

ПЕРМСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А. Ш. Кусяков

**Статистическое моделирование
тонкостенных конструкций
в системе MAXIMA**



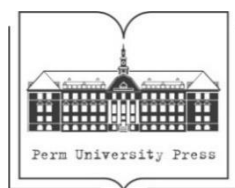
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Ш. Кусяков

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
В СИСТЕМЕ MAXIMA**

Монография



Пермь 2024

УДК 519.6:004.94

ББК 22.1

К94

Кусяков А. Ш.

К94 Статистическое моделирование тонкостенных конструкций в системе МАХИМА [Электронный ресурс] : монография / А. Ш. Кусяков ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2024. – 1,9 Мб ; 200 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/Kusyakov-statisticheskoe-modelirovanie-tonkostennyh-konstrukcij-v-sisteme-MAXIMA.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-4180-2

В монографии приведено описание методов статистического моделирования оптимальных по массе прямоугольных пластин и цилиндрических оболочек, находящихся под действием сжимающих нагрузок. Рассмотрены три типа конструкций: многослойные, трехслойные (типа сэндвич) и многостеночные. При построении математических моделей оптимизации учитывались как ограничения по прочности, так и условия устойчивости. Реализация алгоритмов оптимизации и статистического моделирования осуществлялась в среде системы компьютерной алгебры МАХИМА.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, занимающихся вопросами проектирования конструкций из современных композитных материалов, может быть также полезна студентам инженерно-технических и физико-математических специальностей вузов.

УДК 519.6:004.94

ББК 22.1

*Издается по решению кафедры высшей математики
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Рецензенты: научный сотрудник Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН, канд. физ.-мат. наук **В. Г. Захаров**;

доцент кафедры техносферной безопасности, физики и математики Пермского государственного аграрно-технологического университета им. академика Д. Н. Прянишникова, канд. техн. наук **В. В. Аюпов**

ISBN 978-5-7944-4180-2

© ПГНИУ, 2024

© Кусяков А. Ш., 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 5 |
| 1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ | 8 |
| 1.1. Дискретные случайные величины | 8 |
| 1.2. Примеры дискретных распределений | 10 |
| 1.3. Непрерывные случайные величины | 11 |
| 1.4. Примеры непрерывных распределений | 13 |
| 1.5. Асимметрия и эксцесс | 17 |
| 1.6. Преобразование случайных величин | 18 |
| 1.7. Закон больших чисел и центральная предельная теорема..... | 19 |
| 1.8. Статистические оценки выборки..... | 20 |
| 1.9. Статистические гипотезы | 24 |
| 1.10. Моделирование случайных величин | 27 |
| 2. МНОГОСЛОЙНЫЕ КОМПОЗИТЫ..... | 29 |
| 2.1. Физические уравнения многослойного композита | 29 |
| 2.2. Изгибные жесткости многослойного композита | 33 |
| 2.3. Прочность многослойного композита | 35 |
| 2.4. Статистическое моделирование многослойного композита | 37 |
| 2.5. Выводы по главе | 42 |
| 3. МНОГОСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ..... | 44 |
| 3.1. Устойчивость пластин | 44 |
| 3.2. Устойчивость оболочек | 48 |
| 3.3. Проектирование пластин..... | 50 |
| 3.4. Проектирование оболочек..... | 54 |
| 3.5. Статистическое моделирование пластин | 68 |
| 3.6. Статистическое моделирование оболочек | 74 |
| 3.7. Выводы по главе | 81 |

| | |
|---|-----|
| 4. ТРЕХСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ | 82 |
| 4.1. Устойчивость пластин | 82 |
| 4.2. Устойчивость оболочек | 85 |
| 4.3. Проектирование пластин..... | 91 |
| 4.4. Проектирование оболочек..... | 98 |
| 4.5. Статистическое моделирование пластин | 104 |
| 4.6. Статистическое моделирование оболочек | 110 |
| 4.7. Выводы по главе | 116 |
| 5. МНОГОСТЕНОЧНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ..... | 118 |
| 5.1. Устойчивость пластин | 118 |
| 5.2. Устойчивость оболочек | 119 |
| 5.3. Проектирование пластин..... | 121 |
| 5.4. Проектирование оболочек..... | 132 |
| 5.5. Статистическое моделирование пластин | 141 |
| 5.6. Статистическое моделирование оболочек | 149 |
| 5.7. Выводы по главе | 157 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 159 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ | 160 |
| 6. ОСНОВНЫЕ КОМАНДЫ СИСТЕМЫ МАХІМА..... | 160 |
| 6.1. Арифметические операции | 160 |
| 6.2. Списки | 162 |
| 6.3. Функции и графики..... | 164 |
| 6.4. Решение уравнений..... | 167 |
| 6.5. Матрицы..... | 167 |
| 6.6. Пределы..... | 169 |
| 6.7. Дифференцирование и интегрирование функций | 171 |
| 6.8. Программирование циклов и ветвлений | 172 |
| 6.9. Пакет descriptive..... | 173 |
| 6.10. Пакет distrib | 177 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... | 183 |

ВВЕДЕНИЕ

Главным преимуществом композитных конструкций по сравнению с конструкциями из традиционных материалов является возможность целенаправленного управления характеристиками проектируемой конструкции. Конструкционные и технологические свойства композитных материалов, а также методы расчета типовых элементов композитных конструкций приведены, например, в справочнике [57]. Методы решения задач оптимального проектирования композитных конструкций представлены в работах [5, 9, 23, 43, 59, 106, 110, 111, 129, 134, 143–152, 160–166, 174].

В задачах механики конструкций из композитных материалов необходимость в статистическом моделировании возникает, как правило, в двух случаях:

- труднопреодолимые математические сложности, связанные с построением функций распределения вероятностей для выходных величин (напряжений, критических нагрузок, деформаций, перемещений и т.д.);
- дороговизна или невозможность проведения натурных экспериментов с реальными объектами.

Статистическое моделирование включает следующие этапы:

- моделирование входных случайных величин;
- преобразование входных величин в соответствии с исследуемой моделью;
- построение выходных статистических оценок искомых величин.

В задачах механики композитных конструкций в качестве входных величин могут выступать, например, исходные физические характеристики материала конструкции, а в качестве выходных величин – напряжения, деформации, перемещения и критические нагрузки.

Общие вопросы статистического моделирования, а также применение этого метода в самых различных областях науки и техники исследовались многими авторами [41, 43, 138, 153, 154]. Вероятностные методы расчета

конструкций из традиционных материалов достаточно полно представлены в работах [6, 18, 52, 134]. Вопросы влияния микроструктурных параметров на механические характеристики композитных материалов исследовались в работах [27, 28, 22, 92, 173, 178]. Краткий исторический обзор исследований в области статистических методов в микромеханике композитных материалов приведен в статье [5].

Компьютерное моделирование предполагает использование современных инструментальных средств анализа. Для проведения расчетов реальных конструкций используются, как правило, системы инженерного анализа. Наиболее известными из них являются программные комплексы ABAQUS [112], ANSYS [11, 12, 65, 66] и различные версии NASTRAN [139, 179]. Теоретические исследования предпочтительнее выполнять с использованием различных систем компьютерной алгебры. Среди этих систем наибольшую известность получили системы MATHCAD [40, 91, 93, 94, 116, 117], MATLAB [39], MAPLE [37, 58, 98], MATHEMATICA [30, 38, 124] и MAXIMA [48, 78, 95, 155, 177]. Обзор основных возможностей систем инженерного анализа и компьютерной алгебры приведен в работах [70, 79].

В настоящей работе приведены результаты исследований в области проектирования и статистического моделирования тонкостенных пластин и оболочек из композитного материала. Рассмотрены три типа конструкций:

- многослойные,
- трехслойные (конструкции типа сэндвич);
- многостеночные.

Реализация всех алгоритмов осуществлялась в среде системы компьютерной алгебры MAXIMA.

Первая глава носит вводный характер. Здесь приведены основные сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для решения задач статистического моделирования случайных величин, используемых в механике композитных конструкций.

Во второй главе приведены основные расчетные зависимости для многослойного композита, полученного укладкой однонаправленно армированных монослоев. Представлены результаты статистического анализа, позволяющие оценить влияние разброса исходных механических характеристик монослоя на характеристики многослойного композита.

Третья глава посвящена многослойным пластинам и оболочкам. Приведены разрешающие уравнения устойчивости и алгоритмы оптимального проектирования. Исследовано влияние разброса механических характеристик материала конструкции на величины критических нагрузок.

В четвертой главе исследуются трехслойные пластины и оболочки с многослойными несущими слоями. При построении разрешающих уравнений устойчивости использовалась гипотеза ломанной линии. Приведены алгоритмы проектирования и результаты, позволяющие оценить эффективность трехслойных конструкций с многослойными несущими слоями по сравнению с многослойными конструкциями. Приведены результаты статистического моделирования для данных типов конструкций.

Пятая глава посвящена многостеночным конструкциям. Приведены основные разрешающие уравнения устойчивости. При построении разрешающих уравнений учитывались как общая, так и местная формы потери устойчивости. Приведены алгоритмы проектирования, позволяющие оценить эффективность использования этих конструкций по сравнению с многослойными конструкциями. Представлены также результаты статистического анализа многостеночных пластин и оболочек.

В приложении приведено описание основных команды системы MAXIMA, которые использовались при написании программ проектирования и статистического моделирования тонкостенных конструкций.

Книга предназначена инженерам и научным работникам, занимающимся вопросами расчета проектирования конструкций из современных композитных материалов, она может быть полезна также студентам инженерно-технических и физико-математических специальностей вузов.

1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Ниже приведены краткие сведения из теории вероятностей и математической статистики, необходимые для решения задач статистического моделирования случайных величин, используемых в механике тонкостенных композитных конструкций.

1.1. Дискретные случайные величины

Дискретной случайной величиной называют случайную величину, которая с некоторой вероятностью принимает отдельные, изолированные значения. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечно или бесконечно.

Правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения случайной величины. Для дискретной случайной величины его обычно задают в виде таблицы:

| | | | | |
|-----|-------|-------|---------|-------|
| X | x_1 | x_2 | \dots | x_n |
| P | p_1 | p_2 | \dots | p_n |

Здесь x_i, p_i ($i = 1, \dots, n$) – соответственно возможные значения случайной величины X и их вероятности. Так как случайная величина обязательно принимает одно из своих возможных значений, то выполняется равенство

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

Математическим ожиданием $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n. \quad (1.1)$$

Свойства математического ожидания:

1) Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной

$$M(C) = C.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = CM(X).$$

3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

4) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i. \quad (1.2)$$

Дисперсия служит мерой рассеяния (разброса) значений дискретной случайной величины X .

Свойства дисперсии:

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю

$$D(C) = 0.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3) Дисперсия суммы взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться формулой

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (M(X))^2. \quad (1.3)$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(x)}. \quad (1.4)$$

В отличие от дисперсии размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью значений случайной величины X .

1.2. Примеры дискретных распределений

Дискретная случайная величина X имеет *биномиальное распределение* с параметрами n и p , если вероятности отдельных ее возможных значений определяются формулой Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, (k = 0, 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Здесь C_n^k – число сочетаний из n элементов по k (биномиальный коэффициент)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Величина X представляет собой число наступлений некоторого события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления этого события равняется p .

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам соответственно:

$$M(X) = np, D(X) = np(1 - p). \quad (1.6)$$

Дискретная случайная величина X *распределена по закону Пуассона* с параметром λ , если вероятности отдельных ее возможных значений определяются формулой Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, (k = 0, 1, \dots, n), \quad (1.7)$$

где $\lambda = np$.

Распределение Пуассона – это предельный случай биномиального распределения массовых (число испытаний n велико) и редких (вероятность p мала) событий.

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам соответственно:

$$M(X) = \lambda, D(X) = \lambda. \quad (1.8)$$

Дискретная случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром p , если вероятности отдельных ее возможных значений

изменяются по закону геометрической прогрессии с первым членом p и знаменателем q

$$P(X = k) = pq^{k-1}, (k = 0, 1, \dots), \quad (1.9)$$

где $q = 1 - p$.

Случайная величина с таким распределением имеет смысл номера первого успешного испытания в схеме Бернулли с вероятностью успеха p .

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам соответственно:

$$M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}. \quad (1.10)$$

Пусть имеется конечная совокупность, состоящая из N элементов. Предположим, что M из них обладают нужным нам признаком. Из общей совокупности случайным образом выберем n элементов. Предполагается, что выбранные элементы не возвращаются в общую совокупность. Обозначим через t число элементов, обладающим нужным нам признаком среди n отобранных элементов. Вероятность того, что случайная величина X , примет значение t равна

$$P(X = t) = \frac{C_M^t \cdot C_{N-M}^{n-t}}{C_N^n}. \quad (1.11)$$

Эта формула определяет распределение вероятностей, которое называют *гипергеометрическим*. Это распределение определяется тремя параметрами: N, M, n .

Математическое ожидание и дисперсия гипергеометрического распределения вычисляются по формулам соответственно:

$$M(X) = n \frac{M}{N}, D(X) = n \frac{M}{N} \cdot \frac{N-n}{n} \cdot \frac{N-M}{N-1}. \quad (1.12)$$

1.3. Непрерывные случайные величины

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Функция $F(x)$, определяющая для каждого числа x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x , называется *интегральной функцией распределения*:

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.13)$$

Свойства интегральной функции распределения $F(x)$:

1. Значения интегральной функции распределения заключены в интервале

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$, вычисляется по формуле

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a).$$

3. Поскольку вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет заранее указанное строго определенное значение a , равна нулю, т.е. $P(a) = P(b) = 0$, получаем

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a).$$

Дифференциальной функцией распределения $f(x)$ называют первую производную от интегральной функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \quad (1.14)$$

Функцию $f(x)$ часто называют *плотностью вероятности*.

Свойства плотности вероятности:

1. Плотность распределения вероятности является неотрицательной функцией.

2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$, вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty; +\infty)$, равна единице

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Геометрический смысл последнего свойства состоит в том, что площадь фигуры, расположенной между графиком плотности вероятности $f(x)$ и осью абсцисс, равна единице.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называют интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (1.15)$$

Дисперсией непрерывной случайной величины X называют интеграл

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \quad (1.16)$$

Свойства математического ожидания и дисперсии непрерывных и дискретных случайных величин совпадают. В частности, для дисперсии справедлива формула

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M(x))^2.$$

Квантилем уровня α называется такое значение x_α случайной величины, при котором функция ее распределения принимает значение равное α , т.е. квантиль является корнем уравнения

$$F(x_\alpha) = \alpha. \quad (1.17)$$

Квантиль уровня 0,5 называется *медианой* случайной величины X , т.е. медиана является корнем уравнения

$$F(x_{0,5}) = 0,5.$$

Медиана, в частности, может быть использована вместо математического ожидания в случае распределений с большими выбросами.

1.4. Примеры непрерывных распределений

Непрерывная случайная величина X , все возможные значения которой заполняют некоторый интервал $(a; b)$, называется *равномерно распределенной*, если ее плотность вероятности $f(x)$ при всех x из интервала $(a; b)$ имеет постоянное значение C .

Все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, следовательно,

$$\int_a^b C dx = C(b - a) = 1.$$

Отсюда следует, что

$$C = \frac{1}{b - a}.$$

Таким образом, закон равномерного распределения записывается в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{1}{b - a}, & a < x < b, \\ 0, & x \geq b. \end{cases} \quad (1.18)$$

Функция распределения случайной величины X , распределенной по равномерному закону, есть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (1.19)$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерного распределения равны соответственно

$$M(X) = \frac{a + b}{2}, D(X) = \frac{(b - a)^2}{12}. \quad (1.20)$$

Показательным (экспоненциальным) распределением называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Здесь λ – некоторое положительное число (интенсивность или обратный коэффициент масштаба). Показательное распределение применяется в теории массового обслуживания.

Математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам соответственно

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Непрерывная случайная величина X , все возможные значения которой заполняют некоторый интервал $(a; b)$, называется *нормально распределенной*, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.21)$$

где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины X .

Функция нормального распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (1.22)$$

Если $a = 0$, $\sigma = 1$, получим

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (1.23)$$

Это распределение называется *стандартным нормальным распределением*. Представим функцию $F_0(x)$ в виде

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Можно показать, что первый интеграл равен

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, стандартное нормальное распределение можно записать в виде

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (1.24)$$

Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*.

Распределением χ^2 с k степенями свободы называется распределение суммы квадратов k независимых случайных величин, распределенных по стандартному нормальному закону

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k X_i^2, \quad (1.25)$$

где X_i ($i = 1, 2, \dots, k$) имеет стандартное нормальное распределение (математическое ожидание равно нулю, а среднее квадратическое отклонение – единице).

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} e^{-x/2} x^{k/2-1}, & x > 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1.27)$$

Таким образом, распределение «хи квадрат» определяется одним параметром – числом степеней свободы k . С увеличением числа степеней свободы это распределение медленно приближается к стандартному нормальному закону.

Распределением Стьюдента называется распределение случайной величины

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/k}}, \quad (1.28)$$

где Z имеет стандартное нормальное распределение (математическое ожидание равно нулю, а среднее квадратическое отклонение – единице); χ^2 – независимая от Z случайная величина, распределенная по закону «хи квадрат» с k степенями свободы.

С возрастанием числа степеней свободы k распределение Стьюдента быстро приближается к стандартному нормальному распределению.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad (1.29)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция.

Распределением Фишера–Снедекора (или F–распределением) называется распределение вида:

$$F = \frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}, \quad (1.30)$$

где $\chi^2(k_1)$ и $\chi^2(k_2)$ – случайные величины, имеющие распределение «хи квадрат» соответственно с k_1 и k_2 степенями свободы.

Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right) k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} (k_1x + k_2)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} x^{\frac{k_1}{2}-1}, \quad (1.31)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция (1.27).

1.5. Асимметрия и эксцесс

Центральным моментом k -го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k -й степени отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\mu_k = M((X - a)^k), \quad (1.32)$$

где $a = M(X)$.

В развернутом виде формула для вычисления центрального момента дискретной случайной величины имеет вид

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^k p_i. \quad (1.33)$$

В случае непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ центральный момент вычисляется по формуле

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^k f(x) dx. \quad (1.34)$$

Коэффициентом асимметрии (скошенности) называется отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического случайной величины

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (1.35)$$

Коэффициентом эксцесса (крутости) называется отношение центрального момента четвертого порядка к четвертой степени среднего квадратического случайной величины

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (1.36)$$

В случае нормально распределенной случайной величины коэффициенты A и E равны нулю.

1.6. Преобразование случайных величин

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует одно возможное значение случайной величины Y , то Y называют функцией случайного аргумента X :

$$Y = \varphi(X). \quad (1.37)$$

Пусть X – дискретная случайная величина с рядом распределения x_i, p_i ($i = 1, \dots, k$). Если различным возможным значения аргумента X соответствуют различные возможные значения функции Y , то вероятности соответствующих значений X и Y равны. Если различным возможным значениям X соответствуют значения Y , среди которых есть равные между собой, то следует сложить вероятности повторяющихся значений Y .

Математическое ожидание дискретной случайной величины Y вычисляется по формуле

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i. \quad (1.38)$$

Пусть X – непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$. Если $y = \varphi(x)$ – строго монотонная дифференцируемая функция, обратная функция которой $x = \psi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y находится по формуле

$$g(y) = f(\psi(y)) |\psi'(y)|. \quad (1.39)$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины Y вычисляется по формуле

$$M(Y) = M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx. \quad (1.40)$$

1.7. Закон больших чисел и центральная предельная теорема

Закон больших чисел – это совокупность теорем, устанавливающих факт приближения средних характеристик результатов большого числа испытаний к определенным постоянным значениям (неслучайным величинам). Среди этих теорем одной из основных является *теорема Чебышева*. Ограничимся частным случаем этой теоремы, когда случайные величины имеют одинаковые математические ожидания: если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n имеют одно и то же математическое ожидание a и равномерно ограниченные дисперсии, то для любого сколь угодно малого положительного числа ε , вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a \right| < \varepsilon,$$

будет как угодно близка к единице, если число n случайных величин достаточно велико.

Таким образом, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин, дисперсии которых равномерно ограничены, утрачивают характер случайной величины. На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого в том, что

по сравнительно небольшой выборке судят о всей совокупности исследуемых объектов.

Центральная предельная теорема представляет собой группу теорем, устанавливающих связь между законом распределения суммы случайных величин и нормальным распределением. Среди этих теорем важнейшее место занимает *теорема Ляпунова*. На понятийном уровне эта теорема формулируется следующим образом: если независимые случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n имеют конечные математические ожидания и дисперсии, а также ни одна из случайных величин резко не выделяется среди остальных, то при неограниченном увеличении n закон распределения их суммы неограниченно приближается к нормальному.

Теорема Ляпунова объясняет причину широкого распространения нормально распределённых случайных величин.

1.8. Статистические оценки выборки

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака. Как правило, обследовать каждый из этих объектов практически невозможно. Обычно из всей совокупности случайным образом выбирают ограниченное число объектов и подвергают их изучению.

Выборочной совокупностью, или *выборкой*, называют совокупность случайно отобранных объектов. *Генеральной совокупностью* называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка размерности n , причем каждая величина x_i наблюдалась n_i раз ($i = 1, \dots, k$). Наблюдаемые значения x_i называются *вариантами*, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*. Числа n_i называются *частотами*, а их отношения к объёму выборки n называются *относительными частотами*:

$$w_i = \frac{n_i}{n}, \quad (1.41)$$

где

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k.$$

Статистическим распределением выборки называется перечень вариантов и соответствующих им частот (или относительных частот).

Пусть наблюдаются варианты x_1, x_2, \dots, x_k с частотами n_1, n_2, \dots, n_k соответственно. Основными точечными характеристиками выборки служат:

выборочное среднее

$$\bar{m} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_k \cdot n_k}{n}; \quad (1.42)$$

выборочная дисперсия

$$\bar{s}^2 = \frac{(x_1 - \bar{m})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{m})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{m})^2 \cdot n_k}{n}; \quad (1.43)$$

выборочное среднеквадратичное отклонение

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{m})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{m})^2 \cdot n_2 + \dots + (x_k - \bar{m})^2 \cdot n_k}{n}}. \quad (1.44)$$

Здесь $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ – объем выборки.

При малом объеме выборки для оценки дисперсии используют формулу

$$\bar{S}^2 = \frac{n}{n-1} \bar{s}^2. \quad (1.45)$$

Коэффициент вариации (в процентах) вычисляется по формуле

$$V = \frac{\bar{s}}{\bar{m}} 100\%. \quad (1.46)$$

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h , а высоты прямоугольников равны отношению n_i/h , где n_i – число вариантов попавших в i – й интервал. Величина n_i/h называется *плотностью частоты*. Площадь i – го частичного прямоугольника равна n_i , следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h , а высоты равны отношению w_i/h , которое называется *плотностью относительной частоты*. Очевидно, что площадь гистограммы относительных частот равна единице.

Как известно, для нормально распределенной случайной величины асимметрия и эксцесс равны 0. Поэтому, если соответствующие эмпирические величины достаточно малы, можно предположить, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Эмпирический коэффициент асимметрии вычисляется по формуле

$$\bar{A} = \frac{\bar{\mu}_3}{\bar{S}^3}, \quad (1.47)$$

где $\bar{\mu}_3$ – эмпирический центральный момент третьего порядка

$$\bar{\mu}_3 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^3 w_i. \quad (1.48)$$

Эмпирический коэффициент эксцесса вычисляется по формуле

$$\bar{E} = \frac{\bar{\mu}_4}{\bar{S}^4} - 3, \quad (1.49)$$

где $\bar{\mu}_4$ – эмпирический центральный момент четвертого порядка

$$\bar{\mu}_4 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^4 w_i. \quad (1.50)$$

Распределение считается нормальным, если одновременно выполняются условия

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} < 3, \frac{|\bar{E}|}{m_E} < 3. \quad (1.51)$$

Здесь m_A и m_E – ошибки репрезентативности эмпирических коэффициентов асимметрии и эксцесса соответственно

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{n}}, m_E = \sqrt{\frac{24}{n}}. \quad (1.52)$$

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Такой интервал называют *доверительным интервалом*. Вероятность γ , с которой доверительный интервал покрывает неизвестное значение параметра, называется *доверительной вероятностью* или *надежностью оценки*. В качестве γ берут число, близкое к единице, например, 0,9; 0,95 или 0,99.

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с *известным* средним квадратичным отклонением σ , то интервальной оценкой математического ожидания a служит доверительный интервал

$$\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (1.53)$$

Здесь n – объем выборки, z – двусторонний квантиль стандартного нормального распределения. Величина z определяется из уравнения

$$F_0(z) = (1 + \gamma)/2,$$

где $F_0(z)$ – функция стандартного нормального распределения;

Если генеральная совокупность подчиняется нормальному закону распределения с *неизвестным* средним квадратичным отклонением σ , то интервальной оценкой математического ожидания a служит доверительный интервал

$$\bar{x} - t \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (1.54)$$

Здесь s – исправленное среднее квадратичное отклонение, n – объем выборки, t – двусторонний квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы k ($k = n - 1$). Величина t определяется из уравнения

$$F_k(t) = (1 + \gamma)/2.$$

где $F_k(t)$ – функция распределения Стьюдента с числом степеней свободы k .

1.9. Статистические гипотезы

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

Проверяемую гипотезу обычно называют *нулевой* и обозначают H_0 . Наряду с нулевой гипотезой H_0 рассматривают *альтернативную* (конкурирующую) гипотезу H_1 , являющуюся логическим отрицанием гипотезы H_0 .

Проверка осуществляется с помощью *статистических критериев* в качестве которых выступают специально подобранные случайные величины. В разных задачах критерии разные.

В результате проверки нулевая гипотеза либо принимается, либо отвергается в пользу альтернативной. При этом возможны ошибки двух типов:

Ошибка первого рода состоит в том, что гипотеза H_0 будет отвергнута, хотя на самом деле она правильная. Вероятность допустить такую ошибку называют *уровнем значимости* и обозначают буквой α .

Ошибка второго рода состоит в том, что гипотеза H_0 будет принята, но на самом деле она неправильная. Вероятность совершить эту ошибку обозначают буквой β . Значение $1 - \beta$ называют *мощностью критерия* – это вероятность отвержения неправильной гипотезы.

Уровень значимости задаётся исследователем самостоятельно, наиболее часто выбирают значения

$$\alpha = 0,1; \alpha = 0,05; \alpha = 0,01.$$

Процесс проверки статистической гипотезы состоит из следующих этапов:

- 1) Выдвижение основной H_0 и конкурирующей H_1 гипотез.
- 2) Выбор статистического критерия K .
- 3) Выбор уровня значимости α .
- 4) Нахождение *критического значения* $k_{кр}$.
- 5) Нахождение *наблюдаемого значения критерия* $k_{набл}$.

Критическое значение $k_{кр}$ определяет *критическую область*, которая может быть левосторонней, правосторонней и двусторонней. Если $k_{набл}$ не

попадает в критическую область, то гипотеза H_0 на уровне значимости α принимается. Если $k_{\text{набл}}$ попадает в критическую область, то гипотеза H_0 на уровне значимости α отвергается.

Пусть генеральная средняя a нормального распределения равна некоторому значению a_0 . Это нулевая гипотеза: $H_0: a = a_0$

Для проверки гипотезы на уровне значимости α проводится выборка объема n и рассчитывается выборочная средняя $\bar{x}_в$. Исходя из полученного значения и специфики той или иной задачи, можно сформулировать следующие конкурирующие гипотезы:

1) $H_1: a < a_0$;

2) $H_1: a > a_0$;

3) $H_1: a \neq a_0$.

Пусть генеральная дисперсия σ^2 известна. Тогда в качестве *статистического критерия* Z рассматривают случайную величину

$$Z = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}, \quad (1.55)$$

где \bar{X} – случайное значение *выборочной средней*. Далее находим *критическую область*. Для конкурирующих гипотез

$$H_1: a < a_0$$

строится *левосторонняя область*,

для гипотез

$$H_1: a > a_0$$

– *правосторонняя*,

и для гипотезы

$$H_1: a \neq a_0$$

– *двусторонняя*, т. к. конкурирующее значение генеральной средней может оказаться как больше, так и меньше a_0 .

Чтобы найти критическую область нужно отыскать критическое значение $z_{\text{кр}}$. Оно определяется из соотношения

$$F_0(z_{кр}) = 1 - \alpha \quad (1.56)$$

для односторонней области (*лево- или право-*) и

$$F_0(z_{кр}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (1.57)$$

для двусторонней области. Здесь $F_0(z)$ – функция стандартного нормального распределения.

Теперь на основании выборочных данных рассчитывается *наблюдаемое значение критерия*:

$$z_{набл} = \frac{(\bar{x}_в - a_0)}{\sigma} \sqrt{n}. \quad (1.58)$$

Для левосторонней критической области, если $z_{набл} > -z_{кр}$, то гипотеза H_0 на уровне значимости α принимается. Если $z_{набл} < -z_{кр}$, то отвергается.

Для правосторонней критической области, если $z_{набл} < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, в случае $z_{набл} > z_{кр}$ – отвергается.

Для двусторонней критической области, если $-z_{кр} < z_{набл} < z_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае эта гипотеза отвергается.

Пусть генеральная дисперсия σ^2 не известна. В этом случае критерием служит величина

$$T = \frac{(\bar{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}, \quad (1.59)$$

где \bar{X} – случайное значение *выборочной средней* и S – соответствующее исправленное стандартное отклонение. Данная случайная величина имеет распределение Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы. Алгоритм решения полностью сохраняется.

Чтобы найти критическую область нужно отыскать критическое значение $t_{кр}$. Оно определяется из соотношения

$$F_k(t_{кр}) = 1 - \alpha \quad (1.60)$$

для односторонней области и

$$F_k(t_{кр}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (1.61)$$

для двусторонней области, где α – уровень значимости, а $F_k(t)$ – функция распределения Стьюдента с $k = n - 1$ степенями свободы.

Теперь на основании выборочных данных рассчитывается *наблюдаемое значение критерия*:

$$t_{набл} = \frac{(\bar{x}_в - a_0)}{S} \sqrt{n}. \quad (1.62)$$

Для левосторонней критической области, если $t_{набл} > -t_{кр}$, то гипотеза H_0 на уровне значимости α принимается. Если $t_{набл} < -t_{кр}$, то отвергается.

Для правосторонней критической области, если $t_{набл} < t_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, в случае $t_{набл} > t_{кр}$ – отвергается.

Для двусторонней критической области, если $-t_{кр} < t_{набл} < t_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае эта гипотеза отвергается.

1.10. Моделирование случайных величин

Моделированием (или разыгрыванием) случайной величины называется процесс получения возможных значений случайной величины с заданным распределением вероятностей. Моделирование случайной величины основано на применении случайных чисел.

Случайными числами называют возможные значения r_i непрерывной случайной величины R , равномерно распределённой в интервале $(0;1)$. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины R соответственно равны

$$M(R) = 1/2, D(R) = 1/12. \quad (1.63)$$

Большинство современных программных средств, предназначенных для использования на ЭВМ, имеют датчики псевдослучайных чисел равномерного распределения на интервале $(0,1)$. Например, в системе MAXIMA имеется функция $\text{random}(A)$, которое формирует псевдослучайное число, равномерно

распределенное на интервале $(0; A)$. Тип генерируемых значений совпадает с типом A .

Пусть требуется разыграть непрерывную случайную величину X , т.е. получить последовательность ее возможных значений x_i ($i = 1, 2, \dots$), зная функцию распределения $F(x)$.

Теорема. Если r_i – случайное число, то возможное значение x_i разыгрываемой случайной непрерывной случайной величины X с заданной функцией распределения $F(x)$, соответствующее r_i , является корнем уравнения

$$F(x_i) = r_i. \quad (1.64)$$

Таким образом, для того чтобы найти возможное значение x_i непрерывной случайной величины X , зная ее функцию распределения $F(x)$, надо выбрать случайное число r_i , а затем решить уравнение (1.64).

В некоторых случаях можно получить явные формулы для разыгрывания непрерывных случайных величин. Например, для случайной величины X , равномерно распределенной на промежутке $(a; b)$, возможные значения x_i вычисляются по формуле

$$x_i = (b - a)r_i + a.$$

Если уравнение (1.64) не удастся решить в явном виде, то прибегают к различным приближенным методам. Например, при помощи центральной предельной теоремы можно получить приближенную формулу для разыгрывания случайной величины X , распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратичным отклонением σ :

$$x_i = \sigma \frac{S_n - n/2}{\sqrt{\frac{n}{12}}} + a.$$

Здесь S_n – сумма n независимых, распределенных равномерно в интервале $(0;1)$ случайных величин R_j ($1, 2, \dots, n$):

$$S_n = \sum_{j=1}^n R_j.$$

2. МНОГОСЛОЙНЫЕ КОМПОЗИТЫ

Преимущества композитов наиболее полно реализуются в материалах, армированных параллельными волокнами, из которых путем укладки под различными углами образуются многослойные композиты. Для обеспечения монолитности материала армирующие элементы соединяются матрицей.

Механике композитных материалов и конструкций посвящена обширная литература. Для начального знакомства с данным разделом механики можно рекомендовать книги В.В. Васильева [23], Р.М. Кристенсена [61], Б.Е. Победри [121] и А.Н. Полилова [122].

2.1. Физические уравнения многослойного композита

Основным структурным элементом многослойного композита является монослой, состоящий из параллельно уложенных волокон, связанных между собой матрицей (Рис. 1).

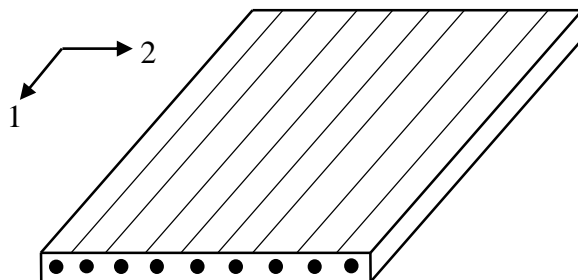


Рис. 1. Монослой

Пусть ось 1 направлена вдоль волокон, а ось 2 – поперек волокон. В этих осях однонаправленный композит имеет ярко выраженную анизотропию механических характеристик, так как в продольном направлении они определяются, в основном, свойствами волокон, а в поперечном направлении – свойствами матрицы.

Введем следующие обозначения:

E_1, E_2 – модули Юнга монослоя вдоль и поперек волокон соответственно;

ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона монослоя $\left(\nu_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{E_1}\right)$;

G_{12} – модуль сдвига в плоскости монослоя.

Физические уравнения, связывающие деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ и напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ в главных осях монослоя (оси 1, 2), имеют вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \frac{\sigma_2}{E_1}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{21} \frac{\sigma_1}{E_2}; \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Равенства (2.1) можно разрешить относительно напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= b_{11}\varepsilon_1 + b_{12}\varepsilon_2; \\ \sigma_2 &= b_{12}\varepsilon_1 + b_{22}\varepsilon_2; \\ \tau_{12} &= b_{33}\gamma_{12}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь b_{11}, b_{22}, b_{12} и b_{33} – компоненты матрицы жесткости монослоя в главных осях:

$$\begin{aligned}b_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ b_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, b_{33} = G_{12}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Рассмотрим многослойный пакет толщиной h , образованный укладкой продольных и поперечных слоев. Пусть ось Ox направлена вдоль волокон продольных слоев, ось Oy – вдоль волокон поперечных слоев, а ось Oz – перпендикулярна плоскости Oxy . Считаем, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью срединной поверхности пакета.

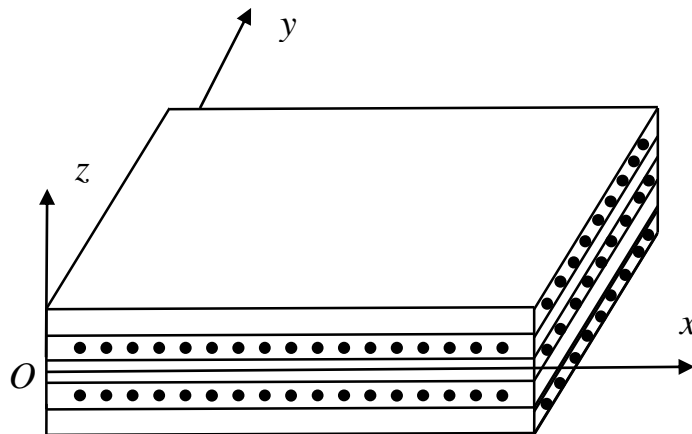


Рис. 2. Многослойный пакет

Предполагается, что слои упакованы симметрично относительно срединной поверхности пакета. Симметрия по толщине позволяет избежать эффекта взаимного влияния мембранных и изгибных деформаций. Если многослойный композит находится в условиях плоского напряженного состояния, деформации пакета $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ постоянны по толщине пакета. Выпишем физические уравнения, связывающие напряжения $\sigma_x^{(\varphi)}, \sigma_y^{(\varphi)}, \tau_{xy}^{(\varphi)}$ с деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ для каждого типа слоя. Здесь φ – угол армирования ($\varphi = 0^\circ; 90^\circ$).

