

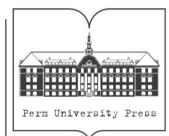
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А. Ю. Ощепков, М. В. Жужгов

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

*Допущено методическим советом
Пермского государственного национального
исследовательского университета в качестве
учебно-методического пособия для студентов,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров
«Радиофизика»*



Пермь 2023

УДК 004+681.5(075.8)

ББК 32.965я73

О971

Ощепков А. Ю.

О971 Проектирование цифровых систем управления. Моделирование систем управления физико-техническими объектами : учебно-методическое пособие / А. Ю. Ощепков, М. В. Жужгов ; Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2023. – 136 с.

ISBN 978-5-7944-3944-1

Изложены теоретические основы и методы проектирования современных цифровых систем управления, опирающиеся на традиционные алгоритмы и новые разработки в области синтеза систем управления для непрерывных и дискретных систем. Студенты знакомятся с математическими моделями систем управления в пространстве состояний и их описанием с помощью передаточных функций, с критериями устойчивости систем, с различными методами оптимальной настройки стандартных регуляторов. Моделирование осуществляется в среде MATLAB+Simulink. В качестве объектов исследования выбраны конкретные физические процессы и технические устройства. Содержит программу курса, основной теоретический материал и задания для выполнения лабораторных работ.

Рекомендовано для студентов физического факультета.

*Печатается по решению ученого совета физического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

УДК 004+681.5(075.8)

ББК 32.965я73

Рецензенты: кафедра «Оборудование и автоматизация химических производств» ПНИПУ (зав. кафедрой – д-р техн. наук, доцент **Е. Р. Мошев**);

профессор кафедры горной электромеханики ПНИПУ, д-р техн. наук, доцент **А. В. Николаев**

ISBN 978-5-7944-3944-1

© ПГНИУ, 2023

© Ощепков А. Ю., Жужгов М. В., 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОГРАММА КУРСА.....	5
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ.....	9
ГЛАВА 1. Структура систем автоматического управления.....	10
1.1. Иерархия систем управления технологическими объектами.....	10
1.2. Аналоговые регуляторы по отклонению.....	13
1.3. Современные цифровые системы автоматического управления.....	16
ГЛАВА 2. Математические модели непрерывных систем. Пространство состояний.....	19
2.1. Построение математических моделей.....	19
2.2. Математическая модель RLC-цепи.....	23
2.3. Пространство состояний.....	24
ГЛАВА 3. Передаточные функции и структурные схемы.....	28
3.1. Определение передаточных функций.....	28
3.2. Структурные схемы.....	31
3.3. Передаточные функции систем с обратной связью.....	32
3.4. Связь между передаточными функциями и уравнениями состояния.....	34
ГЛАВА 4. Переходные характеристики непрерывных систем.....	37
4.1. Переходные характеристики и функции отклика.....	37
4.2. Показатели качества.....	38
4.3. Оценки качества.....	41
ГЛАВА 5. Устойчивость линейных стационарных систем.....	44
5.1. Методы анализа устойчивости ЛСС.....	44
5.2. Анализ устойчивости во временной области.....	46
ГЛАВА 6. Дискретные системы и их устойчивость.....	49
6.1. Математические модели дискретных систем.....	49
6.2. Построение эквивалентной системы.....	51
6.3. Способы вычисления матричной экспоненты.....	52
6.4. Устойчивость дискретных систем.....	54
ГЛАВА 7. Моделирование цифровых систем управления.....	56
7.1. Структура цифровых систем управления.....	56
7.2. Передаточные функции дискретных систем.....	59
ГЛАВА 8. Стандартные регуляторы. Цифровой пи-регулятор.....	61
8.1. Алгоритмы работы стандартных регуляторов.....	61
8.2. Нерекуррентный и рекуррентный ПИ-алгоритмы.....	68
ГЛАВА 9. Оптимизация работы стандартных регуляторов.....	70
9.1. Настройка ПИД-регулятора по критерию ИВМО.....	70
9.2. Экспериментальный метод оптимизации Зиглера – Никольса.....	72
9.3. Использование блока настройки параметров Simulink.....	73

ГЛАВА 10. Робастность систем управления. адаптивные системы	76
10.1. Неопределенности объектов управления	76
10.2. Понятие грубости и робастности систем управления	78
10.3. Структура и классификация адаптивных систем управления	80
10.4. Адаптивное управление с эталонной моделью объектом первого порядка	83
ГЛАВА 11. Современные робастные и адаптивные алгоритмы для дискретных систем	86
11.1. Градиентный метод	86
11.2. Адаптивный регулятор на основе быстрых алгоритмов	89
ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	92
Использование пакета MATLAB+Simulink для моделирования систем управления	93
Лабораторная работа № 1	99
Лабораторная работа № 2	105
Лабораторная работа № 3	107
Лабораторная работа № 4	109
Лабораторная работа № 5	111
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	135

ПРОГРАММА КУРСА

Дисциплина «Проектирование цифровых систем управления» относится к дисциплинам базовой части по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» (квалификация бакалавра) и вариативной части по направлению 03.03.03 «Радиофизика» (квалификация бакалавра) профессионального цикла дисциплин подготовки студентов

В ходе изучения курса студенты знакомятся с основными положениями современной теории управления физическими системами и техническими устройствами, изучают свойства систем управления с обратной связью и основные методы анализа устойчивости непрерывных и дискретных систем, методы традиционной теории оптимального управления, а также современные адаптивные и робастные алгоритмы управления. Осваивают методы математического моделирования систем управления.

Компетенции, приобретенные обучающимися в результате освоения дисциплины, востребованы в бизнес-экосистемах, использующих следующие сквозные технологии цифровой экономики:

- Новые производственные технологии.
- Сенсорика и компоненты робототехники.
- Управление в промышленности и жилищно-коммунальном хозяйстве.

Дисциплина «Проектирование цифровых систем управления» нацелена на формирование профессиональной компетенции выпускника:

ПК.1 владеть методами моделирования и практической реализации цифровых систем управления.

В результате изучения дисциплины специалист должен:

- знать основы современной теории автоматического управления и основные принципы построения систем управления, в том числе цифровых;
- уметь анализировать устойчивость систем управления и разрабатывать математические и компьютерные модели систем управления;
- владеть навыками моделирования и проектирования цифровых систем управления с помощью пакета MATLAB+Simulink.

Структура и содержание дисциплины

<i>Проектирование цифровых систем управления,</i> 3 курс, 2-й триместр	Количество часов		
	Лекции	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
<i>Понятие систем автоматического управления.</i> Многоуровневость систем управления, структура систем автоматического управления технологическими объектами. Устройство и принципы действия электрических аналоговых регуляторов по отклонению. Состав современных цифровых систем автоматического управления, пример	4	4	10
<i>Математические модели систем управления.</i> Необходимость этапа математического моделирования при проектировании современных систем управления. Правила построения математических моделей. Математическая модель колебательного контура (RLC-цепи). Математические модели в пространстве состояний. Передаточные функции и структурные схемы. Разомкнутые и замкнутые системы, передаточные функции систем с обратной связью. Связь между передаточными функциями и уравнениями состояния	4	4	10
<i>Системы управления с обратной связью.</i> Разомкнутые и замкнутые системы, передаточные функции систем с обратной связью. Переходные характеристики и функции отклика. Построение переходных характеристик с помощью функций MATLAB. Моделирование в Simulink. Построение S-моделей разомкнутых и замкнутых систем с использованием пространства состояний (ABCD-моделей) и передаточных функций	4	4	10
<i>Стандартные регуляторы с обратной связью.</i> Важнейшие показатели качества работы систем управления: время достижения, перерегулирование, установившаяся ошибка. Динамические и точностные показатели. Интегральные оценки качества. S-модель непрерывного ПИД-регулятора. Оптимизация работы стандартных регуляторов по критерию ИВМО. Описание методики Зиглера – Никольса. Использование MATLAB. Настройка коэффициентов ПИД-регуляторов	4	4	10
<i>Дискретные системы управления.</i> Математические модели дискретных систем. Дискретные модели, эквивалентные непрерывным, построение эквивалентных моделей. Матричная экспонента, методы вычисления матричной экспоненты, аппроксимация Паде. Системы управления с ЭВМ, математические модели аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей. Структура цифровых систем управления. Передаточные функции дискретных систем	4	4	10

<i>Проектирование цифровых систем управления,</i> 3 курс, 2-й триместр	Количество часов		
	Лекции	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
<i>Устойчивость систем управления.</i> Устойчивость динамических систем по Ляпунову. Устойчивость линейных непрерывных и дискретных систем. Критерий устойчивости Рауса – Гурвица	3	4	10
<i>Основные задачи оптимального управления.</i> Постановка задач оптимального управления. Задачи Лагранжа, Майера, Больца. Гамильтонова формулировка необходимого условия оптимальности. Принцип Понтрягина, метод динамического программирования	2	2	14
<i>Управление в условиях неопределенности.</i> Понятие номинальной модели. Классификация неопределенностей математических моделей систем управления. Грубость и робастность динамических систем. Робастность систем управления с обратной связью. Требования к современным цифровым системам управления, адаптивность систем. Структура адаптивных систем управления. Системы с косвенной адаптацией (идентификационные адаптивные системы) и системы с прямой адаптацией (безидентификационные адаптивные системы). Современные робастные и адаптивные алгоритмы для дискретных систем. Градиентный метод. Адаптивный регулятор на основе быстрых алгоритмов	3	2	14

Компетентностно-ориентированные оценочные средства

Контролируемые элементы: знать основы современной теории автоматического управления и основные принципы построения систем управления, в том числе цифровых

Форма контроля: устное собеседование по вопросам (вопросы к экзамену прилагаются).

Контролируемые элементы: уметь анализировать устойчивость систем управления и разрабатывать математические и компьютерные модели систем управления

Форма контроля: проверка выполнения заданий лабораторных работ. Задания выполняются с помощью компьютерного моделирования в MATLAB. Студенты должны выполнить задания одного варианта в каждой лабораторной работе. Номера вариантов указывает преподаватель.

Контролируемые элементы: владеть навыками моделирования и проектирования цифровых систем управления с помощью пакета MATLAB+Simulink

Форма контроля: защита отчетов по лабораторным работам. Отчет составляется в текстовом редакторе в произвольной форме. В ходе защиты каждого отчета студент должен четко сформулировать постановку задачи, пояснить выбор метода решения и его сущность, а также прокомментировать полученный результат.

Литература:

Основная учебная литература:

Теоретическая часть данного пособия.

[1, 2] – Библиографический список.

Дополнительная литература:

[3–6] – Библиографический список.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Структура систем автоматического управления.
2. Аналоговые регуляторы по отклонению.
3. Современные цифровые системы автоматического управления.
4. Общие свойства математических моделей.
5. Представление математической модели СУ в пространстве состояний.

Пример.

6. Передаточные функции систем управления.
7. Структурные схемы систем управления.
8. Связь между передаточными функциями и уравнениями состояния.
9. Переходные характеристики и функции отклика линейных систем.
10. Математические модели двигателя постоянного тока.
11. Передаточные функции систем с обратной связью.
12. Показатели качества работы систем управления.
13. Оценки качества. Минимизация оценок по критерию ИВМО.
14. Математические модели ПИД-регуляторов.
15. Особенности работы стандартных регуляторов по отклонению.
16. Методы настройки ПИД-регуляторов.
17. Классификация неопределенностей объектов управления.
18. Грубость и робастность систем управления.
19. Классификация адаптивных систем управления.
20. Адаптивное управление с эталонной моделью объектом первого порядка.
21. Структура цифровых систем управления.
22. Цифровой ПИ-регулятор. Рекуррентный алгоритм.
23. Дискретные модели непрерывных систем.
24. Передаточные функции дискретных систем.
25. Градиентный метод управления дискретными системами.
26. Быстрые алгоритмы для дискретных систем.
27. Адаптивное управление объектом первого порядка на основе быстрого алгоритма.
28. Устойчивость динамических систем. Теоремы Ляпунова об устойчивости.
29. Устойчивость линейных систем. Критерий устойчивости Рауса – Гурвица.
30. Постановка задач оптимального управления. Задачи Лагранжа, Майера, Больца.
31. Гамильтонова формулировка необходимого условия оптимальности. Принцип Понтрягина.
32. Метод динамического программирования. Уравнение Беллмана.

ГЛАВА 1. СТРУКТУРА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Иерархия систем управления технологическими объектами

В современной «Энциклопедии социологии» дается следующее определение проектирования: «**ПРОЕКТИРОВАНИЕ** – деятельность, под которой в предельно сжатой характеристике понимается промысливание того, что должно быть». При «промысливании» цифровых систем управления разработчик должен правильно представить структуру будущей системы, выбрать алгоритмы работы и технические средства для построения системы, определить способы предварительной настройки и отладки системы. Рассмотрим структуру систем управления.

В общей структуре систем управления обычно выделяют несколько уровней. Вариант схемы многоуровневой структуры управления приведен на рис. 1.1.

