0\right), \vec{b} = (3;\ 0;\ -3)$;

д) $\vec{a} = \left(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 2\right), \vec{b} = (-3;\ -3;\ 0)$;

е) $\vec{a}\left(—2{,}5;\ 2{,}5;\ 0\right), \vec{b} = \left(-5;\ 5;\ 5\sqrt{2}\right)$.

56. Найдите углы треугольника, вершинами которого являются точки A (1; –1; 3), B (3; –1; 1) и C (–1; 1; 3).

57. Вычислите угол между прямыми AB и CD, если

а) $A\ (5;\ -8;\ -1), B\ (6;\ -8;\ -2), C\ (7;\ -5;\ -11), D\ (7;\ -7;\ -9)$;

б) $A\ (1;\ 0;\ 2), B\ (2;\ 1;\ 0), C\ (0;\ -2;\ -4), D\ (-2;\ -4;\ 0)$;

в) $A\ (-6;\ -15;\ 7), B\ (-7;\ -15;\ 8), C\ (14;\ -10;\ 9), D\ (14;\ -10;\ 7)$.

58. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB\ =\ BC = 1$, $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямыми:

а) BD и CD_1;

б) AC и AC_1.

59. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 1$, $BC = 2$, $BB_1 = 3$. Вычислить угол между прямыми:

а) ACи D_1B;

б) AB_1 и BC_1;

в) A_1D и AC_1.

60. Найти угол между плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой EF, если:

а) $E(5;\ 2;\ 1)$, $F\ (1;\ 4;\ 6), A = 4, B = 3, C = 2, D = 1$.

б) $E(1;\ 3;\ 4)$, $F\ (3;\ 1;\ 4), A = 3, B = 0, C = -3, D = 2$.

в) $E(-5;\ -14;\ 6)$, $F\ (-6;\ -14;\ 7), A = 0, B = 0, C = -2, D = 4$.

61. Найдите угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, если

а) $A_1 = 4, B_1 = -5, C_1 = 3, D_1 = -1, A_2 = 1, B_2 = -4, C_2 = -1, D_2 = 9$;

б) $A_1 = 3, B_1 = -1, C_1 = 2, D_1 = 15, A_2 = 5, B_2 = 9, C_2 = -3, D_2 = -1$;

в) $A_1 = 6, B_1 = 2, C_1 = -4, D_1 = 17, A_2 = 9, B_2 = 3, C_2 = -6, D_2 = -4$.

62. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

А. Докажите, что $AA_1 = AC$.

Б. Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 6, BC = 3$.

Ответ: Б. $\sqrt{2}$.

63. В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13, PB = 15$, $\cos\angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и BC перпендикулярны.

А. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

Б. Найдите объем пирамиды $PABC$.

Ответ: Б. 90.

64. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причем BB_1 – образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

А. Докажите, что угол AB_1C_1 прямой.

Б. Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 6$, $BB_1 = 15, B_1C_1 = 8$.

Ответ: Б. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Список литературы

1. Геометрия. 7–9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / *Л.С. Атанасян* [и др.] М.: Просвещение, 2014. 382 с.

2. *Кусяков А.Ш.* Новые задачи в модели ЕГЭ 2022 года по профильной математике // Научный альманах. 2021. № 9-1(83). С. 67–71.

3. *Кусяков А.Ш.* Задачи олимпиадного типа в модели ЕГЭ 2022 года // Научный альманах. 2022. № 4-1(90). С. 135–140.

4. *Кусяков А.Ш.* Задачи с параметром в модели ЕГЭ 2022 года // Научный альманах. 2022. № 5-1(91). С. 91–96.

5. *Кусяков А.Ш.* Геометрические задачи в модели ЕГЭ 2022 года // Научный альманах. 2022. № 6-1(92). С. 73–78.

6. *Кусяков А.Ш.* Двухбалльные задачи в модели ЕГЭ 2022 года // Научный альманах. 2022. № 7-1(93). С. 43–48.

7. *Кусяков А.Ш.* Математика для иностранных слушателей подготовительных курсов: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2019. 242 с.

8. *Кусяков А.Ш.* Математика. Введение в анализ / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2023. 111 с.

9. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни) / *Л.С. Атанасян* [и др.]. М.: Просвещение, 2019. 287 с.

10. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни): в 2 ч. / *А.Г. Мордкович*, *П.В. Семенов* [и др.]. М.: Мнемозина, 2014. Ч. 1. 311 с.

11. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа. 11 класс: задачник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни): в 2 ч. / *А.Г. Мордкович* [и др.]. М.: Мнемозина, 2014. Ч. 2. 264 с.

12. *Мордкович А.Г.*, *Семенов П.В.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни): 2 ч. М.: Мнемозина, 2022. Ч. 1. 455 с.

13. *Мордкович А.Г.*, *Семенов П.В.* Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа. 10 класс: учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни): в 2 ч. М.: Мнемозина, 2022. Ч. 2. 351 с.

14. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ: образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 10.09.2024).

15. Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений» [Электронный ресурс]. URL: https://fipi.ru/ (дата обращения: 10.09.2024).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения функции Лапласа

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0	0,47	0,1808	0,94	0,3264	1,41	0,4207	1,88	0,4699	3	0,4987
0,01	0,004	0,48	0,1844	0,95	0,3289	1,42	0,4222	1,9	0,4713	3,2	0,4993
0,02	0,008	0,49	0,1879	0,96	0,3315	1,43	0,4236	1,92	0,4726	3,4	0,4997
0,03	0,012	0,5	0,1915	0,97	0,334	1,44	0,4251	1,94	0,4738	3,6	0,4998
0,04	0,016	0,51	0,195	0,98	0,3365	1,45	0,4265	1,96	0,475	3,8	0,4999
0,05	0,0199	0,52	0,1985	0,99	0,3389	1,46	0,4279	1,98	0,4761	4	0,5
0,06	0,0239	0,53	0,2019	1	0,3413	1,47	0,4292	2	0,4772	∞	0,5
0,07	0,0279	0,54	0,2054	1,01	0,3438	1,48	0,4306	2,02	0,4783		
0,08	0,0319	0,55	0,2088	1,02	0,3461	1,49	0,4319	2,04	0,4793		
0,09	0,0359	0,56	0,2123	1,03	0,3485	1,5	0,4332	2,06	0,4803		
0,1	0,0398	0,57	0,2157	1,04	0,3508	1,51	0,4345	2,08	0,4812		
0,11	0,0438	0,58	0,219	1,05	0,3531	1,52	0,4357	2,1	0,4821		
0,12	0,0478	0,59	0,2224	1,06	0,3554	1,53	0,437	2,12	0,483		
0,13	0,0517	0,6	0,2257	1,07	0,3577	1,54	0,4382	2,14	0,4838		
0,14	0,0557	0,61	0,2291	1,08	0,3599	1,55	0,4394	2,16	0,4846		
0,15	0,0596	0,62	0,2324	1,09	0,3621	1,56	0,4406	2,18	0,4854		
0,16	0,0636	0,63	0,2357	1,1	0,3643	1,57	0,4418	2,2	0,4861		
0,17	0,0675	0,64	0,2389	1,11	0,3665	1,58	0,4429	2,22	0,4868		
0,18	0,0714	0,65	0,2422	1,12	0,3686	1,59	0,4441	2,24	0,4875		
0,19	0,0753	0,66	0,2454	1,13	0,3708	1,6	0,4452	2,26	0,4881		
0,2	0,0793	0,67	0,2486	1,14	0,3729	1,61	0,4463	2,28	0,4887		
0,21	0,0832	0,68	0,2517	1,15	0,3749	1,62	0,4474	2,3	0,4893		
0,22	0,0871	0,69	0,2549	1,16	0,377	1,63	0,4484	2,32	0,4898		
0,23	0,091	0,7	0,258	1,17	0,379	1,64	0,4495	2,34	0,4904		
0,24	0,0948	0,71	0,2611	1,18	0,381	1,65	0,4505	2,36	0,4909		
0,25	0,0987	0,72	0,2642	1,19	0,383	1,66	0,4515	2,38	0,4913		
0,26	0,1026	0,73	0,2673	1,2	0,3849	1,67	0,4525	2,4	0,4918		
0,27	0,1064	0,74	0,2704	1,21	0,3869	1,68	0,4535	2,42	0,4922		
0,28	0,1103	0,75	0,2734	1,22	0,3888	1,69	0,4545	2,44	0,4927		
0,29	0,1141	0,76	0,2764	1,23	0,3907	1,7	0,4554	2,46	0,4931		
0,3	0,1179	0,77	0,2794	1,24	0,3925	1,71	0,4564	2,48	0,4934		
0,31	0,1217	0,78	0,2823	1,25	0,3944	1,72	0,4573	2,5	0,4938		
0,32	0,1255	0,79	0,2852	1,26	0,3962	1,73	0,4582	2,52	0,4941		
0,33	0,1293	0,8	0,2881	1,27	0,398	1,74	0,4591	2,54	0,4945		
0,34	0,1331	0,81	0,291	1,28	0,3997	1,75	0,4599	2,56	0,4948		
0,35	0,1368	0,82	0,2939	1,29	0,4015	1,76	0,4608	2,58	0,4951		
0,36	0,1406	0,83	0,2967	1,3	0,4032	1,77	0,4616	2,6	0,4953		
0,37	0,1443	0,84	0,2995	1,31	0,4049	1,78	0,4625	2,62	0,4956		
0,38	0,148	0,85	0,3023	1,32	0,4066	1,79	0,4633	2,64	0,4959		
0,39	0,1517	0,86	0,3051	1,33	0,4082	1,8	0,4641	2,66	0,4961		
0,4	0,1554	0,87	0,3078	1,34	0,4099	1,81	0,4649	2,68	0,4963		
0,41	0,1591	0,88	0,3106	1,35	0,4115	1,82	0,4656	2,7	0,4965		
0,42	0,1628	0,89	0,3133	1,36	0,4131	1,83	0,4664	2,72	0,4967		
0,43	0,1664	0,9	0,3159	1,37	0,4147	1,84	0,4671	2,74	0,4969		
0,44	0,17	0,91	0,3186	1,38	0,4162	1,85	0,4678	2,76	0,4971		
0,45	0,1736	0,92	0,3212	1,39	0,4177	1,86	0,4686	2,78	0,4973		
0,46	0,1772	0,93	0,3238	1,4	0,4192	1,87	0,4693	2,8	0,4974		

Учебное издание

Кусяков Альфред Шамильевич

Математика:

пособие для подготовки к ЕГЭ

(профильный уровень)

Учебное пособие

Корректор: *А. М. Капустина*
Редактор: *А. М. Антонова*
Компьютерная верстка: *А. Ш. Кусяков*

Объем данных 4,57 Мб
Подписано к использованию 27.12.2024

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15