Для продольных и поперечных слоев имеем соответственно:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= b_{11}\varepsilon_x + b_{12}\varepsilon_y; \\ \sigma_y^{(0)} &= b_{12}\varepsilon_x + b_{22}\varepsilon_y; \\ \tau_{xy}^{(0)} &= b_G\gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(90)} &= b_{11}\varepsilon_y + b_{12}\varepsilon_x; \\ \sigma_y^{(90)} &= b_{12}\varepsilon_y + b_{22}\varepsilon_x; \\ \tau_{xy}^{(90)} &= b_G\gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение мембранные усилия:

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^{(\varphi)} dz; T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y^{(\varphi)} dz; T_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}^{(\varphi)} dz.\tag{2.6}$$

Выполнив в последних формулах интегрирование, получим

$$\begin{aligned}T_x &= \sigma_x^{(0)} h_0 + \sigma_x^{(90)} h_{90}; \\ T_y &= \sigma_y^{(0)} h_0 + \sigma_y^{(90)} h_{90}; \\ T_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} h_0 + \tau_{xy}^{(90)} h_{90}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Здесь h_0, h_{90} – суммарные толщины продольных и поперечных слоев соответственно ($h_0 + h_{90} = h$). Разделив обе части последних равенств на величину h , получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x^{(0)} \theta_0 + \sigma_x^{(90)} \theta_{90}; \\
\sigma_y &= \sigma_y^{(0)} \theta_0 + \sigma_y^{(90)} \theta_{90}; \\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} \theta_0 + \tau_{xy}^{(90)} \theta_{90}.
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

Здесь θ_0, θ_{90} – относительные толщины продольных и поперечных слоев ($\theta_0 + \theta_{90} = 1$):

$$\theta_0 = \frac{h_0}{h}; \quad \theta_{90} = \frac{h_{90}}{h}.
\tag{2.9}$$

Величины $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ представляют собой средние по толщине пакета напряжения

$$\sigma_x = \frac{T_x}{h}; \quad \sigma_y = \frac{T_y}{h}; \quad \tau_{xy} = \frac{T_{xy}}{h}.
\tag{2.10}$$

Подставив последовательно в формулы (2.8) выражения для напряжений через деформации пакета (2.4)–(2.5), получим

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{xx} \varepsilon_x + A_{xy} \varepsilon_y; \\
\sigma_y &= A_{xy} \varepsilon_x + A_{yy} \varepsilon_y; \\
\tau_{xy} &= A_G \gamma_{xy}.
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

Здесь A_{xx}, A_{yy}, A_{xy} и A_G – компоненты матрицы жесткости многослойного композита:

$$\begin{aligned}
A_{xx} &= b_{11} \theta_0 + b_{22} \theta_{90}; \\
A_{yy} &= b_{22} \theta_0 + b_{11} \theta_{90}; \\
A_{xy} &= b_{12}; \quad A_G = b_{33}.
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

По известным жесткостям многослойного пакета A_{xx}, A_{yy}, A_{xy} и A_G можно вычислить упругие характеристики пакета:

$$\begin{aligned}
E_x &= A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}}; \quad E_y = A_{yy} - \frac{A_{xy}^2}{A_{xx}}; \\
\nu_{xy} &= \frac{A_{xy}}{A_{yy}}; \quad \nu_{yx} = \frac{A_{xy}}{A_{xx}}; \quad G_{xy} = A_G.
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

Здесь $E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}, G_{xy}$ – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига многослойного пакета.

2.2. Изгибные жесткости многослойного композита

Рассмотрим многослойный пакет толщиной h , образованный симметричной по толщине укладкой слоев, армированных под углами 0° и 90° . Считаем, что плоскость Oxy совпадает с плоскостью срединной поверхности пакета, а ось Oz перпендикулярна плоскости Oxy (Рис. 2).

Полагаем, что деформации по толщине пакета описываются гипотезой Кирхгоффа–Лява:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(z)} &= \varepsilon_x + \kappa_x z; \\ \varepsilon_y^{(z)} &= \varepsilon_y + \kappa_y z; \\ \gamma_{xy}^{(z)} &= \gamma_{xy} + 2\chi_{xy} z.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Здесь ε_x , ε_y , γ_{xy} – деформации срединной поверхности пакета. Величины κ_x , κ_y и χ_{xy} связаны с перемещениями по нормали w следующими зависимостями:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\tag{2.15}$$

Запишем физические уравнения для напряжений в монослое с координатой z :

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(z)} &= b_{xx}^{(\varphi)} \varepsilon_x^{(z)} + b_{xy}^{(\varphi)} \varepsilon_y^{(z)}; \\ \sigma_y^{(z)} &= b_{xy}^{(\varphi)} \varepsilon_x^{(z)} + b_{yy}^{(\varphi)} \varepsilon_y^{(z)}; \\ \tau_{xy}^{(z)} &= b_G^{(\varphi)} \gamma_{xy}^{(z)}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Здесь $b_{xx}^{(\varphi)}$, $b_{xy}^{(\varphi)}$, $b_{yy}^{(\varphi)}$, $b_G^{(\varphi)}$ – компоненты матрицы жесткости монослоя в составе пакета; $\varphi = \varphi(z)$ – угол армирования монослоя с координатой z .

Подставив в формулы для напряжений (2.16) выражения для деформаций по толщине пакета (2.14), получим

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(z)} &= b_{xx}^{(\varphi)} \varepsilon_x + b_{xy}^{(\varphi)} \varepsilon_y + \left(b_{xx}^{(\varphi)} \kappa_x + b_{xy}^{(\varphi)} \kappa_y \right) z; \\ \sigma_y^{(z)} &= b_{xy}^{(\varphi)} \varepsilon_x + b_{yy}^{(\varphi)} \varepsilon_y + \left(b_{xy}^{(\varphi)} \kappa_x + b_{yy}^{(\varphi)} \kappa_y \right) z; \\ \tau_{xy}^{(z)} &= b_G^{(\varphi)} \gamma_{xy} + 2b_G^{(\varphi)} \chi_{xy} z.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Введем в рассмотрение изгибающие моменты

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^{(z)} z dz; M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y^{(z)} z dz; M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}^{(z)} z dz. \quad (2.18)$$

Подставив в формулы (2.18) выражения для напряжений (2.17), с учетом симметрии пакета слоев по толщине, получим:

$$\begin{aligned} M_x &= D_{xx} \kappa_x + D_{xy} \kappa_y; \\ M_y &= D_{xy} \kappa_x + D_{yy} \kappa_y; \\ M_{xy} &= D_G \chi_{xy}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь D_{xx} , D_{xy} , D_{yy} , D_G – изгибные жесткости многослойной пластины:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{xx}^{(\varphi)} z^2 dz; D_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{yy}^{(\varphi)} z^2 dz; \\ D_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{xy}^{(\varphi)} z^2 dz; D_G = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_G^{(\varphi)} z^2 dz. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Получим приближенные формулы для нахождения изгибных жесткостей D_{xx} , D_{xy} , D_{yy} , D_G . В формулах (2.20) заменим величины $b_{xx}^{(\varphi)}$, $b_{xy}^{(\varphi)}$, $b_{yy}^{(\varphi)}$ и $b_G^{(\varphi)}$ на их средние значения соответственно:

$$\begin{aligned} b_{xx}^{(cp)} &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{xx}^{(\varphi)} dz = A_{xx}; b_{xy}^{(cp)} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{xy}^{(\varphi)} dz = A_{xy} \\ b_{yy}^{(cp)} &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_{yy}^{(\varphi)} dz = A_{yy}; b_G^{(cp)} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b_G^{(\varphi)} dz = A_G. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставив выражения (2.21) в формулы (2.20), получим формулы для нахождения изгибных жесткостей через компоненты матрицы жесткости пакета:

$$\begin{aligned}
D_{xx} &= A_{xx} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{A_{xx} h^3}{12}; & D_{xy} &= A_{xy} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{A_{xy} h^3}{12}. \\
D_{yy} &= A_{yy} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{A_{yy} h^3}{12}; & D_G &= A_G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{A_G h^3}{12}.
\end{aligned}
\tag{2.22}$$

Если пакет состоит из большого числа регулярно чередующихся слоев, приближенные формулы (2.22) обеспечивают необходимую для инженерных расчетов точность [106].

2.3. Прочность многослойного композита

Анализ прочности многослойного композита обычно сводится к оценке прочности его монослоев. Прочность монослоя, находящегося в условиях плоского напряженного состояния, определяется следующими характеристиками:

- пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль волокон ($\sigma_{1b}^{(\pm)}$);
- пределы прочности при растяжении и сжатии поперек волокон ($\sigma_{2b}^{(\pm)}$);
- предел прочности при сдвиге в плоскости монослоя τ_b .

В табл.2 приведены пределы прочности углепластика КМУ-4л.

Критерий разрушения определяет комбинацию действующих в монослое напряжений, которая приводит его к разрушению. Простейшим критерием, используемым при оценке прочности однонаправленных композитов, является критерий максимальных напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{1b}^{(-)} &\leq \sigma_1 \leq \sigma_{1b}^{(+)} \\
\sigma_{2b}^{(-)} &\leq \sigma_2 \leq \sigma_{2b}^{(+)} \\
|\tau_{12}| &\leq \tau_b.
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Первое условие (2.23) фактически служит для оценки прочности волокна, второе и третье условия – прочности матрицы. Предельная поверхность

прочности по критерию максимальных напряжений представляет собой параллелепипед (рис. 3).



Рис. 3. Предельная поверхность по критерию максимальных напряжений

Коэффициент запаса прочности вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{1}{\max\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1b}}, \frac{\sigma_2}{\sigma_{2b}}, \left|\frac{\tau_{12}}{\tau_b}\right|\right)}, \quad (2.24)$$

где

$$\sigma_{1b} = \begin{cases} \sigma_{1b}^{(+)}, & \sigma_1 > 0 \\ \sigma_{1b}^{(-)}, & \sigma_1 < 0 \end{cases}; \quad \sigma_{2b} = \begin{cases} \sigma_{2b}^{(+)}, & \sigma_2 > 0 \\ \sigma_{2b}^{(-)}, & \sigma_2 < 0 \end{cases}.$$

Алгоритм расчета на прочность многослойного пакета, находящегося под действием мембранных усилий T_x , T_y и T_{xy} , выглядит следующим образом:

- 1) определение компонент матрицы жесткости пакета;
- 2) определение упругих характеристик пакета;
- 3) определение средних напряжений;
- 4) определение деформаций пакета;
- 5) определение напряжений в монослоях;
- б) проверка выполнения условий прочности для каждого монослоя.

В первом приближении можно считать, что разрушение многослойного композита происходит, если условия прочности нарушаются хотя бы для одного монослоя (first ply criterion).

Механические характеристики отечественных и зарубежных однонаправленных композитов, используемых в авиа-и-ракетостроении, приведены, например, в работах [23, 36, 47, 57]. В табл. 1–2 приведены механические характеристик отечественного углепластика КМУ-4л.

Таблица 1. Упругие характеристики монослоя

| Характеристика | E_1 , ГПа | E_2 , ГПа | ν_{12} | G_{12} , ГПа |
|----------------|-------------|-------------|------------|----------------|
| Значение | 140 | 7 | 0,24 | 2,75 |

Таблица 2. Пределы прочности монослоя

| Предел прочности | $\sigma_{1b}^{(+)}$, ГПа | $\sigma_{1b}^{(-)}$, ГПа | $\sigma_{2b}^{(+)}$, ГПа | $\sigma_{2b}^{(-)}$, ГПа | τ_b , ГПа |
|------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-------------------|
| Значение | 0,7 | -0,6 | 0,04 | -0,2 | 0,055 |

2.4. Статистическое моделирование многослойного композита

Исследуем влияние разброса значений упругих характеристик однонаправленного композита на упругие характеристики многослойного композита. Входные параметры – упругие характеристики монослоя E_1 , E_2 , ν_{12} и G_{12} , а выходные параметры в общем случае – упругие характеристики многослойного пакета E_x , E_y , ν_{xy} и G_{xy} . Предполагается, что входные величины подчиняются нормальному закону распределения вероятностей.

В качестве критерия устойчивости выходных величин относительно разброса входных величин примем коэффициент вариации

$$V = \frac{\bar{s}}{\bar{m}} 100\%.$$

Здесь \bar{s} – выборочное среднеквадратичное отклонение, \bar{m} – выборочное среднее.

Рассмотрим пакет, образованный укладкой только продольных и поперечных слоев. В этом случае коэффициент Пуассона и модуль сдвига многослойного пакета совпадают с соответствующими характеристиками монослоя. Поэтому выходными параметрами служат только модули Юнга в продольном и поперечном направлениях.

Исходные данные статистического анализа многослойного пакета приведены в табл. 3. Относительное содержание продольных слоев $\theta_0 = 0,5$. Число испытаний $N=1000$.

Таблица 3. Исходные данные статистического анализа многослойного пакета

| Числовые характеристики | Упругие характеристики монослоя | | | |
|-------------------------------|---------------------------------|------------|-------------|----------|
| | E_1 , ГПа | ν_{12} | E_2 , ГПа | G_{12} |
| Математическое ожидание | 140 | 0,24 | 7 | 2,75 |
| Среднеквадратичное отклонение | 7 | 0,012 | 0,35 | 0,14 |

Программа моделирования случайных величин:

/* Моделирование СВ. ППН*/

fpprintprec:3;

load(descriptive);

load(distrib);

ratprint: false\$

/* Характеристики монослоя*/

E1:140e9; SE1:7e9;

E2:7e9; SE2:0.35e9;

ν_{12} :0.24; SV12:0.012;

G12: 2.75e9; SG12:0.14e9;

/* Относительное содержание слоев*/

ET0:0.5; ET90:1-ET0;

N:1000;

listEX:[]\$ listEY:[]\$

for i:1 thru N do

block

(

CVE1:random_normal(E1,SE1), CVE2:random_normal(E2,SE2),

CVV12:random_normal(ν_{12} ,SV12), CVG12:random_normal(G12,SG12),

CVV21:CVV12*CVE2/CVE1,

B11:CVE1/(1-CVV12*CVV21),

B22:CVE2/(1-CVV12*CVV21),

```

B12:CVV12*CVE2/(1-CVV12*CVV21),
B33:CVG12,
/* Матрица жесткости пакета */
AXX:B11*ET0+B22*ET90,
AYY:B22*ET0+B11*ET90,
AXY:B12,
/* Упругие характеристики пакета */
EX:AXX-AXY^2/AYY,
EY:AYY-AXY^2/AXX,
listEX:endcons(EX,listEX), listEY:endcons(EY,listEY)
);
/* Запись в файл */
write_data(listEX,"listEX");
write_data(listEY,"listEY");
Программа обработки результатов моделирования:
/* Чтение из файлов */
listEX:read_list("listEX")$
listEY:read_list("listEY")$
/* Точечные оценки*/
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар., EX*/
AVREX:mean(listEX), numer;
STDEX:std(listEX);
KVAREX: STDEX/AVREX*100;
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар., EY*/
AVREY:mean(listEY), numer;
STDEY:std(listEY);
KVAREY: STDEY/AVREY*100;

```

Результаты статистического анализа многослойного пакета приведены в табл. 4.

Таблица 4. Результаты статистического анализа

| Числовые характеристик | Характеристики | |
|--|----------------|-------|
| | E_x | E_y |
| Выборочное среднее, ГПа | 73,6 | 73,6 |
| Выборочное среднееквадратическое отклонение, ГПа | 3,6 | 3,6 |
| Коэффициент вариации, % | 4,9 | 4,9 |

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод об устойчивости выходных величин относительно разброса входных величин (коэффициент вариации не превышает 5 процентов).

Для проверки закона распределения выходных величин на нормальность воспользуемся условиями

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} < 3, \frac{|\bar{E}|}{m_E} < 3.$$

Здесь \bar{A} и \bar{E} – эмпирические коэффициенты асимметрии и эксцесса соответственно, m_A и m_E – ошибки репрезентативности эмпирических коэффициентов асимметрии и эксцесса соответственно

$$m_A = \sqrt{\frac{6}{N}}, m_E = \sqrt{\frac{24}{N}}.$$

Отметим, что величины m_A и m_E зависят только от числа испытаний N . Подставив значение $N = 1000$ в формулы для m_A и m_E , получим

$$m_A = 0,078, m_E = 0,155.$$

Программа вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса:

/* Чтение из файлов */

listEX:read_list("listEX")\$

listEY:read_list("listEY")\$

/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */

N:1000;

```

RPRASS: sqrt(6/N),numer;
RPREKS: sqrt (24/N),numer;
/* Асимметрия и эксцесс EX*/
ASSEX:skewness(listEX);
EKSEX:kurtosis(listEX);
KRTASSEX: abs(ASSEX)/RPRASS;
KRTEKSEX:abs(EKSEX)/RPREKS;
/* Асимметрия и эксцесс EY*/
ASSEY:skewness(listEY);
EKSEY:kurtosis(listEY);
KRTASSEY: abs(ASSEY)/RPRASS;
KRTEKSEY:abs(EKSEY)/RPREKS;

```

Значения коэффициентов асимметрии и эксцесса для упругих характеристик многослойного композита приведены в табл. 5.

Таблица 5. Коэффициенты асимметрии и эксцесса

| Точечные характеристики выборки | Характеристики | |
|-----------------------------------|----------------|---------|
| | E_x | E_y |
| Выборочный коэффициент асимметрии | -0,062 | -0,0,62 |
| Выборочный коэффициент эксцесса | -0,076 | -0,0,76 |

Совпадение результатов статистического моделирования для модулей Юнга в продольном и поперечном направлениях – следствие того, что в данном примере относительные содержания продольных и поперечных слоев в пакете совпадают.

Найдем отношения коэффициентов асимметрии и эксцесса к соответствующим ошибкам репрезентативности:

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = \frac{|-0,062|}{0,078} = 0,8 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = \frac{|-0,076|}{0,155} = 0,5 < 3.$$

Таким образом, условия нормальности законов распределений выполняются.

Программа построения гистограммы:

```
/* Чтение из файлов */
```

```
listEX:read_list("listEX")$
```

```
listEY:read_list("listEY")$
```

```
/*Гистограммы*/
```

```
histogram(listEX, frequency=percent,
```

```
xlabel= "Ex", ylabel="w",
```

```
fill_density=0.1,
```

```
fill_color=grey,terminal=png, file_name="histEX");
```

Гистограмма для величины E_x представлена на рис. 4.

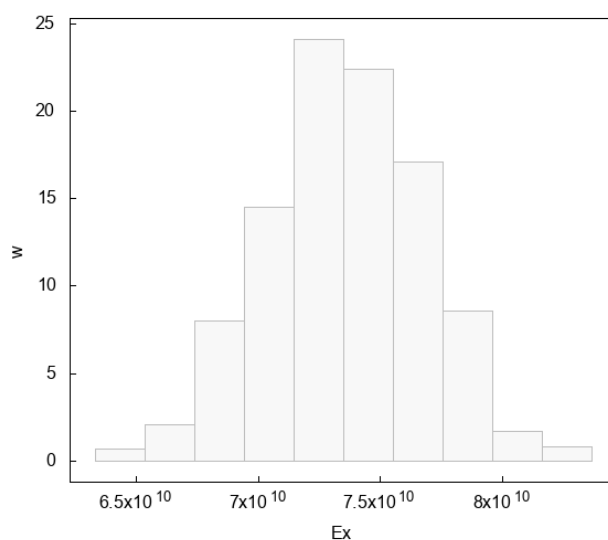


Рис. 4. Гистограмма для модуля Юнга E_x

Таким образом, анализ полученных численных и графических данных позволяет сделать вывод о том, что упругие характеристики многослойного композита (выходные величины) устойчивы относительно разброса аналогичных характеристик монослоя (входные величины) и подчиняются нормальному закону распределения.

2.5. Выводы по главе

Основным структурным элементом слоистого композита является монослой, который состоит из параллельно уложенных волокон, связанных между собой матрицей. Однонаправленные композиты обладают высокими

механическими свойствами только при нагружении вдоль волокон. При нагружении поперек волокон жесткость оказывается весьма низкой, так как она определяется, в основном, свойствами связующего. На практике монослои укладываются в пакет с различными углами ориентации волокон. Одним из наиболее простых и эффективных способов управления механическими характеристиками многослойных композитов является продольно-поперечная укладка слоев. В многослойных пакетах могут проявляться эффекты взаимного влияния мембранных и изгибных деформаций. Чтобы избежать этого эффекта на практике обычно используют симметричные по толщине пакета укладки слоев.

В задачах на изгиб многослойных композитов наибольшие затруднения вызывает нахождение изгибных жесткостей пакета, величина которых, в общем случае, зависит от порядка чередования слоев. Исследования показывают, если пакет состоит из большого числа регулярно чередующихся слоев, достаточную для инженерных расчетов точность обеспечивают формулы, полученные путем осреднения жесткостных характеристик по толщине пакета.

Анализ прочности многослойного композита сводится к оценке прочности его монослоев. Критерий разрушения определяет комбинацию действующих в монослое напряжений, которая приводит его к разрушению. Простейшим критерием, используемым при оценке прочности однонаправленных композитов, является критерий максимальных напряжений. В первом приближении можно считать, что разрушение многослойного композита происходит, если условия прочности нарушаются хотя бы для одного монослоя (first ply criterion).

Статистический анализ упругих характеристик многослойных композитов показывает, что разброс упругих характеристик монослоя не оказывает существенного влияния на упругие характеристики многослойного композита (коэффициенты вариации упругих характеристик монослоя и многослойного композита практически совпадают). Малые значения коэффициентов асимметрии и эксцесса позволяют сделать вывод о нормальности распределений упругих характеристик многослойного композита.

3. МНОГОСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ

Первая фундаментальная работа по теории устойчивости пластин, как известно, принадлежит английскому математику и механику Джорджу Брайену. Его работа «Об устойчивости пластины, нагруженной в своей плоскости» была доложена на заседании Лондонского математического общества в 1890 году. Значительный вклад в теорию устойчивости пластин внес также русский ученый С.П. Тимошенко [167]. Теория устойчивости многослойных пластин достаточно подробно изложена, например, в книге С.А. Амбарцумяна [4].

Первые решения задачи устойчивости цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевой сжимающей нагрузки, были получены Р. Лоренцом и С.П. Тимошенко в 1908–1914 годах. Основные этапы развития теории устойчивости оболочек, а также ее современное состояние приведено в статье В.В. Пикуля [120]. Теория устойчивости многослойных композитных оболочек достаточно подробно изложена в книге Р.Б. Рикардса и Г.А. Тетерса [137].

3.1. Устойчивость пластин

Многослойная прямоугольная пластинка длиной a и шириной b находится под действием сжимающих нагрузок q , равномерно распределенных по двум противоположным сторонам (рис. 5).

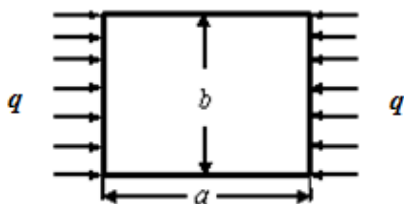


Рис.5. Пластинка, сжатая в одном направлении

Пусть начало координат O находится в левом нижнем углу пластины, ось Ox направлена вдоль стороны a , а ось Oy – вдоль стороны b (рис.6).

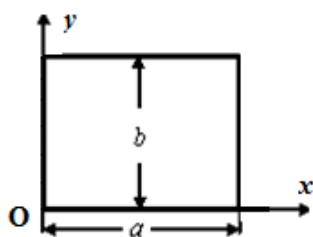


Рис.6 . Система координат прямоугольной пластинки

Предполагается, что укладка слоев по толщине пакета позволяет рассматривать многослойную конструкцию как ортотропную пластину. Основное разрешающее уравнение устойчивости ортотропных пластин имеет вид [28]:

$$D_{xx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + 2D_G) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{yy} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $w = w(x, y)$ – прогиб пластины; x, y – координаты; q – заданная сжимающая нагрузка; $D_{xx}, D_{xy}, D_G, D_{yy}$ – изгибные жесткости пластины. Таким образом, задача определения критической нагрузки для многослойной прямоугольной пластины приводит, в общем случае, к обобщенной задаче на собственные значения для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.

Если пластинка находится в условиях цилиндрического изгиба, уравнение устойчивости принимает вид ($w = w(x)$):

$$D_{xx} \frac{d^4 w}{dx^4} + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (3.2)$$

Данное уравнение можно использовать для исследования устойчивости пластин ширина которых значительно превышает длину; в этом случае, как известно, можно пренебречь влиянием условий закрепления коротких сторон на величину критической нагрузки.

Для шарнирно опертой пластинки решение уравнения (3.2) можно представить в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{\pi m x}{a}, \quad (3.3)$$

где m – число полуволин в направлении оси Ox .

Подставив выражение (3.3) в уравнение (3.2), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(D_{xx} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^4 - q \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right) \sin \frac{\pi m x}{a} = 0. \quad (3.4)$$

Из последнего уравнения найдем выражение для параметра нагрузки

$$q = D_{xx} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2. \quad (3.5)$$

Наименьшее значение параметра q достигается, очевидно, при $m = 1$. Следовательно, критическая нагрузка для пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, вычисляется по формуле:

$$q_c = D_{xx} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2. \quad (3.6)$$

Таким образом, выражение для критической нагрузки пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, совпадает с известной формулой критической нагрузки для балки единичной ширины.

Рассмотрим общий случай. Для шарнирно опертой по всему контуру пластины решение уравнения (3.1) можно записать следующим образом:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}. \quad (3.7)$$

Здесь m, n – числа полуволн по направлениям осей Ox, Oy соответственно. Подставив выражение для прогиба в основное разрешающее уравнение, из условия существования нетривиального решения, получим выражение для параметра нагрузки

$$q = \left(\frac{a}{\pi m} \right)^2 \left(D_{xx} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^4 + 2(D_{xy} + 2D_G) \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + D_{yy} \left(\frac{\pi n}{b} \right)^4 \right). \quad (3.8)$$

Критическая нагрузка определяется путем минимизации выражения (3.8) по числам полуволн m и n . Очевидно, что в последнем выражении надо положить $n = 1$. Выражение для параметра нагрузки в этом случае принимает вид:

$$q = \left(\frac{a}{\pi m} \right)^2 \left(D_{xx} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^4 + 2(D_{xy} + 2D_G) \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + D_{yy} \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 \right). \quad (3.9)$$

Введем для удобства новую переменную

$$t = m^2. \quad (3.10)$$

Выражение для параметра нагрузки представим в виде:

$$q = q_c \left(t + 2 \frac{D_{xy} + 2D_G}{D_x} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{D_{yy}}{D_{xx}} \left(\frac{a}{b} \right)^4 t^{-1} \right) \quad (3.11)$$

Здесь q_c – критическая нагрузка пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба (3.6).

Исследуем функцию $q = q(t)$ на экстремум. Найдем первую и вторую производные

$$\frac{dq}{dt} = q_c \left(1 - \frac{D_{yy}}{D_{xx}} \left(\frac{a}{b} \right)^4 t^{-2} \right), \quad \frac{d^2q}{dt^2} = 2q_c \frac{D_{yy}}{D_{xx}} \left(\frac{a}{b} \right)^4 t^{-3}. \quad (3.12)$$

Вторая производная больше нулю при всех допустимых значениях переменной t . Следовательно, функция $q = q(t)$ является вогнутой, а критическая точка – точкой минимума.

Из условия

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (3.13)$$

получим

$$t = \left(\frac{a}{b} \right)^2 \sqrt{\frac{D_{yy}}{D_{xx}}}. \quad (3.14)$$

Следовательно, количество полуволин равно

$$m = \sqrt{t} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{D_{yy}}{D_{xx}}}. \quad (3.15)$$

Если $m < 1$, тогда в формулу (3.11) следует подставить значение $t = 1$.

Критическая нагрузка в этом случае вычисляется по формуле:

$$q = q_c \left(1 + 2 \frac{D_{xy} + 2D_G}{D_{xx}} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{D_{yy}}{D_{xx}} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right). \quad (3.16)$$

Подставив выражение (3.6) для q_c в последнюю формулу, получим окончательно

$$q = \frac{\pi^2 D_{xx}}{a^2} \left(1 + 2 \frac{D_{xy} + 2D_G}{D_{xx}} \left(\frac{a}{b} \right)^2 + \frac{D_{yy}}{D_{xx}} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right). \quad (3.17)$$

Пусть $m \geq 1$. Подставим значение (3.14) в выражение для параметра нагрузки (3.11). В результате, после несложных преобразований, получим хорошо известную формулу критической нагрузки [28]:

$$q_{cr} = \frac{2\pi^2 \sqrt{D_{xx}D_{yy}}}{b^2} \left(1 + \frac{D_{xy} + 2D_G}{\sqrt{D_{xx}D_{yy}}} \right). \quad (3.18)$$

Последняя формула дает точные значения в случае, когда величина m является целым числом. Если же эта величина не является целой, формула (3.18) дает заниженные значения критической нагрузки. Уточнить значение критической нагрузки можно по формуле:

$$q_{cr} = \min(q(m_L), q(m_L + 1)), \quad (3.19)$$

где m_L – целая часть величины (3.15).

3.2. Устойчивость оболочек

Многослойная цилиндрическая оболочка толщиной h , радиусом R и длиной L находится под действием сжимающей нагрузки q . Требуется определить величину нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости. Предполагается, что укладка слоев по толщине полотна конструкции позволяет рассматривать ее как ортотропную оболочку.

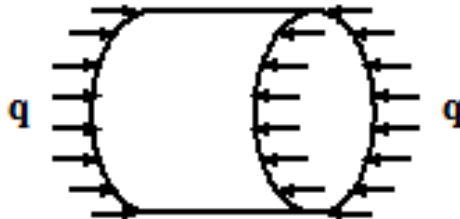


Рис.7. Оболочка, сжатая вдоль образующих

Рассмотрим случай, когда потеря устойчивости носит осесимметричный характер. Основное разрешающее уравнение устойчивости ортотропной оболочки, построенное на основе гипотез Кирхгоффа-Лява, представим в виде:

$$D_{xx} \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{w}{R^2 \delta_{yy}} + q \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (3.20)$$

Здесь x – координата, откладываемая вдоль образующей; w – перемещения по нормали к срединной поверхности оболочки; D_{xx} – изгибная жесткость оболочки в направлении образующих; δ_{yy} – податливость оболочки в окружном направлении. Величины D_{xx} и δ_{yy} вычисляются по формулам

$$D_{xx} = \frac{A_{xx}h^3}{12}; \quad \delta_{yy} = \frac{A_{xx}}{(A_{yy}A_{xx} - A_{xy}^2)h}. \quad (3.21)$$

Таким образом, исследование осесимметричной формы потери устойчивости цилиндрической оболочки приводит к обобщенной задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.

Для свободно опертой по обоим торцам оболочки решение можно представить в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{\pi m x}{L}. \quad (3.22)$$

Здесь m – число полуволн по направлению образующей.

После подстановки этого выражения в основное разрешающее уравнение устойчивости (3.20), из условия существования нетривиального решения, найдем выражение для параметра нагрузки

$$q = \frac{D_{xx}}{R^2} \lambda^2 + \frac{1}{\delta_{yy} \lambda^2}, \quad (3.23)$$

где

$$\lambda = \frac{\pi m R}{L}. \quad (3.24)$$

Введем для удобства новую переменную

$$t = \lambda^2. \quad (3.25)$$

Выражение для параметра нагрузки примет вид:

$$q = \frac{D_{xx}}{R^2} t + \frac{1}{\delta_{yy} t}. \quad (3.26)$$

Исследуем функцию $q = q(t)$ на экстремум. Найдем первую и вторую производные

$$\frac{dq}{dt} = \frac{D_{xx}}{R^2} - \frac{1}{\delta_{yy} t^2}, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{2}{\delta_{yy} t^3}. \quad (3.27)$$

Вторая производная больше нулю при всех допустимых значениях переменной t . Следовательно, функция $q = q(t)$ является вогнутой, а критическая точка – точкой минимума.

Из условия

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (3.28)$$

получим

$$t = \frac{R}{\sqrt{D_{xx}\delta_{yy}}}. \quad (3.29)$$

Подставим значение (3.29) в выражение для параметра нагрузки (3.26). В результате, после несложных преобразований, получим хорошо известную формулу критической нагрузки [28]:

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}}{\delta_{yy}}}. \quad (3.30)$$

В общем случае формула (3.29) приводит к значениям t , которые не являются целыми числами. Для уточнения значения критической нагрузки можно подставить в формулу (3.23) целые значения t , близкие к найденному из равенства (3.29) значению, с последующим выбором минимального значения q . Однако на практике процедура уточнения, как правило, является излишней, так формула (3.30) для не слишком коротких оболочек обладает удовлетворительной точностью [23].

3.3. Проектирование пластин

Рассматривается многослойная пластинка длиной a и шириной b , находящаяся под действием сжимающих нагрузок. Требуется при заданных габаритных размерах подобрать параметры пластинки так, чтобы данная конструкция обладала минимальной массой.

По условиям прочности наилучшей схемой армирования является, очевидно, продольная укладка слоев

$$\theta_0 = 1. \quad (3.31)$$

Для пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, критическая нагрузка определяется по формуле (3.6). Представим данную формулу в виде:

$$q_c = \frac{A_{xx} h^3}{12} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2. \quad (3.32)$$

Здесь A_{xx} – жесткость многослойной пластинки по направлению действия нагрузок. Максимальное значение A_{xx} достигается при выполнении условия (3.31) и равно b_{11} .

Таким образом, схема армирования (3.31) является оптимальной по условиям прочности и устойчивости.

Толщина конструкции по условиям прочности определяется следующим образом:

$$h_\sigma = \frac{q_0}{\sigma_{-1v}}. \quad (3.33)$$

Здесь σ_{-1v} – предел прочности монослоя при сжатии в направлении волокон, q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

Толщина пластинки по условиям устойчивости может быть найдена при помощи формулы (3.32)

$$h_c = \left(\frac{12q_0}{b_{11}} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.34)$$

Найдем нагрузку q_p , при которой выполняется условие

$$h_\sigma = h_c. \quad (3.35)$$

Подставив в последнее равенство выражения для h_σ и h_c , получим

$$\frac{q_p}{\sigma_{-1v}} = \left(\frac{12q_p}{b_{11}} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.36)$$

Решив полученное уравнение, найдем

$$q_p = \frac{\sqrt{12}}{\pi} \sigma_{-1v} a \sqrt{\frac{\sigma_{-1v}}{b_{11}}}. \quad (3.37)$$

Таким образом, алгоритм проектирования многослойной пластинки, состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что полотно пластинки состоит только из продольных монослоев.

2. Вычисляем нагрузку q_p , соответствующую переходу из области устойчивости в область прочности.

3. Проверяем выполнение условия

$$q_0 < q_p. \quad (3.38)$$

Здесь q_0 – заданная сжимающая нагрузка. Если данное условие выполняется, то есть конструкция работает только на устойчивость, толщину пластинки вычисляем по формуле (3.34). В противном случае ($q_0 \geq q_p$), толщину пластинки вычисляем по формуле (3.33).

4. По известной толщине h вычисляем массу оптимальной многослойной пластинки

$$G = ab\rho_0 h. \quad (3.39)$$

Здесь ρ_0 – плотность материала пластинки.

Пример. Многослойная пластинка длиной a и шириной b находится под действием сжимающей нагрузки q_0 . Механические характеристики материала приведены в табл. 1 – 2; плотность материала пластинки $\rho_0 = 1450 \text{ кг/м}^3$. Требуется вычислить массу оптимальной пластины, если:

$$q_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ н/м}; a = 1 \text{ м}; b = 3 \text{ м}.$$

Программа проектирования гладкой пластины:

```
/* Пластина. Оптимизация. Цилиндрический изгиб*/
```

```
fpprintprec:3;
```

```
/* Нагрузка*/
```

```
q:2e5;
```

```
/* габариты*/
```

```
a:1; b:3;
```

```
/* Упругие характеристик, плотность, предел прочности*/
```

```
E1:140e9; E2:7e9; v12:0.24;
```

```

v21:v12*E2/E1; G12: 2.75E9;
RO:1450;
sig1:0.7e9;
/* Жесткость*/
B11:E1/(1-v12*v21);
/* Толщина по условиям прочности*/
hsig:q/sig1;
/* Толщина по условиям устойчивости*/
hust:(12*q/B11*(a/%pi)^2)^(1/3),numer;
/* Переходная нагрузка*/
qp:sqrt(12)/%pi*sig1*a*sqrt(sig1/B11),numer;
/* Оптимальная толщина*/
h:if q<qp then h:hust else h:hsig,numer;
/*Оптимальная масса*/
G:a*b*h*RO,numer.

```

Результаты вычислений:

$$h = 0,012 \text{ м}; G = 52,2 \text{ кг} .$$

Для сравнения приведем результаты расчета изотропной пластинки со следующими характеристиками (АМгб): модуль Юнга $E = 71 \cdot 10^9$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; предел текучести материала примем равным $0,7 \cdot 10^9$ ГПа; плотность $\rho_0 = 2640$ кг/м³.