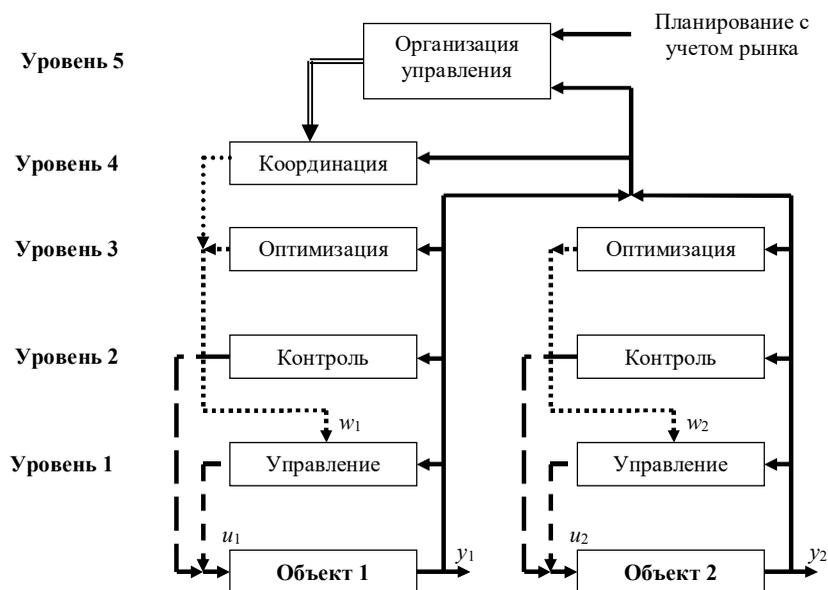


Рис. 1.1. Схема многоуровневой структуры управления

На *первом уровне* осуществляется непосредственное управление объектом по реально измеряемым координатам y с помощью регуляторов с прямой или обратной связью. Сигнал задающей переменной при этом либо является постоянным, либо формируется на одном из более высоких уровней управле-

ния. Автоматическое управление началом и окончанием цикла работы объекта управления также относится к первому уровню.

Второй уровень объединяет операции контроля за объектом управления. Здесь осуществляется наблюдение за определенными характеристиками объекта, например фиксируется превышение контролируемыми переменными заданных предельно допустимых значений. При контроле можно ограничиться оценкой текущего поведения переменных объекта или же учитывать их предсказываемые (будущие) значения. Информация, полученная на этом уровне управления, используется для предупреждения обслуживающего объект персонала о возможности возникновения аварийной ситуации. Автоматически предпринимаемые при этом действия для устранения возмущений или остановки процесса называют *аварийным управлением*.

К **третьему уровню** можно отнести выполнение процедур *оптимизации*, в результате которых максимизируется эффективность или выход объекта управления либо минимизируется потребление или стоимость. Часто наиболее важной оказывается оптимизация установившегося состояния процесса, которая называется статической оптимизацией. При выполнении оптимизации в ходе нормальной эксплуатации объекта показатель качества вычисляется на основании измеряемых значений регулируемых переменных объекта y , а поиск экстремума производится целенаправленным изменением входных сигналов, т.е. значений задающих переменных w в соответствии с используемым методом оптимизации.

Если несколько объектов работают совместно, то управление их взаимодействием, или *координация*, осуществляется на **четвертом уровне**. Например, для группы термических или гидромеханических объектов координация состоит в распределении нагрузки, а для комплекса процессов производства стального проката – во взаимном согласовании работы доменных печей, выплавки стали и прокатных станов.

Самый верхний, в нашем случае **пятый, уровень** предназначен для *организации управления*. Вся система объектов (заводы, сети связанных предприятий, большие производственные комплексы) организуется с учетом планируемых рынков сбыта, необходимого объема, сырья и персонала для их обслуживания.

Объем использования цифровой техники в конкретных случаях на различных уровнях может быть различным. Управление на высших уровнях до сих пор автоматизируется лишь частично. Под системой автоматического управления мы будем в дальнейшем понимать систему первого уровня. Структура системы автоматического управления (САУ) изображена на рис. 1.2. Работает эта САУ следующим образом. Физический сигнал о состоянии объекта по каналу об-

ратной связи поступает на измерительное устройство (ИЗУ), которое выдает информационный сигнал на устройство сравнения с входным значением (заданный уровень сигнала, задатчик, уставка – это все синонимы для определения нужного значения выхода системы). Сигнал рассогласования E (Error) поступает в устройство управления (УУ), которое по заложенному в нем алгоритму обрабатывает информацию и вырабатывает сигнал управления u , который поступает на вход исполнительного устройства (ИсУ). Исполнительное устройство воспринимает маломощный сигнал управления и вырабатывает управляющее воздействие U , открывая определенным образом каналы передачи энергии (электрическая энергия, топливо, сжатый воздух и т.п.) от окружения к объекту. Суть функционирования системы, таким образом, состоит в том, что необходимое воздействие на объект, переводящее его в заданное состояние (указывается на входе системы), определяется автоматически на основании обработки устройством управления результатов измерения выходных сигналов объекта.



Рис. 1.2. Структура системы автоматического управления:
 E – сигнал рассогласования (расстройка или невязка);
 u – сигнал управления; U – энергетическое воздействие

Отдельные элементы системы могут отсутствовать или объединяться, но принципиальным для схемы САУ на рис. 1.2 является наличие обратной связи.

Системы автоматического управления с обратной связью называются **замкнутыми системами**. Системы без обратной связи называются **разомкнутыми**.

Разомкнутые системы применяются в основном в тех случаях, когда выходные сигналы трудноизмеримы или вообще отсутствуют. В этом случае сигналы управления заранее программируются в УУ, а в ходе работы системы передаются исполнительному устройству. Управление в разомкнутых системах принято называть программным или П-управлением, в отличие от синтеза управления в системах с обратной связью (С-управление). Структура, приведенная на рис. 1.2, является общей как для непрерывных, так и для дискретных систем.

Управляющее устройство работает по алгоритму, содержащему параметры, настроенные на некоторое определенное внешнее воздействие. *Если алгоритм с заданными параметрами достигает цели управления при изменяющихся внешних воздействиях, он называется **робастным** (или грубым) алгоритмом, а диапазон изменения внешних воздействий, в котором алгоритм остается работоспособным – **областью робастности**. Если в алгоритме заложена корректировка параметров для наиболее точного управления в условиях изменения внешних воздействий, то он называется **адаптивным (самонастраивающимся)**.*

1.2. Аналоговые регуляторы по отклонению

Приблизительно до 1960 г. автоматическое управление технологическими объектами осуществлялось с помощью аналоговых электрических, пневматических или гидравлических регуляторов, т.е. осуществлялось непрерывное управление непрерывными объектами. Рассмотрим аналоговые регуляторы по отклонению на основе электрических регуляторов.

Электрический сигнал является универсальным. Его легко измерить, преобразовать и подать на вход исполнительного устройства. Рассмотрим устройство и принципы работы **аналоговых регуляторов**, предшественников современных цифровых систем управления. В качестве измерительного устройства в таких регуляторах служит датчик, преобразующий любую физическую величину (температуру, давление, частоту вращения, расход жидкости или газа и т.д.) в электрический сигнал. Выходной сигнал измерительного устройства поступает на инверсный вход устройства сравнения, на положительный вход которого подается требуемое значение электрического сигнала (уставка). Величина

уставки задается, например, изменением положения ручки потенциометра. Чтобы правильно определить эту величину, необходимо знать коэффициент преобразования измерительного устройства (в более общем случае, когда выходной сигнал датчика нелинейно зависит от измеряемой физической величины, необходимо знать номинальную статическую характеристику (НСХ) этого датчика).

Сигнал рассогласования E (отклонение измеренного сигнала от требуемого значения) подается в устройство управления на обработку. На рис. 1.3 приведена схема аналогового устройства управления, в котором происходит усиление сигнала E в K раз. Сигнал управления u , поступающий на вход исполнительного устройства, в этом случае оказывается пропорционален отклонению выходного сигнала системы от требуемого значения, поэтому регуляторы с таким устройством управления называют **пропорциональными** или **П-регуляторами** (не путать с П-управлением!). Установка требуемого значения коэффициента K осуществляется подстроечным элементом – переменным резистором.

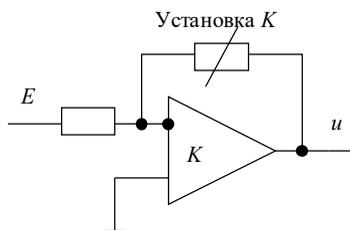


Рис. 1.3. Схема устройства управления аналогового П-регулятора

Для повышения точности регулирования в устройство управления дополнительно к усилителю включают цепь интегрирования и / или дифференцирования. Такие регуляторы сокращенно называют **ПИД-регуляторами**. Схема устройства управления аналогового ПИД-регулятора с усиливающим, интегрирующим и дифференцирующим звеньями приведена на рис. 1.4. Такой регулятор имеет три настроечных параметра: коэффициент K , время интегрирования T_i и время дифференцирования T_d . Параметры можно изменять с помощью подстроечных элементов, указанных на рис. 1.4.

ПИД-регуляторы называются в настоящее время **стандартными регуляторами по отклонению**. Их настройка заключается в подборе трех параметров и вводе их значений в управляющее устройство с помощью изменения номиналов подстроечных элементов соответствующих звеньев. Более 60 лет

назад Зиглер и Никольс предложили методику настройки ПИД-регуляторов по экспериментальным данным, которая используется до сих пор, поскольку является простой и эффективной. В настоящее время существует множество методов настройки стандартных регуляторов, в том числе с использованием компьютерного моделирования.

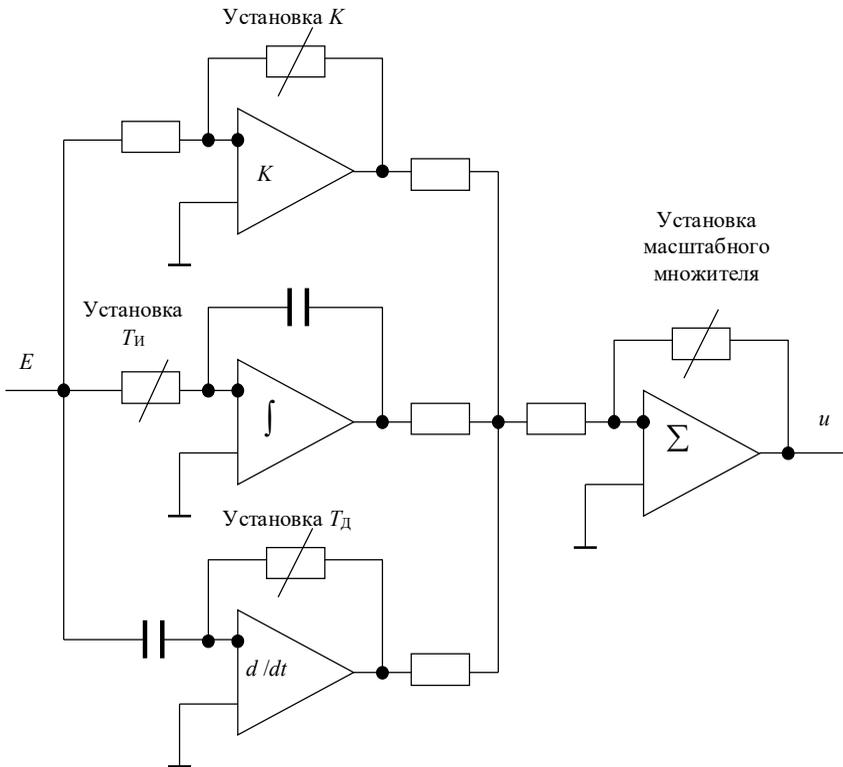


Рис. 1.4. Схема устройства управления аналогового ПИД-регулятора

Отметим, что приемлемое качество регулирования достигается не при каких-то конкретных значениях настроечных коэффициентов, а в широком диапазоне их значений, поэтому ПИД-регулятор представляет собой пример универсального робастного регулятора, используемого в системах управления с обратной связью, что объясняет большую их популярность в технике.

1.3. Современные цифровые системы автоматического управления

Современные системы управления содержат микроконтроллеры, в которые записывается алгоритм работы устройства управления. В отличие от проектировщика аналоговых регуляторов, имеющих в распоряжении от одного до трех настроечных элементов, проектировщик цифровых систем находится в гораздо более выгодном положении. Гибкость программных средств существенно расширяет возможности реализации сложных алгоритмов, что создает предпосылки для практического применения новейших методов современной теории управления. Только выбирай.

Рассмотрим состав современных цифровых САУ на примере системы автоматического управления температурой промышленных объектов с использованием прибора «Термодат», выпускаемого приборостроительным предприятием «Системы контроля» (г. Пермь, <http://www.termodat.ru>). Функциональная схема такой системы приведена на рис. 1.5. В простейшем случае цель работы системы состоит в поддержании температуры объекта на заданном уровне (выше температуры окружающей среды). В качестве объекта может выступать отдельное помещение, оборудованное электрическим обогревателем, муфельная печь, химический реактор с электроподогревом и т.д.

В рассматриваемом примере температура объекта измеряется с помощью термометра сопротивления (ТС), изготовленного на основе платинового или медного резистивного элемента, электрическое сопротивление которого изменяется в зависимости от температуры известным образом. Эта зависимость называется нормированной статической характеристикой (НСХ) первичного преобразователя. ТС подключается к входу электронного цифрового регулятора «Термодат»; значение сопротивления преобразуется в электрическое напряжение и через аналого-цифровой преобразователь подается на вход центрального процессора (ЦП).

В память процессора в табличном виде вводится НСХ первичного преобразователя, с которым должен будет работать данный прибор. Перед пуском системы управления на конкретном объекте оператор с помощью кнопок на панели вносит в память прибора требуемое значение температуры (уставки), и регулятор готов к работе. Возможностей процессора достаточно как для осуществления работы прибора по программе ПИД-регулятора с коэффициентами, устанавливаемыми вручную оператором, так и для выполнения сложных алгоритмов с функцией самонастройки.

После обработки результатов измерений процессор на основе заложенного в нем алгоритма выдает сигналы управления на транзисторный выходной ключ по закону широтно-импульсного модулирования (ШИМ). Транзисторный

ключ, в свою очередь, управляет внешним силовым тиристорным блоком, коммутирующим цепи питания однофазного или трехфазного тока на полезную нагрузку – нагревательный элемент, расположенный на объекте.

Отличительной особенностью систем с цифровым устройством управления является то, что микроконтроллер требует определенного времени на обработку сигнала, следовательно, в течение промежутка времени, пока идет обработка, выходной сигнал не изменяется, а затем изменяется скачком до нового значения. Ввиду этого цифровое устройство управления является *дискретным*. Промежуток времени между последовательными выдачами сигналов управления называют *шагом* или *периодом дискретизации*. Система управления с цифровым устройством также будет дискретной. Однако здесь нужно различать два случая: дискретное управление непрерывными объектами (рассмотренный выше пример) и управление дискретными объектами (пример дискретного объекта – шаговый двигатель).

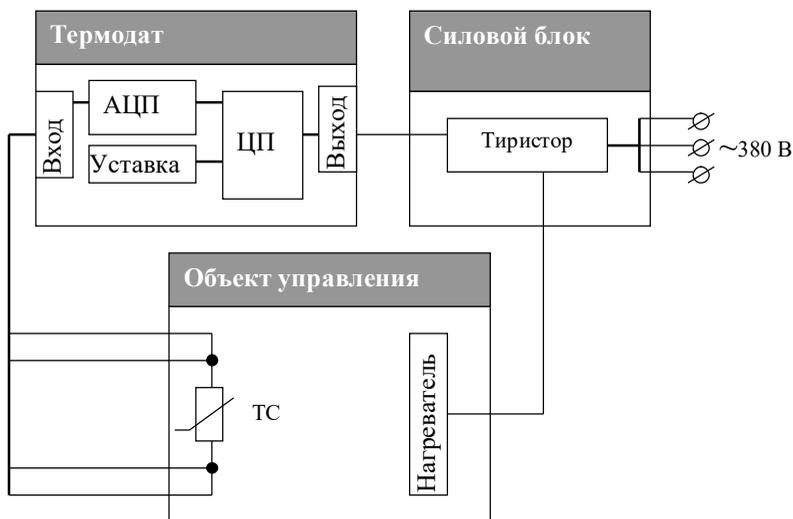


Рис. 1.5. Система автоматического управления температурой с использованием цифрового регулятора «Термодат»: АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ЦП – центральный процессор; ТС – термометр сопротивления

Минимальный период дискретизации устройства управления определяется быстродействием процессора и сложностью заложенной в нем программы. Некоторые современные алгоритмы управления требуют специального подбора

периода дискретизации, который, разумеется, не меньше минимального периода, а кратен ему. Минимальный период дискретизации не должен превышать естественных характерных значений времени протекания процессов в объекте управления. Отсюда возникают требования к быстродействию микроконтроллеров, применяемых для регулирования. Собственные значения времени изменения температуры массивных тел составляют десятки секунд, а то и достигают нескольких часов (например, в системах отопления зданий). Дискретность микропроцессорных регуляторов при этом незаметна, они работают как непрерывные. Если контроллер управляет, например, двигателем автомобиля, то тактовая частота процессора не должна быть меньше частоты вращения вала двигателя: $3000\text{--}6000 \text{ об/мин} = 50\text{...}100 \text{ Гц}$. Обработка и управление звуковыми сигналами в акустическом диапазоне требуют частот в десятки тысяч герц, частота видеосигналов составляет сотни мегагерц, что предъявляет соответствующие требования к микроконтроллерам.

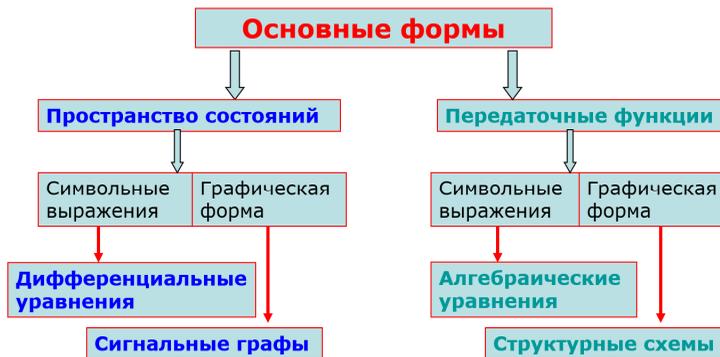
Сложность объектов управления и алгоритмов, используемых в современных системах автоматического управления, делает необходимым этап компьютерного моделирования при конструировании систем управления. Это моделирование должно быть весьма разносторонним: моделирование динамических процессов в объекте управления (разработка математической модели объекта), моделирование и отладка алгоритмов управления, эмуляция микропроцессора в компьютере, наконец, генерация машинного кода для прошивки микропроцессоров. Для выполнения указанных целей в настоящее время имеется много программных продуктов.

Для моделирования процессов управления очень хорошо подходит программный пакет **MATLAB** (MATrix LABoratory), разработанный фирмой The Math Works, Inc., ставший фактически международным стандартом учебного программного обеспечения, в том числе в области теории управления. Также компания MathWorks предлагает новый метод для решения задач проектирования систем управления на платформе MATLAB / Simulink – модельно-ориентированное проектирование (МОП), которое объединяет в непрерывный рабочий процесс разные этапы разработки системы от формирования требований к ней до разработки и отладки системы. Имитационное моделирование и автоматическая генерация кода из Simulink включаются в МОП, как необходимые этапы разработки.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

2.1. Построение математических моделей

Первым этапом проектирования системы управления является построение математической модели объекта управления и других составных частей системы. Основные формы представления математических моделей линейных систем приведены ниже:



В качестве простого и наглядного примера рассмотрим задачу управления поворотом вала электродвигателя постоянного тока, управляемого по цепи возбуждения (статора) при постоянном токе в обмотке подвижного сердечника (якоря). К валу двигателя прикреплена полезная нагрузка, например плечо руки робота. Вал вместе с нагрузкой нужно повернуть на определенный угол. Стоит заметить, что двигатели постоянного тока обладают такими качествами, как возможность регулирования скорости вращения в широком диапазоне, высокий вращающий момент, компактность, хорошие нагрузочные характеристики, поэтому они широко применяются в роботах-манипуляторах, лентопротяжных механизмах, дисководах, в машиностроении и исполнительных устройствах следящих систем.

Объектом управления в рассматриваемом примере является электродвигатель, запитываемый от цепи постоянного тока. К валу двигателя прикреплена нагрузка. Вход объекта – приложенное напряжение, выход – угол поворота вала. Цель управления удобно сформулировать после составления математической модели объекта. Переходим к построению математической модели объекта, затем выберем цель и только потом составим ММ системы управления в целом.

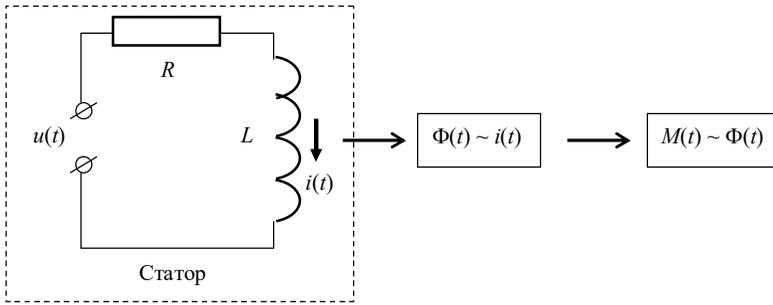


Рис. 2.1. Простейшая модель электродвигателя, управляемого по цепи статора

В простейшем случае статор можно представить в виде электрической цепи, содержащей сопротивление R (активное сопротивление обмотки) и индуктивность L , межвитковыми емкостями пренебрегаем. Протекающий по обмотке статора ток i создает в зазоре двигателя магнитный поток Φ , который взаимодействует с постоянным током якоря и вызывает крутящий момент M , что приводит к вращению якоря и жестко скрепленного с ним вала с нагрузкой (рис. 2.1).

Будем считать, что магнитный поток Φ прямо пропорционален току i в статоре, а механический момент M , в свою очередь, пропорционален магнитному потоку:

$$\Phi(t) = k_1 i(t), \quad M(t) = k_2 \Phi(t) = k_1 k_2 i(t) \equiv Ki(t). \quad (2.1)$$

Пренебрегая трением и силой сопротивления окружающей среды, для угла поворота вала φ запишем уравнение движения

$$J\ddot{\varphi}(t) = M(t) = Ki(t), \quad (2.2)$$

где J – момент инерции вала с нагрузкой.

Ток в статоре подчиняется закону Кирхгофа:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t). \quad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.2) в формулу (2.3), получим уравнение для φ :

$$LJ\ddot{\varphi}(t) + RJ\dot{\varphi}(t) = Ku(t), \quad (2.4)$$

которое и есть математическая модель объекта. Параметрами объекта являются четыре константы: L , R , J и K . Переменная $u(t)$ – вход объекта, переменная $\varphi(t)$ – выход. Отметим, что состояние объекта описывается тремя величинами, поскольку уравнение движения имеет третий порядок. Таким образом, выходная переменная не описывает полное состояние объекта.

Для задания состояния объекта в качестве независимых **переменных состояния** $\{x_1, x_2, x_3\}$ выберем три величины: угол поворота, угловую скорость и угловое ускорение, соответственно, $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, $x_3 = \ddot{\varphi}$. Эти переменные называются **фазовыми переменными**. Выходную переменную обозначим буквой y . Теперь уравнение (2.4) можно записать в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L}x_3 + \frac{k}{LI}u. \end{aligned} \tag{2.5}$$

К системе (2.5) нужно добавить **уравнение выхода**

$$y = x_1. \tag{2.6}$$

У нас получилась математическая модель в виде системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (линейная стационарная система). Форма представления математической модели в виде уравнений (2.5), которая получается, когда в качестве переменных состояния выбирают фазовые переменные, называется формой Коши.

Заметим, что вектор состояния задаётся тремя переменными, а выход системы представляет собой одну величину, т.е. не совпадает с вектором состояния.

Если управление системой осуществляется с учетом полного вектора состояния, оно называется **управлением по состоянию**, в противном случае – **управлением по выходу**.

Для построения математической модели системы управления в целом необходимо выбрать и формализовать цель работы системы. Если выходная величина y доступна измерению (в рассматриваемом случае – с помощью датчика угла поворота вала), то мы имеем систему с обратной связью. Целью в этом

случае может служить достижение определенного угла поворота вала и удержание его в этом положении, что формально можно записать в виде

$$y \rightarrow y_{уст}, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (2.7)$$

Значение $y_{уст}$ должно быть подано на вход системы с обратной связью. В качестве устройства управления можно использовать стандартный ПИД-регулятор, математическая модель которого содержит три параметра: K , T_i , T_d (см. рис. 1.4). Формулы, описывающие алгоритм работы ПИД-регулятора, будут рассмотрены в следующих главах.

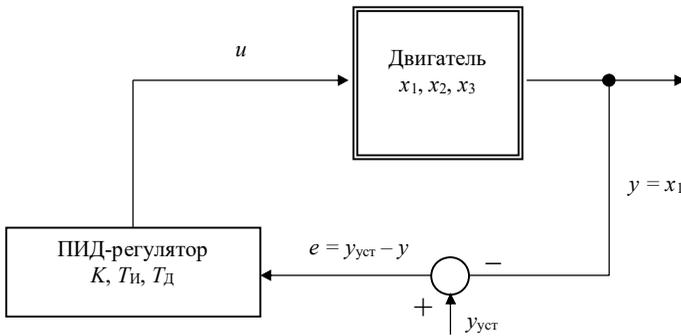


Рис. 2.2. Математическая модель системы управления электродвигателем обратной связью

Итак, математическая модель системы автоматического управления поворотом вала электродвигателя готова. Она приведена на рис. 2.2. Модель можно запрограммировать в пакете Simulink среды MATLAB и с помощью компьютерного моделирования определить значения параметров ПИД-регулятора, при которых система имеет заданные динамические и точностные характеристики. Остается ввести найденные параметры в реальный регулятор и убедиться в работоспособности реального двигателя, управляемого данным регулятором, или его цифрового двойника.