Программа проектирования изотропной пластины:

```

/· Пластина изотропная АМгб. Цилиндрический изгиб. ·/
E:71e9; v:0.3;
RO:2640;
sig1:0.17e9;
a:1; b:3;
pi:3.14159;
q:2e5;
B11:E/(1-v^2);

```

$h_{sig}:q/sig1;$
 $hust:(12 \cdot q/B11 \cdot (a/\pi)^2)^{(1/3)};$
 $q_p:sqrt(12)/\pi \cdot sig1 \cdot a \cdot sqrt(sig1/B11),numer;$
 $h:if q < q_p \text{ then } h:hust \text{ else } h:h_{sig};$
 $G:a \cdot b \cdot h \cdot RO.$

Результаты вычисления:

$$h = 0,014 \text{ (м)}; G = 115,6 \text{ (кг)}.$$

Таким образом, использование композитного материала позволило снизить массу конструкции более, чем вдвое.

3.4. Проектирование оболочек

Рассматривается многослойная цилиндрическая оболочка радиусом R и длиной L , находящаяся под действием сжимающих вдоль образующих нагрузок q . Требуется найти параметры оболочки так, чтобы при сохранении устойчивости и прочности конструкция обладала минимальной массой.

Для решения задач проектирования многослойных конструкций можно воспользоваться следующими простейшими моделями:

1. Структура армирования определяется условиями устойчивости.
2. Структура армирования определяется условиями прочности.

В первой модели определяющим является условие устойчивости

$$q_{cr} = q_0. \quad (3.40)$$

Здесь q_0 – заданная сжимающая нагрузка; q_{cr} – критическая нагрузка.

При помощи формул (3.21) выражение критической нагрузки (3.30) для многослойной оболочки представим в виде

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}}{\delta_{yy}}} = \frac{h^2}{R\sqrt{3}} \sqrt{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2}. \quad (3.41)$$

Если полотно оболочки состоит только из продольных и кольцевых слоев, упакованных симметрично относительно срединной поверхности оболочки, компоненты матрицы жесткости вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
A_{xx} &= b_{11}\theta_0 + b_{22}(1 - \theta_0); \\
A_{yy} &= b_{22}\theta_0 + b_{11}(1 - \theta_0); \\
A_{xy} &= b_{12}; \quad A_G = b_{33}.
\end{aligned}
\tag{3.42}$$

Здесь $b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{33}$ – компоненты матрицы жесткости монослоя; θ_0 – относительное содержание продольных слоев.

При помощи равенств (3.40) и (3.41) выразим толщину оболочки через заданную нагрузку

$$h = \left(\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.
\tag{3.43}$$

Величина A_{xy} не зависит от параметра θ_0 , следовательно, наименьшее значение толщины достигается в точке максимума функции

$$F(\theta_0) = A_{xx}(\theta_0)A_{yy}(\theta_0)
\tag{3.44}$$

После подстановки выражений для $A_{xx}(\theta_0)$ и $A_{yy}(\theta_0)$ через структурный параметр θ_0 , функция $F(\theta_0)$ принимает вид:

$$F(\theta_0) = -(b_{11} - b_{22})^2 \theta_0^2 + (b_{11} + b_{22})^2 \theta_0 + b_{11}b_{22}.
\tag{3.45}$$

Эта функция представляет собой квадратичную параболу, ветви которой направлены вниз. Следовательно, наибольшего значения функция $F(\theta_0)$ достигает в вершине параболы, то есть в точке

$$\theta_0 = 0,5.
\tag{3.46}$$

Подставив найденное значение θ_0 в формулу (3.43), получим

$$h = \left(\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{sr}^2 - b_{12}^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.
\tag{3.47}$$

Здесь

$$b_{sr} = \frac{b_{11} + b_{22}}{2}.
\tag{3.48}$$

Таким образом, если оболочка работает только на устойчивость, ее полотно должно состоять из одинакового числа продольных и кольцевых слоев.

Теперь следует проверить выполнение условий прочности. При вычислении напряжений полагаем, что вся нагрузка воспринимается продольными слоями.

В рамках данного допущения коэффициент запаса прочности вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_1}, \quad (3.49)$$

где

$$\sigma_1 = \frac{b_{11} q_0}{b_{sr} h}. \quad (3.50)$$

Если $\eta \geq 1$, процесс проектирования завершается. Найденные значения величин h и θ_0 являются оптимальными. Если $\eta < 1$, вычисляем толщину оболочки из условий прочности. Полагая $\eta = 1$, получим

$$h = \frac{b_{11} q_0}{b_{sr} \sigma_{-1b}}. \quad (3.51)$$

Таким образом, решение задачи проектирования распадается на два этапа: нахождение оптимальной схемы армирования из условий устойчивости и определение геометрических характеристик из условий устойчивости и прочности при фиксированной схеме армирования.

Пример 1. Многослойная оболочка длиной L и радиусом R находится под действием сжимающей нагрузки q_0 . Механические характеристики материала приведены в табл. 1 – 2; плотность материала оболочки $\rho_0 = 1450 \text{ кг/м}^3$. Требуется вычислить массу оболочки, с оптимальной по условиям устойчивости схемой армирования, если:

$$q_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ н/м}; R = 0,5 \text{ м}; L = 1 \text{ м}.$$

1. Полагаем, что полотно многослойной оболочки состоит из равного числа продольных и поперечных монослоев, то есть $\theta_0 = \theta_{90} = 0,5$.

2. Вычисляем толщину h из условий устойчивости

$$h = \left(\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{sr}^2 - b_{12}^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,00767 \text{ (м)}.$$

3. Вычисляем напряжения и коэффициент запаса по прочности

$$\sigma_1 = \frac{b_{11} q_0}{b_{sr} h} = 1,2 \cdot 10^9 \text{ (Па)}; \eta = \frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_1} = 0,56.$$

4. Коэффициент η меньше единицы, то есть конструкция не удовлетворяет условиям прочности. Вычисляем толщину конструкции из условий прочности

$$h = \frac{b_{11}}{b_{sr}} \frac{q_0}{\sigma_{-1b}} = 0,014 \text{ (м)} .$$

5. Находим массу конструкции

$$G = 2\pi RL\rho_0 h = 62 \text{ (кг)} .$$

Программа проектирования для первой модели:

/* Гладкая оболочка. Оптимизация. Схема из условий устойчивости.*/

fpprintprec:3;

/* Радиус и длина */

R:0.5; L:1;

/* Нагрузка */

q:5e6;

/* Упругие характеристики монослоя*/

E1:140e9; E2:7e9;v12:0.24; v21:v12*E2/E1;G12: 2.75e9;

/* Предел прочности при сжатии */

sig1:0.7e9;

/* Плотность материала оболочки */

RO: 1450;

/* Матрица жесткости монослоя */

B11:E1/(1-v12*v21); B22:E2/(1-v12*v21);

B12:v12*E2/(1-v12*v21);B33:G12;

/* Относительные содержания оболочки */

ET0:0.5;

ET90: 1-ET0;

/* Матрица жесткости пакета */

AXX:B11*ET0+B22*ET90;

AYY:B22*ET0+B11*ET90;

AXY:B12;AG:B33;

/* Толщина из условий устойчивости */

```

hust: sqrt(q*R*sqrt(3)/sqrt(AXX*AYY-AXY^2)), numer;
/* Напряжения и коэффициент запаса в продольных слоях */
sig10:B11/AXX*q/hust;
KZ:sig1/sig10;
hpr:B11/AXX*q/sig1;
h:if KZ>1 then h:hust else h:hpr;
/* Масса конструкции */
G: 2*%pi*R*L*RO*h,numer.

```

Во второй модели определяющим является условие прочности

$$\eta = \frac{\sigma_{-1b}}{\sigma_1} = 1. \quad (3.52)$$

Полагая, что вся нагрузка воспринимается продольными слоями, найдем напряжения в этих слоях

$$\sigma_1 = \frac{b_{11}}{A_{xx}} \frac{q_0}{h}. \quad (3.53)$$

При помощи двух последних формул выразим толщину оболочки через величину действующей нагрузки

$$h = \frac{b_{11}}{A_{xx}} \frac{q_0}{\sigma_{-1b}}. \quad (3.54)$$

Наименьшее значение толщины h достигается в точке максимума величины A_{xx} . Наибольшее значение величины A_{xx} равно b_{11} и достигается в точке

$$\theta_0 = 1. \quad (3.55)$$

Таким образом, если оболочка работает только на прочность, ее полотно должно состоять только из продольных слоев. Толщина оболочки, очевидно, равна

$$h = \frac{q_0}{\sigma_{-1b}}. \quad (3.56)$$

Теперь следует проверить выполнение условий устойчивости. Критическая нагрузка для оболочки q_{cr} и коэффициент запаса по устойчивости η_{cr} вычисляются по формулам

$$q_{cr} = \frac{h^2}{R\sqrt{3}} \sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}; \quad \eta_{cr} = \frac{q_{cr}}{q_0}. \quad (3.57)$$

Если $\eta_{cr} \geq 1$, процесс проектирования завершается. Найденные значения величин h и θ_0 являются оптимальными. Если $\eta_{cr} < 1$, вычисляем толщину оболочки из условий устойчивости. Полагая $q_{cr} = q_0$, получим

$$h = \left(\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.58)$$

Таким образом, решение задачи проектирования распадается на два этапа: нахождение оптимальной схемы армирования из условий прочности и определение геометрических характеристик из условий прочности и устойчивости при фиксированной схеме армирования.

Пример 2. Используя исходные данные предыдущего примера, найти массу оболочки, с оптимальной по условиям прочности схемой армирования.

1. Полагаем, что полотно многослойной оболочки состоит только из продольных монослоев, то есть $\theta_0 = 1$.

2. Вычисляем толщину h из условий прочности

$$h = \frac{q_0}{\sigma_{-1b}} = 0,0071.$$

3. Вычисляем критическую нагрузку и коэффициент запаса по устойчивости

$$q_{cr} = \frac{h^2}{R\sqrt{3}} \sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ (Н/м)}; \quad \eta_{cr} = \frac{q_{cr}}{q_0} = 0,37.$$

4. Коэффициент η_{cr} меньше единицы, то есть конструкция не удовлетворяет условиям устойчивости. Вычисляем толщину конструкции из условий устойчивости

$$h = \left(\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,012 \text{ (м)}.$$

5. Находим массу конструкции

$$G = 2\pi R L \rho_0 h = 53,5 \text{ (кг)}.$$

Таким образом, вторая модель оказывается легче первой модели на 13 процентов.

Программа проектирования для второй модели:

/* Гладкая оболочка. Оптимизация. Схема из условий устойчивости.*/

fpprintprec:3;

/* Радиус и длина */

R:0.5; L:1;

/* Нагрузка */

q:5e6;

/* Упругие характеристики монослоя*/

E1:140e9; E2:7e9;v12:0.24; v21:v12*E2/E1;G12: 2.75e9;

/* Предел прочности при сжатии */

sig1:0.7e9;

/* Плотность материала оболочки */

RO: 1450;

/* Матрица жесткости монослоя */

B11:E1/(1-v12*v21); B22:E2/(1-v12*v21);

B12:v12*E2/(1-v12*v21);B33:G12;

/* Относительные содержания оболочки */

ET0:0.5; ET90: 1-ET0;

/* Матрица жесткости пакета */

AXX:B11*ET0+B22*ET90; AYY:B22*ET0+B11*ET90;

AXY:B12;AG:B33;

/* Толщина из условий устойчивости */

hust: sqrt(q*R*sqrt(3)/sqrt(AXX*AYY-AXY^2)), numer;

/* Напряжения и коэффициент запаса в продольных слоях */

sig10:B11/AXX*q/hust;

KZ:sig1/sig10;

hpr:B11/AXX*q/sig1;

h:if KZ>1 then h:hust else h:hpr;

/* Масса конструкции */

G: 2*%pi*R*L*RO*h,numer.

Недостатки рассмотренных выше моделей оптимизации очевидны: первая модель позволяет получить оптимальное решение только при выполнении условия $\eta \geq 1$, вторая – только при выполнении условия $\eta_{cr} \geq 1$. Нарушение этих условий неизбежно приводит к увеличению толщины (массы) конструкции. Причина – детерминация схемы армирования, ориентированная на выполнение только одного из условий (либо по устойчивости, либо по прочности). От этого недостатка модель, основанная на идее разбиения области нагрузок на характерные подобласти:

1. $0 < q_0 \leq q_{1,2}$;
2. $q_{1,2} < q_0 < q_{2,3}$;
3. $q_{2,3} \geq q_0$.

В первой подобласти ($0 < q_0 \leq q_{1,2}$) оболочка работает только на устойчивость, во второй ($q_{1,2} < q_0 < q_{2,3}$) – на устойчивость и прочность, в третьей ($q_{2,3} \geq q_0$) – только на прочность.

В первой подобласти предполагается, что условие $\eta \geq 1$ выполнено, следовательно, оптимальные параметры определяются по формулам (3.46) и (3.47). Найдем величину нагрузки $q_{1,2}$, соответствующей переходу из первой области во вторую. С одной стороны, в этой точке еще активно ограничение по устойчивости, то есть

$$q_{1,2} = \frac{h^2}{R\sqrt{3}} \sqrt{b_{sr}^2 - b_{12}^2}. \quad (3.59)$$

С другой стороны, в указанной точке уже активно ограничение по прочности, то есть

$$q_{1,2} = \frac{b_{sr}}{b_{11}} h. \quad (3.60)$$

Исключив из системы двух последних уравнений величину h , получим

$$q_{1,2} = \frac{\sigma_{-1b}^2 R\sqrt{3}}{\sqrt{b_{sr}^2 - b_{12}^2}} \left(\frac{b_{sr}}{b_{11}} \right)^2. \quad (3.61)$$

В третьей подобласти предполагается, что условие $q_{cr} \geq q_0$ выполнено, следовательно, оптимальные параметры определяются по формулам (3.55) и (3.56). Найдем величину нагрузки $q_{2,3}$, соответствующей переходу из второй области в третью область. С одной стороны, в этой точке активно ограничение по прочности, то есть

$$q_{2,3} = \sigma_{-1b} h. \quad (3.62)$$

С другой стороны, в этой точке еще активно ограничение по устойчивости, то есть

$$q_{2,3} = \frac{h^2}{R\sqrt{3}} \sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}. \quad (3.63)$$

Исключив из системы двух последних уравнений величину h , получим

$$q_{2,3} = \frac{\sigma_{-1b}^2 R\sqrt{3}}{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}. \quad (3.64)$$

Во второй подобласти оболочка работает как на устойчивость, так и на прочность, то есть

$$\eta_{cr} = 1, \quad \eta = 1. \quad (3.65)$$

Условия (3.65) представим в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{h^2}{R\sqrt{3}} \sqrt{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2} = q_0; \\ \frac{A_{xx}\sigma_{-1b}}{b_{11}} h = q_0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Исключив из этой системы величину h , получим уравнение относительно параметра θ_0

$$\frac{A_{xx}^2 R\sqrt{3}}{\sqrt{A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2}} \left(\frac{\sigma_{-1b}}{b_{11}} \right)^2 - q_0 = 0 \quad (3.67)$$

Выполнив эквивалентные преобразования, иррациональное уравнение (3.67) можно привести к алгебраическому уравнению

$$f(\theta_0) = 0, \quad (3.68)$$

где

$$f(\theta_0) = K^2 A_{xx}^4 - A_{xx}A_{yy} + A_{xy}^2. \quad (3.69)$$

Здесь

$$K = \left(\frac{\sigma_{-1b}}{b_{11}} \right)^2 \frac{R\sqrt{3}}{q_0}. \quad (3.70)$$

Величины A_{xx} и A_{yy} связаны с параметром θ_0 линейными зависимостями (3.42), а величина A_{xy} не зависит от θ_0 ($A_{xy} = b_{12}$).

Определим знаки функции $f(\theta_0)$ в точках $\theta_0 = 0,5$ и $\theta_0 = 1$:

$$f(0,5) = (b_{sr}^2 - b_{12}^2) \left(\left(\frac{q_{1,2}}{q_0} \right)^2 - 1 \right) < 0;$$

$$f(1) = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \left(\left(\frac{q_{2,3}}{q_0} \right)^2 - 1 \right) > 0;$$

Таким образом, функция $f(\theta_0)$ принимает на концах отрезка $[0,5; 1]$ значения разных знаков, следовательно, по теореме Больцано–Коши, уравнение (3.68) имеет на данном отрезке корень. Докажем, что этот корень единственный. С помощью формул (3.42) выразим A_{yy} через A_{xx} , а вместо A_{xy} подставим его значение для рассматриваемой схемы армирования. В результате получим

$$A_{yy} = b_{11} + b_{22} - A_{xx}; \quad A_{xy} = b_{12} \quad (3.71)$$

Подставив выражения для A_{yy} и A_{xy} в уравнение (3.72), получим

$$K^2 A_{xx}^4 + A_{xx}^2 - (b_{11} + b_{22})A_{xx} + b_{12}^2 = 0, \quad (3.72)$$

В этом уравнении имеет место только одна перемена знака, следовательно, по теореме Декарта уравнение может иметь только один положительный корень.

По известному значению A_{xx} можно найти параметр θ_0

$$\theta_0 = \frac{A_{xx} - b_{22}}{b_{11} - b_{22}} \quad (3.73)$$

Толщину оболочки вычисляем по общей формуле (3.54).

Таким образом, алгоритм проектирования многослойной оболочки состоит из следующих шагов:

1. Вычисляются переходные нагрузки $q_{1,2}$ и $q_{2,3}$

$$q_{1,2} = \frac{\sigma_{-1b}^2 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{sr}^2 - b_{12}^2}} \left(\frac{b_{sr}}{b_{11}} \right)^2; \quad q_{2,3} = \frac{\sigma_{-1b}^2 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}.$$

2. Если заданная нагрузка q_0 меньше, чем величина $q_{1,2}$, структурные параметры определяются равенствами $\theta_0 = 0,5$; $\theta_{90} = 0,5$. Толщина оболочки вычисляется по формуле

$$h = \left(\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{sr}^2 - b_{12}^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если заданная нагрузка q_0 больше чем $q_{1,2}$, но меньше $q_{2,3}$, тогда для нахождения оптимального θ_0 надо решить уравнение (3.68). Толщина оболочки вычисляется по формуле

$$h = \frac{b_{11}}{A_{xx}} \frac{q_0}{\sigma_{-1b}}.$$

Если нагрузка q_0 оказалась больше чем $q_{2,3}$, структурные параметры определяются равенствами $\theta_0 = 1$, $\theta_{90} = 0$. Толщина оболочки вычисляется по формуле

$$h = \frac{q_0}{\sigma_{-1b}}.$$

3. По известной толщине и плотности материала оболочки ρ_0 находим массу конструкции

$$G = 2\pi RL\rho_0 h.$$

Пример 3. Используя исходные данные предыдущего примера, найти массу оболочки, оптимальной по условиям прочности и устойчивости.

1. Вычисляем переходные нагрузки $q_{1,2}$ и $q_{2,3}$

$$q_{1,2} = \frac{\sigma_{-1b}^2 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{sr}^2 - b_{12}^2}} \left(\frac{b_{sr}}{b_{11}} \right)^2 = 1,59 \cdot 10^6;$$

$$q_{2,3} = \frac{\sigma_{-1b}^2 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}} = 1,35 \cdot 10^7.$$

2. Заданная нагрузка q_0 больше, чем $q_{1,2}$, но меньше, чем $q_{2,3}$, следовательно, для нахождения оптимального θ_0 надо решить уравнение (3.68). Решив уравнение, получим

$$\theta_0 = 0,83.$$

Вычислим толщину конструкции

$$h = \frac{b_{11}}{A_{xx}} \frac{q_0}{\sigma_{-1b}} = 0,0085 \text{ (м)}.$$

3. По известной толщине и плотности материала оболочки ρ_0 находим массу конструкции

$$G = 2\pi RL\rho_0 h = 38,9 \text{ (кг)}.$$

Таким образом, оптимальная по условиям устойчивости и прочности конструкция на 37 процентов легче, чем оболочка с оптимальной по условию устойчивости схеме армирования.

Программа оптимизации многослойной оболочки:

```
/* Гладкая оболочка. Оптимизация по устойчивости и прочности */
fprintfprec:3;
PI:3.14159;
/* Радиус и длина */
R:0.5; L:1;
/* Нагрузка */
q:5e6;
/* Упругие характеристики монослоя*/
E1:140e9; E2:7e9;v12:0.24; v21:v12*E2/E1;G12: 2.75e9;
/* Предел прочности при сжатии */
sig1:0.7e9;
/* Плотность материала оболочки */
RO: 1450;
/* Матрица жесткости монослоя */
B11:E1/(1-v12*v21); B22:E2/(1-v12*v21);
B12:v12*E2/(1-v12*v21);B33:G12;
BSR:(B11+B22)/2;
BGM:sqrt(B11*B22);
q12: sig1^2*R*sqrt(3)/sqrt(BSR^2-B12^2)*(BSR/B11)^2, numer;
q23:sig1^2*R*sqrt(3)/sqrt(BGM^2-B12^2), numer;
```

```

rel:q23/q12;
if q<=q12 then
  /* Относительные содержания оболочки */
  ET0:0.5,
  ET90: 1-ET0,
  /* Матрица жесткости пакета */
  AXX:B11*ET0+B22*ET90,
  AYY:B22*ET0+B11*ET90,
  AXY:B12,AG:B33,
  /* Толщина из условий устойчивости */
  h: sqrt(q*R*sqrt(3)/sqrt(AXX*AYY-AXY^2)),
  /* коэффициенты запаса*/
  qcr:h^2/(R*sqrt(3))*sqrt(AXX*AYY-AXY^2),
  KZU:qcr/q,
  sig10:B11/AXX*q/h,
  KZ:sig1/sig10,
  /* Масса конструкции */
  G: 2*%pi*R*L*RO*h)$
if (q>q12) and (q<q23) then
  /* Относительное содержание ET0 */
  K:(sig1/B11)^2*R*sqrt(3)/q,
  AXX:B11*ET0+B22*(1-ET0),
  AYY:B22*ET0+B11*(1-ET0),
  AXY:B12,AG:B33,
  eqn:K^2*AXX^4-AXX*AYY+AXY^2,
  ET0:find_root(eqn=0,ET0,0.5,1),
  ET90: 1-ET0,
  /* Матрица жесткости пакета */
  AXX:B11*ET0+B22*ET90,
  AYY:B22*ET0+B11*ET90,

```

АХУ:В12,АG:В33,
 /* Толщина из условий прочности и устойчивости */
 h:В11/АХХ*q/sig1,
 /* коэффициенты запаса*/
 qcr:h^2/(R*sqrt(3))*sqrt(АХХ*АУУ-АХУ^2),
 КZU:qcr/q,
 sig10:В11/АХХ*q/h,
 КZ:sig1/sig10,
 /* Масса конструкции */
 G: 2*%pi*R*L*RO*h)\$
 if q>=q23 then
 (//* Относительные содержания оболочки */
 ET0:1,
 ET90: 1-ET0,
 /* Матрица жесткости пакета */
 АХХ:В11*ET0+В22*ET90,
 АУУ:В22*ET0+В11*ET90,
 АХУ:В12,АG:В33,
 /* Толщина из условий прочности */
 h:В11/АХХ*q/sig1,
 /* коэффициенты запаса*/
 qcr:h^2/(R*sqrt(3))*sqrt(АХХ*АУУ-АХУ^2),
 КZU:qcr/q,
 sig10:В11/АХХ*q/h,
 КZ:sig1/sig10,
 /* Масса конструкции */
 G: 2*%pi*R*L*RO*h)\$
 /*оптимальные значения*/
 ET0opt:ET0;
 ET90opt:ET90;

```

hopt:h, numer;
Gopt:G,numer;
/*коэффициенты запаса*/
KZUopt:KZU,numer;
KZopt:KZ,numer.

```

3.5. Статистическое моделирование пластин

Исследуем влияние разброса упругих характеристик материала конструкции на величину коэффициента устойчивости оптимальной многослойной пластины длиной $a = 1$ м и шириной $b = 3$ м. Пластина находится под действием сжимающей нагрузки $q = 2 \cdot 10^5$ н/м.

Воспользуемся результатами решения задачи оптимизации, полученными в п.3.3:

$$\theta_0 = 1, h = 0,012 \text{ м}$$

В этой задаче входными параметрами служат упругие характеристики монослоя, а выходным параметром – коэффициент устойчивости многослойной оболочки. Предполагается, что входные величины подчиняются нормальному закону распределения вероятностей. Исходные данные для статистического анализа многослойного пакета приведены в табл. 3. Число испытаний $N=1000$.

Программа моделирования:

```

/* Многослойная пластина. Цилиндрический изгиб. Моделирование*/
load(descriptive);
load(distrib);
fpprintprec:4;
ratprint: false$
pi:3.1415927;
/* Нагрузка */
q:2E5,numer;
/* Габариты конструкции и толщина */
a:1; b:3;h:0.012;

```

```

/*Структурные параметры */
ET0:1; ET90:0;ET45:1-ET0-ET90;
/* Матожидание и среднее кв. откл.*/
E1:140E9;S:7E9;
E2:7E9;S2:0.35E9;
G12:2.75E9; SG:0.14E9;
v12:0.24; v21:v12*E2/E1;
/* Моделирование СВ */
N:1000;
list:[]$
for i:1 thru N do
block(
CVE1:random_normal(E1,S),
CVE2:random_normal(E2,S2),
CVG12:random_normal(G12,SG),
/* Матрица жесткости монослоя */
B11:CVE1/(1-v12·v21),
B22:CVE2/(1-v12·v21),
B12:v12·CVE2/(1-v12·v21),
B33:CVG12,
/*Жесткости двойных спиральных слоев*/
B45: (B11+B22+2·(B12+2·B33))/4,
BXY45:B12+(B11+B22-2·(B12+2·B33))/4,
BG45:B33+(B11+B22-2·(B12+2·B33))/4,
/*Упругие характеристики двойных спиральных слоев*/
E45:B45-BXY45^2/B45,
V45:BXY45/B45,
GXY45:BG45,
/*Матрица жесткости пакета */
AXX:B11·ET0+B45·ET45+B22·ET90,

```

```

AYY:B22·ET0+B45·ET45+B11·ET90,
AXY:B12·(ET0+ET90)+BXY45·ET45,
AG:B33·(ET0+ET90)+BG45·ET45,
/*Изгибные жесткости */
DXX:AXX*h^3/12,
DYY:AYY*h^3/12,
DXY:AXY*h^3/12,
DG:AG*h^3/12,
/* Крит нагр*/
qcr:DXX*(pi/a)^2,
KZ:qcr/q,
list:endcons(KZ,list)
);
/* Запись в файл */
write_data(list,"listPLATE");

```

Результаты моделирования записаны в файл listPLATE.

Программа обработки данных:

```

/* Многослойная пластина. Обработка*/
load(descriptive);
load(distrib);
fpprintprec:4;
ratprint: false$
/* Чтение из файла */
list:read_list("listPLATE")$
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/
AVR:mean(list), numer;
STD:std(list);
KVAR: STD/AVR*100;

```

Числовые характеристики выборки для коэффициента запаса устойчивости:

Выборочное среднее – 0,999;

Среднее квадратичное отклонение – 0,047.

Коэффициент вариации – 4,7%.

Таким образом, коэффициент вариации менее 5 процентов, т.е. разброс упругих характеристик материала конструкции не оказывает существенного влияния на величину коэффициента устойчивости.

Для проверки закона распределения коэффициента устойчивости на нормальность вычислим эмпирические коэффициенты асимметрии \bar{A} и эксцесса \bar{E} , а также соответствующие ошибки репрезентативности m_A и m_E этих величин.

Программа вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса:

```
/* Многослойная пластина. Асимметрия и эксцесс. Норм.*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listPLATE")$
```

```
/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */
```

```
N:1000;
```

```
RPRASS: sqrt(6/N),numer;
```

```
RPREKS: sqrt (24/N),numer;
```

```
/* Асимметрия и эксцесс */
```

```
ASS:skewness(list);
```

```
EKS:kurtosis(list);
```

Результаты вычислений:

$\bar{A} = 0,108$; $\bar{E} = -0,027$, $m_A = 0,078$; $m_E = 0,155$

Распределение считается нормальным, если одновременно выполняются условия

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} < 3, \frac{|\bar{E}|}{m_E} < 3.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = \frac{|0,108|}{0,078} = 1,38, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = \frac{|-0,027|}{0,155} = 0,17.$$

Таким образом, условия нормальности для закона распределения коэффициента устойчивости выполняются.

Программа построения гистограммы:

```
/*Построение гистограмм */  
fpprintprec:3;  
load(descriptive);  
load(distrib);  
ratprint: false$  
list:read_list("listPLATE")$  
/*Гистограмма*/  
histogram(list, frequency=percent,  
xlabel= "η", ylabel="w",fill_density=0.1,  
fill_color=grey,terminal=png, file_name="histPLATE");
```

Гистограмма для коэффициента устойчивости многослойной пластины представлена на рис. 8.

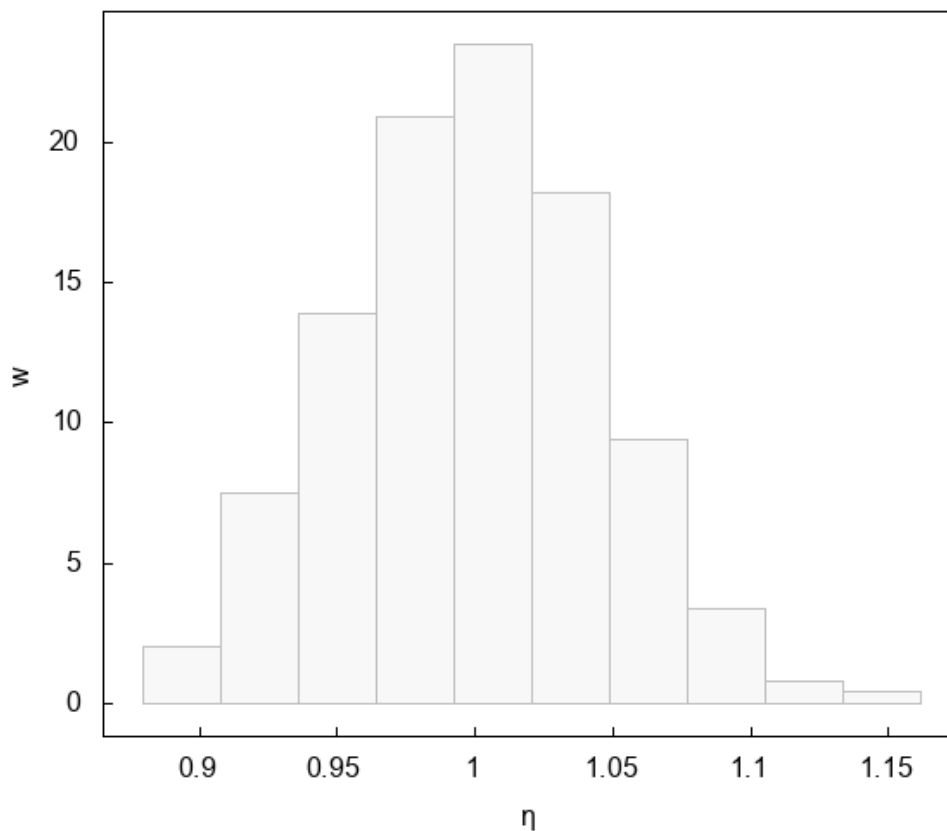


Рис. 8. Гистограмма для коэффициента устойчивости многослойной пластины

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о значении коэффициента устойчивости η композитной пластинки. Требуется при пятипроцентном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: \eta=1$, приняв в качестве альтернативной гипотезы $H_1: \eta < 1$.

Критическая область в данном примере является левосторонней. Генеральная дисперсия неизвестна. Входными величинами в этой задаче служат уровень значимости, выборочное среднее и выборочное среднеквадратичное отклонение, а выходными – наблюдаемое значение статистики $t_{\text{набл}}$ и критическое значение статистики $t_{\text{кр}}$.

Программа:

```
/*Проверка гипотез для пластины. Коэффициент устойчивости*/  
load(stats);  
fpprintprec:3;  
ratprint: false$  
/* Уровень значимости */  
alfa:0.05;  
/* Число испытаний */  
N:1000;  
/* Чтение из файла */  
list:read_list("listPLATE")$  
/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/  
AVR:mean(list), numer;  
STD:std1(list),numer;  
/* Наблюдаемая статистика*/  
t:(AVR-1)*sqrt(N)/STD, numer;  
/*Кр. знач. статистики*/  
tkr: quantile_student_t(1-alfa,N-1),numer;  
Результаты расчета:
```

$$t_{\text{кр}} = 1,65, t_{\text{набл}} = -0,795.$$

Таким образом, наблюдаемое значение статистики $z_{\text{набл}}$ удовлетворяет условию

$$t_{\text{набл}} > -t_{\text{кр}},$$

то есть на пятипроцентном уровне значимости нулевая гипотеза принимается.

3.6. Статистическое моделирование оболочек

Исследуем влияние разброса упругих характеристик материала конструкции на величину коэффициента устойчивости оптимальной многослойной оболочки длиной $L = 1$ м и радиусом $R = 0,5$ м. Оболочка находится под действием сжимающей нагрузки $q_0 = 5 \cdot 10^6$ н/м н/м.

Воспользуемся результатами решения задачи оптимизации, полученными в п. 3.4:

$$\theta_0 = 0,83, h = 0,0085 \text{ м}$$

В этой задаче входными параметрами служат упругие характеристики монослоя, а выходным параметром – коэффициент устойчивости многослойной оболочки. Исходные данные по упругим характеристикам монослоя приведены в табл. 3. Предполагается, что входные величины подчиняются нормальному закону распределения вероятностей. Число испытаний $N=1000$.

Программа моделирования многослойной оболочки:

```
/* Гладкая оболочка. Моделирование*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
pi:3.1415927;
```

```
/* Нагрузка */
```

```
q:5E6,numer;
```

```
/* Габариты конструкции и толщина*/
```

```
R:0.5; L:1;h: 0.00854;
```

```

/*Структурные параметры */
ET0:0.828; ET90:0.172;
ET45:1-ET0-ET90;
/* Матожидание и среднее кв. откл.*/
E1:140E9;S:7E9;
E2:7E9;S2:0.35E9;
G12:2.75E9;SG:0.14E9;
v12:0.24;v21:v12*E2/E1;
/* Моделирование СВ */
N:1000;
list:[]$
for i:1 thru N do
block(CVE1:random_normal(E1,S), CVE2:random_normal(E2,S2),
CVG12:random_normal(G12,SG),
/* Матрица жесткости монослоя */
B11:CVE1/(1-v12·v21),
B22:CVE2/(1-v12·v21),
B12:v12·CVE2/(1-v12·v21),
B33:CVG12,
/*Жесткости двойных спиральных слоев*/
B45: (B11+B22+2·(B12+2·B33))/4,
BXY45:B12+(B11+B22-2·(B12+2·B33))/4,
BG45:B33+(B11+B22-2·(B12+2·B33))/4,
/*Упругие характеристики двойных спиральных слоев*/
E45:B45-BXY45^2/B45,
V45:BXY45/B45,
GXY45:BG45,
/*Матрица жесткости пакета */
AXX:B11·ET0+B45·ET45+B22·ET90,
Ayy:B22·ET0+B45·ET45+B11·ET90,

```

AXY:B12·(ET0+ET90)+BXY45·ET45,

AG:B33·(ET0+ET90)+BG45·ET45,

/*Изгибные жесткости */

DXX:AXX*h³/12,

DYY:AYY*h³/12,

DXY:AXY*h³/12,

DG:AG*h³/12,

CXX:AXX*h,

CYY:AYY*h,

CXY:AXY*h,

CG:AG*h,

PXX: CYY/(CXX*CYY-CXY²),

PYY: CXX/(CXX*CYY-CXY²),

PXY:-CXY/(CXX*CYY-CXY²),

PG:1/CG,

qcr:2/R*sqrt(DXX/PYY),

KZ:qcr/q,

list:endcons(KZ,list));

/* Запись в файл */

write_data(list,"listSHELL");

Результаты моделирования записаны в файл listSHELL.

Программа обработки данных:

/* Гладкая оболочка. Обработка*/

load(descriptive);

load(distrib);

fpprintprec:4;

ratprint: false\$

/* Чтение из файла */

list:read_list("listSHELL")\$

/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/

AVR:mean(list), numer;

STD:std(list);

KVAR: STD/AVR*100;

Числовые характеристики выборки для коэффициента устойчивости многослойной оболочки:

Выборочное среднее – 0,992;

Среднее квадратичное отклонение – 0,044.

Коэффициент вариации – 4,4%.

Таким образом, коэффициент вариации менее 5 процентов, т.е. разброс упругих характеристик материала монослоя не оказывает существенного влияния на величину коэффициента устойчивости многослойной оболочки.