Если система заработает, процесс моделирования можно считать завершенным. В противном случае понять, какие детали не были учтены ранее (например, учесть значения времени срабатывания измерительного и исполнительного устройств); исправить модель и снова проверить результаты моделирования на реальной системе.

2.2. Математическая модель RLC-цепи

В настоящее время для моделирования линейных стационарных систем применяют две основные формы представления: форму в виде дифференциальных уравнений (пространство состояний) и алгебраическую форму (передаточные функции в комплексном пространстве).

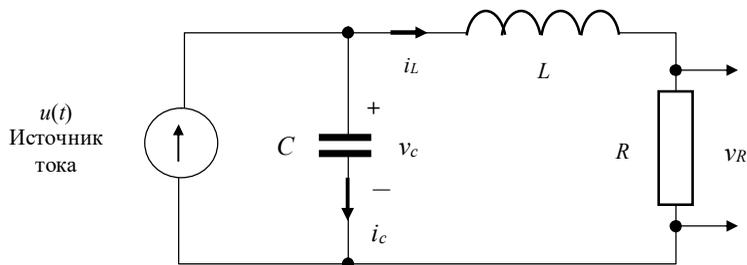


Рис. 2.3. RLC-цепь

Рассмотрим пример простейшей RLC-цепи, изображенной на рис. 2.3 (колебательный контур). Построим ее математическую модель. В первую очередь необходимо определить переменные, описывающие состояние системы. Кроме того, необходимо определить, какие переменные являются входными, а какие – выходными. Переменные состояния выберем из следующих соображений: поскольку энергия E , запасенная в RLC-цепи, выражается через напряжение на конденсаторе $v_c(t)$ и через ток в индуктивности $i_L(t)$: $E = (1/2)Li_L^2 + (1/2)Cv_c^2$, то в качестве переменных состояния $\{x_1, x_2\}$ выбираем эти величины:

$$x_1 = v_c(t), x_2 = i_L(t). \quad (2.8)$$

Входной переменной будем считать ток источника $u(t)$, в качестве выходной переменной рассмотрим напряжение на резисторе v_R . Используя закон Кирхгофа для токов, запишем дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее скорость изменения напряжения на конденсаторе:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = u(t) - i_L. \quad (2.9)$$

Закон Кирхгофа для напряжений, примененный к правому контуру, дает уравнение, определяющее скорость изменения тока через индуктивность:

$$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c. \quad (2.10)$$

Выход системы определяется линейным алгебраическим уравнением $v_R = Ri_L(t)$.

Уравнения (2.9) и (2.10) мы можем переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений относительно переменных состояния x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогда выходной сигнал будет

$$y(t) = v_R(t) = Rx_2. \quad (2.12)$$

Используя уравнения (2.11) и (2.12), а также начальные условия $[x_1(t_0), x_2(t_0)]$, мы сможем определить будущее поведение системы и выходную переменную. Итак, мы получили математическую модель RLC-цепи в виде линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Такие системы называются **линейными стационарными системами** (ЛСС). По-английски: Linear TimeInvariant (LTI) Systems.

2.3. Пространство состояний

Переменные состояния, описывающие систему, не являются единственными, всегда можно выбрать другую комбинацию переменных. Например, для системы второго порядка, такой как RLC-цепь, в качестве переменных состояния можно выбрать любые две линейно независимые комбинации $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Для RLC-цепи мы могли бы принять за переменные состояния два напряжения: $v_c(t)$ и $v_L(t)$, где v_L – напряжение на индуктивности. Тогда новые переменные состояния, x_1^* и x_2^* , будут связаны со старыми переменными x_1 и x_2 соотношениями:

$$x_1^* = v_c = x_1, \quad (2.13)$$

$$x_2^* = v_L = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2. \quad (2.14)$$

В реальной системе всегда можно образовать несколько наборов переменных состояния, которые адекватно описывают ее динамику. При составлении модели электродвигателя (2.5) мы выбирали в качестве переменных состо-

яния выходную величину (угол поворота вала) и ее производные (угловую скорость и угловое ускорение). При этом получили систему дифференциальных уравнений в форме Коши, которая часто используется при математическом исследовании поведения системы. Однако сейчас стоит заметить, что модель в форме Коши не всегда удобно использовать в системах управления с обратной связью по состоянию. В электродвигателе можно измерить тахометром угловую скорость вращения вала, но измерение углового ускорения является сложной задачей. Зато легко измерить ток в обмотке статора, который и нужно использовать в качестве одной из переменных состояния. Так часто и поступают при проектировании систем управления: *на практике в качестве переменных состояния часто выбирают такие физические переменные, которые легко могут быть измерены.*

В общем случае состояние линейной динамической системы задается набором переменных состояния $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, а изменение переменных состояния описывается линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m; \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$ – компоненты вектора управляющих воздействий \bar{u} (входной сигнал). Здесь и далее буквами с чертой сверху будем обозначать векторы вещественного пространства, что символически можно записать как $\bar{x} \in R_n$, где n – размерность пространства.

В матричной форме уравнения (2.15) примут вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Введем обозначения для матриц и векторов:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Теперь систему (2.16) можно записать в компактном виде:

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}. \quad (2.17)$$

Матрица A является квадратной матрицей $n \times n$, она определяет **свободную динамику** объекта, т.е. его поведение при $\bar{u} = 0$, а матрица B имеет размерность $n \times m$ и определяет вклад каждого из входов в динамику системы. В общем случае выходные сигналы $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)\}$ связаны с переменными состояния **уравнением выхода**:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix},$$

или в компактной форме:

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}. \quad (2.18)$$

В современной теории управления модель (2.17)–(2.18) называют моделью в **пространстве состояний** (State space). В MATLAB эта модель называется **ABCD-моделью**. Для модели (2.11)–(2.12), например, матрицы A , B , C , D имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad R], \quad D = 0. \quad (2.19)$$

Сигнальный граф для системы (2.11)–(2.12) имеет вид, приведенный на рис. 2.4.

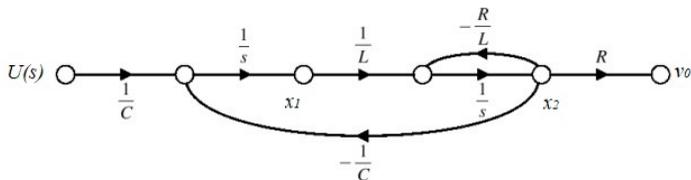


Рис. 2.4. Сигнальный граф для RLC-цепи

Сигнальный граф – это совокупность направленных отрезков (*ветвей*), начинающихся и оканчивающихся в *узлах* графа. На рис. 2.4 ветви изображены отрезками или дугами с нанесенными на них направлениями, а узлы – кружочками. Ветвь, входящая в узел, означает входящий сигнал, а выходящая ветвь – исходящий сигнал. При движении по ветви сигнал претерпевает изменения: умножается на константу, интегрируется или дифференцируется. Символ операции указывается около соответствующей ветви. Так, во второй слева узел на рис. 2.4 входит величина U , умноженная на $1/C$, и величина x_2 , умноженная на $-1/C$; оба сигнала складываются в узле и интегрируются на выходе из узла (символ интегрирования $\frac{1}{s}$), в результате получаем величину x_1 .

Если система управления имеет один вход ($m = 1$) и один выход ($p = 1$) – single-input-single-output – она называется SISO-системой. Если у системы несколько входов и несколько выходов – multiple-input-multiple-output – она именуется МИМО-системой. Разумеется, МИМО-системы гораздо сложнее анализировать. Мы будем рассматривать в основном проектирование SISO-систем.

ГЛАВА 3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ

3.1. Определение передаточных функций

По своему смыслу передаточная функция (ПФ) – это функция, связывающая один входной и один выходной сигналы СУ. Она является формой записи системы уравнений движения, решенной относительно требуемой выходной переменной. В большинстве случаев ПФ записывается не для функций времени $x(t)$, а для их преобразований Лапласа $X(s)$, т.е. ПФ связывает в этом варианте не сигналы, а их изображения, поскольку эта связь алгебраическая, а не интегральная.

Найдем передаточную функцию для нашего примера RLC-цепи. Это можно сделать, подвергнув преобразованию Лапласа непосредственно систему (2.11)–(2.12), однако пояснения удобно вести, перейдя к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

Обозначим $x(t) = x_2(t)$ и продифференцируем второе уравнение в системе (2.11) по времени. Получим уравнение:

$$\ddot{x} + \frac{R}{L}\dot{x} + \frac{1}{LC}x = \frac{1}{LC}u, \quad (3.1)$$

эквивалентное системе (2.11)–(2.12).

Сначала найдем решение *неоднородного* уравнения (3.1) при *однородных* начальных условиях $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ (это важно для определения ПФ!) с помощью преобразования Лапласа: $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$. Отметим, что величина s

определена в комплексном пространстве (комплексная частота). В физике часто используется преобразование с вещественной частотой – преобразование Фурье. Однако в теории управления преобразование Лапласа имеет преимущество, поскольку в нем явно присутствуют начальные условия, поэтому здесь применяют преобразование с комплексной частотой.

Преобразования Лапласа от первой и второй производных $f_1 = \dot{x}, f_2 = \ddot{x}$ соответственно

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0), \\ F_2(s) &= \int_0^{\infty} \ddot{x}(t)e^{-st} dt = s^2X(s) - sx(0) - s\dot{x}(0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

поэтому, подвергая выражения (3.1) преобразованию Лапласа и учитывая однородность начальных условий, получим

$$(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})X(s) = \frac{1}{LC}U(s). \quad (3.3)$$

Отметим, что уравнение

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (3.4)$$

является характеристическим уравнением системы (2.11)–(2.12), а сам полином

$$q(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \quad (3.5)$$

называется **характеристическим полиномом**; он играет важную роль в исследовании СУ с помощью передаточных функций.

Поскольку преобразование Лапласа выходного сигнала $y(t)$ имеет вид $Y(s) = RX(s)$, то, умножив формулу (3.3) на R , с учетом полинома (3.5), получим

$q(s)Y(s) = \frac{R}{LC}U(s)$. Отсюда получаем связь между изображением управляющего воздействия (входа) $U(s)$ и наблюдаемой величиной (выходом) $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{R/LC}{q(s)}U(s) \equiv G(s)U(s), \quad (3.6)$$

где

$$G(s) = \frac{R/LC}{q(s)} = \frac{R}{LCs^2 + RCs + 1}. \quad (3.7)$$

В соответствии с вышеизложенным, $G(s)$ и является передаточной функцией рассматриваемой системы.

Передаточная функция системы (Transfer function) – это отношение преобразования Лапласа выходной переменной к преобразованию Лапласа входной переменной **при нулевых начальных условиях**:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Передаточная функция имеет размерность, которая определяется отношением размерности величины выхода к размерности входной величины. В рассмотренном примере $[G] = \text{Ом}$.

В общем случае $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, где в знаменателе находится характеристический полином степени n (*порядок системы*), а в числителе – полином $p(s)$ степени $n - 1$ или более низкой:

$$G(s) = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0}{s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0}, \quad m \leq n - 1. \quad (3.8)$$

Корни характеристического полинома $q(s)$ называются **полюсами**, а корни полинома $p(s)$ – **нулями** передаточной функции.

Чтобы найти полное решение уравнения (3.1), найдем решение однородного уравнения ($u = 0$) при ненулевых начальных условиях $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$. Учитывая выражения (3.2), получаем

$$X(s) = \frac{m(s)}{q(s)}, \quad m(s) = (as + b)x_0 + a\dot{x}_0, \quad a = 1; \quad b = \frac{R}{L}. \quad (3.9)$$

Полное решение запишется в виде суммы решений выражений (3.6) и (3.9):

$$X(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)} U(s). \quad (3.10)$$

3.2. Структурные схемы

Зная передаточную функцию, мы можем изобразить причинно-следственную связь между переменными в наглядной схематической форме в виде *структурной схемы*. Структурные схемы состоят из блоков направленного действия, каждому из которых соответствует определенная передаточная функция.

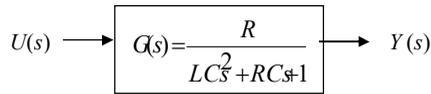


Рис. 3.1. Структурная схема RLC-цепи

На рис. 3.1 изображена структурная схема RLC-цепи. Если структурная схема состоит из нескольких блоков, то полная передаточная функция системы может быть записана в виде произведения передаточных функций этих блоков. Данное правило проиллюстрировано на рис. 3.2.

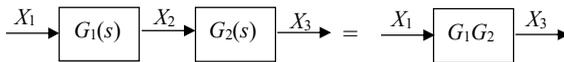


Рис. 3.2. Преобразование структурной схемы

Другие правила работы со структурными схемами будут рассмотрены по ходу изложения. Заметим только, что анализ систем путем преобразования структурных схем дает гораздо лучшее представление о роли каждого элемента, чем это было бы при рассмотрении уравнений.