Вычислим эмпирические коэффициенты асимметрии \bar{A} и эксцесса \bar{E} , а также соответствующие ошибки репрезентативности m_A и m_E этих величин.

Программа вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса:

```
/* Гладкая оболочка. Асимметрия и эксцесс. Норм.*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listSHELL")$
```

```
/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */
```

```
N:1000;
```

```
RPRASS: sqrt(6/N),numer;
```

```
RPREKS: sqrt (24/N),numer;
```

```
/* Асимметрия и эксцесс */
```

```
ASS:skewness(list);
```

```
EKS:kurtosis(list);
```

Результаты вычислений:

$$\bar{A} = 0,15; \bar{E} = 0,015, m_A = 0,078; m_E = 0,155$$

Распределение считается нормальным, если одновременно выполняются условия

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} < 3, \frac{|\bar{E}|}{m_E} < 3.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = 1,98, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = 0,099.$$

Таким образом, условия нормальности для закона распределения коэффициента устойчивости выполняются.

Программа построения гистограммы коэффициента устойчивости многослойной оболочки:

```
/*Построение гистограммы */  
fpprintprec:3;  
load(descriptive);  
load(distrib);  
ratprint: false$  
list:read_list("listSHELL")$  
/*Гистограммы*/  
histogram(list, frequency=percent,  
xlabel="η", ylabel="w", fill_density=0.1, fill_color=grey,  
terminal=png, file_name="histSHELL");
```

Гистограмма для коэффициента устойчивости многослойной оболочки представлена на рис. 9.

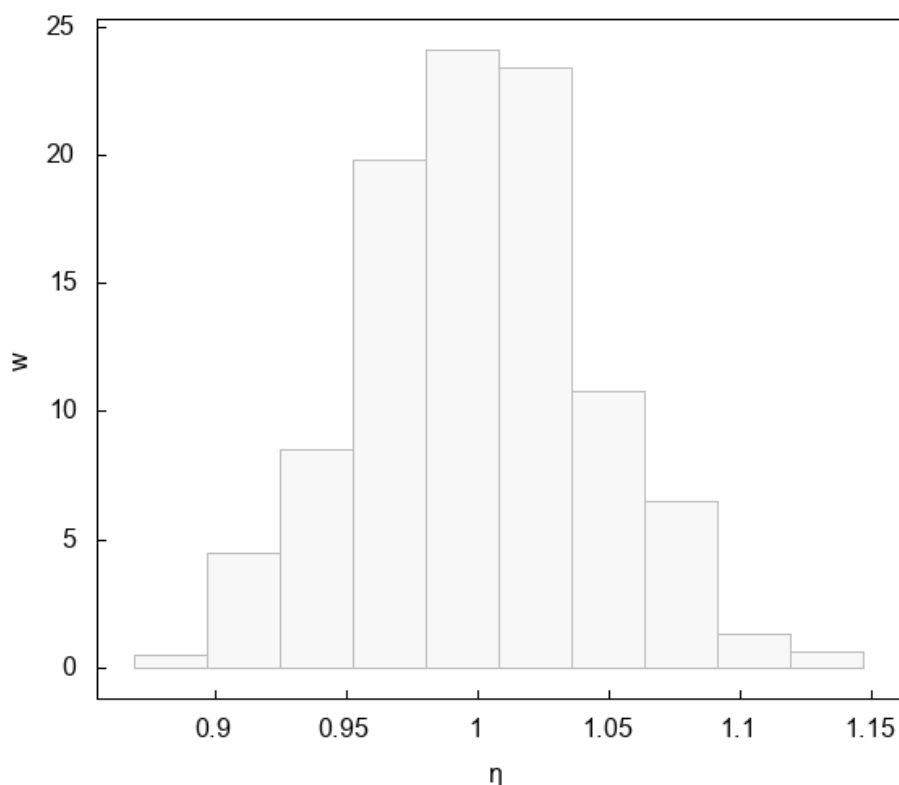


Рис. 9. Гистограмма для коэффициента устойчивости многослойной оболочки

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о значении коэффициента устойчивости η многослойной оболочки. Требуется при пятипроцентном уровне значимости проверить нулевую гипотезу $H_0: \eta=1$, приняв в качестве альтернативной гипотезы $H_1: \eta < 1$.

Критическая область в данном примере является левосторонней. Генеральная дисперсия неизвестна. Входными величинами в этой задаче служат уровень значимости, выборочное среднее и выборочное среднеквадратичное отклонение, а выходными – наблюдаемое значение статистики $t_{\text{набл}}$ и критическое значение статистики $t_{\text{кр}}$. Если наблюдаемое значение статистики $t_{\text{набл}}$ удовлетворяет условию

$$t_{\text{набл}} > -t_{\text{кр}},$$

то на уровне значимости α нулевая гипотеза принимается, в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Программа:

```
/*Проверка гипотез для оболочки. Коэффициент устойчивости*/  
load(stats);  
fprintfprec:3;  
ratprint: false$  
/* Уровень значимости */  
alfa:0.05;  
/* Число испытаний */  
N:1000;  
/* Чтение из файла */  
list:read_list("listSHELL")$  
/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/  
AVR:mean(list), numer;  
STD:std1(list),numer;  
/* Наблюдаемая статистика*/  
t:(AVR-1)*sqrt(N)/STD, numer;  
/*Кр. знач. статистики*/  
tkr: quantile_student_t(1-alfa,N-1),numer;
```

Результаты расчета:

$$t_{кр} = 1,65, t_{набл} = -0,489.$$

Таким образом, наблюдаемое значение статистики $z_{набл}$ удовлетворяет условию

$$t_{набл} > -t_{кр},$$

то есть на пятипроцентном уровне значимости нулевая гипотеза принимается.

3.7. Выводы по главе

Задача определения критической нагрузки для многослойной прямоугольной пластины приводит, в общем случае, к обобщенной задаче на собственные значения для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. Если пластина находится в условиях цилиндрического изгиба, разрешающее уравнение устойчивости совпадает с известным уравнением устойчивости для балки единичной ширины. Поведение оболочек при потере устойчивости существенно отличается от поведения пластин. Выпучивание оболочек сопровождается появлением не только изгибных деформаций, но и деформаций растяжения-сжатия. Исследование осесимметричной формы потери устойчивости цилиндрической оболочки приводит к обобщенной задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.

Для многослойной пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, наилучшей схемой армирования по условиям прочности и устойчивости является чисто продольная укладка монослоев. В задачах проектирования многослойных оболочек при выполнении определенных условий можно воспользоваться моделями с фиксированными схемами укладки слоев:

1. Полотно оболочки состоит из равного количества продольных и поперечных слоев.
2. Полотно оболочки состоит только из продольных слоев.

В общем случае следует использовать алгоритм проектирования, основанный на идее разбиения области действующих нагрузок на характерные подобласти.

Статистический анализ показывает, что разброс упругих характеристик монослоя не оказывает существенного влияния коэффициенты устойчивости пластин и оболочек. Малые значения коэффициентов асимметрии и эксцесса позволяет сделать вывод о нормальности распределений коэффициентов устойчивости как для пластин, так и для оболочек. Гипотезы о равенстве коэффициентов устойчивости их теоретическим значениям не отвергаются.

4. ТРЕХСЛОЙНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ

Вопросы расчета и проектирования трехслойных конструкций с несущими слоями из традиционных материалов наиболее полно отражены в работах А.С. Вольмира [29], Э.И. Григолюка [34], В.Н.Кобелева [56], В.Т. Лизина [89]. Трехслойные оболочки и пластины с несущими слоями из композитных материалов исследованы, в частности, в работах А.Н. Алфутова [2], С.Н. Сухинина [157] и др. С обзором исследований, выполненных в этой области, можно ознакомиться в работах [29, 34].

4.1. Устойчивость пластин

Трехслойная пластинка состоит из двух тонких внешних слоев (несущие слои), изготовленных из прочного материала, а средний слой представляет собой маложесткий легкий наполнитель, обеспечивающий совместную работу внешних слоев. Предполагается, что несущие слои представляют собой одинаковые многослойные пластинки, а наполнитель – сплошное однородное тело (рис. 10).



Рис. 10. Трехслойная пластинка

Пластинка находится под действием сжимающих нагрузок q , равномерно распределенных по двум противоположным краям пластинки (рис. 5).

В задачах расчета трехслойных конструкций наибольшее распространение получила модель, построенная на гипотезе ломанной линии:

1. Поведение несущих слоев в процессе деформирования полностью определяется рамками классической гипотезы недеформируемых нормалей.
2. Прогибы внешнего и внутреннего несущих слоев одинаковы.
3. Перемещения по толщине наполнителя подчиняются линейному закону
4. Наполнитель работает только на поперечный сдвиг.

Пусть начало координат O находится в левом нижнем углу пластины, ось Ox направлена вдоль стороны a , а ось Oy – вдоль стороны b (рис. 6).

Введем следующие обозначения:

h – толщина одного несущего слоя;

$2H$ – толщина заполнителя;

u_1, u_2 – смещения по направлению оси Ox точек срединных поверхностей верхнего и нижнего несущих слоев соответственно;

v_1, v_2 – смещения по направлению оси Oy точек срединных поверхностей верхнего и нижнего несущих слоев соответственно;

Прогибы w (смещения по направлению оси z , перпендикулярно плоскости пластинки) несущих слоев и заполнителя, по предположению, совпадают. Система разрешающих уравнений устойчивости трехслойной пластинки, находящейся под действием сжимающих нагрузок q , имеет вид:

$$C_{xx} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x^2} + C_{xy} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial x \partial y} - \frac{G_{xz}}{H} \left(u_\beta - \left(H + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \quad (4.1)$$

$$C_{yy} \frac{\partial^2 v_\beta}{\partial y^2} + C_{xy} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x \partial y} - \frac{G_{yz}}{H} \left(v_\beta - \left(H + \frac{h}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0; \quad (4.2)$$

$$Iw + \left(H + \frac{h}{2} \right) \left(I_1 \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x} \right) + I_2 \left(\frac{\partial v_\beta}{\partial y} \right) \right) + \frac{q}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (4.3)$$

где

$$I = D_{xx} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + 2D_G) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{yy} \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad (4.4)$$

$$I_1 = C_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{xy} + C_G) \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$I_2 = C_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (C_{xy} + C_G) \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad (4.5)$$

$$u_\beta = \frac{u_1 - u_2}{2}, \quad v_\beta = \frac{v_1 - v_2}{2}. \quad (4.6)$$

Здесь $C_{xx}, C_{xy}, C_{yy}, C_G$ – компоненты матрицы мембранной жесткости одного несущего слоя; $D_{xx}, D_{xy}, D_{yy}, D_G$ – компоненты матрицы изгибной жесткости одного несущего слоя; G_{xz}, G_{yz} – модули поперечного сдвига заполнителя. Таким образом, задача определения критической нагрузки для трехслойной прямоугольной пластины приводит, в общем случае, к обобщенной задаче на собственные значения для системы дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка.

Полагая, что несущие слои работают только на растяжение–сжатие, а сама пластинка находится в условиях цилиндрического изгиба, получим следующую систему разрешающих уравнений устойчивости:

$$C_{xx} \frac{d^2 u_\beta}{dx^2} - \frac{G_{xz}}{H} \left(u_\beta - \left(H + \frac{h}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right) = 0; \quad (4.7)$$

$$C_{xx} \left(H + \frac{h}{2} \right) \frac{d^3 u_\beta}{dx^3} + \frac{q}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (4.8)$$

Полученную систему можно привести к одному уравнению относительно нормального смещения w :

$$2C_{xx} \left(H + \frac{h}{2} \right)^2 \frac{d^4 w}{dx^4} - q \left(\frac{C_{xx} H}{G_{xz}} \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = 0. \quad (4.9)$$

Для шарнирно опертой пластинки решение уравнения (4.9) можно представить в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{\pi m x}{a}, \quad (4.10)$$

где m – число полуволн в направлении оси Ox .

Подставив выражение (4.10) в уравнение (4.9), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(2C_{xx} \left(H + \frac{h}{2} \right)^2 \left(\frac{\pi m}{a} \right)^4 - q \left(\frac{C_{xx} H}{G_{xz}} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^4 + \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 \right) \right) \sin \frac{\pi m x}{a} = 0. \quad (4.11)$$

Из последнего уравнения найдем выражение для параметра нагрузки

$$q = \frac{2C_{xx} \left(H + \frac{h}{2} \right)^2 \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2}{\frac{C_{xx} H}{G_{xz}} \left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + 1}. \quad (4.12)$$

Наименьшее значение параметра q достигается, очевидно, при $m = 1$. Таким образом, критическая нагрузка для пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, вычисляется по формуле:

$$q_{cr} = \frac{2C_{xx} \left(H + \frac{h}{2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2}{\frac{C_{xx} H}{G_{xz}} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + 1}. \quad (4.13)$$

4.2. Устойчивость оболочек

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку радиусом R и длиной L , состоящей из двух несущих слоев толщиной h каждый, между которыми размещается заполнитель толщиной $2H$, обеспечивающий совместную работу несущих слоев.

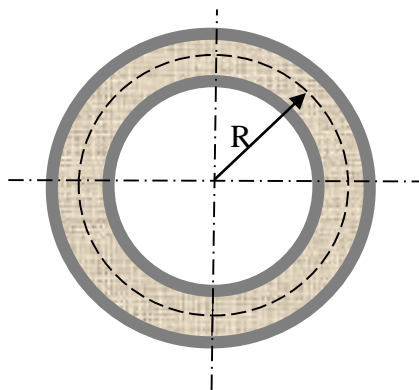


Рис. 11. Сечение трехслойной оболочки

Предполагается, что внутренний и внешний несущие слои, представляют собой тонкие многослойные оболочки, выполненные из композитного материала.

В работе [54] приведены данные, позволяющие оценить возможность применения различных гипотез при расчете трехслойных цилиндрических оболочек. Установлено, что при $2H/R \leq 0,12$ прогибы несущих слоев равны, а тангенциальные смещения в заполнителе подчиняются линейному закону, то есть допустимо использование гипотезы ломаной линии (здесь $2H$ – толщина заполнителя, R – радиус оболочки). При $0,12 < 2H/R < 0,2$ прогибы несущих слоев не равны, а закон изменения перемещений в срединной поверхности отличен от линейного. При $2H/R \geq 0,2$ критическая нагрузка не зависит от толщины заполнителя. Внутренний несущий слой не теряет устойчивости, а внешний работает как оболочка на упругом основании. Таким образом, модель трехслойной оболочки, построенная на гипотезе ломаной линии, охватывает достаточно широкий класс оболочек, применяемых в конструкциях летательных аппаратов.

Разрешающее уравнение устойчивости, построенное на основе гипотезы ломанной линии, представим в операторной форме

$$L_1 w + q L_2 w = 0, \quad (4.14)$$

где

$$L_1 = D_{xx} M_0 \nabla_1 \nabla_2 + C_{xx} b^2 N_0 \nabla_2 + \frac{1}{R^2 \delta_{yy}} M_0 \frac{\partial^4}{\partial x^4}; \quad (4.15)$$

$$L_2 = \frac{1}{2} M_0 \nabla_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad (4.16)$$

$$\nabla_1 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + r_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + r_3 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad (4.17)$$

$$\nabla_2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + r_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + r_4 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad (4.18)$$

$$M_0 = 1 - (c_x C_{xx} + c_y C_G) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (c_y C_{yy} + c_x C_G) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_x c_y C_{xx} C_G \nabla_2; \quad (4.19)$$

$$N_0 = \nabla_1 - C_G \left(c_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \nabla_2; \quad (4.20)$$

$$r_1 = \frac{2D_{xy} + 4D_G}{D_{xx}}, r_3 = \frac{D_{yy}}{D_{xx}}, r_2 = \frac{2\delta_{xy} + \delta_G}{\delta_{yy}}, r_4 = \frac{\delta_{xx}}{\delta_{yy}}; \quad (4.21)$$

$$\delta_{xx} = \frac{C_{yy}}{C_{xx} C_{yy} - C_{xy}^2}, \delta_{yy} = \frac{C_{xx}}{C_{xx} C_{yy} - C_{xy}^2},$$

$$\delta_{xy} = -\frac{C_{xy}}{C_{xx} C_{yy} - C_{xy}^2}, \delta_G = \frac{1}{C_G}; \quad (4.22)$$

$$c_x = \frac{H}{G_{xz}}; c_y = \frac{H}{G_{yz}}. \quad (4.23)$$

Здесь x, y – криволинейные координаты в продольном и окружном направлениях цилиндрической оболочки соответственно; w – смещение по нормали к срединной поверхности трехслойной оболочки; h – толщина одного несущего слоя; $2H$ – толщина заполнителя; $b = H + h/2$ – расстояние между срединными поверхностями несущего слоя и заполнителя; $C_{xx}, C_{xy}, C_{yy}, C_G$ –

компоненты матрицы мембранной жесткости одного несущего слоя; $D_{xx}, D_{xy}, D_{yy}, D_G$ – компоненты матрицы изгибной жесткости одного несущего слоя; $\delta_{xx}, \delta_{xy}, \delta_{yy}, \delta_G$ – компоненты матрицы податливости одного несущего слоя; G_{xz}, G_{yz} – модули поперечного сдвига заполнителя.

Для свободно опертой по обоим торцам оболочки решение можно представить в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} B_{mn}(x, y), \quad (4.24)$$

где

$$B_{mn}(x, y) = \sin \frac{\lambda x}{R} \cos \frac{ny}{R}; \quad (4.25)$$

$$\lambda = \frac{m\pi R}{L}. \quad (4.26)$$

Здесь $m, 2n$ – количество полуволн в продольном и окружном направлениях соответственно.

Выпишем выражения для дифференциальных операторов, входящих в основное разрешающее уравнение устойчивости, относительно базисных функций B_{mn}

$$L_1(B_{mn}) = \left[D_{xx} + C_{xx} b^2 \frac{\chi_2}{\chi_1} + \frac{1}{R^2 \delta_{yy} F_1 F_2} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^4 \right] \left(\frac{\lambda}{R} \right)^8 F_1 F_2 \chi_1 B_{mn}; \quad (4.27)$$

$$L_2(B_{mn}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^6 F_2 \chi_1 B_{mn}, \quad (4.28)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 = 1 + (c_x C_{xx} + c_y C_G) \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 + (c_y C_{yy} + c_x C_G) \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \psi^2 + \\ + c_x c_y C_{xx} C_G \left(\frac{\lambda}{R} \right)^4 F_2; \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\chi_2 = 1 + C_G (c_x \psi^2 + c_y) \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \frac{F_2}{F_1}; \quad (4.30)$$

$$F_1 = 1 + r_1\psi^2 + r_3\psi^4, F_2 = 1 + r_2\psi^2 + r_4\psi^4; \quad (4.31)$$

$$\psi = \frac{n}{\lambda}. \quad (4.32)$$

Подставив выражение (4.24) в основное разрешающее уравнение устойчивости, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [L_1(B_{mn}) + qL_2(B_{mn})]w_{mn} = 0. \quad (4.33)$$

Из условия существования нетривиального решения этого уравнения найдем выражение для параметра нагрузки

$$q = \frac{2}{\delta_{yy}\lambda^2 F_2} + \frac{2(D_{xx} + C_{xx}b^2\chi)}{R^2} \lambda^2 F_1, \quad (4.34)$$

где

$$\chi = \frac{\chi_2}{\chi_1}. \quad (4.35)$$

Критическая нагрузка определяется путем минимизации выражения (4.34) по параметрам m и n

$$q_{cr} = \min(q(m, n)). \quad (4.36)$$

Для получения приближенного аналитического решения примем дополнительные допущения [28]:

- потеря устойчивости носит осесимметричный характер ($n=0$);
- несущие слои работают только на растяжение–сжатие (изгибные жесткости несущих слоев равны нулю).

В этом случае, получим

$$F_1 = F_2 = 1; \quad (4.37)$$

$$\chi_1 = 1 + (c_x C_{xx} + c_y C_G) \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2 + c_x c_y C_{xx} C_G \left(\frac{\lambda}{R}\right)^4; \quad (4.38)$$

$$\chi_2 = 1 + c_y C_G \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2. \quad (4.39)$$

Функцию χ_1 представим следующим образом:

$$\chi_1 = \left(1 + c_y C_G \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2\right) \left(1 + c_x C_{xx} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2\right) = \chi_2 \left(1 + c_x C_{xx} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2\right). \quad (4.40)$$

Таким образом, функция влияния поперечных сдвигов χ принимает вид:

$$\chi = \frac{\chi_2}{\chi_1} = \frac{1}{1 + c_x C_{xx} \left(\frac{\lambda}{R}\right)^2}. \quad (4.41)$$

Введем безразмерный параметр a_{xz} :

$$a_{xz} = \frac{c_x C_{xx}}{R^2} = \frac{C_{xx} H}{G_{xz} R^2}. \quad (4.42)$$

Функция влияния поперечных сдвигов переписывается следующим образом:

$$\chi = \frac{1}{1 + a_{xz} \lambda^2}. \quad (4.43)$$

Выражение для параметра нагрузки, с учетом принятых допущений, примет вид:

$$q = \frac{2}{\delta_{yy} \lambda^2} + \frac{2C_{xx} b^2}{R^2} \frac{\lambda^2}{(1 + a_{xz} \lambda^2)}. \quad (4.44)$$

Введем новую переменную

$$t = m^2. \quad (4.45)$$

Выражение для параметра нагрузки примет вид:

$$q(t) = \frac{2}{\delta_{yy} t} + \frac{2C_{xx} b^2}{R^2} \frac{t}{(1 + a_{xz} t)}. \quad (4.46)$$

Преобразуем выражение для параметра нагрузки следующим образом:

$$q(t) = \frac{2C_{xx} b^2}{R^2} \left(\frac{k_{xz}^2}{a_{xz}^2 t} + \frac{t}{1 + a_{xz} t} \right). \quad (4.47)$$

Здесь

$$k_{xz} = \frac{a_{xz} R}{b \sqrt{C_{xx} \delta_{yy}}} = \frac{\sqrt{C_{xx} / \delta_{yy}} H}{G_{xz} R} \frac{H}{b}. \quad (4.48)$$

Исследуем функцию $q = q(t)$ на экстремум. Найдем первую производную:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2C_{xx} b^2}{R^2} \left(-\frac{k_{xz}^2}{a_{xz}^2 t^2} + \frac{1}{(1 + a_{xz} t)^2} \right). \quad (4.49)$$

Разложим выражение для производной на множители

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2C_{xx}b^2}{R^2} \left(\frac{1}{1 + a_{xz}t} - \frac{k_{xz}}{a_{xz}t} \right) \left(\frac{1}{1 + a_{xz}t} + \frac{k_{xz}}{a_{xz}t} \right). \quad (4.50)$$

Из условия

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (4.51)$$

получим

$$t = \frac{k_{xz}}{a_{xz}(1 - k_{xz})}. \quad (4.52)$$

Величина t не может быть отрицательной, следовательно, величина k_{xz} должна удовлетворять условию

$$k_{xz} < 1. \quad (4.53)$$

Найдем вторую производную функции $q = q(t)$, в предположении, что данное условие выполняется

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{4C_{xx}b^2}{R^2} \left(\frac{k_{xz}^2}{a_{xz}^2t^3} - \frac{a_{xz}}{(1 + a_{xz}t)^3} \right). \quad (4.54)$$

Подставив выражение (4.52) в формулу для второй производной, получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{4C_{xx}b^2}{R^2} \frac{a_{xz}}{k_{xz}} (1 - k_{xz})^4. \quad (4.55)$$

Таким образом, вторая производная больше нуля, то есть найденное значение t соответствует минимуму функции $q = q(t)$.

Подставив выражение (4.52) в формулу для параметра нагрузки, получим

$$q_{cr} = \frac{2C_{xx}b^2}{a_{xz}R^2} k_{xz}(2 - k_{xz}) = \frac{2G_{xz}b^2}{H} k_{xz}(2 - k_{xz}). \quad (4.56)$$

Рассмотрим случай, когда условие (4.53) не выполняется, то есть

$$k_{xz} \geq 1. \quad (4.57)$$

Преобразуем второй сомножитель в выражении для производной (4.50)

$$\frac{1}{1 + a_{xz}t} - \frac{k_{xz}}{a_{xz}t} = - \frac{a_{xz}(k_{xz} - 1)t + k_{xz}}{a_{xz}t(1 + a_{xz}t)}. \quad (4.58)$$

При $k_{xz} \geq 1$ этот сомножитель будет меньше нуля, следовательно, производная (4.50) также будет меньше нуля, то есть функция $q = q(t)$ является

убывающей. Для получения приближенного решения воспользуемся асимптотической формулой

$$q_{crp} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\delta_{yy}t} + \frac{2C_{xx}b^2}{R^2} \frac{t}{(1 + a_{xz}t)} \right) = \frac{2C_{xx}b^2}{a_{xz}R^2} = \frac{2G_{xz}b^2}{H}. \quad (4.59)$$

Таким образом, выражение для критической нагрузки может быть представлено в виде

$$q_{cr} = \begin{cases} q_{crp}k_{xz}(2 - k_{xz}), & \text{при } k_{xz} < 1; \\ q_{crp}, & \text{при } k_{xz} \geq 1. \end{cases} \quad (4.60)$$

Здесь величина q_{crp} вычисляется по формуле (4.59).

4.3. Проектирование пластин

Трехслойная прямоугольная пластинка длиной a и шириной b , состоящая из двух несущих слоев, между которыми размещается слой заполнителя, находится под действием сжимающей нагрузки. Предполагается, что внутренний и внешний несущие слои, представляют собой тонкие многослойные пластинки, выполненные из композитного материала. Требуется оценить эффективность введения заполнителя в конструкцию пластинки.

Введем обозначения:

h – толщина одного несущего слоя пластинки;

$2H$ – толщина заполнителя;

$2H_{zm}$ – максимальная по условиям технологии толщина заполнителя;

h_f – суммарная толщина несущих слоев;

γ – относительная толщина заполнителя пластинки:

$$\gamma = \frac{2H}{h_f} = \frac{H}{h}; \quad (4.61)$$

D_f – изгибная жесткость гладкой пластинки толщиной h_f .

Алгоритм проектирования трехслойной прямоугольной пластинки состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что несущие слои состоят только из продольных монослоев. Эта схема армирования, очевидно, является наилучшей с точки зрения прочности.

2. По известной величине сжимающей нагрузки и пределу прочности материала при сжатии вычисляем суммарную толщину несущих слоев

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-1v}}. \quad (4.62)$$

3. Вычисляем величину критической нагрузки для оболочки толщиной h_f

$$q_f = D_f \left(\frac{\pi}{a} \right)^2. \quad (4.63)$$

Проверяем выполнение условия устойчивости:

$$q_f \geq q_0. \quad (4.64)$$

Если это условие выполняется, то процесс проектирования завершается. Введение заполнителя в конструкцию оболочки не позволяет уменьшить массу конструкции.

4. Если условие устойчивости не выполняется, тогда оптимальную толщину заполнителя определяем из уравнения

$$q_{cr}(\gamma) = q_0. \quad (4.65)$$

Здесь q_{cr} – критическая нагрузка для трехслойной пластинки, выраженная через величину γ , q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

5. По найденным значениям величин h_f и γ вычисляем толщину одного несущего слоя и полутолщину заполнителя

$$h = \frac{h_f}{2}; H = \gamma h. \quad (4.66)$$

Проверяем выполнение ограничения на максимальную толщину заполнителя

$$2H \leq 2H_{zm}. \quad (4.67)$$

Нарушение данного условия означает, что ограничения на максимальную толщину заполнителя не позволяют получить трехслойную пластинку с несущими слоями общей толщиной h_f .

6. Вычисляем массу оптимальной трехслойной пластинки:

$$G_T = 2ab(\rho_0 h + \rho_z H). \quad (4.68)$$

Здесь ρ_0 – плотность материала несущих слоев; ρ_z – плотность материала несущих слоев.

Выпишем еще раз формулу критической нагрузки для трехслойной пластины

$$q_{cr} = \frac{2C_{xx} \left(H + \frac{h}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{\frac{C_{xx}H}{G_{xz}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 1}. \quad (4.69)$$

Выразим величину q_{cr} через относительную толщину заполнителя γ

$$q_{cr} = \frac{3q_f \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3q_f}{G_{xz}h_f} \gamma + 1}. \quad (4.70)$$

Подставив последнее выражение в левую часть уравнения (4.65), получим

$$\frac{3q_f \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3q_f}{G_{xz}h_f} \gamma + 1} = q_0. \quad (4.71)$$

После несложных преобразований, с учетом формулы (4.62) для h_f , уравнение устойчивости можно представить следующим образом

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sigma_{-1v}}{G_{xz}} \gamma = \frac{r_f}{3}, \quad (4.72)$$

где

$$r_f = \frac{q_0}{q_f}. \quad (4.73)$$

После раскрытия скобок и упорядочивания слагаемых по степеням γ , получим квадратное уравнение

$$\gamma^2 + p\gamma + r = 0. \quad (4.74)$$

Здесь

$$p = 1 - \frac{\sigma_{-1v}}{G_{xz}}, r = \frac{3 - 4r_f}{12}. \quad (4.75)$$

В соответствии с алгоритмом проектирования $r_f > 1$, следовательно, $r < 0$, то есть квадратное уравнение имеет только один положительный корень

$$\gamma = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2}. \quad (4.76)$$

Пример. Трехслойная пластинка длиной a и шириной b находится под действием сжимающей нагрузки q_0 . Механические характеристики материала несущих слоев приведены в табл. 1 – 2; плотность материала $\rho_0 = 1450 \text{ кг/м}^3$. Пластина подкреплена легким заполнителем с плотностью $\rho_z = 53 \text{ кг/м}^3$. Требуется оценить эффективность введения заполнителя в конструкцию пластины, если

$$q_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ н/м}; a = 1 \text{ м}; b = 3 \text{ м}; G_{xz} = 0,15 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; 2H_{zm} = 0,02 \text{ м}.$$

1. Полагаем, что несущие слои состоят только из продольных слоев, то есть $\theta_0 = 1$.

2. Вычисляем полную толщину несущих слоев из условия прочности:

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-1v}} = \frac{2 \cdot 10^5}{0,7 \cdot 10^9} = 0,286 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

3. Вычисляем величину критической нагрузки для пластинки толщиной h_f (без заполнителя):

$$q_c = \frac{b_{11} h_f^3}{12} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 2,69 \text{ (н/м)}.$$

Таким образом, условие устойчивости нарушается.

4. Решаем уравнение (5.18). Вычислим величины p, r и дискриминант D

$$p = -3,67; r = -2,48 \cdot 10^4; D = 9,9 \cdot 10^4.$$

Найдем единственный положительный корень уравнения

$$\gamma = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4r}}{2} = 159.$$

5. Находим толщину несущего слоя и полутолщину заполнителя

$$h = \frac{h_f}{2} = 1,43 \cdot 10^{-4} \text{ (м)}; H = \gamma h = 0,0227 \text{ (м)}.$$

Следовательно,

$$2H = 0,0454 \text{ (м)}.$$

Программа проектирования трехслойной пластины:

```
/*Проектирование трехслойных пластин */  
fpprintprec:3;  
/*Нагрузка */  
q: 2e5;  
/*Габариты*/  
a:1;b:3;  
/* Упругие характеристики, предел прочности, плотность несущих слоев*/  
E1:1.4e11;E2:7e9;v12:0.24;v21:v12*E2/E1;  
sig1:0.7e9;  
R0:1450;  
/* Модуль сдвига и плотность заполнителя */  
GXZ:1.5e8;  
RZ:53;  
/* Полная толщина несущих слоев из условий прочности*/  
hf: q/sig1;  
/* Толщина несущего слоя*/  
h:hf/2;  
/* Жесткость несущего слоя */  
B11:E1/(1-v12*v21);  
/* Изгибная жесткость неподкрепленной пластины */  
DF: B11*hf^3/12;  
/* Критическая нагрузка неподкрепленной пластины*/  
qf:DF*(%pi/a)^2, numer;  
/* Запас по устойчивости неподкрепленной пластины*/  
KUF:qf/q;  
rf:q/qf;  
/* Величины p, r, D */  
p:1-sig1/GXZ;  
r:1/4-rf/3, numer;
```


$$D: p^2 - 4r;$$

/*Оптимальная толщина заполнителя */

$$t: (-p + \sqrt{D})/2;$$

$$HZ: t \cdot h;$$

/* Критическая нагрузка */

$$q_{crt}: 3 \cdot q_f \cdot (t + 1/2)^2 / (3 \cdot \sigma_1 / (r_f \cdot GXZ) \cdot t + 1);$$

$$KZT: q_{crt}/q;$$

/*Полная толщина трехслойной пластины */

$$HT: 2 \cdot h + 2 \cdot HZ;$$

/* Масса трехслойной пластины */

$$G: 2 \cdot a \cdot b \cdot (R_0 \cdot h + RZ \cdot HZ).$$

Найденная толщина более чем в два раза превышает максимально допустимую по условиям технологии толщину заполнителя, то есть получить трехслойную пластину с общей толщиной h_f невозможно.

Чтобы удовлетворить ограничению на максимальную толщину заполнителя можно поступить, например, следующим образом: полагая $H = H_{zm}$, найти толщину несущих слоев из уравнения устойчивости относительно h

$$\frac{2C_{xx} \left(H + \frac{h}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{\frac{C_{xx}H}{G_{xz}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 1} = q_0. \quad (4.77)$$

Преобразуем это уравнение к алгебраическому уравнению относительно величины h

$$\frac{h^3}{4} + Hh^2 + \left(H^2 - \frac{q_0H}{2G_{xz}}\right)h - \frac{q_0}{2b_{11}} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0. \quad (4.78)$$

Представим полученное уравнение в безразмерном виде

$$\frac{\beta^3}{4} + H\beta^2 + \left(1 - \frac{q_0}{2G_{xz}H}\right)\beta - \frac{q_0}{2b_{11}H^3} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 0, \quad (4.79)$$

где

$$\beta = \frac{h}{H}. \quad (4.80)$$

Таким образом, уравнение для нахождения величины β представляет собой кубическое уравнение. В этом уравнении имеет место только одна переменная знака, следовательно, по теореме Декарта уравнение имеет только один положительный корень.

Подставив в уравнение (5.23) числовые значения, получим

$$0,25\beta^3 + \beta^2 + 0,933\beta - 0,0722 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем единственный положительный корень

$$\beta = 0,0717.$$

Таким образом,

$$h = \beta H = 0,000717 \text{ (м)}.$$

Полная толщина трехслойной пластинки

$$h_T = 2 \cdot (h + H) = 0,0214 \text{ (м)}.$$

Программа нахождения толщины несущих слоев при заданной толщине заполнителя:

```
/* Трехслойная пластина. Решение уравнения. Определение толщины НС*/  
fprintfprec:3;  
/*Нагрузка */  
q:2E5;  
/* Максимальная толщина заполнителя */  
HZ:0.01;  
/* Габариты */  
a:1; b:3;  
/* Упругие характеристики, предел прочности, плотность несущих слоев*/  
E1:1.4e11;E2:7e9;v12:0.24;v21:v12*E2/E1;  
sig1:0.7e9;  
R0:1450;  
/* Модуль сдвига и плотность заполнителя */  
GXZ:1.5e8;  
RZ:53;  
/*:Жесткость монослоя B11*/  
B11:E1/(1-v12*v21);
```

```

/* Решение уравнения через безразмерный коэффициент bt=h/HZ */
eqnbt:bt^3/4+bt^2+(1-q/(2*GXZ*HZ))*bt-q/(2*B11*HZ^3*(%pi/a)^2), numer;
realroots(eqnbt=0), numer;
h:HZ*%[3];
HT:2*(h+HZ);
/* Масса трехслойной оболочки*/
G:2*a*b*(R0*h+RZ*HZ);
/* Запас прочности */
KZ:2*h*sig1/q;

```

6. Вычисляем массу трехслойной пластинки:

$$G_T = 2ab(\rho_0 h + \rho_z H) = 9,42 \text{ (кг)} .$$

4.4. Проектирование оболочек

Трехслойная цилиндрическая оболочка радиусом R и длиной L , состоящая из двух несущих слоев, между которыми размещается слой заполнителя, находится под действием осевой сжимающей нагрузки. Предполагается, что внутренний и внешний несущие слои, представляют собой тонкие многослойные оболочки, выполненные из композитного материала. Требуется оценить эффективность введения в конструкцию оболочки заполнителя.

Введем обозначения:

h – толщина одного несущего слоя оболочки;

$2H$ – толщина заполнителя;

$2H_{zm}$ – максимальная толщина заполнителя;

h_f – суммарная толщина несущих слоев;

γ – относительная толщина заполнителя оболочки:

$$\gamma = \frac{2H}{h_f} = \frac{2H}{h}; \quad (4.81)$$

D_f – изгибная жесткость гладкой оболочки_толщиной h_f в направлении образующих;

δ_f – податливость гладкой оболочки толщиной h_f в окружном направлении.

Алгоритм проектирования трехслойной цилиндрической оболочки состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что несущие слои состоят только из продольных монослоев. Эта схема армирования, очевидно, является наилучшей с точки зрения прочности.

2. По известной величине сжимающей нагрузки и пределу прочности материала при сжатии вычисляем суммарную толщину несущих слоев

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-1v}}. \quad (4.82)$$

3. Вычисляем величину критической нагрузки для оболочки толщиной h_f

$$q_f = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_f}{\delta_f}}. \quad (4.83)$$

Проверяем выполнение условия устойчивости:

$$q_f \geq q_0. \quad (4.84)$$

Если это условие выполняется, то процесс проектирования завершается. Введение заполнителя в конструкцию оболочки не позволяет уменьшить массу конструкции.

4. Если условие устойчивости не выполняется тогда, полагая $H = H_{zm}$, вычисляем критическую нагрузку q_{cr} для трехслойной оболочки с несущими слоями общей толщиной h_f и заполнителем толщиной $2H$. Проверяем условие устойчивости

$$q_{cr} \geq q_0. \quad (4.85)$$

Нарушение данного условия означает, что ограничения на максимальную толщину заполнителя не позволяют получить трехслойную оболочку с несущими слоями общей толщиной h_f .

$$q_{cr}(\gamma) = q_0. \quad (4.86)$$

Здесь q_{cr} – критическая нагрузка для трехслойной оболочки, выраженная через величину γ , q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

Если условие устойчивости выполняется, тогда оптимальную толщину заполнителя определяем из уравнения

$$q_{cr}(\gamma) = q_0. \quad (4.87)$$

Здесь q_{cr} – критическая нагрузка для трехслойной оболочки, выраженная через величину γ , q_0 – заданная сжимающая нагрузка. Для нахождения γ можно воспользоваться, например, методом пробных значений.

5. По найденным значениям величин h_f и γ вычисляем толщину одного несущего слоя, полутолщину заполнителя и массу оптимальной трехслойной оболочки соответственно:

$$h = \frac{h_f}{2}; H_z = \gamma h; G_T = 4\pi RL(\rho_0 h + \rho_z H). \quad (4.88)$$

Здесь ρ_0 – плотность материала несущих слоев; ρ_z – плотность материала несущих слоев.

Выпишем еще раз выражение для критической нагрузки

$$q_{cr} = \begin{cases} q_{crp} k_{xz} (2 - k_{xz}), & \text{при } k_{xz} < 1; \\ q_{crp}, & \text{при } k_{xz} \geq 1. \end{cases} \quad (4.89)$$

Здесь

$$q_{crp} = \frac{2G_{xz} b^2}{H}, \quad (4.90)$$

$$k_{xz} = k_p \frac{H}{b}. \quad (4.91)$$

$$k_p = \frac{\sqrt{C_{xx}/\delta_{yy}}}{G_{xz} R}. \quad (4.92)$$

Здесь C_{xx} – мембранная жесткость одного несущего слоя в направлении образующих, δ_{yy} – податливость одного несущего слоя в окружном направлении.

Выразим величины q_{crp} и k_{xz} через относительную толщину заполнителя γ

$$q_{crp} = G_{xz} h_f \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2}{\gamma}, \quad (4.93)$$

$$k_{xz} = k_p \frac{\gamma}{\gamma + \frac{1}{2}}. \quad (4.94)$$

Формулы (4.93) – (4.94) позволяют записать выражение для критической нагрузки в виде функции, зависящей от γ . Коэффициент k_p , входящий в выражение для критической нагрузки, можно представить следующим образом

$$k_p = \frac{q_f \sqrt{3}}{G_{xz} h_f}. \quad (4.95)$$

Пример. Трехслойная оболочка длиной L и радиусом R находится под действием сжимающей нагрузки q_0 . Механические характеристики материала несущих слоев приведены в табл. 1- 2; плотность материала $\rho_0 = 1450 \text{ кг/м}^3$. Оболочка подкреплена легким заполнителем с модулем сдвига $G_{xz} = 0,15 \cdot 10^9 \text{ (Н/м}^2\text{)}$ и плотностью $\rho_z = 53 \text{ (кг/м}^3\text{)}$. Оценим эффективность введения в конструкцию оболочки заполнителя, если

$$q_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}; R = 0,5 \text{ м}; L = 1 \text{ м}; H_{zm} = 0,02 \text{ м}.$$

1. Полагаем, что несущие слои состоят только из продольных слоев, то есть $\theta_0 = 1$.

2. Вычисляем суммарную толщину несущих слоев из условия прочности:

$$h_f = 0,714 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}.$$

3. Вычисляем величину критической нагрузки для оболочки толщиной $2h$ (без заполнителя):

$$q_f = 1,85 \cdot 10^6 \text{ (Н/м)}.$$

Следовательно,

$$q_f < q_0.$$

Таким образом, условие устойчивости нарушается.

4. Полагая $H = H_{zm}$, вычисляем критическую нагрузку q_{cr} для трехслойной оболочки с несущими слоями общей толщиной h_f и заполнителем толщиной $2H_z$:

$$q_{cr} = 7,12 \cdot 10^6 \text{ (Н/м)}.$$

Следовательно,

$$q_{cr} > q_0.$$

Вычисляем оптимальную относительную толщину заполнителя из уравнения (4.87)

$$\gamma = 3,6.$$

5. По найденным значениям величин h_f и γ вычисляем толщину одного несущего слоя, полутолщину заполнителя и массу оптимальной трехслойной оболочки соответственно:

$$h = 0,0036 \text{ м}; H = 0,013 \text{ м}; G_T = 36,8 \text{ кг.}$$

Вычислим массу неподкрепленной оболочки, образованной укладкой продольных монослоев (п.5.1):

$$G_0 = 53,5 \text{ кг.}$$

Таким образом, в данном случае, использование заполнителя позволило снизить массу конструкции более чем на 30 процентов.

Программа оптимизации трехслойной оболочки:

/* Оптимизация трехслойной оболочки. Последовательное уточнение */

/* t=GAMMA*/

fpprintprec:3;

/* Нагрузка*/

q: 5e6;

/* Радиус и длина оболочки */

R:0.5; L:1;

/*Упругие характеристики, предел прочности и плотность монослоя */

E1:1.4e11;E2:7e9;v12:0.24;v21:v12*E2/E1; G12: 2.75e9;

sig1:0.7e9;

RO:1450;

/*Модуль сдвига и плотность заполнителя */

GXZ:0.15e9;

RZ:53;

/*Максимальная полутолщина заполнителя*/

HZM:0.02;

/* Матрица жесткости монослоя */

B11:E1/(1-v12*v21); B22:E2/(1-v12*v21);B12:v12*E2/(1-v12*v21);B33:G12;

```

/* Толщина несущего слоя из условий прочности*/
hf: q/(sig1);
h:hf/2;
/* Матрица жесткости несущего слоя*/
AXX:B11; AYY: B22;AXY:B12;AG:B33;
/* Податливость несущего слоя в окружном направлении */
PYY:AXX/((AXX*AYY-AXY^2)*h);
/* Изгибная жесткость несущего слоя в направлении образующих */
DXX:AXX*h^3/12;
/* Критическая нагрузка для гладкой оболочки толщиной hf=2h */
DF:8*DXX;PF:PYY/2;
qf:2/R*sqrt(DF/PF);
/* Коэффициент rf */
rf:q/qf;
/* Коэффициент kр*/
kр:qf*sqrt(3)/GXZ/hf, numer;
/* Коэффициент t */
tmax:2*HZM/hf;
/* Коррекция t методом проб!!!!!!*/
t:3.6;
HZ:t*h;
kz:kр*t/(t+1/2);
qсрp:GXZ*hf*(t+1/2)^2/t;
qср:if kz<1 then qсрp*kz(2-kz) else qсрp;
/* Коэффициент запаса устойчивости */
KZT:qср/q;
HT:2*h+2*HZ;
G:4*%pi*R*L*(RO*h+RZ*HZ),numer.

```


4.5. Статистическое моделирование пластин

Исследуем влияние разброса упругих характеристик материала несущих слоев и заполнителя на коэффициент общей потери устойчивости трехслойной пластины длиной $a = 1$ м и шириной $b = 3$ м. Конструкция находится под действием равномерно распределенной по кромкам пластины сжимающей нагрузке $q = 2 \cdot 10^5$ н/м. Вероятностные характеристики материала несущих слоев приведены в табл. 3. Математическое ожидание $M(G_{xz})$ и среднеквадратичное отклонения $S(G_{xz})$ материала заполнителя соответственно равны

$$M(G_{xz}) = 0,15 \cdot 10^9 \text{ ГПа}, S(G_{xz}) = 0,0075 \cdot 10^9 \text{ ГПа}.$$

Предполагается, что вероятностные характеристики материалов несущих слоев и заполнителя подчиняются нормальному закону. Число испытаний $N=1000$.

Геометрические характеристики пластины, полученные в результате решения задачи оптимизации (п.4.3):

$$h = 0,00072 \text{ м}, H_z = 0,01 \text{ м}.$$

Программа моделирования:

```
/* Трехслойная пластина. Моделирование*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
pi:3.1415927;
```

```
/* Нагрузка*/
```

```
q:2E5;
```

```
/*Толщина одного несущего слоя.
```

```
Полутолщина заполнителя. Длина и ширина пластины*/
```

```
h:0.00072;
```

```
HZ:0.01;
```

```
a:1; b:3;
```

```

/*Структурные параметры */
ET0:1; ET90:1 -ET0;

/* Матожидание и среднее кв. откл.*/

/* Несущий слой */
E1:140E9; S:7E9;
E2:7E9; S2:0.35E9;
G12:2.75E9; SG:0.14E9;
v12:0.24; v21:v12*E2/E1;

/*Заполнитель*/
GXZ:0.15E9; SGXZ:0.0075E9;

/* Моделирование СВ */
N:1000;
list:[]$
for i:1 thru N do
block(
CVE1: random_normal(E1,S),
CVE2:random_normal(E2,S2),
CVG12:random_normal(G12,SG),
CVGXZ:random_normal(GXZ,SGXZ),
/* Матрица жесткости монослоя */
B11:CVE1/(1-v12·v21),
B22:CVE2/(1-v12·v21),
B12:v12·CVE2/(1-v12·v21),
B33:CVG12,
/*Жесткость несущего слоя*/
AXX:B11*ET0+B22*ET90,
/* Мембранная жесткость несущего слоя*/
CXX:AXX*h,
/* Критическая нагрузка */
qcr:2*(pi/a)^2*CXX*(HZ+h/2)^2/(1+(pi/a)^2*CXX*HZ/CVGXZ),numer,

```

```
KZ:qcr/q,
```

```
list:endcons(KZ,list)
```

```
);
```

```
/* Запись в файл */
```

```
write_data(list,"listTRPLATE");
```

Результаты моделирования записываются в файл listTRPLATE.

Программа обработки статистических данных:

```
/* Трехслойная пластина. Обработка*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listTRPLATE")$
```

```
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/
```

```
AVR:mean(list), numer;
```

```
STD:std(list);
```

```
KVAR: STD/AVR*100;
```

Результаты обработки данных моделирования коэффициента устойчивости трёхслойной пластинки:

выборочное среднее – 1,003;

среднее квадратичное отклонение – 0,049;

коэффициент вариации – 4,8%.

Таким образом, коэффициент вариации менее 5 процентов, т.е. разброс упругих характеристик материала несущих слоев и заполнителя не оказывает существенного влияния на величину коэффициента устойчивости.

Для проверки закона распределения коэффициента устойчивости на нормальность вычислим эмпирические коэффициенты асимметрии \bar{A} и эксцесса \bar{E} , а также соответствующие ошибки репрезентативности m_A и m_E этих величин.

Программа вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса:

```
/* Трехслойная пластина. Асимметрия и эксцесс. Норм.*/
```

```

load(descriptive);
load(distrib);
fpprintprec:4;
ratprint: false$
/* Чтение из файла */
list:read_list("listTRPLATE")$
/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */
N:1000;
RPRASS: sqrt(6/N),numer;
RPREKS: sqrt (24/N),numer;
/* Асимметрия и эксцесс */
ASS:skewness(list);
EKS:kurtosis(list);
KRTASS: abs(ASS)/RPRASS;
KRTEKS:abs(EKS)/RPREKS;

```

Результаты вычислений:

$$\bar{A} = -0,042; \bar{E} = -0,32, m_A = 0,078; m_E = 0,155 .$$

Распределение считается нормальным, если одновременно выполняются условия

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} < 3, \frac{|\bar{E}|}{m_E} < 3.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = \frac{|-0,042|}{0,078} = 0,55 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = \frac{|-0,32|}{0,155} = 2,05 < 3.$$

Таким образом, условия нормальности для закона распределения коэффициента устойчивости выполняются.

Программа построения гистограммы:

```

/*Построение гистограмм */
fpprintprec:3;
load(descriptive);

```

```

load(distrib);
ratprint: false$
list:read_list("listTRPLATE")$
/*Гистограмма*/
histogram(list, frequency=percent,
xlabel= "η", ylabel="w",fill_density=0.1,
fill_color=grey,terminal=png, file_name="histTRPLATE");

```

Гистограмма для коэффициента устойчивости многослойной пластины представлена на рис. 12.

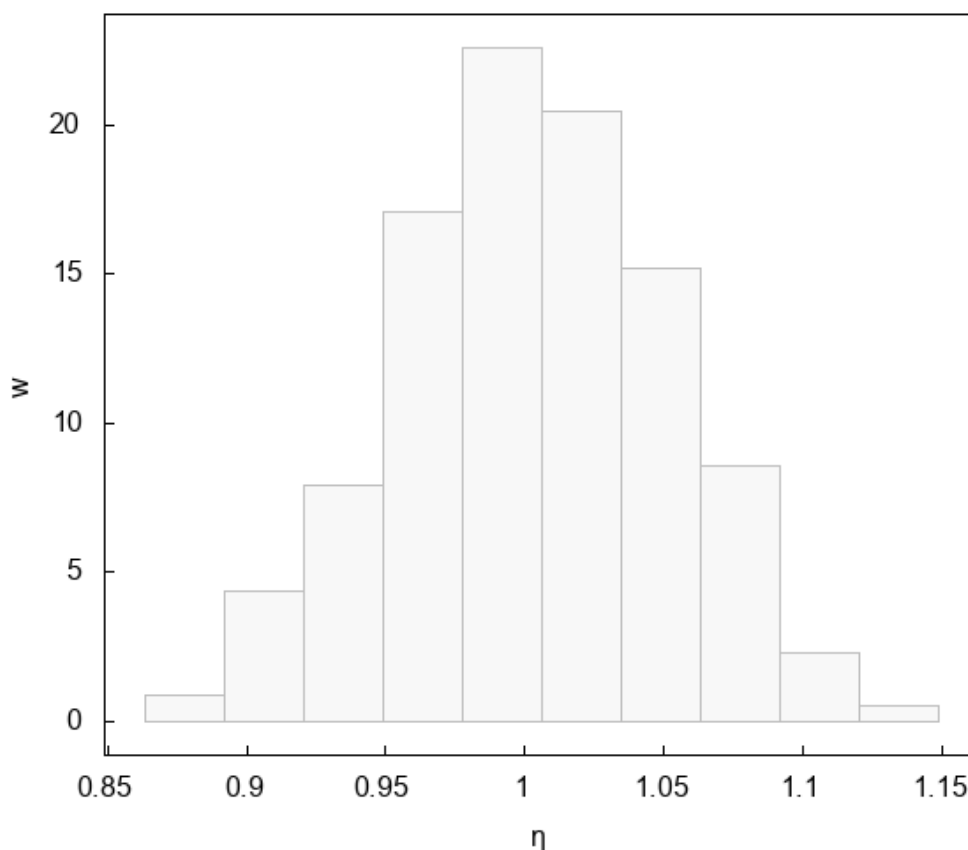


Рис. 12. Гистограмма для коэффициента устойчивости трехслойной пластины

Проверим гипотезу о значении коэффициента устойчивости η трехслойной пластинки:

нулевая гипотеза $H_0: \eta=1$,

альтернативная гипотеза $H_1: \eta < 1$.

Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Критическая область в данном примере является левосторонней. Генеральная дисперсия неизвестна. Входными величинами в этой задаче служат уровень значимости, выборочное среднее и выборочное среднеквадратичное отклонение.

Программа:

```
/*Проверка гипотез для трехслойной пластинки.
```

```
Коэффициент устойчивости*/
```

```
load(stats);
```

```
fpprintprec:3;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Уровень значимости */
```

```
alfa:0.05;
```

```
/* Число испытаний */
```

```
N:1000;
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listTRPLATE")$
```

```
/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/
```

```
AVR:mean(list), numer;
```

```
STD:std1(list),numer;
```

```
/* Наблюдаемая статистика*/
```

```
t:(AVR-1)*sqrt(N)/STD, numer;
```

```
/*Кр. знач. статистики*/
```

```
tkr: quantile_student_t(1-alfa,N-1),numer;
```

Результаты расчета:

$$t_{кр} = 1,65, t_{набл} = 6,13.$$

Таким образом, наблюдаемое значение статистики $t_{набл}$ удовлетворяет условию

$$t_{набл} > t_{кр},$$

то есть на пятипроцентном уровне значимости нулевая гипотеза принимается.

4.6. Статистическое моделирование оболочек

Исследуем влияние разброса упругих характеристик материала несущих слоев и заполнителя на коэффициент общей потери устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки длиной $L = 1$ м и радиусом $R = 0,5$ м. Оболочка находится под действием равномерно распределенной по торцам сжимающей нагрузки $q = 5 \cdot 10^6$ н/м. Вероятностные характеристики материала несущих слоев оболочки приведены в табл.3. Математическое ожидание $M(G_{xz})$ и среднеквадратичное отклонения $S(G_{xz})$ материала заполнителя соответственно равны

$$M(G_{xz}) = 0,15 \cdot 10^9 \text{ ГПа}, S(G_{xz}) = 0,0075 \cdot 10^9 \text{ ГПа}.$$

Предполагается, что вероятностные характеристики материалов несущих слоев и заполнителя подчиняются нормальному закону. Число испытаний $N=1000$.

Геометрические характеристики цилиндрической оболочки, полученные в результате решения задачи оптимизации (п. 4.4):

$$h = 0,0036 \text{ м}, H_z = 0,013 \text{ м}.$$

Программа моделирования:

```
/* Трехслойная оболочка. Моделирование*/  
load(descriptive);  
load(distrib);  
fpprintprec:4;  
ratprint: false$  
pi:3.1415927;  
/* Нагрузка*/  
q:5E6;  
/*Толщина одного несущего слоя. Полутолщина заполнителя.  
Радиус и длина*/  
h:0.0036;  
HZ:0.013;  
R:0.5;L:1;
```

```

/*Структурные параметры */
ET0:1; ET90:1 -ET0;

/* Матожидание и среднее кв. откл.*/

/* Несущий слой */
E1:140E9; S:7E9;
E2:7E9; S2:0.35E9;
G12:2.75E9; SG:0.14E9;
v12:0.24; v21:v12*E2/E1;

/*Заполнитель*/
GXZ:0.15E9; SGXZ:0.0075E9;

/* Моделирование СВ */
N:1000;
list:[]$
for i:1 thru N do
block(
CVE1: random_normal(E1,S),
CVE2:random_normal(E2,S2),
CVG12:random_normal(G12,SG),
CVGXZ:random_normal(GXZ,SGXZ),
/* Матрица жесткости монослоя */
B11:CVE1/(1-v12·v21),
B22:CVE2/(1-v12·v21),
B12:v12·CVE2/(1-v12·v21),
B33:CVG12,
/*Жесткость несущего слоя*/
AXX:B11*ET0+B22*ET90,
AYY:B22*ET0+B11*ET90,
AXY:B12,
/* Мембранная жесткость несущего слоя*/
CXX:AXX*h, CYY: AYY*h,CXY:AXY*h,

```



```

PYY:CXX/(CXX*CYX-CXY^2),
b:HZ+h/2,
KR:sqrt(CXX/PYY)/(GXZ*R),
KXZ:KR* HZ/b,
qcrp: 2*CVGXZ*b^2/HZ,
if KXZ<1 then qcrt:qcrp*KXZ*(2-KXZ) else qcrt:qcrp,
qcr:qcrt, numer,
KZ:qcr/q,
list:endcons(KZ,list)
);

```

```
/* Запись в файл */
```

```
write_data(list,"listTRSHELL")
```

Результаты моделирования записываются в файл listTRSHELL.

Программа обработки статистических данных:

```
/* Трёхслойная оболочка. Обработка*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listTRSHELL")$
```

```
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/
```

```
AVR:mean(list), numer;
```

```
STD:std(list);
```

```
KVAR: STD/AVR*100;
```

Результаты обработки данных моделирования коэффициента устойчивости трёхслойной цилиндрической оболочки:

выборочное среднее – 1,011;

среднее квадратичное отклонение – 0,049;

коэффициент вариации – 4,9%.

Таким образом, коэффициент вариации менее 5 процентов, т.е. разброс упругих характеристик материала несущих слоев и заполнителя не оказывает существенного влияния на величину коэффициента устойчивости трехслойной оболочки.

Для проверки закона распределения коэффициента устойчивости на нормальность вычислим эмпирические коэффициенты асимметрии \bar{A} и эксцесса \bar{E} , а также соответствующие ошибки репрезентативности m_A и m_E этих величин.

Программа вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса:

```
/* Трехслойная оболочка. Асимметрия и эксцесс. Норм.*/
```

```
load(descriptive); load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listTRSHELL")$
```

```
/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */
```

```
N:1000;
```

```
RPRASS: sqrt(6/N),numer;
```

```
RPREKS: sqrt (24/N),numer;
```

```
/* Асимметрия и эксцесс */
```

```
ASS:skewness(list);
```

```
EKS:kurtosis(list);
```

```
KRTASS: abs(ASS)/RPRASS;
```

```
KRTEKS:abs(EKS)/RPREKS;
```

Результаты вычислений:

$$\bar{A} = -0,068; \bar{E} = -0,03, m_A = 0,078; m_E = 0,155 .$$

Распределение считается нормальным, если одновременно выполняются условия

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} < 3, \frac{|\bar{E}|}{m_E} < 3.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = 0,88 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = 0,20 < 3.$$

Таким образом, условия нормальности для закона распределения коэффициента устойчивости выполняются.

Программа построения гистограммы:

```
/*Построение гистограмм */
```

```
fprintfprec:3;
```

```
load(descriptive); load(distrib);
```

```
ratprint: false$
```

```
list:read_list("listTRSHELL")$
```

```
/*Гистограмма*/
```

```
histogram(list, frequency=percent,
```

```
xlabel= "η", ylabel="w",fill_density=0.1,
```

```
fill_color=grey,terminal=png, file_name="histTRSHELL");
```

Гистограмма для коэффициента устойчивости многослойной пластины представлена на рис. 13.

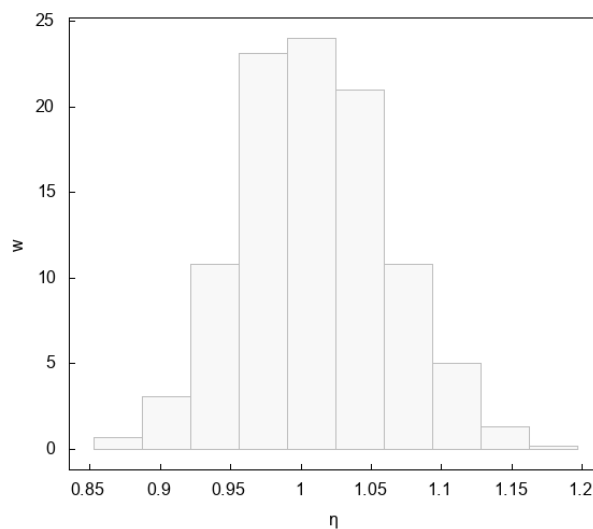


Рис. 13. Гистограмма для коэффициента устойчивости трехслойной оболочки

Проверим гипотезу о значении коэффициента устойчивости η трехслойной цилиндрической оболочки:

нулевая гипотеза $H_0: \eta=1$,

альтернативная гипотеза $H_1: \eta < 1$.

Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Критическая область в данном примере является левосторонней. Генеральная дисперсия неизвестна. Входными величинами в этой задаче служат уровень значимости, выборочное среднее и выборочное среднеквадратичное отклонение.

Программа:

```
/*Проверка гипотез для трехслойной оболочки.
```

```
Коэффициент устойчивости*/
```

```
load(stats);
```

```
fpprintprec:3;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Уровень значимости */
```

```
alfa:0.05;
```

```
/* Число испытаний */
```

```
N:1000;
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listTRSHELL")$
```

```
/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/
```

```
AVR:mean(list), numer;
```

```
STD:std1(list),numer;
```

```
/* Наблюдаемая статистика*/
```

```
t:(AVR-1)*sqrt(N)/STD, numer;
```

```
/*Кр. знач. статистики*/
```

```
tkr: quantile_student_t(1-alfa,N-1),numer;
```

Результаты расчета:

$$t_{кр} = 1,65, t_{набл} = 7,08.$$

Таким образом, наблюдаемое значение статистики $t_{набл}$ удовлетворяет условию

$$t_{набл} > t_{кр},$$

то есть на пятипроцентном уровне значимости нулевая гипотеза принимается.

4.7. Выводы по главе

Главной особенностью расчета трехслойных пластин и оболочек, подкрепленных легким заполнителем, является необходимость учета деформаций поперечного сдвига. Наибольшая распространение получила модель, построенная на гипотезе ломанной линии. Для трехслойных пластин, находящихся в условиях цилиндрического изгиба исходную разрешающую систему уравнений устойчивости можно привести к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка. В случае оболочки исходную разрешающую систему уравнений можно привести к одному дифференциальному уравнению в частных производных двенадцатого порядка.

При проектировании трехслойных пластин, находящихся под действием сжимающих нагрузок, рекомендуется использовать метод разделения параметров оптимизации на две группы: первая группа параметров определяется из условий прочности (схема армирования и толщины несущих слоев), а вторая группа (толщина заполнителя) – из условий устойчивости.

Показано, что в случае, когда в задаче проектирования отсутствуют ограничения на толщину заполнителя, решение задачи существует и единственно. Также построен алгоритм проектирования, позволяющий преодолеть трудности, связанные с наличием ограничений на толщину заполнителя. На конкретном примере показано, что введение в конструкцию пластины заполнителя позволяет значительно снизить массу конструкции, даже при наличии ограничений на толщину заполнителя.

При проектировании трехслойных оболочек, аналогично случаю трехслойных пластин, используется метод разделения параметров оптимизации на две группы: первая группа параметров определяется из условий прочности (схема армирования и толщины несущих слоев), а вторая группа (толщина заполнителя) – из условий устойчивости.

При статистическом моделировании трехслойных конструкций следует учитывать не только разброс механических характеристик несущих слоев, но и разброс модуля сдвига заполнителя. Результаты статистического анализа трехслойных конструкций позволяют сделать следующие выводы:

- Разброс упругих характеристик материала несущих слоев и заполнителя не оказывают существенного влияния на коэффициенты устойчивости пластин и оболочек.

- Малые значения коэффициентов асимметрии и эксцесса свидетельствуют о нормальности распределений коэффициентов устойчивости.

- Гипотезы о равенстве коэффициентов устойчивости пластин и оболочек их теоретическим значениям не отвергаются.

5. МНОГОСТЕНОЧНЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ

Многостеночные композитные конструкции – это сравнительно новый вид несущих конструкций, которые могут быть использованы вместо трехслойных и ребристых конструкций с односторонними подкрепляющими элементами. Многостеночные конструкции сочетают в себе свойства симметрии трехслойной конструкции и высокую изгибную жесткость ребристой конструкции. Особенности расчета и проектирования многостеночных конструкций из композитного материала исследованы в работах [150–152].

5.1. Устойчивость пластин

Многостеночная пластина состоит из двух одинаковых внешних слоев (несущие обшивки), соединенных набором стенок из композитного материала (рис. 14).

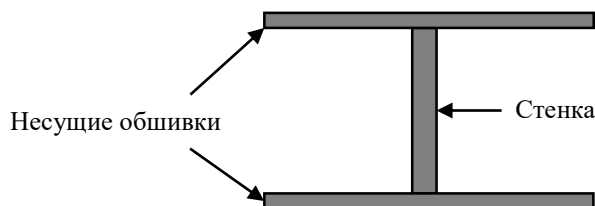


Рис.14. Элемент многостеночной пластинки

Введем обозначения: h_0 – толщина одного несущего слоя; t_s, H_s, B_s – шаг, высота и толщина стенки соответственно.

Приведенная изгибная жесткость $D_{xx}^{(p)}$ многостеночной пластины имеет вид:

$$D_{xx}^{(p)} = 8D_{xx} \left(1 + 3 \left(\frac{H_s}{h} \right)^2 + 3 \frac{H_s}{h} \right) + \frac{E_s h_s H_s^2}{12}, \quad (5.1)$$

где

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s}. \quad (5.2)$$

Здесь $h = 2h_0$ – полная толщина несущих слоев.

Таким образом, выражение критической нагрузки для многостеночной пластины, находящейся в условиях цилиндрического изгиба, имеет вид:

$$q_c = D_{xx}^{(p)} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \left(8D_{xx} \left(1 + 3\left(\frac{H_s}{h}\right)^2 + 3\frac{H_s}{h}\right) + \frac{E_s h_s H_s^2}{12}\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2. \quad (5.3)$$

Критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости для панели между стенками, имеет вид

$$q_{cm} = k_s \frac{2\pi^2 \sqrt{D_{xx} D_{yy}}}{t_s^2} \left(1 + \frac{D_{xy} + 2D_G}{\sqrt{D_{xx} D_{yy}}}\right). \quad (5.4)$$

Здесь $D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости одного несущего слоя. Редукционный коэффициент k_s вычисляется по формуле

$$k_s = 2 \left(1 + \frac{E_s h_s}{E_x h}\right), \quad (5.5)$$

где E_s, E_x – модули упругости стенки и несущих слоев соответственно.

Если вертикальная стенка представляет собой тонкую пластинку, тогда следует учитывать возможность потери устойчивости стенки. Критическую нагрузку для вертикальной стенки можно также найти по формуле (5.4), заменив в этой формуле изгибные жесткости несущих слоев на изгибные жесткости стенки, причем

$$t_s = H_s, k_s = 1 + \frac{E_x h}{E_s h_s}. \quad (5.6)$$

5.2. Устойчивость оболочек

Многостеночная оболочка, радиусом R и длиной L состоит из двух одинаковых внешних слоев (несущие обшивки), соединенных набором стенок из композитного материала (рис. 15).

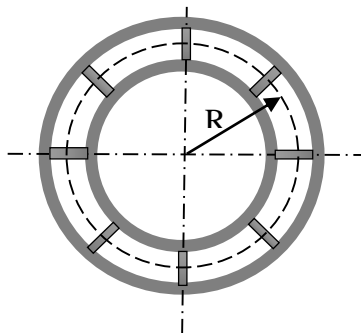


Рис.15. Сечение многостеночной оболочки

Таким образом, повышение изгибной жесткости многостеночной оболочки, аналогично случаю трехслойной оболочки, достигается за счет разнесения полотна оболочки на два тонких несущих слоя, соединенных стенками из того же материала, что и несущие слои.

Введем обозначения: h_0 – толщина одного несущего слоя; H_s, B_s – высота и толщина стенки соответственно; t_s – расстояние между центрами тяжести стенок.

Приведенная изгибная жесткость $D_{xx}^{(p)}$ многостеночной оболочки имеет вид:

$$D_{xx}^{(p)} = 8D_{xx} \left(1 + 3 \left(\frac{H_s}{h} \right)^2 + 3 \frac{H_s}{h} \right) + \frac{E_s h_s H_s^2}{12}, \quad (5.7)$$

где

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s}. \quad (5.8)$$

Здесь $h = 2h_0$ – полная толщина несущих слоев.

Критическую нагрузку вычисляем по формуле

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}^{(p)}}{\delta_{yy}^{(p)}}}, \quad (5.9)$$

где $\delta_{yy}^{(p)}$ – податливость многостеночной конструкции в окружном направлении

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{2C_{xx} + E_s h_s}{2C_{yy}(2C_{xx} + E_s h_s) - 4C_{xy}^2}. \quad (5.10)$$

Здесь C_{xx}, C_{yy}, C_{xy} – мембранные жесткости одного несущего оболочки. С точностью до произведения коэффициентов Пуассона по сравнению с единицей, выражение для податливости в окружном направлении можно представить в виде:

$$\delta_{yy}^{(p)} \approx \frac{1}{2C_{yy}}. \quad (5.11)$$

Критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости для панели между стенками, имеет вид

$$q_{cm} = k_s \frac{2\pi^2 \sqrt{D_{xx} D_{yy}}}{t_s^2} \left(1 + \frac{D_{xy} + 2D_G}{\sqrt{D_{xx} D_{yy}}} \right). \quad (5.12)$$

Здесь $D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости одного несущего слоя. С достаточной для инженерных расчетов точностью в качестве t_s можно использовать расстояние между центрами тяжести стенок.

Редукционный коэффициент k_s вычисляется по формуле

$$k_s = 2 \left(1 + \frac{E_s h_s}{E_x h} \right), \quad (5.13)$$

где E_s, E_x – модули упругости стенки и несущих слоев соответственно.

Если вертикальная стенка представляет собой тонкую пластинку, тогда следует учитывать возможность потери устойчивости стенки. Критическую нагрузку для вертикальной стенки можно также найти по формуле (5.12), заменив в этой формуле изгибные жесткости несущих слоев на изгибные жесткости стенки. Ширина пластинки в данном случае совпадает с высотой стенки: $t_s = H_s$. Редукционный коэффициент k_s для стенки вычисляется по формуле

$$k_s = 1 + \frac{E_x h}{E_s h_s}. \quad (5.14)$$

5.3. Проектирование пластин

Многостеночная пластинка длиной a и шириной b , находится под действием сжимающих нагрузок. Требуется при заданных габаритных размерах и величине сжимающей нагрузки оценить эффективность использования подкрепляющих элементов в конструкции пластины по сравнению с неподкрепленной пластиной (рис. 16).

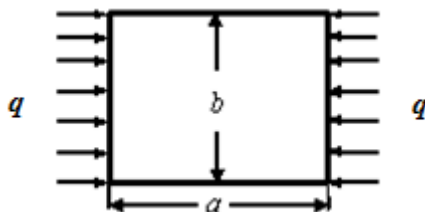


Рис.16. Многостеночная пластинка, сжатая в одном направлении

Введем обозначения:

h_0 – толщина одного несущего слоя;

t_s – расстояние между центрами тяжести стенок;

H_s, B_s – соответственно высота и толщина стенки;

H_{sm} – максимально возможная по условиям технологии высота стенки.

h_s – условная «толщина» стенок:

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s};$$

h – суммарная толщина несущих слоев:

$$h = 2h_0;$$

h_f – полная условная «толщина» многостеночной пластинки:

$$h_f = h + h_s;$$

γ – относительная толщина несущих слоев многостеночной пластинки:

$$\gamma = \frac{h}{h_f};$$

D_f – изгибная жесткость гладкой пластинки толщиной h_f .

Для оценки эффективности введения в конструкцию пластинки подкрепляющих элементов воспользуемся коэффициентом снижения массы

$$k_{tlm} = \frac{G_f}{G}.$$

Здесь G_f , G – массы многостеночной и гладкой пластин соответственно.

Если полотно пластины и подкрепляющие элементы изготовлены из одного и того же материала, тогда коэффициент снижения массы можно определить следующим образом:

$$k_{tlm} = \frac{h_f}{h}.$$

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости, аналогично случаю стрингерной пластинки, будем определять по формуле (5.3)

$$q_{cr} = D_{xx}^{(p)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \quad (5.15)$$

Здесь $D_{xx}^{(p)}$ – «приведенная» изгибная жесткость многостенной пластинки.

Если несущие слои и стенки состоят только из продольных монослоев, то «приведенная» изгибная жесткость может быть представлена в виде:

$$D_{xx}^{(p)} = D_f (\gamma^3 + 3r_H \gamma^2 + 2r_H^2 \gamma + r_H^2). \quad (5.16)$$

где

$$r_H = \frac{H_s}{h_f}. \quad (5.17)$$

Подставив выражения для изгибной жесткости многостеночной пластинки в формулу для критической нагрузки, получим

$$q_{cr} = q_f p(\gamma), \quad (5.18)$$

где

$$q_f = D_f \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \quad p(\gamma) = \gamma^3 + 3r_H \gamma^2 + 2r_H^2 \gamma + r_H^2. \quad (5.19)$$

Критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости для панели между стенками, определяется по формуле (5.12).

Выпишем эту формулу еще раз:

$$q_{cm} = k_s \frac{2\pi^2 \sqrt{D_{xx} D_{yy}}}{t_s^2} \left(1 + \frac{D_{xy} + 2D_G}{\sqrt{D_{xx} D_{yy}}} \right). \quad (5.20)$$

Здесь $D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости одного несущего слоя многостеночной пластины; k_s – редуциционный коэффициент.