Передаточную функцию иногда представляют в операторной форме. Так, если в уравнении (3.1) ввести *оператор* $p = \frac{d}{dt}$, то это уравнение можно записать в виде:

$$p^2x(t) + \frac{R}{L}px(t) + \frac{1}{LC}x(t) = \frac{1}{LC}u(t). \quad (3.11)$$

Вводя операторную функцию:

$$W(p) = \frac{R}{LCp^2 + RCp + 1}, \quad (3.12)$$

выход $y(t) = R x(t)$ можно представить в виде:

$$y(t) = W(p)u(t). \quad (3.13)$$

Формула (3.13) задает связь выходной и входной переменных, аналогично формуле (3.6), только во временной области. Функцию $W(p)$ также называют передаточной функцией. Однако, в отличие от алгебраического соотношения (3.6), в формуле (3.13) функция не умножается на $u(t)$, а оказывает операторное действие. Тем не менее структурные схемы с функциями $W(p)$ имеют вид, аналогичный формуле (3.1), и подчиняются тем же правилам преобразования, что и структурные схемы с передаточными функциями $G(s)$.

3.3. Передаточные функции систем с обратной связью

На рис. 3.3 приведена структурная схема замкнутой системы управления, изображенной на рис. 1.2.

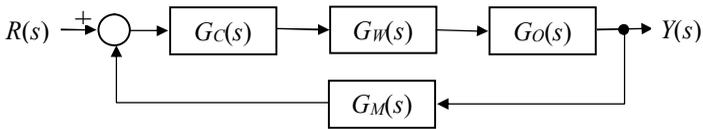


Рис. 3.3. Структурная схема замкнутой системы управления: $G_o(s)$ – передаточная функция объекта; $G_m(s)$ – передаточная функция измерительного устройства; $G_c(s)$ – передаточная функция устройства управления (регулятора); $G_w(s)$ – передаточная функция исполнительного устройства

Введем обозначение: $G(s) = G_c(s)G_w(s)G_o(s)$, $H(s) = G_m(s)$, получим структурную схему системы с обратной связью, приведенную на рис. 3.4.

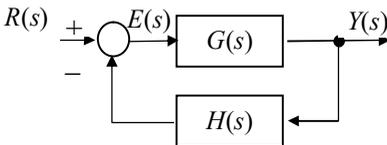


Рис. 3.4. Система управления с обратной связью

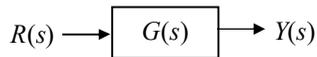


Рис. 3.5. Разомкнутая система управления

На рис. 3.5 приведена схема разомкнутой системы, т.е. объекта, на вход которого подается воздействие R . Заметим, что передаточная функция G преоб-

разует входной сигнал в выходной, а передаточная функция H совершает обратное преобразование: превращает измеренный сигнал выхода в величину, имеющую размерность входного сигнала, поэтому можно сделать вывод, что произведение этих функций

$$G(s) \cdot H(s) \equiv GH(s) \quad (3.14)$$

есть величина безразмерная.

Найдем передаточную функцию системы с обратной связью $T(s)$. Из рис. 3.4 следует, что величина ошибки $E(s)$ равна разности между входным сигналом $R(s)$ и измеренным преобразованным выходным сигналом $H(s)Y(s)$:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s). \quad (3.15)$$

Выход $Y(s)$ определяется произведением $G(s)E(s)$, поэтому

$$Y(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)], \quad G(s)R(s) = Y(s)[1 + GH(s)].$$

Искомое выражение для передаточной функции системы $T(s) = Y(s)/R(s)$ имеет вид:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}. \quad (3.16)$$

Из формулы (3.16) видно, что разомкнутой системе соответствует $H(s) = 0$. При $H(s) = 1$ (выход объекта подается на его вход с противоположным знаком) замкнутую систему называют системой управления с единичной отрицательной обратной связью.

Если передаточная функция объекта имеет стандартный вид (3.8):

$$G(s) = \frac{p(s)}{s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_0},$$

то замыкание объекта цепью обратной связи с ПФ $H(s)$ даст систему с передаточной функцией

$$T(s) = \frac{p(s)}{s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_0 + p(s)H(s)}. \quad (3.17)$$

Мы видим, что полином в знаменателе функции $T(s)$ отличается от полинома в знаменателе $G(s)$, а это означает, что **динамика системы с обратной связью отличается от динамики свободного объекта** (разомкнутой системы).

3.4. Связь между передаточными функциями и уравнениями состояния

Модель системы в виде передаточных функций можно представить в виде дифференциальных уравнений состояния, и наоборот. Рассмотрим, каким образом осуществляется переход от одной формы представления математической модели к другой форме для систем с одним входом и одним выходом (SISO).

Пусть задана передаточная функция системы вида (3.8). От нее элементарно перейти к системе дифференциальных уравнений в форме Коши (в фазовом пространстве) или к канонической диагональной форме. Проиллюстрируем этот переход на примере системы третьего порядка, чтобы не загромождать обозначений. ПФ имеет вид:

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (3.18)$$

Поскольку в знаменателе стоит характеристический полином, мы можем сразу записать соответствующее ему дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = u. \quad (3.19)$$

Обозначим $x_1 = x$ и, действуя, как и ранее в подразд. 2.2, получим цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Это и есть система уравнений состояния в форме Коши.

В числителе функции (3.18), согласно определению ПФ, стоит преобразование Лапласа от выходной переменной. Следовательно, мы можем сразу записать уравнение выхода

$$y(t) = b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1. \quad (3.21)$$

Разложим теперь функцию (3.18) на элементарные дроби, используя метод неопределенных множителей. При отсутствии кратных полюсов можем записать

$$G(s) = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} + \frac{k_3}{s - s_3}. \quad (3.22)$$

Введем три переменных $\{x_1, x_2, x_3\}$, каждая из которых соответствует полюсу ПФ с соответствующим индексом. Система дифференциальных уравнений для этих переменных сразу запишется в виде

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t). \quad (3.23)$$

Уравнение выхода имеет вид

$$y(t) = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \cdot \bar{x}. \quad (3.24)$$

При наличии кратных полюсов (корней характеристического полинома) матрица A примет не диагональную, а блок-диагональную (жорданову) форму.

Покажем теперь, как найти передаточную функцию, если известны уравнения состояния для SISO-системы. Положим матрицу D равной нулю и запишем уравнения ABCD-модели в виде

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A\bar{x} + Bu, \quad (3.25)$$

$$y = C\bar{x}.$$

Матрицы и векторы в уравнениях (3.25), например, для системы третьего порядка имеют следующую структуру:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}, \quad C = [\bullet \quad \bullet \quad \bullet]. \quad (3.26)$$

Преобразуя уравнения (3.25) по Лапласу при нулевых начальных условиях $\bar{x}(0) = 0$, получим

$$s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + BU(s), \quad Y(s) = C\bar{X}(s). \quad (3.27)$$

Первое равенство в системе (3.27) запишем в виде

$$(sI - A)\bar{X}(s) = BU(s), \quad (3.28)$$

где I – единичная матрица размерности $n \times n$. Умножим равенство (3.28) слева на матрицу

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}, \quad (3.29)$$

которая, как известно, является преобразованием Лапласа от **фундаментальной матрицы** системы $\Phi(t) = \exp(At)$. В результате получим

$$\bar{X}(s) = \Phi(s)BU(s). \quad (3.30)$$

Подставив выражение (3.30) во второе равенство в системе (3.27), найдем выражение для выхода:

$$Y(s) = C\Phi(s)BU(s). \quad (3.31)$$

Сравнивая это выражение с определением передаточной функции $G(s)$, находим ее вид:

$$G(s) = C\Phi(s)B. \quad (3.32)$$

Если учесть структуру матриц в системе (3.26), то легко увидеть, что свертка матриц в формуле (3.32), действительно, представляет собой скаляр.

Таким образом, мы убедились, что возможен переход от модели в форме передаточных функций к модели пространства состояний и обратно, при этом задача определения передаточной функции по уравнениям состояния имеет однозначное решение, а обратная – нет. Алгоритмы перехода запрограммированы в MATLAB в функциях `ss` и `tf`.

ГЛАВА 4. ПЕРЕХОДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

4.1. Переходные характеристики и функции отклика

Однородность начальных условий, требуемая при определении передаточной функции, означает физически, что система в момент времени $t = 0$ находится в состоянии покоя (равновесия). В этот момент на вход системы подается какой-то сигнал. Этот сигнал может оставаться постоянным (ступенчатое входное воздействие) или переменным – например, импульсным или периодическим.

Если в начальный момент времени на систему подать постоянное воздействие, то она перейдет с течением времени в новое состояние покоя (релаксирует к новому состоянию). Если подействовать импульсно, то система выйдет из равновесия, а затем возвратится в исходное состояние. В любом случае *переходной процесс* будет описываться некоторой функцией времени.

Единичная ступенчатая функция описывается выражением

$$l(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Единичная импульсная функция (дельта-функция Дирака) описывается как

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} l(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (4.2)$$

Преобразования Лапласа этих функций имеют вид

$$l(s) = \frac{1}{s}, \quad (4.3)$$

$$\delta(s) = 1. \quad (4.4)$$

Реакция системы на ступенчатое воздействие называется *переходной функцией (переходной характеристикой)*. Реакция системы на импульсное воздействие называется *весовой функцией (характеристикой)*.

На рис. 4.1 приведена для примера переходная характеристика для RLC-цепи при следующих значениях параметров:

$$R = 20 \text{ Ом}, L = 10 \text{ Гн},$$

$$C = 40 \text{ мкФ},$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 10 \text{ мА}, & t > 0 \end{cases}.$$

Рис. 4.1. Переходная характеристика RLC-цепи

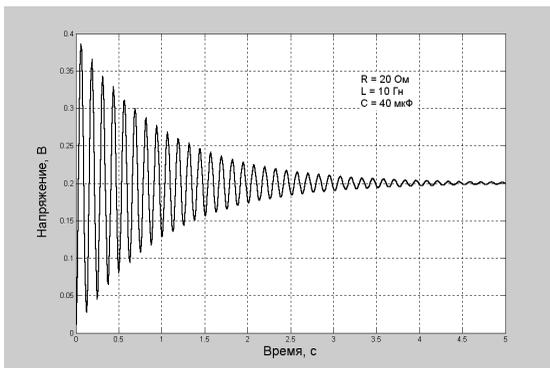


График построен с помощью функций MATLAB (см. следующую главу). Отметим, что выход системы в установившемся режиме $y_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ может быть найден с помощью преобразования Лапласа выходной переменной по известному правилу

$$y_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s). \quad (4.5)$$

4.2. Показатели качества

Показатели качества регулирования определяются обычно по переходной характеристике системы. Типичный ее вид при единичном ступенчатом воздействии приведен на рис. 4.2. На графике нанесены наименования основных параметров кривой, которые характеризуют работу системы управления. По своему смыслу эти параметры (показатели качества) делятся на динамические и точностные.

Динамические показатели качества описывают работу системы управления до выхода в установившийся режим; *точностные показатели качества* описывают работу системы в установившемся режиме.

Перечень показателей приведен в табл. 4.1.

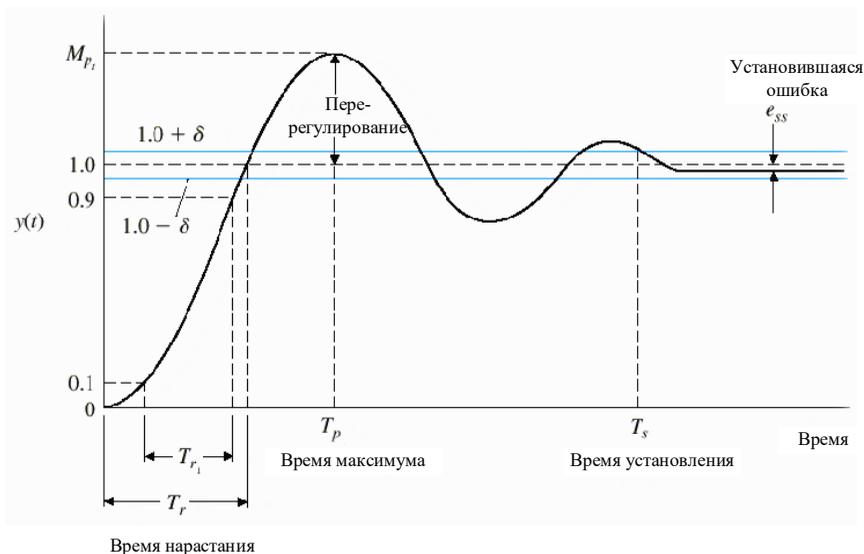


Рис. 4.2. Реакция системы управления на ступенчатое воздействие

Таблица 4.1

Перечень показателей качества регулирования

Наименование показателя		Обозначение	Вид показателя
Русское	Английское		
Время нарастания	Rise time	T_r (T_{r1})	Динамический
Время максимума	Peak time	T_p	Динамический
Перерегулирование (заброс регулятора)	Overshoot	M_{Pr}	Динамический
Коридор (зона)	Zone	$\pm\delta$	Точностной
Время установления	Settling time	T_s	Динамический
Установившаяся ошибка	Stationary error	e_{ss}	Точностной

Если система выходит на режим без колебаний (передемпфированная система), то перерегулирование отсутствует, время максимума T_p смысла не имеет, а в качестве времени нарастания T_r рассматривается интервал, в течение которого переходная характеристика изменяется от 10 до 90 % ее значения.