Если несущие слои оболочки состоят только из продольных монослоев, изгибные жесткости и коэффициент редукиции можно представить следующим образом соответственно:

$$D_{xx} = \frac{b_{11} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3, \quad D_{xy} = \frac{b_{12} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3, \quad (5.21)$$

$$D_{yy} = \frac{b_{22} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3, \quad D_G = \frac{b_{33} h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3;$$

$$k_s = \frac{2}{\gamma}. \quad (5.22)$$

Здесь $b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{33}$ – компоненты матрицы жесткости монослоев.

Алгоритм проектирования многостеночной пластины состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что несущие слои и стенки пластинки состоят только из продольных монослоев.

2. Вычисляем полную условную толщину h_f многостеночной пластинки из условия прочности:

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-1v}}. \quad (5.23)$$

Здесь σ_{-1v} – предел прочности монослоя при сжатии в направлении волокон, q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

3. Полагая $h = h_f$, находим критическую нагрузку для гладкой пластинки q_{cr} , а затем проверяем выполнение условия устойчивости:

$$q_f \geq q_0. \quad (5.24)$$

Если это условие соблюдается, то процесс проектирования завершается. Введение подкрепляющих элементов в этом случае не позволяет снизить массу конструкции.

4. Если условие устойчивости не выполняется, тогда полагая $k_{lm} = k_{tlm}$, решаем уравнение относительно γ

$$q_{cr}(\gamma) = q_0. \quad (5.25)$$

Здесь k_{lm} , k_{tlm} – фактический и заданный коэффициенты снижения массы соответственно. Если уравнение имеет решения на промежутке $[0; 1]$, переходим к следующему шагу. В противном случае, определяем на промежутке $[k_{tlm}; 1]$ наименьшее возможное значение коэффициента k_{lm} , при котором уравнение имеет решение, принадлежащее отрезку $[0; 1]$. Для нахождения коэффициента k_{lm} можно воспользоваться, например, методом проб.

5. По найденным значениям γ и h_f вычисляем суммарную толщину несущих и условную «толщину» стенок:

$$h = h_f \gamma, \quad h_s = h_f(1 - \gamma). \quad (5.26)$$

6. Расстояние между стенками из условия сохранения местной устойчивости:

$$t_s = \pi \sqrt{\frac{2k_s}{q_0} (\sqrt{D_{xx}D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G)}. \quad (5.27)$$

7. По известной полной условной «толщине» пластинки находим массу конструкции.

$$G_f = ab\rho_0 h_f . \quad (5.28)$$

Здесь ρ_0 – плотность материала конструкции.

Уравнение (5.25) можно преобразовать к виду:

$$f(\gamma) = 0 , \quad (5.29)$$

где

$$f(\gamma) = \gamma^3 + 3r_H\gamma^2 + 2r_H^2\gamma + r_H^2 - \frac{q_0}{q_f}. \quad (5.30)$$

Таким образом, уравнение устойчивости (5.29) представляет собой алгебраическое уравнение третьей степени относительно γ . По теореме Декарта количество положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно количеству перемен знаков в ряду его коэффициентов или четное число меньше этого количества. Если выполняется условие

$$r_H < \sqrt{\frac{q_0}{q_f}}, \quad (5.31)$$

тогда в многочлене $f(\gamma)$ имеет место только одна перемена знака, следовательно, уравнение может иметь только один положительный корень. Если условие (5.31) не выполняется, тогда уравнение не имеет положительных корней, то есть задача оптимального проектирования не имеет решения.

Корень общего уравнения устойчивости должен принадлежать промежутку $[0;1]$. Исследуем знаки многочлена на границах данного промежутка.

Если $\gamma = 0$, тогда

$$f(0) = r_H^2 - \frac{q_0}{q_f} < 0.$$

Если $\gamma = 1$, тогда

$$f(1) = 1 + 3r_H + 3r_H^2 - \frac{q_0}{q_f}.$$

Уравнение устойчивости имеет корень на промежутке $[0;1]$, если выполняется условие

$$f(1) > 0.$$

Таким образом, получаем квадратное неравенство относительно r_H

$$1 + 3r_H + 3r_H^2 - r_f > 0,$$

где

$$r_f = \frac{q_0}{q_f} > 1.$$

Решив неравенство, получим

$$r_H > r_{lH}, \quad (5.32)$$

где

$$r_{lH} = \frac{\sqrt{3(4r_f - 1) - 3}}{6}. \quad (5.33)$$

Таким образом, условие существования и единственности решения задачи проектирования многостеночной пластины имеет вид

$$r_{lH} < r_H < r_{pH}, \quad (5.34)$$

где

$$r_{pH} = \sqrt{r_f}. \quad (5.35)$$

Пример. Многостеночная пластина длиной $a = 1$ м и шириной $b = 3$ м находится под действием сжимающей нагрузки q_0 . Механические характеристики материала несущих слоев приведены в табл. 1–2; плотность материала $\rho_0 = 1450$ кг/м³. Требуется оценить эффективность введения в конструкцию пластины подкрепляющих элементов, если

$$q_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ н/м}; a = 1 \text{ м}; b = 3 \text{ м}; H_{sm} = 0,02 \text{ м}; k_{tlm} = 0,5.$$

Под оценкой эффективности подкреплений будем понимать в данном примере возможность двукратного снижения массы конструкции ($k_{tlm} = 0,5$) по сравнению с оптимальной гладкой пластиной.

1. Полагаем, что полотно подкрепленной пластины состоит только из продольных монослоев, то есть $\theta_0 = 1$.

2. По известной величине сжимающей нагрузки и пределу прочности материала пластинки при сжатии, находим полную условную «толщину» h_f подкрепленной пластины

$$h_f = 0,286 \cdot 10^{-3}(\text{м})$$

3. Полагая $h = h_f$, находим критическую нагрузку для гладкой пластинки

$$q_f = D_f \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = 2,69 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right).$$

Следовательно,

$$q_f < q_0.$$

Таким образом, условие устойчивости нарушается.

4. Прежде чем решить уравнение устойчивости, проверим условие существования и единственности решения. По заданному значению коэффициента снижения массы найдем скорректированную полную толщину конструкции

$$h_f = k_{lm} h_{max} = 0,5 \cdot 0,012 = 0,006 (\text{м}),$$

где

$$h_{max} = \sqrt[3]{\frac{12q_0}{b_{11}} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

Найдем значения коэффициентов r_{lH} , r_H и r_{pH} :

$$r_{lH} = 1,11; r_H = 3,33; r_{pH} = 2,83.$$

Таким образом, $r_H > r_{pH}$, то есть условия существования и единственности решения не выполняются. Что бы удовлетворить этим условиям следует уменьшить коэффициент r_H , например, следующим образом

$$r_H = \frac{r_{lH} + r_{pH}}{2}.$$

Для данного примера, имеем:

$$r_H = \frac{1,11 + 2,83}{2} = 1,97.$$

В общем случае в качестве коэффициента r_H можно выбрать любое значение из интервала $(r_{lH}; r_{pH})$. Очевидно, что выбор коэффициента r_H из интервала $(r_{lH}; r_{pH})$ автоматически обеспечивает выполнение условия

$$H_s \leq H_{sm},$$

где

$$H_s = r_H h_f.$$

Найдем соответствующую скорректированному значению коэффициента r_H высоту стенки

$$H_s = r_H h_f = 0,0118 \text{ (м)}.$$

Уравнение устойчивости в данном случае имеет вид

$$\gamma^3 + 5,9\gamma^2 + 7,74\gamma - 4,13 = 0.$$

Единственный положительный корень этого уравнения равен:

$$\gamma = 0,402.$$

Программа решения уравнения:

```
/*Многостеночная пластина. Нахождение ГАММА */
/* t=ГАММА */
fpprintprec:3;
q: 2e5;PI:3.14159;
a:1;b:3;
/*Предел прочности*/
sig1:0.7e9;
/* Упругие характеристики монослоя*/
E1:140e9;E2:7e9;v12:0.24;v21:v12*E2/E1;G12: 2.75e9;
R0:1450;
/* Жесткость*/
B11:E1/(1-v12*v21);
/* Полная условная толщина из условий прочности */
hf: q/(sig1);
DF:B11/12*hf^3;
qf:DF*(PI/a)^2;
```

/* Максимальная толщина по условиям устойчивости */

$$h_{\max}:(12*q/B_{11}*(a/PI)^2)^{(1/3)};$$

/* теоретический коэффициент снижения массы */

$$k_{tlm}: hf/h_{\max};$$

/*коррекция !!!*/

$$k_{lm}:0.5;$$

$$hf:h_{\max}*k_{lm};$$

$$DF:B_{11}/12*hf^3;$$

$$q_f:DF*(PI/a)^2;$$

$$r_f:q/q_f;$$

/* Максимальная высота ребер */

$$HSM:0.02;$$

$$r_{lh}:(\sqrt{3*(4*r_f-1)}-3)/6;$$

$$r_h:HSM/hf;$$

$$r_{ph}:\sqrt{r_f};$$

$$HL:r_{lh}*hf;$$

$$HP:r_{ph}*hf;$$

$$HS: \text{if } HSM > HP \text{ then } (HL+HP)/2 \text{ else } HSM;$$

$$r_h:HS/hf;$$

$$\text{eqn}:t^3+3*r_h*t^2+2*r_h^2*t+r_h^2-r_f=0, \text{numer};$$

$$\text{realroots}(\text{eqn}), \text{numer}.$$

5. По найденным значениям γ и h_f вычисляем суммарную толщину несущих и условную «толщину» стенок:

$$h = h_f \gamma = 0,00241(\text{м}); \quad h_s = h_f (1 - \gamma) = 0,00359(\text{м}).$$

6. Найдем расстояние между стенками

$$t_s = \pi \sqrt{\frac{2k_s}{q_0} (\sqrt{D_{xx}D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G)} = 0,053(\text{м}).$$

7. По известной полной условной «толщине» пластинки находим массу конструкции.

$$G_f = ab\rho_0 h_f = 26,1(\text{кг}).$$

/* Изгибная жесткость гладкой пластины. Полная условная толщина*/

$$DF: B_{11} \cdot hf^3/12;$$

/*Критическая нагрузка для гладкой пластины. Полная условная толщина*/

$$q_f: DF \cdot (\pi/a)^2;$$

/* Коэффициент rh. Отношение высоты ребер к полной условной толщине*/

$$rh: H_s/h_f;$$

/* Коэффициент t !!!*/

$$t: 0.911;$$

/*Изгибная жесткость многостеночной пластины*/

$$D_{XXR}: DF \cdot (t^3 + 3 \cdot rh \cdot t^2 + 2 \cdot rh^2 \cdot t + rh^2);$$

/* Критическая нагрузка многостеночной пластины*/

$$q_c: D_{XXR} \cdot (\pi/a)^2;$$

/* Запас устойчивости*/

$$k_z: q_c/q;$$

/*Полная толщина несущих слоев*/

$$h: hf \cdot t;$$

$$h_0: h/2;$$

/*Толщина стенок*/

$$h_s: hf \cdot (1-t);$$

/*Шаг стенок*/

$$t_s: \% \pi \cdot t / 2 \cdot \text{sqrt}((\text{sqrt}(B_{11} \cdot B_{22}) + B_{12} + 2 \cdot B_{33}) / (6 \cdot q) \cdot hf^3), \text{numer};$$

/* Ширина стенок*/

$$b_s: h_s \cdot t_s / H_{SM};$$

/*Масса оптимальной пластины*/

$$GF: R_0 \cdot a \cdot b \cdot hf, \text{numer};$$

/* Максимальная масса пластины*/

$$G_{MAX}: R_0 \cdot a \cdot b \cdot h_{max}, \text{numer};$$

/* Количество стенок*/

$kr:b/ts;$

$kr:ceiling(b/ts);$

/ Уточненная масса пластины*/*

$GU:R0*a*b*(h+kr*HSM*bs/b),numer;$

Таким образом, введение в конструкцию пластины подкрепляющих элементов позволяет обеспечить снижение массы конструкции в два раза.

5.4. Проектирование оболочек

Рассмотрим многостеночную цилиндрическую оболочку радиусом R , длиной L , находящуюся под действием сжимающих нагрузок, равномерно распределенных по торцам оболочки. Требуется при заданных габаритных размерах и величине сжимающей нагрузки оценить эффективность использования подкрепляющих элементов в конструкции оболочки.

Введем обозначения:

h_0 – толщина одного несущего слоя;

t_s – расстояние между центрами тяжести стенок;

H_s, B_s – соответственно высота и толщина стенки;

H_{sm} – максимально возможная по условиям технологии высота стенки.

h_s – условная «толщина» стенок:

$$h_s = \frac{B_s H_s}{t_s};$$

h – суммарная толщина несущих слоев:

$$h = 2h_0;$$

h_f – полная условная «толщина» многостеночной оболочки:

$$h_f = h + h_s;$$

γ – относительная толщина несущих слоев многостеночной оболочки:

$$\gamma = \frac{h}{h_f};$$

D_f – изгибная жесткость гладкой оболочки толщиной h_f в направлении образующих;

δ_f – податливость гладкой оболочки толщиной h_f в окружном направлении.

Критическую нагрузку, соответствующую общей форме потери устойчивости будем определять по формуле

$$q_{cr} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_{xx}^{(p)}}{\delta_{yy}^{(p)}}}, \quad (5.36)$$

Здесь $D_{xx}^{(p)}$ – «приведенная» изгибная жесткость многостенной оболочки (5.7); $\delta_{yy}^{(p)}$ – податливость конструкции в окружном направлении (5.11).

Если несущие слои и стенки состоят только из продольных монослоев, то «приведенная» изгибная жесткость может быть представлена в виде:

$$D_{xx}^{(p)} = D_f(\gamma^3 + 3r_H\gamma^2 + 2r_H^2\gamma + r_H^2). \quad (5.37)$$

где

$$r_H = \frac{H_s}{h_f}. \quad (5.38)$$

Податливость конструкции в окружном направлении имеет вид:

$$\delta_{yy}^{(p)} = \frac{\delta_f}{\gamma}. \quad (5.39)$$

Подставив выражения для изгибной жесткости и податливости многостеночной оболочки в формулу (5.36), получим

$$q_{cr} = q_f \sqrt{p(\gamma)\gamma}, \quad (5.40)$$

где

$$q_f = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{D_f}{\delta_f}}, \quad p(\gamma) = \gamma^3 + 3r_H\gamma^2 + 2r_H^2\gamma + r_H^2. \quad (5.41)$$

Критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости для панели между стенками, определяется по формуле (5.12).

Выпишем эту формулу еще раз:

$$q_{cm} = k_s \frac{2\pi^2 \sqrt{D_{xx} D_{yy}}}{t_s^2} \left(1 + \frac{D_{xy} + 2D_G}{\sqrt{D_{xx} D_{yy}}} \right). \quad (5.42)$$

Здесь $D_{xx}, D_{yy}, D_{xy}, D_G$ – изгибные жесткости одного несущего слоя многостеночной оболочки; k_s – редуцированный коэффициент.

Если несущие слои оболочки состоят только из продольных монослоев, изгибные жесткости и коэффициент редукиции можно представить следующим образом соответственно:

$$D_{xx} = \frac{b_{11}h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3, D_{xy} = \frac{b_{12}h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3, \quad (5.43)$$

$$D_{yy} = \frac{b_{22}h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3, D_G = \frac{b_{33}h_f^3}{12} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^3;$$

$$k_s = \frac{2}{\gamma}. \quad (5.44)$$

Здесь $b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{33}$ – компоненты матрицы жесткости монослоев.

Алгоритм проектирования многостеночной оболочки состоит из следующих шагов:

1. Полагаем, что несущие слои и стенки оболочки состоят только из продольных монослоев. Данная схема является, очевидно, наилучшей по условиям прочности.

2. Вычисляем полную условную толщину h_f многостеночной оболочки из условия прочности:

$$h_f = \frac{q_0}{\sigma_{-1v}}. \quad (5.45)$$

Здесь σ_{-1v} – предел прочности монослоя при сжатии в направлении волокон, q_0 – заданная сжимающая нагрузка.

3. Полагая $h = h_f$, находим критическую нагрузку для гладкой оболочки q_{cr} , а затем проверяем выполнение условия устойчивости:

$$q_f \geq q_0. \quad (5.46)$$

Если это условие соблюдается, то процесс проектирования завершается. Введение подкрепляющих элементов в этом случае не позволяет снизить массу конструкции.

4. Если условие общей устойчивости не выполняется, тогда вычисляем максимально возможную по условиям устойчивости толщину гладкой оболочки

$$h_{max} = \left(\frac{q_0 R \sqrt{3}}{\sqrt{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.47)$$

Находим теоретический коэффициент снижения массы

$$k_{tlm} = \frac{h_f}{h_{max}}. \quad (5.48)$$

Полагая $k_{lm} = k_{tlm}$ и $H_s = H_{sm}$ решаем уравнение относительно γ

$$q_{cr}(\gamma) = q_0. \quad (5.49)$$

Если уравнение имеет решения на промежутке $[0; 1]$, переходим к следующему шагу. В противном случае, определяем на промежутке $[k_{tlm}; 1]$ наименьшее возможное значение коэффициента k_{lm} , при котором уравнение имеет решение, принадлежащее отрезку $[0; 1]$. Для нахождения коэффициента k_{lm} можно воспользоваться, например, методом половинного деления.

5. По найденным значениям γ и h_f вычисляем суммарную толщину несущих и условную «толщину» стенок:

$$h = h_f \gamma, \quad h_s = h_f (1 - \gamma). \quad (5.50)$$

6. Расстояние между стенками из условия сохранения местной устойчивости:

$$t_s = \pi \sqrt{\frac{2k_s}{q_0} (\sqrt{D_{xx} D_{yy}} + D_{xy} + 2D_G)}. \quad (5.51)$$

7. По известной полной условной «толщине» оболочки находим массу конструкции.

$$G_f = 2\pi R L \rho_0 h_f. \quad (5.52)$$

Здесь ρ_0 – плотность материала конструкции.

В приведенном выше алгоритме определяющим является уравнение (5.49), обеспечивающее выполнение условия общей формы потери устойчивости. Искомой величиной в этом уравнении является относительная толщина несущих

слоев γ . Покажем, что уравнение (5.49) может иметь только один положительный корень на промежутке $[0; 1]$, то есть задача проектирования имеет единственное решение.

Уравнение общей устойчивости запишем в виде

$$f(\gamma) = 0, \quad (5.53)$$

где

$$f(\gamma) = \gamma^4 + 3r_H\gamma^3 + 2r_H^2\gamma^2 + r_H^2\gamma - \left(\frac{q_0}{q_f}\right)^2. \quad (5.54)$$

Таким образом, уравнение (5.53) представляет собой алгебраическое уравнение четвертой степени относительно γ . По теореме Декарта количество положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно количеству перемен знаков в ряду его коэффициентов или четное число меньше этого количества. В многочлене (5.54) имеет место только одна перемена знака, следовательно, уравнение может иметь только один положительный корень.

Корень общего уравнения устойчивости должен принадлежать промежутку $[0; 1]$. Исследуем знаки многочлена (5.54) на границах данного промежутка.

Если $\gamma = 0$, тогда

$$f(0) = -\left(\frac{q_0}{q_f}\right)^2 < 0.$$

Если $\gamma = 1$, тогда

$$f(1) = 1 + 3r_H + 3r_H^2 - \left(\frac{q_0}{q_f}\right)^2.$$

Уравнение (5.54) имеет корень на промежутке $[0;1]$, если выполняется условие

$$f(1) > 0.$$

Таким образом, получаем квадратное неравенство относительно r_H

$$1 + 3r_H + 3r_H^2 - r_f^2 > 0,$$

где

$$r_f = \frac{q_0}{q_f} > 1.$$

Решив неравенство, получим условие существования решения общего уравнения устойчивости на промежутке $[0; 1]$:

$$r_H > r_{lH}, \quad (5.55)$$

где

$$r_{lH} = \frac{\sqrt{3(4r_f^2 - 1) - 3}}{6}. \quad (5.56)$$

Пример. Многостеночная оболочка радиусом $R = 0,5$ м и длиной $L = 1$ м находится под действием сжимающей нагрузки $q_0 = 5 \cdot 10^6$ н/м. Механические характеристики материала несущих слоев приведены в табл. 1 – 2; плотность материала $\rho_0 = 1450$ кг/м³. Оценим эффективность введения в конструкцию оболочки подкрепляющих элементов, если максимальная высота стенки равна $H_{sm} = 0,02$ м.

Программа решения уравнения общей устойчивости:

```
/*Многостеночная оболочка. Вычисление t*/;
/*t=GAMMA=h/hf*/
fpprintprec:3$
/*Нагрузка*/
q: 5e6;
/* Габариты*/
R:0.5;L:1;
/*Предел прочности*/
sig1:0.7e9;
/* Упругие характеристики монослоя*/
E1:140e9;E2:7e9;v12:0.24;v21:v12*E2/E1;G12: 2.75e9;
/*Матрица жесткости монослоя*/
B11:E1/(1-v12*v21); B22:E2/(1-v12*v21);
B12:v12*E2/(1-v12*v21);B33:G12;
/* Полная условная толщина из условий прочности */
hf: q/(sig1), numer;
```

```

/* Максимальная толщина по условиям устойчивости */
hmax:(q*R*sqrt(3)/sqrt(B11*B22-B12^2))^(1/2), numer;
/* теоретический коэффициент снижения массы */
ktlm: hf/hmax, numer;
/*коррекция*/
klm:ktlm; hf:hmax*klm, numer;
/* Изгибная жесткость и податливость гладкой оболочки*/
DF: B11*hf^3/12;
PF:1/(E2*hf);
/*Критическая нагрузка для гладкой оболочки*/
qf:2/R*sqrt(DF/PF);
/* Высота стенок*/
HSM: 0.015, numer;
/* Коэффициенты rh и rf*/
rh:HSM/hf; rf:q/qf;
/* Коэффициент rlh – нижняя граница rh*/
rlh:(sqrt(3*(4*rf^2-1))-3)/6;
/* Величина t*/
eqn:(t^3+3*rh*t^2+2*rh^2*t+rh^2)*t-rf^2;
realroots(eqn=0), numer;

```

В результате расчетов были получены следующие значения полной условной толщины и теоретического коэффициента снижения массы соответственно:

$$h_f = 0,007 \text{ м и } k_{tlm} = 0,6.$$

Таким образом, теоретически, введение подкрепляющих элементов позволяет снизить массу конструкции на 40 процентов.

Величины r_H и r_{lH} , входящие условие существования решения, соответственно равны:

$$r_H = 2,71 \text{ и } r_{lH} = 1,04.$$

Таким образом,

$$r_H > r_{IH},$$

то есть решение задачи существует и единственно.

Уравнение общей устойчивости имеет вид:

$$\gamma^4 + 8,4\gamma^3 + 15,7\gamma^2 + 7,84\gamma - 7,33 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень:

$$\gamma = 0,44.$$

Полученный результат означает, что масса подкрепляющих элементов должна составлять 56 процентов от общей массы оптимальной многостеночной конструкции.

По найденным значениям γ и h_f можно вычислить суммарную толщину несущих слоев, условную «толщину» стенок, расстояние между стенками и массу конструкции.

Программа вычисления оптимальных параметров многостеночной конструкции:

/*Многостеночная оболочка. Расчет оптимальных параметров по известным t и klm*/;

/*t=GAMMA=h/hf*/

/*Нагрузка*/

q: 5e6;

/*Габариты*/

R:0.5;L:1;

/*Предел прочности и плотность*/

sig1:0.7e9;

R0:1450;

/* Упругие характеристики монослоя*/

E1:140e9;E2:7e9;v12:0.24;v21:v12*E2/E1;G12: 2.75e9;

/* Матрица жесткости монослоя */

B11:E1/(1-v12*v21);

B22:E2/(1-v12*v21);

B12:v12*E2/(1-v12*v21);B33:G12;

```

/* Полная условная толщина из условий прочности */
hf: q/(sig1);
/* Максимальная толщина по условиям устойчивости */
hmax:(q*R*sqrt(3)/sqrt(B11*B22-B12^2))^(1/2), numer;
/* теоретический коэффициент снижения массы */
ktrlm: hf/hmax, numer;
/*коррекция!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!*/
klm:ktrlm;
hf:hmax*klm, numer;
/* Высота ребер*/
HSM: 0.02, numer;
/* Изгибная жесткость гладкой оболочки. Полная условная толщина*/
DF: B11*hf^3/12; PF:1/(E2*hf);
/*Критическая нагрузка для гладкой оболочки. Полная условная
толщина*/
qf:2/R*sqrt(DF/PF);
/* Коэффициент rh. Отношение Высоты стенки к полной условной
толщине*/
rh:HSM/hf; rf:q/qf;
/* Коэффициент t!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!*/
t:0.44;
/*Изгибная жесткость и податливость многостеночной оболочки*/
DXXR: DF*(t^3+3*rh*t^2+2*rh^2*t+rh^2);
PYY:1/(E2*hf*t);
/* Критическая нагрузка многостеночной оболочки*/
qc:2/R*sqrt(DXXR/PYY);
/* Запас устойчивости*/
kz: qc/q;
/*Суммарная толщина несущих слоев*/
h: hf*t;

```

```
/*Условная толщина стенок*/
```

```
hs:hf*(1-t);
```

```
/*Шаг стенок из условия устойчивости панели между стенками h0=h/2*/
```

```
ts:%pi*(t/sqrt(2))*sqrt((sqrt(B11*B22)+B12+2*B33)/(6*q)*hf^3),numer;
```

```
/* Истинная толщина стенок*/
```

```
bs:hs*ts/HSM;
```

```
/*Масса оптимальной оболочки*/
```

```
GF:2*%pi*R0*R*L*hf, numer;
```

В результате расчета получим следующие результаты:

$$h = 0,0031 \text{ м}; h_s = 0,004 \text{ м}; t_s = 0,021 \text{ м}; G = 32,5 \text{ кг.}$$

5.5. Статистическое моделирование пластин

Исследуем влияние разброса упругих характеристик на коэффициенты общей и местной форм потери устойчивости многостеночной пластины. Материал несущих слоев и стенок пластины – однонаправленный углепластик, характеристики которого приведены в таблице 3. Предполагается, что плотности распределения вероятностей упругих характеристик подчиняется нормальному закону.

Конструкция находится под действием равномерно распределенной по кромкам пластины сжимающей нагрузке $q = 2 \cdot 10^5$ н/м. Геометрические характеристики пластины:

$$h = 0,0025 \text{ м}; h_s = 0,0036 \text{ м}; t_s = 0,053 \text{ м}; H_s = 0,0118 \text{ м.}$$

Программа моделирования:

```
/* Многостеночная пластина. Общая и мест форма. Моделирование*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
pi:3.1415927;
```

```
/* Нагрузка */
```

```
q:2E5,numer;
```

```

/* Габариты конструкции и толщина несущего слоя*/
a:1; b:3;h0:0.001225; h:2*h0;
/* Характеристики ребер */
hs:0.0036, number;
HS:0.0118,number;
ts:0.053;
/* Матожидание и среднее кв. откл.*/
E1:140E9;
S:7E9;
E2:7E9;
S2:0.35E9;
G12:2.75E9;
SG:0.14E9;
v12:0.24;
ES:140E9;
N:1000;
list:[]$
listm:[]$
for i:1 thru N do
block(CVE1:random_normal(E1,S),
CVE2:random_normal(E2,S2),CVG12:random_normal(G12,SG),
/* Общая форма*/
DXX:8*CVE1*h0^3/12*(1+3*(HS/h)^2+3*HS/h)+CVE1*hs*HS^2/12,
KZ:DXX*(pi/a)^2/q,
list:endcons(KZ,list),
/* Местная форма*/
ES:CVE1,
DXX:CVE1*h0^3/12,
DYY:CVE2*h0^3/12,
DXY:v12*CVE2*h0^3/12,

```

```

DG:CVG12*h0^3/12,
CVES:CVE1,
ks:2*(1+CVES*hs/(CVE1*h)),
DGMT:sqrt(DXX*DYY),
qcrm:ks*2*(pi/ts)^2*DGMT*(1+(DXY+2*DG)/DGMT),numer,
KZM:qcrm/q,
listm:endcons(KZM,listm));
/* Запись в файл */
write_data(list,"listMSTPLATE");
write_data(listm,"listMSTPLATEM");

```

Результаты моделирования для коэффициентов общей и местной устойчивости записываются в файлы listMSNPLATE и listMSNPLATEM соответственно.

Программа обработки результатов моделирования:

```

/* Многостеночная пластина. Обработка*/
load(descriptive);
load(distrib);
fpprintprec:4;
ratprint: false$
/* Чтение из файла */
list:read_list("listMSTPLATE")$
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/
AVR:mean(list), numer;
STD:std(list);
KVAR: STD/AVR*100;
/* Чтение из файла */
listm:read_list("listMSTPLATEM")$
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/
AVRM:mean(listm), numer;
STDM:std(listm);

```


KVARM: STDM/AVRM*100;

Результаты моделирования коэффициента общей устойчивости:

выборочное среднее – 1,008;

среднеквадратичное отклонение – 0,05;

коэффициент вариации – 5%.

Результаты моделирования коэффициента местной устойчивости:

выборочное среднее – 1,022;

среднеквадратичное отклонение – 0,03;

коэффициент вариации – 3%.

Таким образом, разброс упругих характеристик материала конструкции не оказывает существенного влияния на коэффициенты как общей, так и местной форм потери устойчивости.

Программа вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса:

```
/* Многостеночная пластина. Асимметрия и эксцесс. Норм.*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listMSTPLATE")$
```

```
/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */
```

```
N:1000;
```

```
RPRASS: sqrt(6/N),numer;
```

```
RPREKS: sqrt(24/N),numer;
```

```
/* Асимметрия и эксцесс */
```

```
ASS:skewness(list);
```

```
EKS:kurtosis(list);
```

```
KRTASS: abs(ASS)/RPRASS;
```

```
KRTEKS:abs(EKS)/RPREKS;
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
listm:read_list("listMSTPLATEM")$
```

/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */

N:1000;

/* Асимметрия и эксцесс */

ASSM:skewness(listm);

EKSM:kurtosis(listm);

KRTASSM: abs(ASSM)/RPRASS;

KRTEKSM:abs(EKSM)/RPREKS;

Ошибки репрезентативности коэффициентов асимметрии и эксцесса равны соответственно

$$m_A = 0,078; m_E = 0,155.$$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса для коэффициента общей формы потери устойчивости соответственно равны:

$$\bar{A} = -0,056; \bar{E} = -0,30.$$

Проверим выполнение условий нормальности

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = 0,75 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = 1,09 < 3.$$

Таким образом, условие нормальности для коэффициента общей устойчивости выполняются.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса для коэффициента местной формы потери устойчивости соответственно равны:

$$\bar{A} = 0,05; \bar{E} = 0,13.$$

Проверим выполнение условий нормальности

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = 0,70 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = 0,82 < 3.$$

Таким образом, условие нормальности для коэффициента местной устойчивости также выполняются.

Программа построения гистограмм:

/*Построение гистограмм */

fpprintprec:3;

load(descriptive);

load(distrib);

```

ratprint: false$
list:read_list("listMSTPLATE")$
/*Гистограммы*/
histogram(list, frequency=percent,
xlabel= "η", ylabel="w",
fill_density=0.1,
fill_color=grey,
terminal=png,
file_name="histMSTPLATE");
listm:read_list("listMSTPLATEM")$
/*Гистограммы*/
histogram(listm, frequency=percent,
xlabel= "η", ylabel="w",
fill_density=0.1,
fill_color=grey,
terminal=png,
file_name="histMSTPLATEM");

```

Гистограмма распределения относительных частот w коэффициента общей устойчивости представлена на рис. 17.

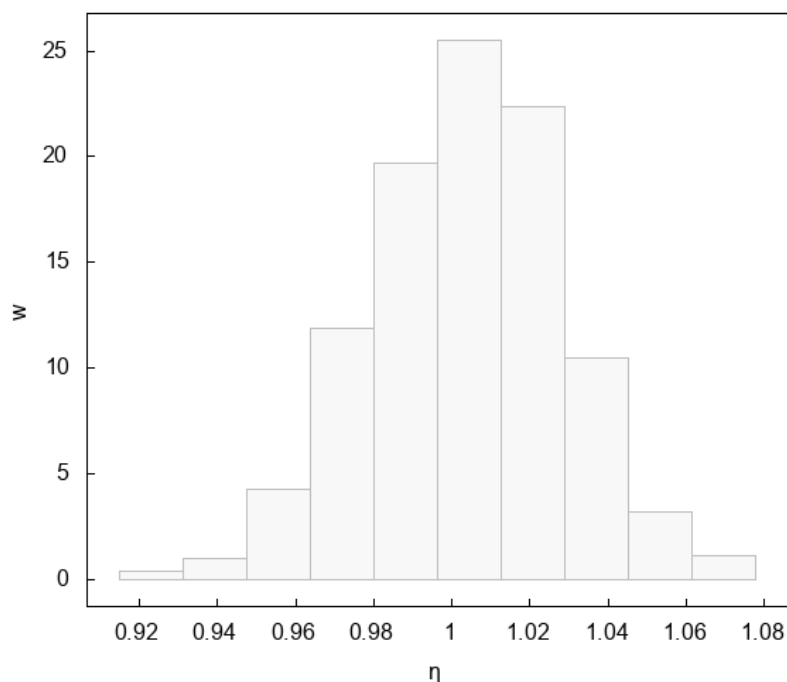


Рис. 17. Гистограмма для коэффициента устойчивости общей формы потери устойчивости

Гистограмма распределения относительных частот w коэффициента местной устойчивости представлена на рис. 18.

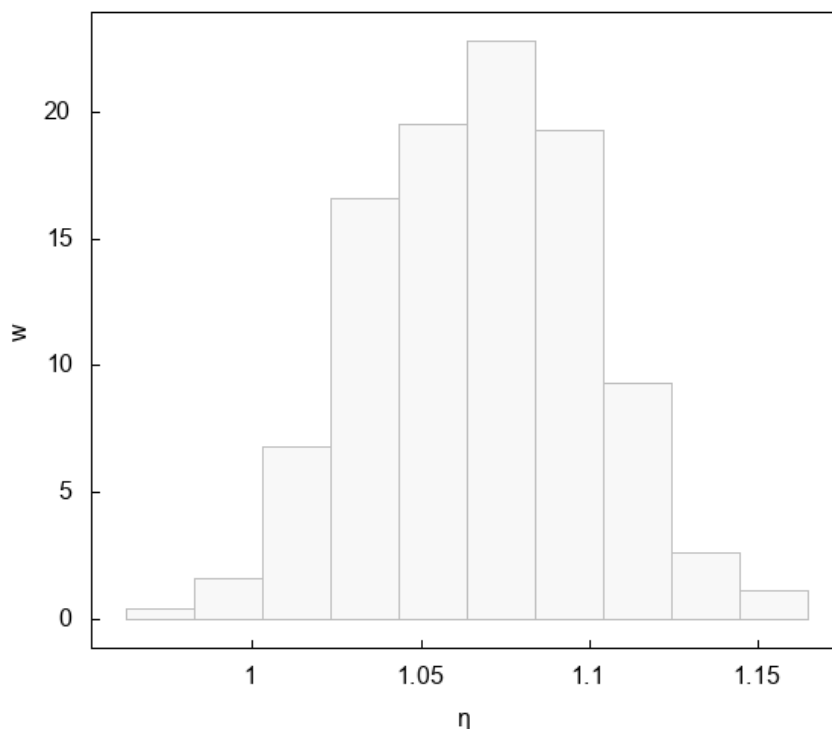


Рис. 18. Гистограмма для коэффициента устойчивости местной формы потери устойчивости

Проверим гипотезы о равенстве коэффициентов устойчивости η для общей и местной форм потери устойчивости их теоретическим значениям. Критическая область в обоих случаях является левосторонней. Генеральная дисперсия неизвестна. Входными величинами в этой задаче служат уровень значимости, выборочное среднее и выборочное среднеквадратичное отклонение. Уровень значимости примем равным $\alpha=0,05$.

Нулевая гипотеза H_0 : $\eta=1$.

Альтернативная гипотеза H_1 : $\eta<1$.

Программа проверки гипотез:

/*Проверка гипотез для многостеночной пластины. t – распределение.

Коэффициент устойчивости*/

```
load(stats);
```

```
fpprintprec:5;
```

```
ratprint: false$
```

```

/* Уровень значимости */
alfa:0.05;

/* Число испытаний */
N:1000;

/* Чтение из файла */
list:read_list("listMSTPLATE")$

/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/
AVR:mean(list), numer;
STD:std1(list),numer;

/* Наблюдаемая статистика*/
z:(AVR-1)*sqrt(N)/STD, numer;

/*Кр. знач. статистики*/
zkr:quantile_student_t(1-alfa,N-1), numer;

/* Чтение из файла */
listm:read_list("listMSTPLATEM")$

/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/
AVRM:mean(listm), numer;
STDM:std1(listm),numer;

/* Наблюдаемая статистика*/
zm:(AVRM-1)*sqrt(N)/STDM, numer;

/*Кр. знач. статистики*/
zkrM:quantile_student_t(1-alfa,N-1), numer;

```

Критическое значение $t_{кр} = 1,65$. Наблюдаемое значения $t_{набл}$ для общей формы потери устойчивости равно $t_{набл} = 4,97$, следовательно условие

$$t_{набл} > t_{кр}$$

выполняется, т.е. гипотеза для общей формы потери устойчивости принимается. Наблюдаемое значения $t_{набл}$ для местной формы потери устойчивости равно $t_{набл} = 21,7$, т.е. гипотеза для местной формы потери устойчивости также принимается.

5.6. Статистическое моделирование оболочек

Исследуем влияние разброса упругих характеристик на коэффициенты общей и местной форм потери устойчивости многостеночной цилиндрической оболочки радиусом $R = 0,5$ м и длиной $L = 1$ м. Материал несущих слоев и стенок пластины – однонаправленный углепластик, характеристики которого приведены в табл. 3. Предполагается, что плотности распределения вероятностей упругих характеристик подчиняются нормальному закону. Конструкция находится под действием равномерно распределенной по торцам оболочки сжимающей нагрузке $q = 5 \cdot 10^6$ н/м.

Геометрические характеристики оболочки, полученные в результате решения задачи оптимизации (п.5.4):

$$h = 0,0031 \text{ м}; h_s = 0,004 \text{ м}; t_s = 0,021 \text{ м}.$$

Программа моделирования:

```
/* Многостеночная оболочка. Общая и мест форма. Моделирование*/  
load(descriptive);  
load(distrib);  
fprintfprec:4;  
ratprint: false$  
pi:3.1415927;  
/* Нагрузка */  
q:5E6,numer;  
/* Габариты конструкции и толщина несущего слоя*/  
R:0.5; L:1;h0:0.0043/2; h:2*h0;  
/* Характеристики ребер */  
hs:0.003, numer;  
HS:0.015,number;  
ts:0.020;  
/* Матожидание и среднее кв. откл.*/  
E1:140E9;  
S:7E9;
```

```

E2:7E9;
S2:0.35E9;
G12:2.75E9;
SG:0.14E9;
v12:0.24;
ES:E1;
N:1000;
list:[]$
listm:[]$
for i:1 thru N do
block(CVE1:random_normal(E1,S),
CVE2:random_normal(E2,S2),
CVG12:random_normal(G12,SG),
/* Общая форма*/
DXX:8*CVE1*h0^3/12*(1+3*(HS/h)^2+3*HS/h)+CVE1*hs*HS^2/12,
KZ:DXX*(pi/a)^2/q,
CXX:CVE1*h0,
CYY:CVE2*h0,
CXY:v12*CVE2*h0,
CG:CVG12*h0,
PXX: CYY/(CXX*CYY-CXY^2),
PYY: CXX/(CXX*CYY-CXY^2),
PXY:-CXY/(CXX*CYY-CXY^2),
PG:1/CG,
DXXP:8*E1*h0^3/12*(1+3*(HS/h)^2+3*HS/h)+E1*hs*HS^2/12,
PYYP:1/(2*CYY),
qcr:2/R*sqrt(DXXP/PYYP),
KZ:qcr/q,
list:endcons(KZ,list),

```

```

/* Местная форма*/
ES:CVE1,
DXX:CVE1*h0^3/12,
DYY:CVE2*h0^3/12,
DXY:v12*CVE2*h0^3/12,
DG:CVG12*h0^3/12,
CVES:CVE1,
ks:2*(1+CVES*hs/(CVE1*h)),
DGMT:sqrt(DXX*DYY),
qcrm:ks*2*(pi/ts)^2*DGMT*(1+(DXY+2*DG)/DGMT),
KZM:qcrm/q,
listm:endcons(KZM,listm));
write_data(list,"listMSTSHELL");
write_data(listm,"listMSTSHELLM");

```

Программа обработки результатов моделирования:

```

/* Многостеночная оболочка. Обработка*/
load(descriptive);
load(distrib);
fpprintprec:4;
ratprint: false$
/* Чтение из файла */
list:read_list("listMSTSHELL")$
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/
AVR:mean(list), numer;
STD:std(list);
KVAR: STD/AVR*100;
/* Чтение из файла */
listm:read_list("listMSTSHELLM")$
/* Средн. арифм, среднекв. отклонение, коэф. вар*/

```


AVRM:mean(listm), numer;

STDM:std(listm);

KVAR: STDM/AVRM*100;

Результаты обработки данных для общей формы потери устойчивости:

выборочное среднее – 1,00;

среднеквадратичное отклонение – 0,025;

коэффициент вариации – 2,5%.

Результаты обработки данных для местной формы потери устойчивости:

выборочное среднее – 1,07;

среднеквадратичное отклонение – 0,033;

коэффициент вариации – 3,09%.

Таким образом, разброс упругих характеристик материала конструкции не оказывает существенного влияния на коэффициенты как общей, так и местной форм потери устойчивости.

Программ вычисления коэффициентов асимметрии и эксцесса:

```
/* Многостеночная оболочка. Асимметрия и эксцесс. Норм.*/
```

```
load(descriptive);
```

```
load(distrib);
```

```
fpprintprec:4;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listMSTHELL")$
```

```
/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */
```

```
N:1000;
```

```
RPRASS: sqrt(6/N),numer;
```

```
RPREKS: sqrt (24/N),numer;
```

```
/* Асимметрия и эксцесс */
```

```
ASS:skewness(list);
```

```
EKS:kurtosis(list);
```

KRTASS: abs(ASS)/RPRASS;

KRTEKS:abs(EKS)/RPREKS;

/* Чтение из файла */

listm:read_list("listMSTSHELLM")\$

/* Ошибки репрезентативности асимметрии и эксцесса */

N:1000;

/* Асимметрия и эксцесс */

ASSM:skewness(listm);

EKSM:kurtosis(listm);

KRTASSM: abs(ASSM)/RPRASS;

KRTEKSM:abs(EKSM)/RPREKS;

Ошибки репрезентативности коэффициентов асимметрии и эксцесса равны соответственно

$$m_A = 0,078; m_E = 0,155.$$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса для коэффициента общей формы потери устойчивости соответственно равны:

$$\bar{A} = -0,115; \bar{E} = 0,180.$$

Проверим выполнение условий нормальности

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = 1,49 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = 1,16 < 3.$$

Таким образом, условие нормальности для коэффициента общей устойчивости выполняются.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса для коэффициента местной формы потери устойчивости соответственно равны:

$$\bar{A} = 0,012; \bar{E} = -0,205.$$

Проверим выполнение условий нормальности

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = 0,16 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = 1,32 < 3.$$

Таким образом, условие нормальности для коэффициента местной устойчивости также выполняются.

Программа построения гистограмм:

```
/*Построение гистограмм */
fpprintprec:3;
load(descriptive);
load(distrib);
ratprint: false$
list:read_list("listMSTSHELL")$
/*Гистограмма*/
histogram(list, frequency=percent,
  xlabel= "η", ylabel="w",
fill_density=0.1,
fill_color=grey,
  terminal=png,
file_name="histMSTSHELL");
listm:read_list("listMSTSHELLM")$
/*Гистограмма*/
histogram(listm, frequency=percent,
  xlabel= "η", ylabel="w",
fill_density=0.1,
fill_color=grey,
terminal=png, file_name="histMSTSHELLM");
```

Гистограмма распределения относительных частот w коэффициента общей устойчивости представлена на рис.19.

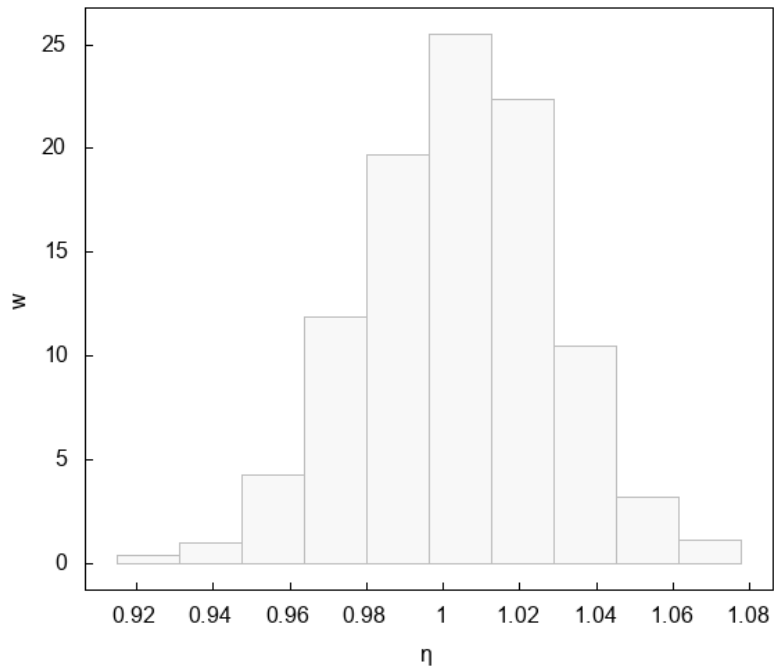


Рис. 19. Гистограмма для коэффициента устойчивости общей формы потери устойчивости

Гистограмма распределения относительных частот w коэффициента местной устойчивости представлена на рис. 20.

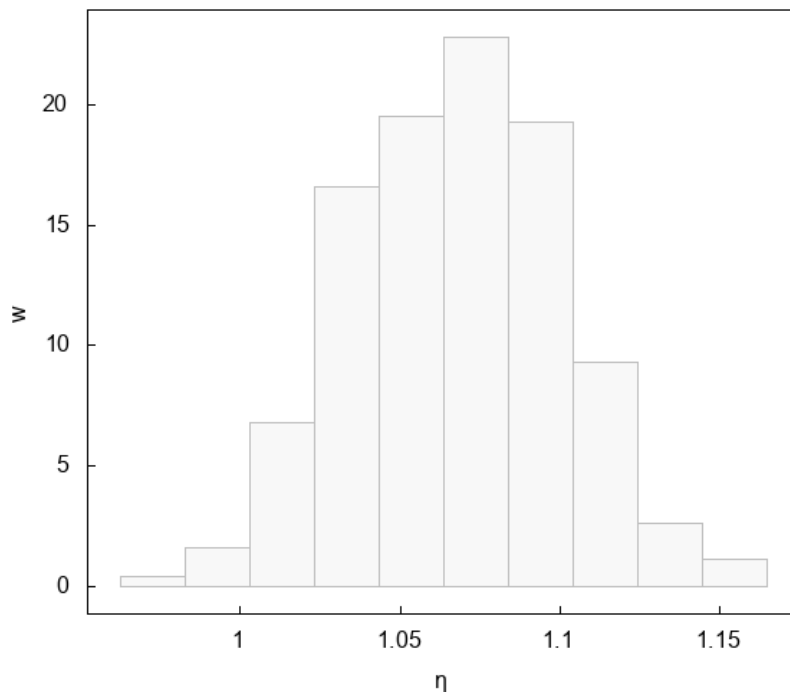


Рис. 20. Гистограмма для коэффициента устойчивости местной формы потери устойчивости

Проверим гипотезы о равенстве коэффициентов устойчивости η для общей и местной форм потери устойчивости их теоретическим значениям. Критическая область в обоих случаях является левосторонней. Генеральная дисперсия

неизвестна. Входными величинами в этой задаче служат уровень значимости, выборочное среднее и выборочное среднеквадратичное отклонение. Уровень значимости примем равным $\alpha=0,05$.

Нулевая гипотеза $H_0: \eta=1$.

Альтернативная гипотеза $H_1: \eta<1$.

Программа проверки гипотез:

```
/*Проверка гипотез для многостеночной оболочки.
```

```
t – распределение. Коэффициент устойчивости*/
```

```
load(stats);
```

```
fpprintprec:3;
```

```
ratprint: false$
```

```
/* Уровень значимости */
```

```
alfa:0.05;
```

```
/* Число испытаний */
```

```
N:1000;
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
list:read_list("listMSTSHELL")$
```

```
/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/
```

```
AVR:mean(list), numer;
```

```
STD:std1(list),numer;
```

```
/* Наблюдаемая статистика*/
```

```
z:(AVR-1)*sqrt(N)/STD, numer;
```

```
/*Кр. знач. статистики*/
```

```
zkr:quantile_student_t(1-alfa,N-1), numer;
```

```
/* Чтение из файла */
```

```
listm:read_list("listMSTSHELLM")$
```

```
/* Коэф. уст. Матожидание и среднекв. отклонение*/
```

```
AVRM:mean(listm), numer;
```

```
STDM:std1(listm),numer;
```

```
/* Наблюдаемая статистика*/
```

$z:(AVRM-1)*\sqrt{N}/STDM, numer;$

*/*Кр. знач. статистики*/*

$zkr:quantile_student_t(1-alfa,N-1), numer;$

Наблюдаемое значения $t_{набл}$ для общей формы потери устойчивости равно $t_{набл} = 4,89$, а для местной формы потери устойчивости – $t_{набл} = 64,7$. Критическое значение $t_{кр} = 1,65$. Таким образом, в обоих случаях условие

$$t_{набл} > t_{кр}$$

выполняется, т.е. гипотеза о равенстве коэффициентов устойчивости их теоретическим значениям принимается.

5.7. Выводы по главе

Многостеночная конструкция состоит из двух одинаковых внешних слоев (несущие обшивки), соединенных набором стенок из композитного материала. Конструкции этого типа сочетают в себе свойства симметрии трехслойной конструкции и высокую изгибную жесткость ребристой конструкции с односторонним набором подкрепляющих элементов.

При исследовании многостеночных пластин следует учитывать две основные формы потери устойчивости:

- общая форма потери устойчивости,
- местная форма потери устойчивости.

Критическая нагрузка, соответствующая общей форме потери устойчивости многостеночной пластины, определяется по формуле для ортотропной пластинки с приведенными жесткостями.

Критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости определяется по формуле для ортотропной пластинки.

В случае оболочки критическая нагрузка, соответствующая общей форме потери устойчивости многостеночной оболочки, определяется по формуле ортотропной оболочки с приведенными жесткостями, а критическая нагрузка, соответствующая местной форме потери устойчивости – по формуле для ортотропной пластинки.

Оценка эффективности использования многостеночных пластин вместо гладких конструкций производится при помощи коэффициента снижения массы. Построен алгоритм проектирования и сформулированы условия, при которых решение задачи проектирования многостеночной пластины существует и единственно. Приведены примеры, позволяющие оценить эффективность использования многостеночных пластин по сравнению с гладкими многослойными пластинами.

Аналогичное случаю многостеночных пластин оценка эффективности многостеночных оболочек производилось при помощи коэффициента снижения массы. Построен алгоритм проектирования и сформулированы условия существования и единственности решения задачи оптимального проектирования для многостеночной оболочки.

Результаты статистического анализа многостеночных конструкций позволяют сделать следующие выводы:

- Разброс упругих характеристик материала конструкции не оказывают существенного влияния на коэффициенты устойчивости многостеночных пластин и оболочек.

- Малые значения коэффициентов асимметрии и эксцесса свидетельствуют о нормальности распределений коэффициентов общей и местной устойчивости.

- Гипотезы о равенстве коэффициентов общей и местной устойчивости многостеночных конструкций их теоретическим значениям не отвергаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным преимуществом конструкций из композитного материала от конструкций из традиционных материалов (металлических сплавов) является возможность управления механическими характеристиками материала за счет изменения структуры композитного материала. Благодаря этой возможности можно достичь необходимой жесткости и прочности конструкции при минимальной массе. В целом, проблема расчета и оптимального проектирования конструкций из композитного материала исследована достаточно подробно. Современные системы инженерного анализа, как правило, содержат модули, позволяющий производить расчет и проектирование композитных конструкций при различных типах нагрузок.

Основным недостатком композитных материалов по сравнению с традиционными материалами является значительный разброс механических характеристик. При определенных условиях случайные отклонения свойств композитного материала могут оказать существенное влияние на несущую способность конструкции. Поэтому исследование влияния разброса механических характеристик материала на несущую способность конструкции из композитного материала должно стать обязательным этапом проектного расчета.

Следует отметить, что статистический анализ оптимальных конструкций, полученных в детерминированной постановке, не позволяет исчерпывающим образом оценить влияние разброса механических характеристик исходного материала на проект оптимальной конструкции. Корректное решение задачи оптимизации композитных конструкций возможно только в стохастической постановке. Анализ известной автору литературы показывает, что применительно к рассматриваемому классу задач, данная проблема изучена недостаточно и требует дальнейших исследований.

6. ОСНОВНЫЕ КОМАНДЫ СИСТЕМЫ MAXIMA

6.1. Арифметические операции

Ввод любой команды в системе MAXIMA заканчивается символом «;» или «\$». Первый символ используется, если результат выполнения команды надо вывести на экран, а второй – когда команда выполняется без вывода на экран. Выполнение команды происходит при нажатии комбинации клавиш “Shift+Enter” или “Cntrl+Enter”.

Для обозначения арифметических операций в системе Maxima используются математические знаки: «+» – сложение, «-» – вычитание, «*» – умножение, «/» – деление. Например, команда вычисления суммы дробей

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5}.$$

имеет вид

$$1/3+1/5.$$

Результат вычислений: $\frac{8}{15}$.

Если результат надо получить в десятичной форме, то после команды вычисления выражения следует дописать флаг numer:

$$1/3+1/5, numer.$$

В результате выполнения этой команды по умолчанию выводится 16 знаков числа

$$0.5333333333333333.$$

Для изменения количества значащих цифр используется команда fpprintprec. Например,

$$fpprintprec:5.$$

Теперь при выводе числа в десятичной записи система Maxima будет выдавать 5 знаков:

$$1/3+1/5, numer.$$

Результат вычислений: 0.53333.

Для ввода чисел, заданных в экспоненциальной форме, используется буква «e». Например, команда вычисления выражения

$$3,5 \cdot 10^2 + 6,2 \cdot 10^3$$

записывается в виде

$$3.5e2+6.2e3.$$

Для возведения в степень используется символ “^”. Для извлечения корня $\sqrt[n]{x}$ можно использовать операцию возведения в степень $x^{(1/n)}$. Например, команда вычисления выражения

$$\frac{5^3}{\sqrt[3]{27} + 8^{\frac{2}{3}}}$$

записывается так:

$$5^3/(27^{(1/3)}+8^{(2/3)}).$$

В системе Maxima константа π ($\pi = 3,14159 \dots$) обозначается символом «%pi», а число e ($e = 2,71828 \dots$) – символом «%e». Например, команда вычисления выражения

$$\frac{\pi^2}{e + 1}$$

имеет вид

$$\%pi^2/(\%e+1), numer.$$

Результат: 2.654345435988532.

Для присваивания переменным значений используется символ «:». Например, команды присваивания значений 5 и 10 переменным a и b соответственно имеют вид

$$a: 5; b:10.$$

Вычислим значение выражения

$$d = x^2 + y^2$$

при $x = 3, y = 4$.

Команды:

$$x:3; y:4; d:x^2+y^2.$$

Результат: 25.

6.2. Списки

Список – это упорядоченная совокупность объектов различного типа. Чтобы задать список, достаточно записать его элементы через запятую и ограничить запись квадратными скобками. Например,

```
list1:[1,2,3,x,y].
```

Список `list1` содержит 5 элементов: три числа и две переменные.

Список может быть пустым или состоять из одного элемента. Например:

```
list2:[]; list3:[3].
```

Список `list2` – пустой, а список `list3` содержит только один элемент.

Ссылка на элемент списка производится по номеру элемента списка.

Например, по команде

```
list1[4]
```

на экране появится четвертый элемент списка `list1`: `x`.

Перечислим наиболее употребительные команды, используемые для работы со списками.

По команде

```
length(список)
```

вычисляется число элементов списка. Например, по команде

```
length(list1)
```

получим число элементов списка `list1`: `5`.

Команда

```
makelist(выражение,  $i$ ,  $i_0$ ,  $i_n$ )
```

создаёт список, каждый элемент которого генерируется из некоторого выражения, где индекс i меняется от i_0 до i_n . Например, по команде

```
list:makelist( $i^2$ ,  $i$ , 1,4)
```

формируется список

```
list:[1,4,9,16].
```

Команда `append` позволяет склеивать списки. Например, введем последовательно следующие команды:

```
L1:[1,3,5];
```

```
L2:[2,4,6];
```

```
L3:append(L1,L2).
```

В результате получим список:

```
L3: [1,3,5,2,4,6].
```

Создать новый список, komponуя элементы двух списков поочерёдно в порядке следования, позволяет команда `join`. Например, введем последовательно следующие команды:

```
L1:[1,3,5];
```

```
L2:[2,4,6];
```

```
L4:join(L1,L2).
```

В результате получим список:

```
L4: [1,2,3,4,5,6].
```

Команда `cons(expr, list)` создаёт новый список, первым элементом которого будет `expr`, а остальные — элементы списка `list`. . Например, введем последовательно две команды:

```
L1:[1,3,5]; L5:cons(0,L1).
```

В результате получим список, состоящий из четырех элементов:

```
L5: [0,1,3,5].
```

Команда `endcons(expr, list)` создаёт новый список, последним элементом которого будет `expr`, а остальные — элементы списка `list`. Например, введем последовательно две команды:

```
L2:[2,4,6]; L6:endcons(7,L2).
```

В результате получим список, состоящий из четырех элементов:

```
L6: [2,4,6,7].
```

Для записи списка `list` в файл используется команда

```
write_data(list,"имя файла").
```

Чтение списка `list` из внешнего файла осуществляется по команде

```
list:read_list("имя файла").
```

6.3. Функции и графики

В системе Maxima имеется большой набор математических функций. Наиболее употребительные из них приведены ниже.

| Обозначение | Название |
|-------------|----------------------|
| abs | Абсолютная величина |
| acos | Арккосинус |
| acot | Арккотангенс |
| asin | Арсинус |
| atan | Арктангенс |
| cos | Косинус |
| cot | Котангенс |
| exp | Экспонента |
| log | Натуральный логарифм |
| sin | Синус |
| sqrt | Квадратный корень |
| tan | Тангенс |

Пример 1. Вычислить значение выражения

$$\frac{|\sqrt{8} - e^2|}{\ln(2) + 1}.$$

Результат вычислений представить в форме десятичного числа.

Команда:

`abs(sqrt(8)-exp(2))/(log(2)+1), numer.`

Результат вычислений: 2.693580940007946.

Пользователь может задать собственные функции. Для этого сначала указывается имя функции, в скобках перечисляются названия аргументов, после знака «:=» следует описание функции. В качестве примера построим функцию вычисления логарифма по произвольному основанию, используя известную из школьного курса алгебры формулу

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Очевидно, данная функция зависит от двух аргументов:

`lgf(x,a):=log(x)/log(a).`

Пример 2. Вычислить $\log_7 13 \cdot \log_{13} 49$.

Команды:

```
lgf(x,a):=log(x)/log(a);
```

```
lgf(13,7)*lgf(49,13), numer;
```

Результат выполнения команд: 2.

Пример 2. Вычислить $\frac{5 \operatorname{tg} 44^\circ}{\operatorname{ctg} 46^\circ}$.

Чтобы вычислить значение тригонометрической функции, надо сначала перевести аргумент из градусной меры в радианную меру:

$$\varphi = \frac{\pi \alpha}{180^\circ}.$$

Здесь φ и α – радианная и градусная меры углов соответственно. Для решения этого примера, очевидно, надо задать функцию, переводящую градусную меру угла в радианную.

Команды:

```
fi(alfa):= %pi*alfa/180;
```

```
5*tan(fi(44))/cot(fi(46)), numer.
```

Результаты выполнения команд: 5.

Для построения графика функции $y = f(x)$ используется команда

```
plot2d(y,[x,a,b])$.
```

Здесь y – выражение, задающее функцию $y = f(x)$; x – аргумент; a, b – соответственно левая и правая границы отрезка, на котором строится график функции. Например, построим график функции $y = x^2 - 1$ на отрезке $[-5, 5]$.

Команда:

```
plot2d(x^2-1,[x,-5,5])$
```

Результат выполнения команды представлен на рис. 21.

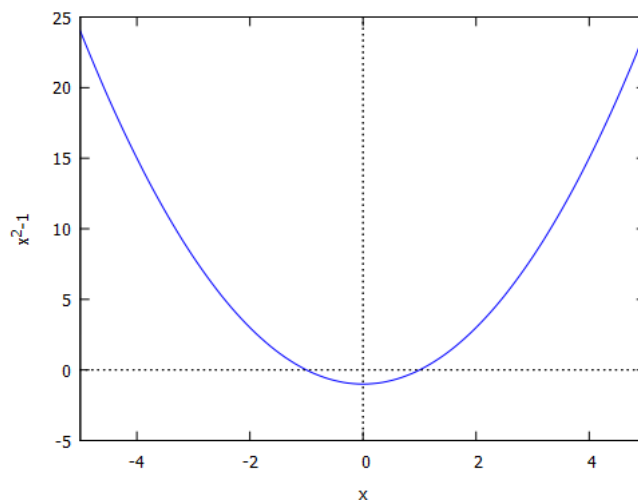


Рис. 21. График функции $y = x^2 - 1$

Для построения графика функции по заданному набору точек с координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ можно воспользоваться командой

`plot2d([discrete,CXY])$.`

Здесь `CXY` – список, каждый элемент которого является подсписком, состоящим из двух элементов. Первый элемент подсписка – координата x , второй – координата y . Например, построим график функции по заданному набору точек: $(0, 0), (1, 4), (2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 12)$.

Команда:

`plot2d([discrete, [[0,0], [1,4], [2,7], [3,9], [4,11], [5,12]]])$.`

Результат выполнения команды представлен на рис. 22.

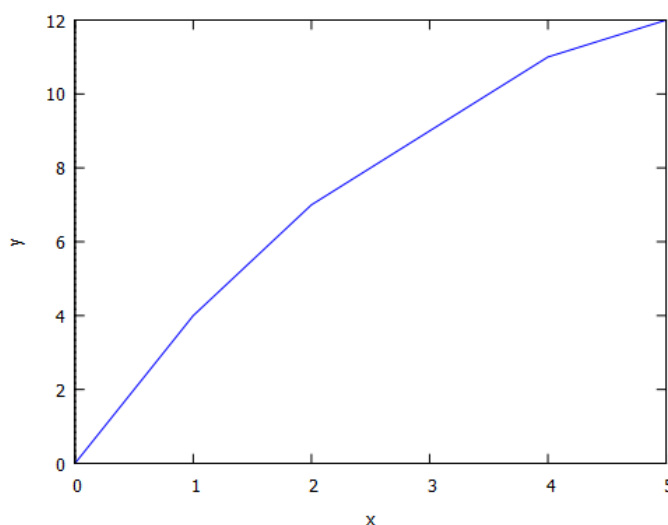


Рис. 22. График функции, заданной набором точек

Координаты точек также могут быть заданы в виде двух списков, содержащих списки координат x и y соответственно. Например, предыдущий график можно было построить при помощи следующих команд:

x : [0,1,2,3,4,5]

y : [0,4,7,9,11,12]

plot2d([discrete, x,y]).

6.4. Решение уравнений

Для решения уравнений в системе Maxima используется команда

`solve(eq,x).`

Здесь `eq` – уравнение, `x` – искомая величина.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-1} = 2$.

Команда:

`solve(sqrt(x-1)=2,x);`

Результат: $[x = 5]$.

Для нахождения действительных корней многочлена можно использовать команду

`realroots(eq).`

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.

Команда:

`realroots(x^3-2*x^2+x-2=0).`

Результат: $[x = 2]$.

6.5. Матрицы

Для создания матриц, состоящей из m строк и n столбцов, в системе Maxima используется команда

`matrix(row1, row2, ..., rowm).`

Здесь row1, row2,..., rowm – строки матрицы, каждая из которых представляет собой список из n элементов. Например, команда построения квадратной матрицы размерности $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет вид

A:matrix([2,3],[3,4]).

Для создания единичной матрицы размерности $n \times n$ используется команда

ident(n).

Например, по команде

ident(3)

будет построена матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для транспонирования матрицы A используется команда

transpose(A).

Например, выполним транспонирование матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Команды:

A:matrix([2,1],[3,4])\$

AT: transpose(A).

Результат: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Команда умножения матриц A и B обозначается символом «.» (точка), т. е. имеет вид:

$A \cdot B$.

Например, найдем произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в указанном порядке.

Команды:

A:matrix([1,3],[2,1])\$

B:matrix([2,2],[1,1])\$

C: A.B;

Результат: $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Для нахождения определителя матрицы A используется команда

determinant (A).

Например, вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Команды:

A:matrix([1,2,1],[2,4,2], [1,2,3])\$

D: determinant(A).

Результат: 0.

Для нахождения ранга матрицы A используется команда

rank(A).

Например, найдем ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Команды:

A:matrix([1,2,3],[0,1,1],[0,2,1]);

r: rank(A).

Результат: 3

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} можно воспользоваться функцией

invert(A).

Построим, например, матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Команды:

A:matrix([4,5],[3,4]);

AO: invert(A).

Результат: $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

6.6. Пределы

Предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$ вычисляется по команде

limit(y,x,a).

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$.

Команды:

$$y:(x^2-6*x+5)/(x^2-3*x+2)\$$$

$$\text{limit}(y,x,1);$$

Результат: 4.

Предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ вычисляется по команде

$$\text{limit}(y,x,\text{inf}).$$

Если $x \rightarrow -\infty$, соответствующая команда имеет вид

$$\text{limit}(y,x,\text{minf}).$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3+6x^2+1}{x^3+3x+4}$.

Команды:

$$y:(2*x^3+6*x^2+1)/(x^3+3*x+4)\$$$

$$\text{limit}(y,x,\text{inf});$$

Результат: 2.

Для нахождения правосторонних и левосторонних пределов функции

используются соответственно следующие команды:

$$\text{limit}(y,x,a,\text{plus}) \text{ и } \text{limit}(y,x,a,\text{minus}).$$

Пример 3. Вычислить предел справа функции $y = \text{arctg} \frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$.

Команды:

$$y:\text{atan}(1/x)\$$$

$$r:\text{limit}(y,x,0,\text{plus});$$

Результат: $\frac{\pi}{2}$.

6.7. Дифференцирование и интегрирование функций

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ используется команда $\text{diff}(y,x)$.

Пример 1. Вычислить производную функции $y = 3x^2 + 2x + 4$.

Команды:

у:3*x^2+2*x+4\$

ур:diff(y,x).

Результат: $6x + 2$

Для нахождения производных функции $y = f(x)$ высших порядков используется команда

$\text{diff}(y,x,n)$.

Здесь n – порядок производной.

Пример 2. Найти третью производную функции $y = x^3 + x + 1$.

Команды:

у:x^3+x+1\$

ур:diff(y,x,3).

Результат: 6.

Для нахождения неопределенного интеграла функции $y = f(x)$ в системе Maxima служит команда

$\text{integrate}(y,x)$.

Пример 3. Найти интеграл $\int (6x^2 + 1)dx$.

Команды:

у: 6*x^2+1;

i:integrate(y,x).

Результат: $2x^3 + x$.

Определенный интеграла функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ вычисляется по команде

$\text{integrate}(y,x,a,b)$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 (3x^2 + 1)dx$.

Команды:

y: 3*x^2+1\$

i:integrate(y,x,0,1);

Результат: 2.

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования можно вычислять при помощи констант inf и minf .

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x}$.

Команды:

y: 1/exp(x)\$

i:integrate(y,x,0,inf);

Результат: 1

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

Команды:

y: 1/x^2\$

i:integrate(y,x,minf,-1);

Результат: 1.

6.8. Программирование циклов и ветвлений

Система MAXIMA содержит все необходимые средства для написания программ, содержащих операторы цикла и условные операторы.

В простейшем случае оператор цикла имеет следующий формат:

for перемен: нач_знач step шаг thru кон_знач do выражение.

Например, вывод на экран всех четных чисел от 2 до 100 выглядит следующим образом:

```
for i:2 step 2 thru 100 do print(i)$
```

Если шаг равен единице, конструкцию step можно опустить. Например, вывод на экран квадратов первых пяти натуральных чисел осуществляется так:

```
for i:1 thru 5 do print(i^2)$
```

Условный оператор имеет следующий формат:

if условие then выражение1 else выражение2.

Например, присвоить переменной *m* максимума из двух переменных *a* и *b* можно двумя способами:

if *a*>*b* then *m*:*a* else *m*:*b*

или

m: if *a*>*b* then *a* else *b*.

В случае необходимости конструкцию *else* можно опустить. Например, поиск максимума *m* из двух переменных *a* и *b* можно было выполнить следующим образом:

m:*b*;

if *a*>*m* then *m*:*a*.

При записи условий можно использовать не только операторы сравнения *<*, *>*, *<=*, *>=*, *=*, *#* , но и логические операторы *and*, *or*, *not*.

Для того, чтобы в операторе цикла или условном операторе можно было выполнить несколько команд, необходимо их записать в круглых скобках через запятую, например, блок команд для обмена значений переменных *a* и *b* имеет вид:

(*t*:*a*, *a*:*b*, *b*:*t*).

6.9. Пакет *descriptive*

Система *Maxima* содержит пакет *descriptive*, предназначенный для решения задач описательной статистики. Загрузка пакета осуществляется по команде

load ("descriptive").

Статистическим распределением выборки называется перечень вариантов и соответствующих им частот. Для построения статистического ряда выборки, представленной списком *list*, используется команда

discrete_freq(list).

Пример 1. Пусть имеется выборка:

4, 7, 6, 1, 5, 10, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 5, 2, 2, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 4, 10, 10, 4.

Требуется построить статистическое распределение выборки.

Команды:

```
load(descriptive)$
```

```
list:[4,7,6,1,5,10,3,6,6,6,9,9,5,2,2,7,7,4,6,7,8,4,10,10,4] $
```

```
DF:discrete_freq(list);
```

```
Результат: [[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10], [1,2,1,4,2,5,4,1,2,3]].
```

Статистическое распределение выборки можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот. Создание интервального статистического ряда выборки осуществляется по команде (m – число интервалов)

```
continuous_freq (list, m).
```

Для построения гистограмм выборки, представленной списком `list`, используется команда

```
histogram(list, список опций).
```

Данная команда имеет множество опций, из которых наиболее употребительными являются:

`nclasses` (по умолчанию 10) – число классов гистограммы;

`frequency` (по умолчанию `absolute`) – масштаб оси ординат, возможные значения: `absolute` (абсолютный), `density` (относительный), `percent` (процентный);

`terminal` — устройство, на которое выводится диаграмма (по умолчанию диаграмма выводится на экран);

`file_name` — имя файла, в который выводится гистограмма

`title` — основной заголовок;

`xlabel`, `ylabel` — названия (метки) осей.

Пример 2. Пусть имеется выборка

4, 7, 6, 1, 5, 10, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 5, 2, 2, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 4, 10, 10, 4.

Требуется построить гистограмму относительных частот для $m = 4$.

Команды:

```
load(descriptive)$
```

```
list:[4, 7, 6, 1, 5, 10, 3, 6, 6, 6, 9, 9, 5, 2, 2, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 4, 10, 10, 4] $
```

```
histogram(list,nclasses=4, frequency=density);
```

Результат выполнения команды представлен на рис. 23.

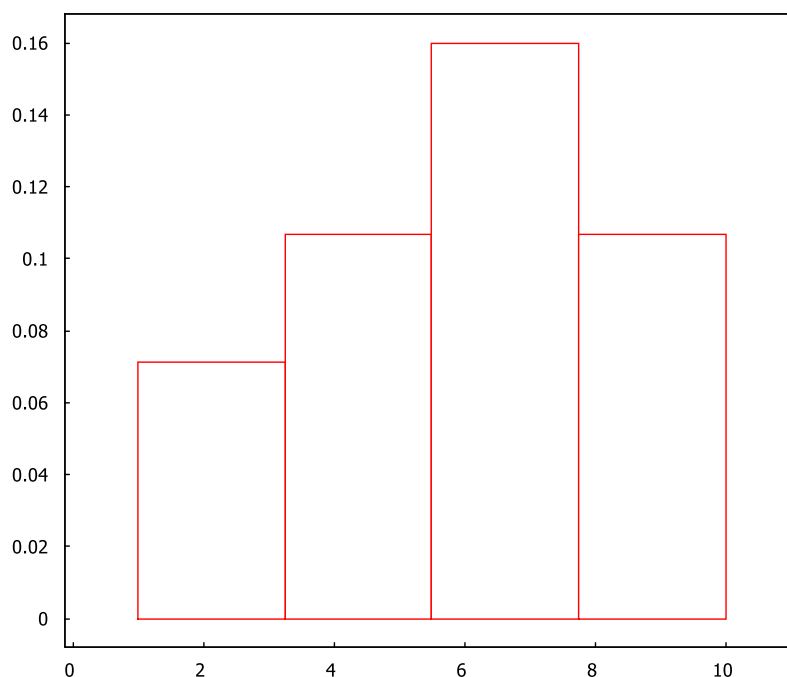


Рис. 23. Гистограмма относительных частот

Отметим, что при задании опции `nclasses` происходит автоматическое формирование интервального статистического ряда.