Цель управления обычно состоит в том, чтобы установившаяся ошибка e_{ss} лежала внутри коридора (зоны) δ , назначаемой конструктором после согласования с будущим потребителем проектируемой системы управления. Очень часто накладываются требования уменьшения времени установления T_s (быстродействия) и величины перерегулирования (заброса регулятора) одновременно. Интуитивно ясно, что эти два требования взаимно противоречивы, поэтому

конструктору приходится прибегать к компромиссу. Если, например, большой заброс регулятора может вызвать катастрофические последствия для объекта управления, в первую очередь уменьшают заброс, а если время выхода определяется технологией управляемого процесса, то необходимо обеспечить требуемую длительность этого времени и т.д. Перерегулирование обычно определяют как отношение разности заброса регулятора и установившегося значения к установившемуся значению (в процентах) – в этом случае говорят об **относительном перерегулировании**:

$$\delta_p = \frac{M_p - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100\%. \quad (4.6)$$

В качестве примера найдем показатели качества для системы второго порядка. Передаточная функция $T(s)$ в этом случае может быть представлена в удобном для анализа виде:

$$T(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (4.7)$$

где K – масштабный коэффициент (при анализе переходной характеристики он может быть положен равным единице), ω_n имеет размерность частоты (как и переменная s), а ζ – безразмерный параметр (декремент). Обозначения (4.7) удобны тем, что полюса ПФ имеют вид:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (4.8)$$

поэтому величина безразмерного декремента ζ непосредственно позволяет судить о характере поведения системы:

- выход в установившийся режим без колебаний – при $\zeta > 1$;
- критический режим ($\zeta = 1$);
- закритический режим (затухающие колебания) – при $\zeta < 1$.

Поскольку выход системы Y связан со входом R соотношением $Y(s) = T(s)R(s)$, то для единичного ступенчатого воздействия, описываемого выражением (4.3) $R(s) = \frac{1}{s}$, мы получим

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (4.9)$$

Подвергнув выражение (4.9) обратному преобразованию Лапласа, находим явный вид переходной функции $y(t)$ при $0 < \zeta < 1$ (в колебательном режиме):

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta). \quad (4.10)$$

Эту функцию легко проанализировать аналитически и найти показатели качества работы системы. Формулы, по которым можно рассчитать основные показатели качества для системы второго порядка, приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Показатели качества для системы второго порядка

Наименование показателя	Обозначение	Расчетная формула
Время максимума	T_p	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
Время установления ($\delta = 2\%$)	T_S	$\approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$
Относительное перерегулирование	$\delta_p = \frac{M_p - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100\%$	$100 \cdot e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}}$

Для систем более высокого порядка аналитический расчет показателей качества весьма громоздок, и здесь на помощь приходит компьютерное моделирование систем управления в пакете MATLAB.

4.3. Оценки качества

Современная теория управления предполагает, что проектировщик способен количественно определить требуемое качество системы в виде интегральной (по времени) оценки. Эта численная оценка должна учитывать те стороны процесса управления, которые наиболее важны. Дадим следующее простое определение оценки качества:

Оценка качества – это численный показатель качества системы, который выбирается так, чтобы подчеркнуть наиболее важное требование, предъявляемое к системе.

Если параметры системы выбираются из требования минимальности оценки качества, то система управления будет оптимальной по отношению к тем требованиям, которые учитывает оценка.

В общем случае интеграл, оценивающий качество системы, имеет вид

$$I = \int_0^T f[e(t), r(t), y(t), t] dt. \quad (4.11)$$

Здесь y – выходной сигнал, e – ошибка, r – воздействие (затраты на управление). Вид функции f и время интегрирования T определяются требованиями, предъявляемыми к системе.

Наиболее употребительные оценки качества, минимизирующие ошибку, приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Интегральные оценки качества

Название оценки	Аббревиатура	Интеграл
Интеграл от квадрата ошибки	ИКО	$\int_0^T e^2(t) dt$
Интеграл от модуля ошибки	ИМО	$\int_0^T e(t) dt$
Интеграл от взвешенного модуля ошибки	ИВМО	$\int_0^T t e(t) dt$
Интеграл от взвешенного квадрата ошибки	ИВКО	$\int_0^T t e^2(t) dt$

Наилучшей считается оценка ИВМО.

Для передаточной функции вида

$$T_q(s) = \frac{\omega_n^q}{s^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0} \quad (4.12)$$

были определены значения коэффициентов $b_k, k = 1, 2, \dots, q$, которые минимизируют оценку ИВМО. Эти коэффициенты приведены в табл. 4.4 для $q = 1, \dots, 5$.

**Оптимальные значения коэффициентов $T(s)$,
основанные на критерии ИВМО, при ступенчатом входном сигнале**

Порядо n	Коэффициенты ПФ					
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
1	–	–	–	–	1	ω_n
2	–	–	–	1	$1,4\omega_n$	ω_n^2
3	–	–	1	$1,75\omega_n$	$2,15\omega_n^2$	ω_n^3
4	–	1	$2,1\omega_n$	$3,4\omega_n^2$	$2,7\omega_n^3$	ω_n^4
5	1	$2,8\omega_n$	$5,0\omega_n^2$	$5,5\omega_n^3$	$3,4\omega_n^4$	ω_n^5

Таким образом, оптимальная (по критерию ИВМО) передаточная функция, например, для системы третьего порядка имеет вид

$$T_3^{ИВМО}(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3}. \quad (4.13)$$

Отметим, что в любом случае система порядка q , оптимизированная по критерию ИВМО, обладает нулевой установившейся ошибкой, а ее передаточная функция *имеет n полюсов и не содержит нулей*.

ГЛАВА 5. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

5.1. Методы анализа устойчивости ЛСС

Количественные показатели и оценки качества работы систем управления можно исследовать только для *устойчивых* систем. Для неустойчивых систем такие показатели, как время выхода, установившаяся ошибка, а также все оптимальные оценки становятся бессмысленными, поскольку они обращаются в бесконечность. Неустойчивые системы управления неработоспособны, поэтому требование к устойчивости – это первое требование, выполнение которого должно проверяться при проектировании автоматических систем управления. Отметим, что речь идет не об устойчивости составных частей системы управления к влиянию внешних факторов (температуры, давления, влажности и проч.). Свойство системы управления сохранять свою работоспособность в широком диапазоне изменения параметров и внешних воздействий называется *робастностью*. Сейчас же мы имеем в виду устойчивость по отношению к изменению входных сигналов. В этом смысле понятие устойчивости относится не только к системам управления, а к динамическим системам вообще.

Можно дать следующее простое качественное определение устойчивости: *устойчивая система* – это динамическая система, обладающая ограниченной реакцией на ограниченный входной сигнал.

В технике (техническая устойчивость) вводится три понятия:

- 1) система устойчива (математики говорят – асимптотически устойчива);
- 2) система нейтрально устойчива;
- 3) система неустойчива.

Устойчивые, нейтрально устойчивые и неустойчивые линейные стационарные системы можно различить по виду переходных характеристик. Графиком переходной характеристики устойчивой ЛСС будет монотонно изменяющаяся или колебательная кривая, огибающая которой по экспоненте стремится к определенному значению. Графиком переходной характеристики нейтрально устойчивой системы будет кривая, амплитуда изменения которой находится в полосе конечного размера. Неустойчивая система имеет переходную характеристику, амплитуда которой неограниченно возрастает с течением времени.

Рассмотрим систему управления со структурной схемой, изображенной на рис. 5.1. Ее переходные характеристики при $b_2 = 4, b_1 = 2, b_0 = 1$ изображены на рис. 5.2 для трех различных значений коэффициента усиления K . Из вида графиков следует, что при коэффициенте $K = 1$ система устойчива, при $K = 7$ – нейтрально устойчива, при $K = 10$ система неустойчива.

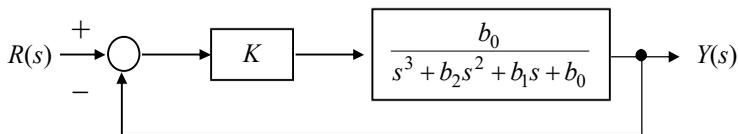


Рис. 5.1. Структурная схема системы с обратной связью для объекта третьего порядка

Таким образом, зная вид переходной характеристики, мы можем сделать вывод об устойчивости системы. Если мы решим характеристическое уравнение, то устойчивость или неустойчивость системы определится по виду корней характеристического уравнения. Однако существуют методы анализа устойчивости линейных стационарных систем, позволяющие судить об устойчивости или неустойчивости системы с данными параметрами или даже в некоторых областях изменения параметров, не решая характеристического уравнения и не строя переходных характеристик.

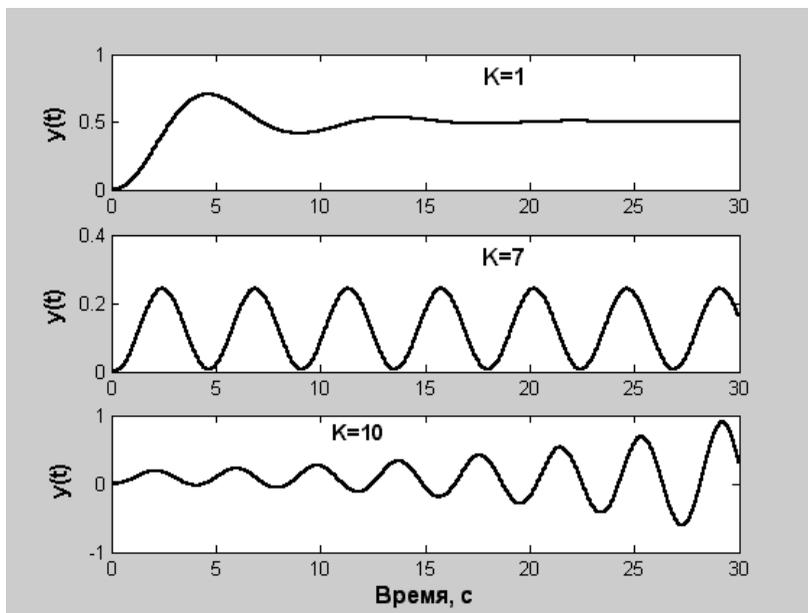


Рис. 5.2. Переходные характеристики асимптотически устойчивой ($K = 1$), устойчивой ($K = 7$) и неустойчивой ($K = 10$) систем управления

Методы анализа устойчивости ЛСС можно разделить на две группы: анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений (анализ во временном домене) и анализ в частотной области с использованием комплексной частоты s или действительной частоты ω . Методы с использованием действительной частоты можно применять аналитически, а также реализовать экспериментально (в этом их большое преимущество).

Основные методы анализа устойчивости приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Методы анализа устойчивости

Метод (критерий)	Авторы	Дата
Анализ устойчивости во временной области: <ul style="list-style-type: none"> • критерий Рауса – Гурвица; • критерий Льенара – Шипара 	А. Гурвиц, Э.Дж. Раус	Конец XIX в.
Анализ устойчивости в частотной области: <ul style="list-style-type: none"> • диаграммы Боде; • метод Найквиста; • критерий Михайлова 	Г.У. Боде, Г. Найквист, А.В. Михайлов	1927 г., 1932 г., 1936 г.
Анализ корней в s -плоскости <ul style="list-style-type: none"> • метод корневого годографа 	У.Р. Эванс	1948 г.

Рассмотрим первый метод, приведенный в таблице, как наиболее информативный.

5.2. Анализ устойчивости во временной области

Для исследования устойчивости линейной стационарной системы вида (2.17) достаточно исследовать устойчивость тривиального решения системы

$$\dot{x} = Ax(t) \quad x \in R_n. \quad (5.1)$$

Напомним, что общее решение этой системы имеет вид¹

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{q=1}^{r_i} C_{iq} \frac{t^{r_i-q}}{(r_i-q)!} \bar{h}_q^{(i)} \right) e^{\lambda_i t}, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_k = n. \quad (5.2)$$

¹ Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 5-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 320 с.

Здесь λ_i – действительное или комплексное число, являющееся одним из собственных значений матрицы A , т.е. корнем *характеристического уравнения* матрицы A

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (5.3)$$

кратности r_i ; \bar{h}^i – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_i ; константы C_{iq} определяются начальными условиями.