Для нахождения выборочного среднего, выборочной дисперсии и выборочного среднеквадратичного отклонения выборки, представленной списком `list`, используются соответственно команды

`mean(list)` `var(list)` и `std(list)`.

Команды вычисления исправленной выборочной дисперсии и исправленного среднего квадратичного отклонения имеют соответственно вид

`var1(list)`, `std1(list)`.

Эмпирические коэффициентов асимметрии и эксцесса выборки, представленной списком `list`, вычисляются при помощи следующих команд соответственно:

`skewness(list)` и `kurtosis(list)`.

Пример 3. В итоге 10 измерений длины стержня одним прибором получены следующие результаты (в мм):

100, 98, 91, 110, 110, 95, 97, 99, 92, 96

Найти

- а) выборочную среднюю длину стержня;
- б) среднеквадратичное отклонение;
- в) коэффициент вариации;
- г) эмпирический коэффициент асимметрии;
- д) эмпирический коэффициент эксцесса.

Команды:

```
load(descriptive) $
```

```
fpprintprec:3$
```

```
list:[ 100, 98, 91, 110, 110, 95, 97, 99, 92, 96] $
```

```
AVR:mean(list), numer;
```

```
STD:std(list);
```

```
KVAR: STD/AVR*100;
```

```
ASS:skewness(list);
```

```
EKS:kurtosis(list).
```

Результаты:

Выборочная средняя – 98,8 (мм);

среднеквадратичное отклонение – 6,21 (мм) ;

коэффициент вариации – 6,29 (%) ;

эмпирический коэффициент асимметрии – 0,81;

эмпирический коэффициент эксцесса – (-0,472).

Ошибки репрезентативности коэффициентов асимметрии и эксцесса в данном примере равны соответственно

$$m_A = 0,78; m_E = 1,55.$$

Проверим выполнение условий нормальности

$$\frac{|\bar{A}|}{m_A} = \frac{|0,81|}{0,78} = 1,05 < 3, \quad \frac{|\bar{E}|}{m_E} = \frac{|-0,472|}{1,55} = 0,304 < 3.$$

Таким образом, условие нормальности выполняется.

6.10. Пакет `distrib`

В состав системы `Maxima` входит пакет `distrib`, содержащий набор команд для нахождения вероятностных характеристик как дискретных, так и непрерывных случайных величин. Чтобы использовать данный пакет, его надо загрузить по команде

```
load ("distrib").
```

Перечислим команды нахождения вероятностей для наиболее распространенных законов распределения дискретных случайных величин:

| <i>Команда</i> | <i>Описание</i> |
|--|--|
| <code>pdf_binomial(k,n,p)</code> | Биномиальный закон: k – число «успехов», n – число испытаний, p – вероятность «успеха» |
| <code>pdf_poisson(k,m)</code> | Закон Пуассона: k – число «успехов», $m=n \cdot p$, n – число испытаний, p – вероятность «успеха» |
| <code>pdf_geometric(k,p)</code> | Геометрический закон: k – число «неудач» до первого «успеха», p – вероятность «успеха». |
| <code>pdf_hypergeometric(k,n1,n2,n)</code> | Гипергеометрический закон: k – количество выбранных элементов с признаком A , n_1 – количество элементов с признаком A , n_2 – количество элементов без признака A , n – количество выбранных элементов. |

Пример 1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Найти вероятность того, что в одном опыте откажут ровно два элемента.

Количество отказавших элементов – это случайная величина, подчиняющаяся биномиальному закону распределения. По условиям задачи имеем $n = 3; k = 2; p = 0,1$.

Команды:

```
load ("distrib")$
```

```
fpprintprec:3$
```

```
n:3$ k=2 $ p:0.1$
```

```
R:pdf_binomial(k,n,p);
```

Результат: 0,027

Пример 2. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу придут 3 негодных изделия.

Случайная величина – количество негодных изделий – подчиняется закону распределения Пуассона. По условию имеем $n = 5000, k = 3, p = 0,0002$.

Команды:

```
load ("distrib")$
fpprintprec:3$
n:5000 $ p:0.0002$ k:3$
P: pdf_poisson(k,n*p);
Результат: 0,0613.
```

Наиболее употребительные команды нахождения значений функции плотности распределения вероятностей непрерывных случайных величин приведены ниже:

| <i>Команда</i> | <i>Описание</i> |
|-------------------------------|---|
| pdf_continuous_uniform(x,a,b) | Равномерное распределение: x – значение случайной величины, a – левая граничная точка, b – правая граничная точка. |
| pdf_normal(x,m,s) | Нормальное распределение: x – значение случайной величины, m – математическое ожидание, s – среднее квадратичное отклонение, |
| pdf_exp(x,m) | Показательное распределение: x – значение случайной величины, m – параметр показательного распределения. |
| pdf_chi2(x,k) | Распределение χ^2 : x – значение случайной величины, k – число степеней свободы |
| pdf_student_t(x,k) | Распределение Стьюдента: x – значение случайной величины, k – число степеней свободы |
| pdf_f(x,k1,k2) | Распределение Фишера-Снедекора: x – значение случайной величины, k1, k2 – количество степеней свободы. |

Пример 3. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $MX=30$ и дисперсией $DX=2$. Построить кривую нормального распределения на промежутке $[25;35]$

Команды:

```
load ("distrib")$  
MX:30$ DX:2$  
f: pdf_normal(x,MX,sqrt(DX));  
plot2d(f,[x,25,35]);
```

График нормального распределения приведен на рис. 24.

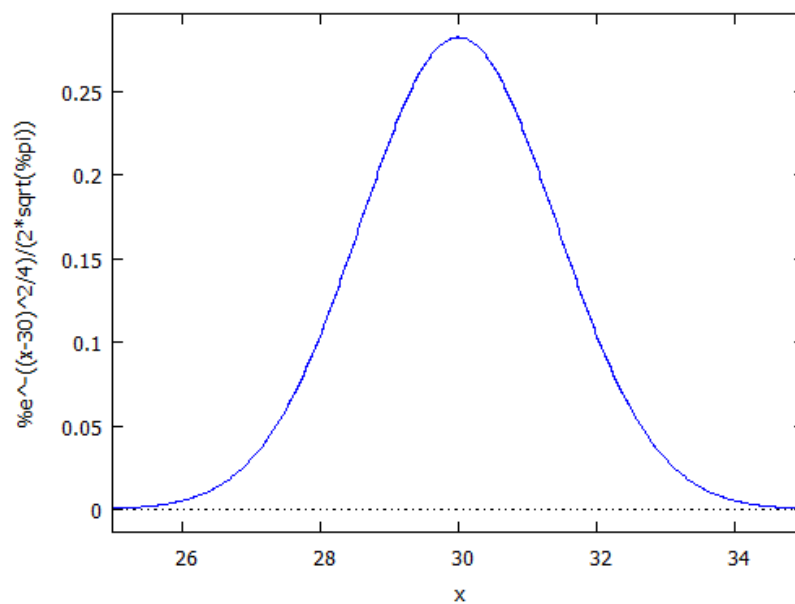


Рис. 24. График нормального распределения

Пример 4. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 1$. Построить кривую показательного распределения на промежутке $[0;5]$.

Команды:

```
load ("distrib")$  
lmd:1;  
f: pdf_exp(x,lmd);  
plot2d(f,[x,0,5]).
```

График показательного распределения представлен на рис. 25.

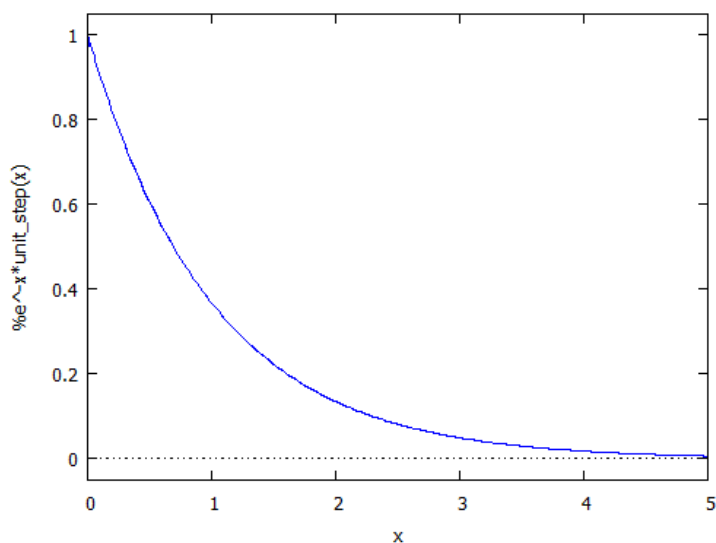


Рис. 25. График показательного распределения

Ниже приведены команды нахождения квантилей для основных законов распределения:

| <i>Команда</i> | <i>Описание</i> |
|-------------------------------------|---|
| quantile_continuous_uniform (q,a,b) | Вычисляет квантиль уровня q случайной величины, равномерно распределенной на промежутке (a,b). |
| quantile_normal (q,m,s) | Вычисляет квантиль уровня q случайной величины, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением s. |
| quantile_exp (q,m) | Вычисляет квантиль уровня q случайной величины, распределенной по экспоненциальному закону с параметром m. |
| quantile_chi2(k) | Вычисляет квантиль уровня q случайной величины, распределенной по закону «хи квадрат» |
| quantile_student_t (q,k) | Вычисляет квантиль уровня q случайной величины, распределенной по закону Стьюдента |
| quantile_f (q,k1,k2) | Вычисляет квантиль уровня q случайной величины, распределенной по закону Фишера-Снедекора |

Пример 5. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $MX=30$ и дисперсией $DX=2$. Вычислить квантиль уровня $q=0,5$.

Команды:

```
load ("distrib")$
```

```
MX:30$ DX:2$
```

```
q: quantile_normal(0.5,MX,sqrt(DX)).
```

Результат: 30.

Таким образом, как и ожидалось, в случае нормального распределения квантиль уровня $q=0,5$ (медиана) совпадает с математическим ожиданием.

Перечислим наиболее употребительные команды моделирования непрерывных случайных величин:

| Команда | Описание |
|---|--|
| <code>random_continuous_uniform(a,b)</code> | Формирует равномерно распределенную на промежутке (a,b) случайную величину. |
| <code>random_normal(m,s)</code> | Формирует нормальную случайную величину с математическим ожиданием m и среднеквадратическим отклонением s . |
| <code>random_exp(m)</code> | Формирует случайную величину, распределенную по экспоненциальному закону с параметром m . |
| <code>random_chi2(k)</code> | Формирует случайную величину с законом распределения «хи квадрат» (k – количество степеней свободы) |
| <code>random_student(k)</code> | Формирует случайную величину с законом распределения Стьюдента (k – количество степеней свободы) |
| <code>random_f(k1,k2)</code> | Формирует случайную величину с законом распределения Фишера-Снедекора (F-распределение) (k_1, k_2 – количество степеней свободы). |

Чтобы построить список из n случайных величин следует в качестве последнего аргумента команды моделирования добавить величину n . Например, команда построения списка из n случайных величин, распределенных по нормальному закону имеет вид: `random_normal(m,s,n)`.

Пример 6. Сформировать выборку из $N=100$ случайных чисел, распределенных по нормальному закону с параметрами $m=0$ и $s=1$. Построить график процесса формирования выборки.

```
load(distrib);  
N:100;  
x:random_normal(0,1,N)$  
t:makelist(i,i,1,N)$  
plot2d([discrete, x,t])$
```

Результаты работы программы представлены на рис. 26.

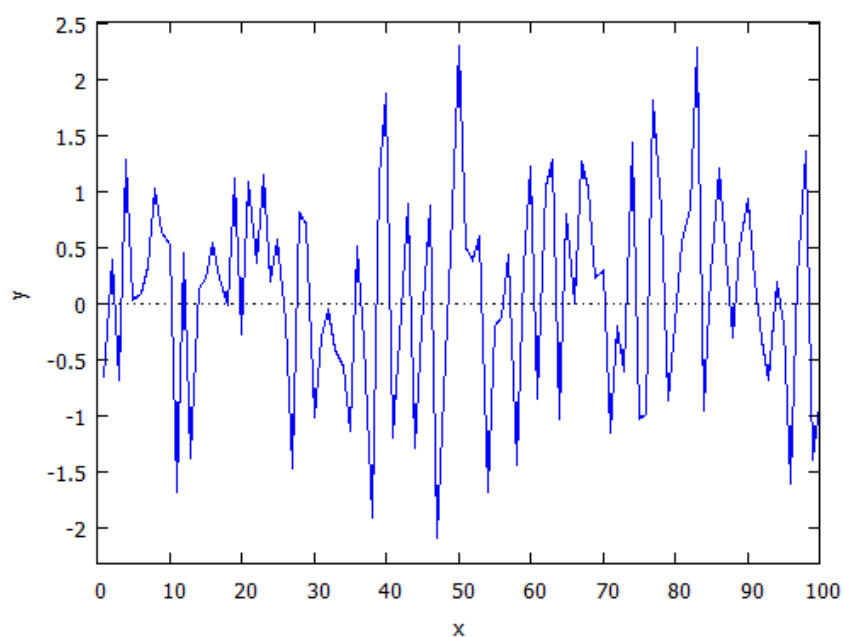


Рис. 26. График процесса формирования выборки

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Азаров В.В., Бабичев А.А., Синьковский Ф.К. Проектирование и изготовление композитного бака высокого давления для космического аппарата // Композиты и наноструктуры. 2013. № 4. С. 44–57.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 448 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
5. Архипов И.К. Роль математики в развитии механики композиционных материалов / И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, Д. В. Малий // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 3(71). С. 430–439.
6. Бакиров Ж.Б. Вероятностные методы расчета элементов конструкций. Караганда: КарГТУ, 2001. 180 с.
7. Бакулин В.Н., Гусев Е.Л., Марков В.Г. Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций. В 2 т. Т.1. Оптимальное проектирование конструкций из композиционных и традиционных материалов. М.: Физматлит, 2008. 256 с.
8. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
9. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. М., 1986. 302 с.
10. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
11. Басов К.А. ANSYS в примерах и задачах. М.: Компьютер Пресс, 2002. 224с.
12. Басов К.А. ANSYS: Справочник пользователя. М.: ДМК Пресс, 2005. 640с.
13. Бокучаева П.Н., Евстафьев В.А., Бабук В.А. Численное исследование влияния количества кольцевых ребер на устойчивость композитных сетчатых

цилиндрических оболочек летательных аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2014, № 4. С. 3–5.

14. Бокучаева П.Н., Евстафьев В.А., Бабук В.А. Численное исследование влияния количества и расположения продольных ребер на массу композитных сетчатых цилиндрических оболочек летательных аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2018, № 3. С. 19–22.

15. Болотин В. В., Москаленко В. Н. К расчету макроскопических постоянных сильно изотропных композиционных материалов // Изв. АН СССР, МТТ. 1969. № 3. 108 с.

16. Болотин В.В. Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.

17. Болотин В.В. Применение методов теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Машиностроение, 1971. 255 с.

18. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1981. 381 с.

19. Болтаев П.И., Зорин В.А. Методы расчета подкрепленных оболочек из композиционных материалов // Конструкции из композиционных материалов. 2011, № 2. С. 8–20.

20. Болтаев П.И. Проектирование и анализ несущей способности бороалюминиевой цилиндрической оболочки, слою пакета которой уложены под углом к образующей // Конструкции из композиционных материалов. 2016, № 4. С. 3–15.

21. Болтаев П.И. Упругие характеристики анизотропного материала при произвольном повороте системы координат // Конструкции из композиционных материалов. 2018, № 3. С. 9–18.

22. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.

23. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

24. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46–58.
25. Васильев В.В., Лопатин А.В. Теория сетчатых и подкрепленных композитных оболочек // Механика конструкций из композиционных материалов: Сборник трудов IV симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 31–36.
26. Васильев В.В., Федоров Л.В. Геометрическая теория упругости и оптимизация формы твердых тел // Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С. 16–27.
27. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / Под ред. Ю.В. Соколкина. М.: Наука, Физматлит, 1997. 288 с.
28. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. Минск: Изд-во БГУ, 1978. 206 с.
29. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
30. Воробьев Е.М., Введение в систему "Математика". М.: Финансы и статистика, 1998. 262 с.
31. Ву Э.М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред. Серия «Композиционные материалы». Т. 2: Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецки. Перев. с англ. Т.В. Борзовой под ред. А.А. Ильюшина, Б.Е. Победри. Гл. 9. — М.: Мир, 1978. С. 401–491.
32. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
33. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих оболочек, М.: Наука, 1976, 512 с.
34. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
35. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.

36. Гришин В.Н., Дзюба А.С., Дударьков Ю.Н. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. М.: Физ.-мат. лит. 2013. 272 с.
37. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике физике и образовании. М.: Солон-Пресс, 2006. 720 с.
38. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. М.: ДМК-Пресс., 2008. 576 с.
39. Дьяконов В.П. Matlab 6. Учебный курс. СПб.: Питер, 2001. 592 с.
40. Дьяконов В.П. Энциклопедия Mathcad 2001i и Mathcad 11. М.: Солон-Пресс, 2004. 832 с.
41. Ермаков С. М. Статистическое моделирование / С.М. Ермаков, Г.А. Михайлов. М.: Наука, 1982. 296 с.
42. Ершов Н.П. Проектирование анизотропных конструкций: расчет, оптимизация, испытания // Механика композитных материалов. 1980. № 4. С. 640–647.
43. Задорожный В.Н. Имитационное и статистическое моделирование: учебное пособие. Омск: ОмГТУ, 2013. 136 с.
44. Зиновьев П.А., Смердов А.А. Оптимальное проектирование композитных материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 103 с.
45. Зиновьев П.А., Смердов А.А. Предельные возможности композитных структур. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Машиностроение, 2005. Специальный выпуск. С. 106–128
46. Зиновьев П.А., Смердов А.А. Предельные возможности многослойных композитных структур. // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1994. №1 С. 7–17
47. Зорин В.А. Опыт применения композиционных материалов в изделиях авиационной и ракетно-космической техники // Конструкции из композиционных материалов. 2011, № 4. С. 44–59.
48. Ильина В.А., Силаев П.К. Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. 113 с.

49. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. М.: Машиностроение, 1982. 256 с.
50. Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
51. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. М.: Едиториал УРСС, 2004. 272с.
52. Капур К. Надежность и проектирование систем / К. Капур, Л. Ламберсон. М.: Мир, 1980. 604 с.
53. Кармишин А.В. Потенциальная энергия деформации непологой ортотропной оболочки из неоднородного материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. №4. С. 183–185.
54. Карпов В.В., Семенов А.А. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2015. № 3. С. 74–94.
55. Карпов В.В. Уравнения в смешанной форме для ребристых оболочек общего вида и методика их решения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 116–134.
56. Кобелев В.Н., Коварский Л.М., Тимофеев С.И. Расчет трехслойных конструкций справочник. М.: Машиностроение, 1984. 304 с.
57. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
58. Коптев А.А., Пасько А.А., Баранов А.А. Maple в инженерных расчетах: Учебное пособие. / Тамб. гос. тех. ун-т. Тамбов, 2003. 80 с.
59. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машгиз. 1965. 272 с.
60. Крашаков Ю.Ф., Рубина А.Л., Сухобокова Г.П. Рациональное проектирование сжатых оболочек из слоистых композиционных материалов //

Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. Вып. 9. М.: ЦАГИ, 1982. С. 21–32.

61. Кристенсен Р. М. Введение в механику композитов. Пер. с англ. под ред. Ю. М. Тарнопольского. — М.: Мир, 1982. — 334 с.

62. Кусяков А.Ш. Трехслойные оболочки минимальной массы // Вест. Перм. ун-та: Математика. Механика. Информатика. Вып.2 . Пермь, 2005. С. 166–173.

63. Кусяков А.Ш. , Клигман Е.П. Коммерческие пакеты программ в МТДТ: учеб.-метод. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2007. 32 с.

64. Кусяков А.Ш. К вопросу о построении физических ограничений в задаче оптимизации композитных оболочек // XII Международная Зимняя школа по механике сплошных сред: Тез.докл. / Ин-т механики сплошных сред УрО РАН. Пермь: Екатеринбург, 1999. С.208.

65. Кусяков А.Ш. Компьютерное моделирование на основе ANSYS: учебное пособие/ Перм. ун-т. Пермь, 2008. 168 с.

66. Кусяков А.Ш. Конечно-элементное моделирование в среде ANSYS: учеб.-метод. пособие/ Перм. ун-т. Пермь, 2007. 150 с.

67. Кусяков А.Ш. Математическое моделирование оптимальных композитных оболочек // VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докл. / УрО РАН. Пермь, 2001. С.387

68. Кусяков А.Ш. Параметрическая оптимизация композитных оболочек // XIII Зимняя школа по механике сплошных сред: Тез.докл. / Ин-т механики сплошных сред УрО РАН. Пермь, 2003. С.242.

69. Кусяков А.Ш. Современные системы инженерного анализа в образовании и науке // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: Аннотации докл. Т. I / Нижний Новгород / Нижегородский госуниверситет, 2006. С. 153.

70. Кусяков А. Ш. Инструментальные средства инженерных расчетов и научных исследований // Психолого-педагогический журнал Гаудеамус. 2012. Т. 2, № 20. С. 220–222.

71. Кусяков А.Ш. Оптимизация тонкостенных композитных оболочек, работающих на устойчивость и прочность // Проблемы механики и управления /ПГНИУ. Пермь, 2012. Вып. 44. С. 49–58.

72. Кусяков А.Ш. Алгоритм проектирования подкрепленных композитных пластин // Вест. Перм. ун-та: Математика. Механика. Информатика. Вып. 4(23) . Пермь, 2013. С. 34–38.

73. Кусяков А.Ш. Проектирование тонких пластин, работающих на устойчивость и прочность // Проблемы механики и управления /ПГНИУ. Пермь, 2013. Вып. 45. С. 30–38.

74. Кусяков А.Ш. Проектирование композитных трехслойных пластин // Проблемы механики и управления / ПГНИУ. Пермь, 2014. Вып. 46. С. 46–52.

75. Кусяков А.Ш. Вероятностный анализ жесткостных характеристик многослойных композитов // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр./ Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2017. Вып. 49. С.17–24.

76. Кусяков А.Ш. Вероятностный анализ оптимальных композитных оболочек // Вест. Перм. ун-та: Математика. Механика. Информатика. Вып. 4(39) . Пермь, 2017. С. 43–46.

77. Кусяков А.Ш. Алгоритм вероятностного анализа прямоугольной пластинки из композитного материала // Теоретические и прикладные аспекты современной науки : сб. науч. тр. по мат-лам IX Международной науч.-практ. конф. 31 марта 2015 г.: Часть I. Белгород, 2015. С. 14–16.

78. Кусяков А. Ш. Система аналитических вычислений Maxima / Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. 106 с.

79. Кусяков А. Ш. Моделирование композитных пластин и оболочек / Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. 188 с.

80. Кусяков А.Ш. Оценка эффективности многослойных композитных пластин // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические

системы: межвуз. сб. науч. тр./ Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2020. Вып. 52. С. 4–10.

81. Кусяков А.Ш. Вероятностный анализ подкрепленных цилиндрических оболочек из композитного материала // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр./ Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2021. Вып. 53. С. 16–25.

82. Кусяков А. Ш.. Проектирование многостеночных композитных оболочек // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2021. № 74. С. 103–112.

83. Кусяков А.Ш. Анализ оптимальных многостеночных пластин // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр./ Перм. гос. нац. иссл. ун-т. Пермь, 2022. Вып. 54. С. 24–31.

84. Кусяков А.Ш. Статистическое моделирование многостеночной цилиндрической оболочки / А.Ш. Кусяков // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. 2023. № 55. С. 4–10.

85. Кусяков А.Ш. Статистическое моделирование многостеночной пластинки из композитного материала / А. Ш. Кусяков // Инженерный вестник Дона. 2023. № 7 (103). С. 414–422.

86. Кусяков А.Ш. Статистический анализ устойчивости многослойной пластины / А.Ш. Кусяков // Наукосфера. 2023. № 6-1. С. 235–239.

87. Кусяков А. Ш. Статистический анализ устойчивости трехслойных пластин из композитного материала / А. Ш. Кусяков // Наукосфера. 2023. № 7-2. С. 157–162.

88. Кутьинов В.Ф. Исследование несущей способности углепластиковых оболочек при сжатии / В.Ф. Кутьинов, Ю.Ф. Крашаков, Н.Т. Кулагин, А.Л. Рубина // Механика композитных материалов. 1981. № 5 С. 837–840.

89. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение. 1976. 408 с.

90. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.

91. Лядова Л.Н. Мызникова Б.И., Фролова Н.В. Вычислительная система Mathcad: учеб. пособие / Перм. ун-т. Пермь, 2003. 88 с.
92. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 138 с.
93. Макаров Е.Г. Mathcad: учеб. курс. СПб.: Питер, 2009. 384 с.
94. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 512 с.
95. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima: учеб.-метод. пособие / Казань: Казанский университет, 2012. 57с.
96. Маневич А.И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. Киев: Донецк: Вища школа. 1979. 152 с.
97. Марцыновский В.В. Оптимальное проектирование тонкостенных конструкций из композиционных материалов // Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. — М.: ЦАГИ, 1982. выпуск IX. С. 91–99
98. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
99. Маяк Ю., Ханнус С. Ориентационное проектирование анизотропных материалов на основе критериев Хилла и Цая-Ву // Механика композитных материалов. 2003. № 6. С. 767–784
100. Миткевич А.Б., Протасов В.Д. Оптимизация равнопрочных армированных цилиндрических оболочек давления к устойчивости от осевого сжатия // Механика композитов. 1973. № 6. С. 1123–1126.
101. Мормуль Н.Ф., Почтман Ю.М. Многокритериальная оптимизация подкрепленных композитных панелей при комбинированном нагружении // Механика композитных материалов. 1993. Т. 29, № 6. С. 823–830.
102. Мормуль Н.Ф., Почтман Ю.М. О многокритериальной оптимизации композитных цилиндрических оболочек при действии внешнего давления //

Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев: Будивельник, 1988. Вып. 52. С. 112–116.

103. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигиздат, 1957. 431 с.

104. Муц А. Оптимизация многослойных композитных конструкций со случайно распределенными механическими свойствами // Механика композитных материалов. 2005. Т. 41, № 6. С. 753–760.

105. Мяченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. М.: Машиностроение. 1981. 216 с.

106. Нарусберг В.Л., Тетерс Г.А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига, 1988. 299 с.

107. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Проектирование плоских термоупругих композитных конструкций с равнонапряженной арматурой // Прикл. механика и техн. физика. 2001. № 2. С. 213–223

108. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Мозаичное армирование плоских термоупругих композитных конструкций с использованием различных критериев рационального проектирования // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. № 3. С. 409–436

109. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.

110. Немировский Ю.В. Устойчивость и выпучивание конструктивно анизотропных и неоднородных пластин и оболочек // Механика твердого деформируемого тела. М.: ВИНТИ АН СССР. 1979. Т. 9. С. 5–156.

111. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.

112. Нуштаев Д.В. Abaqus. Пособие для начинающих. Пошаговая инструкция. М.: Тесис, 2010. 78 с.

113. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.

114. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1969. 695 с.
115. Олейников А.И. Оценка жесткости и прочности слоистых композитов // Композиты и наноструктуры. 2017. Т. 9. № 2. С. 77–79.
116. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 368 с.
117. Панферов А.И., Лопарев А.В., Пономарев В.К. Применение MathCad в инженерных расчетах: Учебное пособие / СПбГУАП. СПб., 2004. 88 с.
118. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Изв. АН. Механика твердого тела. 2000. № 2. С. 145–168.
119. Пикуль В.В. К теории устойчивости оболочек // Вестн. ДВО РАН. 2006. № 4. С. 81–86.
120. Пикуль В.В. Современное состояние теории устойчивости оболочек // Вестн. ДВО РАН. 2008. № 3. С. 3–9.
121. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М. МГУ, 1984. 336 с.
122. Полилов А.Н. Этюды по механике композитов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 316 с.
123. Полилов А.Н. Экспериментальная механика композитов: учеб. пособие / МГТУ. М., 2016. — 375 с.
124. Половко А.М. Mathematica для студента. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 368 с.
125. Полосков И.Е. Системы аналитических вычислений. Общие сведения, структура и приложения [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь, 2013. 352 с.
126. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1984. 384 с.
127. Почтман Ю.М., Семенец С.Н., Шульга С.А. Многокритериальная оптимизация композитных панелей при стохастических нагрузках // Механика композит, материалов. 1983. №6. С. 1113–1116.

128. Почтман Ю.М., Тугай О.В. Подкрепленные многослойные цилиндрические оболочки минимального веса, сжатые в осевом направлении// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 1. / ГГУ. Горький 1980. С. 153–156.

129. Почтман Ю.М., Чуханин С.В., Шульга С.А. Оптимальное проектирование цилиндрических композитных оболочек при динамическом нагружении // Механика композитных материалов. 1993. Т. 29, № 3. С. 361–366.

130. Почтман Ю.М., Шульга С.А. Оптимизация цилиндрических композитных оболочек с учетом критической моды несовершенств // Механика композитных материалов. 1998. Т. 34, № 5. С. 613–620.

131. Почтман Ю.М., Шульга С.А., Нагорный Д.В. Динамика и оптимизация цилиндрических оболочек из композитных материалов // Механика композитных материалов. 1995. Т. 31, № 1. С. 81–87

132. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 2-е изд.

133. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел (постановка и способы решения задач оптимизации параметров элементов конструкций). М.: Наука, 1976. 258 с.

134. Решетов Д.Н. Надежность машин / Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев. М.: Высшая школа, 1988. 238 с.

135. Рикардс Р.Б. Об оптимально сжатой круговой цилиндрической оболочке // Механика полимеров. 1973. № 5. С. 944-947.

136. Рикардс Р.Б. Модели оптимизации оболочек из композитных материалов с учетом статистических факторов // Механика полимеров. 1976. № 6. С. 1048-1058.

137. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.

138. Рыжиков, Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. СПб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2004. 384 с.

139. Рычков С.П. MSC.visualNASTRAN для Windows. М.: РЕ Пресс, 2004. 552 с.
140. Сапунов В.Т. Устойчивость композитных элементов конструкции в трактовке теории надежности // Композиты и наноструктуры. 2017. Т. 9. № 1. С. 45-51.
141. Сараев П.В. Основы использования математического пакета Maple в моделировании: Учебное пособие / Международный институт компьютерных технологий. Липецк, 2006. 119 с.
142. Сарбаев Б.С., Криволуцкая И.И. Способ расчета предельных напряжений для многослойных волокнистых композитов при плоском напряженном состоянии // Конструкции из композиционных материалов. 2015, № 2. С. 3–9.
143. Смердов А.А. Оптимальное проектирование оболочек как задача математического программирования // Машиностроение: Энциклопедия; Т. 1–3; в 2-х кн. / под ред. К.С. Колесникова М.: Машиностроение, 1995. Кн.2. С. 233–240.
144. Смердов А.А. Оптимальные по прочности многослойные композиты // Новые перспективные материалы и технологии их получения 2004: сб. науч. тр. Международной конференции. Волгоград, 2004. Т. 2. С. 212–214.
145. Смердов А.А. Оптимизация характеристик демпфирования многослойных композитных стержней // Авиационная промышленность. 2006. №2. С. 12–18.
146. Смердов А.А. Основы оптимального проектирования композитных конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 88 с.
147. Смердов А.А. Разработка методов проектирования композитных материалов и конструкций ракетно-космической техники: дис. ... докт. техн. наук. Москва, 2007. 410 с.
148. Смердов А.А. Разрушение композитных труб по форме «китайского фонарика» при нагрузке весового типа // Механика композитных материалов. 1999. №3. С. 319–324

149. Смердов А.А., Буянов И.А. Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. №6. С. 70–77.

150. Смердов А.А. Возможности повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композитных конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 10. С. 70–79.

151. Смердов А.А., Шон Ф.Т. Расчетный анализ и оптимизация многостеночных композитных несущих оболочек // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 11. С. 90–98.

152. Смердов А.А., Шон Ф.Т. Анализ эффективности оптимальных композитных оболочек многостеночной и трехслойной схем для отсеков ракет-носителей и разгонных блоков // Конструкции из композиционных материалов. 2016, № 3. С. 58–65.

153. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978. 64 с.

154. Советов Б. Я. Яковлев С.А. Моделирование систем: учебник для вузов / Б.Я. Советов, С. А. Яковлев. М. : Высш. шк., 2001. 343 с.

155. Стахин Н. А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima: Учебное пособие / М.: Федеральное агентство по образованию, 2008. 86 с.

156. Сухинин С.Н., Микишева В.И. Устойчивость трехслойных оболочек из композитных материалов при совместном действии осевого сжатия и бокового давления // Механика композитных материалов. 1981. № 6. С. 1035–1041.

157. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: Физматлит, 2010. 248 с.

158. Ташкинов М.А. Моделирование упругого поведения многокомпонентных композиционных материалов с использованием приближенных решений стохастических краевых задач // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 3. С. 165–181.

159. Тенг Т.Л., Ю Ч.-М., Ву Я.Я. Оптимальное проектирование композитных сосудов давления, изготовленных намоткой волокном // Механика композитных материалов. 2005. Т. 41, № 4. С. 489–498.
160. Тетерс Г. А. Многокритериальная оптимизация прямоугольных композитных пластин, подверженных продольным термическим напряжениям и теряющих устойчивость при касательном нагружении // Механика композитных материалов. 2007. Т. 43, № 1. С. 85–91.
161. Тетерс Г.А., Креггерс А.Ф. Оптимизация с учетом надежности композитной пластины, теряющей устойчивость при термическом воздействии // Механика композит. материалов. 2000. Т. 36, № 6. С. 757–766.
162. Тетерс Г. А. Многоцелевая оптимизация композитной прямоугольной пластины при двухосном и термическом нагружении // Механика композитных материалов. 2005. Т. 41, № 5. С. 683–690.
163. Тетерс Г.А. Многокритериальная оптимизация композитной цилиндрической оболочки при термических и динамических воздействиях // Механика композитных материалов. 2004. Т. 40, № 6. С. 753–760.
164. Тетерс Г.А., Креггерс А.Ф. Компромиссная оптимизация композитной пластины с заданной вероятностью реализации // Механика композитных материалов. 1997. Т. 33, № 5. С. 626–635.
165. Тетерс Г.А., Креггерс А.Ф. Многоцелевое оптимальное проектирование композитных конструкций. Обзор // Механика композитных материалов. 1996. Т. 32, № 3. С. 363–376.
166. Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига: Зинатне, 1978. 240 с.
167. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Госстройиздат, 1946. 532 с.
168. Томашевский В.Т. Оптимизация конструкций подкрепленных цилиндрических оболочек из композитов / В.Т. Томашевский, А.П. Ануфриев, В.Н. Шалыгин, В.С. Яковлев, Р.И. Калимулин // Механика композитных материалов. 1987. № 5. С. 853–869.

169. Федоренко А.Н., Федулов Б.Н., Ломакин Е.В. Задача потери устойчивости тонкостенных конструкций из композиционных материалов, свойства которых зависят от типа нагружения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 3. С. 104–111.
170. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982, 232 с.
171. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975, 534 с.
172. Хог Э. Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. 478 с.
173. Хорошун Л. П. Уточненные модели деформирования композитов // Механика композитных материалов. 1984. № 5. С. 798–804.
174. Чамис К.К. Проектирование элементов конструкций из композитов // Композиционные материалы; В 8-ми т. / под ред. Л. Браутмана и Р. Крока. М.: Машиностроение, 1978. Т. 8, Часть 2. С. 214–254.
175. Чедрик В.В. Практические методы оптимального проектирования конструкций из слоистых композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. № 2. С. 184–198.
176. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Л.: ЛГУ, ч. 1. 1942. 272 с.; ч. 4. 1964. 396 с.
177. Чичкарев Е.А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов / М.: ALT Linux, 2012. 384 с.
178. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
179. Шимкович Д.Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. М.: ДМК, 2001. 446 с.
180. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. М.: Сов. радио, 1974, 400 с.

181. Burton W.S., Noor A.K. Assessment of computational models for sandwich panels and shells// Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 1995. Vol. 124. P. 125–151.

182. Noor A.K., Burton W.S. Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates// Composite Structures. 1989. Vol. 11. P. 183–204.

183. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates//Appl. Mech. Rev. 1989. Vol. 42. № 1. P. 1–13.

184. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered anisotropic plates//Composite Structures. 1990. Vol. 14. P. 233–265.

185. Weaver P.M. Design of laminated composite cylindrical shells under axial compression //Compos. B. 2000. №8. C. 669–679.

Научное издание

Кусяков Альфред Шамильевич

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ В СИСТЕМЕ MAXIMA**

Монография

Издается в авторской редакции
Компьютерная верстка: *А. Ш. Кусяков*

Объем данных 1,9 Мб
Подписано к использованию 22.11.2024

Размещено в открытом доступе
на сайте www.psu.ru
в разделе НАУКА / Электронные публикации
и в электронной мультимедийной библиотеке ELiS

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15