Пусть корень λ_j имеет вид

$$\lambda_j = \operatorname{Re} \lambda_j + i \operatorname{Im} \lambda_j, \quad i^2 = -1. \quad (5.4)$$

Если этот корень не вырожден ($r_j = 1$), в сумме (5.2) будет присутствовать слагаемое, содержащее экспоненту $e^{i \operatorname{Im} \lambda_j t} \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda_j t}$, которое увеличивается до бесконечности при $t \rightarrow \infty$, если $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, стремится к нулю при $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ или изменяется в конечных пределах, если $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$. Если $r_j > 1$, то в сумме (5.2) будут присутствовать слагаемые, содержащие произведение экспоненты на степенные функции: $t^m \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda_j t} \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda_j t}$, $m = 1, 2, \dots, r_j - 1$. Эти слагаемые стремятся к нулю только при $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, при $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ они расходятся.

Раскрывая определитель, можно привести уравнение (5.3) к виду:

$$P_n(\lambda) = 0,$$

где

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n, \quad a_n = 1. \quad (5.5)$$

Многочлен (5.5) называется *устойчивым многочленом (многочленом Гурвица)*, если все его корни λ_j имеют отрицательную вещественную часть, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Матрицу A в этом случае тоже называют *устойчивой* или *гурвицевой*.

Заметим, что если математическая модель системы задана в виде передаточной функции, то характеристический полином – это многочлен в знаменателе функции.

Если многочлен устойчив, то все его коэффициенты положительны.

Это условие является необходимым условием устойчивости, т.е. многочлен, имеющий хотя бы один отрицательный коэффициент, является неустойчивым. Но это простое условие, к сожалению, не является достаточным для устойчивости многочлена. Другими словами, существуют многочлены с положительными коэффициентами, которые неустойчивы. Например, многочлен $P_3(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$ имеет корни $z_1 = -3, z_{2,3} = 1 \pm 3i$.

Необходимый и достаточный признак устойчивости был сформулирован в конце XIX в. А. Гурвицем и Э.Дж. Раусом независимо друг от друга. Этот признак удобно сформулировать, используя матрицу, составленную из коэффициентов многочлена (5.5):

$$M_{P_n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

которая называется **матрицей Гурвица**. Если в этой матрице встречается коэффициент a с индексом больше n , он полагается равным нулю.

Критерий Рауса – Гурвица. Для того чтобы многочлен $P_n(\lambda)$ с $a_0 > 0$ и $a_n \neq 0$ был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица M_{P_n} :

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Критерий Лъенара – Шипара. Для того чтобы многочлен с положительными коэффициентами был устойчивым, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: 1) $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$, 2) $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots$.

Таким образом, если при анализе устойчивости многочлена заранее известно, что его коэффициенты положительны, т.е. выполнены необходимые условия устойчивости, то применяют критерий Лъенара – Шипара, при этом достаточно проверить в два раза меньше условий, чем в критерии Рауса – Гурвица.

ГЛАВА 6. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

6.1. Математические модели дискретных систем

Основное внимание мы обратим на проектирование цифровых систем управления непрерывными объектами. Математическая модель таких систем является дискретной моделью. Ввиду этого предварительно нужно рассмотреть теорию дискретных систем, в том числе исследование систем на устойчивость, поскольку требование устойчивости является главным требованием для систем управления. При управлении непрерывными объектами немаловажной также является задача построения дискретной модели, эквивалентной исходной непрерывной. Эти задачи будут рассмотрены в данной главе.

Как всегда, начнем с примера. Рассмотрим цифровой накопитель (счетчик), содержание которого рассматривается в дискретные моменты времени k и описывается функцией $x(k)$ ($k=0,1,2,\dots$) с начальным значением $x(0)=x_0$. В момент k на вход счетчика поступает сигнал $u(k)$, который добавляется к содержимому счетчика, в результате чего в последующий дискретный момент содержимое счетчика определится как

$$x(k+1) = x(k) + u(k). \quad (6.1)$$

Соотношение (6.1) является разностным уравнением первого порядка с начальным условием $x(0)=x_0$ и представляет собой математическую модель простейшей дискретной системы. Сравнивая с математическими моделями непрерывных систем, мы можем назвать соотношение (6.1) моделью в форме пространства состояний.

Для уравнения (6.1) можно найти передаточную функцию в операторной форме, аналогичную формуле (3.13). Пусть содержимое счетчика является выходом системы $y(k) = x(k)$. Введем оператор сдвига z по правилу

$$z x(k) = x(k+1). \quad (6.2)$$

Подставляя в левую часть уравнения (6.1) вместо $x(k+1)$ выражение $z x(k)$, получим операторное равенство

$$(z-1)x(k) = u(k),$$

с помощью которого выход системы можно записать в виде

$$y(k) = \frac{1}{z-1} u(k). \quad (6.3)$$

Очевидно, что оператор $\frac{1}{z-1}$ является передаточной функцией системы (6.1), аналогичной формуле (3.13). Структурная схема системы приведена на рис. 6.1.

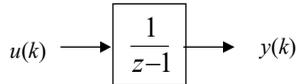


Рис. 6.1. Структурная схема дискретного счетчика

Вернемся к пространству состояний. Естественным обобщением скалярного уравнения (6.1) и скалярного уравнения выхода являются уравнения для векторов

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix}; \quad \bar{u}(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \dots \\ u_m(k) \end{bmatrix}; \quad \bar{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \dots \\ y_p(k) \end{bmatrix}.$$

Эти уравнения имеют вид

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k); \quad (6.4)$$

$$\bar{y}(k+1) = C\bar{x}(k) + D\bar{u}(k). \quad (6.5)$$

Матрицы A , B , C , D имеют структуру, как в формулах (2.17), (2.18): матрица A является квадратной матрицей $n \times n$, матрица B имеет размерность $n \times m$, матрица C имеет размерность $p \times n$, а матрица D имеет размерность $p \times m$.

В MATLAB модель (6.4)–(6.5) называется **дискретной ABCD-моделью**.

В общем случае математическая модель дискретной системы описывается разностным уравнением

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{f}(k; x_k, x_{k-1}, \dots, x_0), \quad (6.6)$$

где n -компонентная вектор-функция \bar{f} может быть как линейной, так и нелинейной. Мы будем в дальнейшем анализировать в основном линейные системы. Однако уже теперь стоит обратить внимание, что современные адаптивные методы управления даже линейными объектами приводят к нелинейным алгоритмам управления и замкнутая система управления в целом становится нелинейной.

6.2. Построение эквивалентной системы

Рассмотрим важный для дальнейших приложений пример дискретной системы: дискретную модель, эквивалентную непрерывной стационарной линейной системе. Другими словами, рассмотрим более подробно алгоритмы преобразования моделей систем, заданных в виде дифференциальных уравнений, к разностным уравнениям.

Пусть математическая модель непрерывной стационарной системы в пространстве состояний имеет вид

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t); \quad \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t). \quad (6.7)$$

Требуется получить эквивалентную систему разностных уравнений:

$$\bar{x}[k+1] = P\bar{x}[k] + Q\bar{u}[k], \quad \bar{y}[k] = C'\bar{x}[k] + D'\bar{u}[k], \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.8)$$

Эквивалентность систем понимается в том смысле, что при соответствующих начальных условиях их реакции на одно и то же входное воздействие совпадают. Более подробно это означает, что при $\bar{u}[k] = \bar{u}(t_k)$, где $t_k = kT$, выполнено $\bar{y}[k] = \bar{y}(t_k)$, – решения уравнений (6.7) и (6.8) совпадают при $t_k = kT$. Здесь T – фиксированный промежуток времени (интервал дискретности).

Рассмотрим задачу вычисления матриц P, Q, C', D' в выражении (6.8) по заданным матрицам A, B, C, D в выражении (6.7), исходя из сформулированного выше требования эквивалентности указанных систем по отношению к входному процессу $u(t)$.

Решение системы (6.7), соответствующее начальному условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, выражается формулой Коши:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (6.9)$$

(черта в обозначении векторов здесь и ниже временно опущена). В показателе экспоненты в формуле (6.9) стоит матрица, выражение e^{At} называется **матричной экспонентой**. Используя формулу (6.9), проинтегрируем уравнение (6.7) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$, полагая на нем $u(t) = u(t_k)$ при $x_0 = x(t_k)$. Получим

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)}x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}Bu(\tau)d\tau = e^{AT}x(t_k) + \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}d\tau\right) \cdot Bu(t_k).$$

Для вычисления интеграла введем новую переменную $\theta \equiv t_{k+1} - \tau$. Тогда $\tau = t_{k+1} - \theta$ и $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)}d\tau = \int_0^T e^{A\tau}d\tau$. Полагая матрицу A невырожденной ($\det A \neq 0$), получим, что $\int_0^T e^{A\tau}d\tau = A^{-1}(e^{AT} - I_n)$, где I_n – единичная матрица размерности $n \times n$. Следовательно,

$$x(t_{k+1}) = e^{AT}x(t_k) + A^{-1}(e^{AT} - I_n)Bu(t_k), \quad \det A \neq 0. \quad (6.10)$$

Согласно уравнению выхода в выражении (6.7), $y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$. Сопоставим найденным для моментов t_k значениям непрерывного процесса значения переменных дискретной модели $x[k] \equiv x(t_k)$, $u[k] \equiv u(t_k)$, $y[k] \equiv y(t_k)$. Сравнивая уравнение (6.8) с полученным выражением (6.10), находим, что матрицы P, Q, C', D' определяются равенствами

$$P = e^{AT}, \quad Q = A^{-1}(P - I_n)B, \quad C' = C, \quad D' = D. \quad (6.11)$$

Модель (6.8) построена.

6.3. Способы вычисления матричной экспоненты

Полученные формулы перехода от непрерывных систем к их дискретным аналогам показывают, что необходимо располагать достаточно эффективными алгоритмами вычисления матричной экспоненты e^{At} . Если матрица A имеет диагональный вид (в базисе собственных векторов), то матричная экспонента записывается точно в соответствии с правилом

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

В других случаях нужно использовать приближенные методы, которые основаны на различных аппроксимациях бесконечного ряда для разложения экспоненты выражениями, содержащими конечное число слагаемых. Наиболее очевидной является **аппроксимация Тейлора порядка k** , согласно которой ряд Тейлора приближенно заменяется конечной суммой

$$e^{A\tau} \approx I_n + A\tau + \frac{(A\tau)^2}{2} + \dots + \frac{(A\tau)^k}{k!} \equiv I_n + \sum_{i=1}^k \frac{(A\tau)^i}{i!}. \quad (6.13)$$

Например, при $k = 1$ получаем линейное приближение

$$e^{A\tau} \approx I_n + A\tau, \quad (6.14)$$

которое будем называть **аппроксимацией Эйлера**.

Аппроксимация (6.14) не является наилучшей. Во многих отношениях более предпочтительна более общая **аппроксимация Паде**. При такой аппроксимации экспонента e^x представляется рациональной функцией $e^{A\tau} \approx \frac{F_{\mu\nu}(x)}{G_{\mu\nu}(x)}$ с числителем $F_{\mu\nu}$ степени μ и знаменателем $G_{\mu\nu}$ степени ν , определяемыми формулами

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= 1 + \frac{\mu}{(\mu + \nu)!} x + \frac{\mu(\mu - 1)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1)2!} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu - 1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1)\dots(\nu + 1)\mu!} x^\mu \\ G_{\mu\nu}(x) &= 1 - \frac{\nu}{(\mu + \nu)!} x + \frac{\nu(\nu - 1)}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1)2!} x^2 + \dots \\ &+ (-1)^\nu \frac{\nu(\nu - 1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu + \nu)(\mu + \nu - 1)\dots(\mu + 1)\nu!} x^\nu \end{aligned} \quad (6.15)$$

Соответственно, для матричного аргумента $x = A\tau$ запишем

$$e^{A\tau} \approx F_{\mu\nu}(A\tau)G_{\mu\nu}^{-1}(A\tau) \quad (6.16)$$

где $F_{\mu\nu}(A\tau)$, $G_{\mu\nu}(A\tau)$ – матричные многочлены вида (6.15). В дальнейшем выражение (6.16) будем называть **аппроксимацией Паде** (μ, ν) .

Приведем некоторые частные случаи выражения (6.16). Прежде всего отметим, что аппроксимация Тейлора (6.13) является частным случаем выражения (6.16) при $\nu = 0$. Следовательно, формула метода Эйлера (6.14) совпадает с аппроксимацией Паде $(1, 0)$. Аппроксимация Паде $(0, 1)$ имеет вид

$$e^{A\tau} \approx (I_n - A\tau)^{-1} \quad (6.17)$$

и в дальнейшем будет называться **невным методом Эйлера**.

Аппроксимация Паде (1,1) соответствует *методу Тастина* и определяется формулой

$$e^{A\tau} \approx (I_n + A\tau/2)(I_n - A\tau/2)^{-1}, \quad (6.18)$$

формула Паде (2,2) дает выражение

$$e^{A\tau} \approx (12I_n + 6A\tau + (A\tau)^2)(12I_n - 6A\tau + (A\tau)^2)^{-1}. \quad (6.19)$$

Одним из преимуществ аппроксимаций Паде является их более высокая точность, чем соответствующих (при $k = \max(\mu, \nu)$) аппроксимаций Тейлора. Ошибка аппроксимации (6.13) имеет порядок малости $O(\tau^k)$, а ошибка «диагональных» аппроксимаций (6.16) (μ, ν) при $\mu = \nu$ — порядок малости $O(\tau^{2\mu+1})$. Другим достоинством формулы Паде при $\nu \neq 0$ является сохранение свойства устойчивости непрерывной системы при переходе к дискретной модели. Недостатком неявных методов является необходимость обращения матрицы $G_{\mu\nu}(A\tau)$ и связанная с этим проблема ее вырожденности. Заметим, что при $\tau \rightarrow 0$ $G_{\mu\nu}(A\tau) \rightarrow I_n$, следовательно, выбор достаточно малого τ гарантирует $\det G_{\mu\nu}(A\tau) \neq 0$.

6.4. Устойчивость дискретных систем

Приведем теперь основные сведения об устойчивости дискретных систем. Рассмотрим математическую модель дискретной системы (6.6) в простейшей форме

$$x_{k+1} = f(k, x_k), \quad x_k \in R_n, \quad f(k, 0) \equiv 0. \quad (6.20)$$

Решение уравнения (6.20) с начальным условием $x_{k_0} = x^0$ обозначим через $x(k, k_0, x^0)$.

Определения устойчивости для разностного уравнения (6.20) аналогичны соответствующим определениям для дифференциального уравнения. На разностные уравнения естественным образом переносятся и условия устойчивости для непрерывных систем.

Рассмотрим случай линейного стационарного разностного уравнения:

$$x_{k+1} = Px_k, \quad x_0 = x^0, \quad x \in R_n. \quad (6.21)$$

Легко вывести условие устойчивости этого уравнения для системы первого порядка $x_{k+1} = px_k$. В этом случае справедливо равенство

$$x_{k+1} = p^{k+1} x_0. \quad (6.22)$$

Очевидно, что система (6.22) будет устойчивой, если модуль числа p меньше единицы: $|p| < 1$. С помощью выражений (6.11) легко понять, что это условие должно выполняться в случае устойчивых систем для собственных чисел $\lambda_i(P)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) матрицы P .

Если $|\lambda_i(P)| < 1$ для всех i , то решение $x_k \equiv 0$ уравнения (6.21) устойчиво. Если же $|\lambda_i(P)| \leq 1$ и все собственные значения λ_k , для которых $|\lambda_k(P)| = 1$, не вырождены, то решение $x_k \equiv 0$ нейтрально устойчиво. Во всех других случаях решение $x_k \equiv 0$ неустойчиво.

ГЛАВА 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Структура цифровых систем управления

Рассмотрим систему управления непрерывным объектом, в которой роль управляющего устройства играет цифровой регулятор, работающий под управлением микропроцессора. Регулятор может быть создан на базе обычного настольного компьютера или реализован в специально разработанном автономном контроллере с менее мощным микропроцессором («бортовой вариант» компьютера). Цифровое устройство управления обобщенно назовем цифровым компьютером, а систему, использующую цифровой компьютер, – *цифровой системой управления*. Структура такой системы изображена на рис. 7.1.

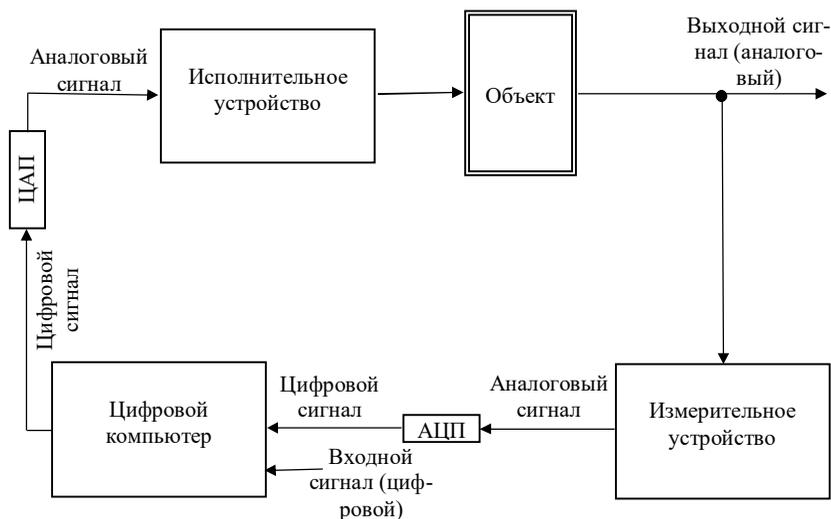


Рис. 7.1. Структура цифровой системы управления:

АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

ЦАП – цифроаналоговый преобразователь

В цифровой системе управления непрерывными объектами должен присутствовать аналого-цифровой преобразователь (АЦП), преобразующий непрерывный электрический сигнал (электрический сигнал, изменяющийся аналогично измеряемой величине – аналоговый сигнал) в цифровую форму для последующей компьютерной обработки, и цифроаналоговый преобразователь (ЦАП), который преобразует цифровой выходной сигнал компьютера в непре-

рывную форму. Прежде чем рассматривать математические модели дискретных регуляторов, построим математические модели идеальных АЦП и ЦАП. Устройство реальных преобразователей цифра–аналог и аналог–цифра рассмотрим ниже.

Будем считать, что все числа (результаты измерений и сигналы управления в цифровой форме) вводятся в компьютер и выводятся из него с одним и тем же фиксированным промежутком времени T , о котором уже говорилось в предыдущей главе.

Фиксированный промежуток времени между последовательными измерениями и выводами сигнала называется **периодом квантования** (синонимы: период дискретизации, интервал квантования, интервал дискретизации).

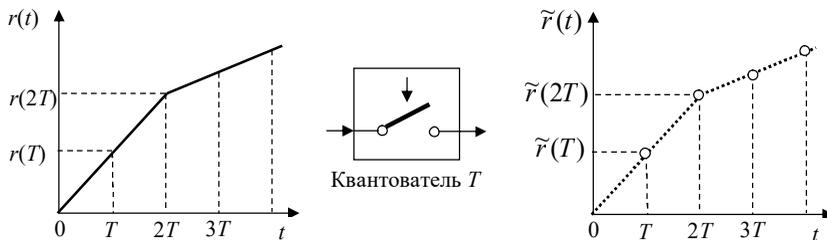


Рис. 7.2. Математическая модель АЦП в виде идеального квантователя

На английском языке период квантования называется **Sample time**.

Математическая модель АЦП представлена на рис. 7.2 в виде **квантователя** (Sampler). Квантователь можно рассматривать как ключ, который замыкается каждые T секунд и превращает величину входного сигнала $r(t = kT), k = 0, 1, 2, \dots$ в отсчет $\tilde{r}(kT)$. Отсчет (числовое значение), вообще говоря, не совпадает с измеряемой величиной, вследствие конечного количества двоичных разрядов машинного регистра АЦП. Возникает ошибка квантования уровня сигнала, или ошибка оцифровки. Для устройств с высокой разрядностью ошибкой оцифровки сигнала можно пренебречь; если разрядность мала, ошибку обязательно нужно учитывать при проектировании системы управления. На рис. 7.2 представлена математическая модель АЦП в виде **иде-**

ального квантователя: ключ замыкается на бесконечно малый отрезок времени, и выполняется равенство $r(kT) = \tilde{r}(kT)$.

Выходной сигнал идеального квантователя можно представить в виде амплитудно-модулированной импульсной последовательности

$$\tilde{r}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT). \quad (7.1)$$

Функции, имеющие вид амплитудно-модулированных импульсных последовательностей, т.е. определенные в дискретные моменты времени, разделенные фиксированным периодом, называются **решетчатыми функциями**.

Математическую модель ЦАП, т.е. устройства, преобразующего дискретный выходной сигнал компьютера $\tilde{u}(t)$ в кусочно-непрерывный сигнал $u(t)$, можно представить в виде фиксатора (экстраполятора нулевого порядка – **Zero-order holder**). Экстраполятор воспринимает значение $\tilde{u}(kT)$ и сохраняет его на своем выходе в течение всего периода квантования. Математическая модель ЦАП изображена на рис. 7.3. Работу экстраполятора можно описать формулой

$$u(t) = \tilde{u}(kT), kT \leq t \leq (k+1)T. \quad (7.2)$$

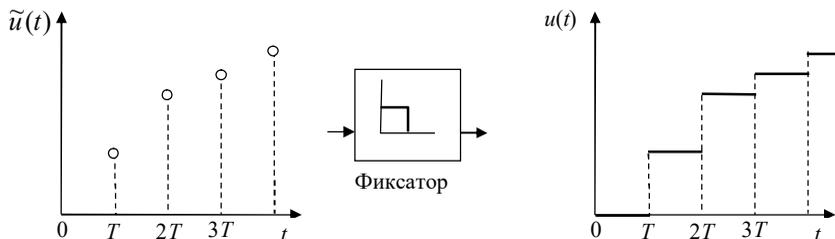


Рис. 7.3. Математическая модель ЦАП в виде фиксатора (экстраполятора нулевого порядка)

7.2. Передаточные функции дискретных систем

Математические модели дискретных систем можно представить в виде передаточных функций, аналогично непрерывным системам. Для этого используется не преобразование Лапласа, а z -преобразование. Рассмотрим его.

Поскольку выходной сигнал идеального квантователя $r^*(t)$ представляет собой последовательность импульсов с амплитудами $r^*(kT)$, то его можно описать выражением

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT), \quad (7.3)$$

где предполагается, что сигнал $r(t)$ существует для $t > 0$. Преобразовав выражение (7.3) по Лапласу, получим

$$L\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-ksT}.$$

Это выражение представляет собой бесконечный ряд по степеням члена e^{sT} . Введем переменную

$$Z = e^{sT}, \quad (7.4)$$

которая осуществляет конформное отображение с s -плоскости на z -плоскость. Тогда мы можем определить новое преобразование, называемое **z -преобразованием**:

$$Z\{r(t)\} = Z\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}. \quad (7.5)$$

В качестве примера найдем z -преобразование единичной ступенчатой функции $1(t)$, описываемой выражением (4.1):

$$Z[1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}, \quad (7.6)$$

так как $1(kT) = 1$ для всех $k \geq 0$. Этот ряд можно представить в замкнутой форме, используя выражение для суммы членов геометрической прогрессии

$$1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (7.7)$$

В общем случае мы будем определять z -преобразование функции $f(t)$ как

$$Z\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}. \quad (7.8)$$

Пример. Преобразование экспоненты. Получим z -преобразование функции $f(t) = e^{-at}$ для $t \geq 0$. Имеем

$$Z\{e^{-at}\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{aT})^{-k}. \quad (7.9)$$

Этот ряд можно представить в форме, аналогичной формуле (7.7):

$$F(z) = \frac{1}{1 - (ze^{aT})^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \quad (7.10)$$

Можно показать, что

$$Z\{e^{-at} f(t)\} = F(e^{aT} z). \quad (7.11)$$

Поскольку непрерывной функции времени $f(t)$ соответствует преобразование Лапласа $L\{f(t)\} = F(s)$ и z -преобразование $Z\{f(t)\} = F(z)$, то мы можем находить z -преобразования от образов функций времени в s -пространстве. Например,

поскольку преобразование Лапласа экспоненты e^{-at} имеет вид $L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$, то для передаточной функции $G(s) = \frac{1}{s+a}$ мы можем найти z -преобразование, используя формулу (7.10):

$$G(z) = Z\{G(s)\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \quad (7.12)$$

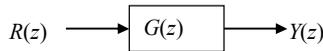


Рис. 7.4. Структурная схема дискретной системы управления

Подвергая z -преобразованию составные части уравнения выхода непрерывной системы $Y(s) = G(s)R(s)$, получим уравнение выхода для дискретной системы

$$Y(z) = G(z)R(z). \quad (7.13)$$

Таким образом, математическую модель дискретной системы управления можно представить в виде структурной схемы с передаточными функциями (рис. 7.4). Для дискретной системы первого порядка переходная характеристика опишется следующей формулой в z -пространстве:

$$Y(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \cdot \frac{z}{z - 1} = \frac{z^2}{(z - e^{-aT})(z - 1)}. \quad (7.14)$$

ГЛАВА 8. СТАНДАРТНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ. ЦИФРОВОЙ ПИ-РЕГУЛЯТОР

8.1. Алгоритмы работы стандартных регуляторов

Математическая модель непрерывного ПИД-регулятора, электрическая схема которого приведена на рис. 1.4, описывается выражением

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (8.1)$$

где $e(t)$ – сигнал ошибки, поступающий на вход регулятора, $e(t) = y_{уст} - y(t)$. Коэффициенты K_p, K_I, K_D связаны с величинами $K, T_{и}, T_{д}$ соотношениями

$$K_p = K, \quad K_I = \frac{K}{T_{и}}, \quad K_D = KT_{д}. \quad (8.2)$$

Эти коэффициенты называются пропорциональным, интегральным и дифференциальным коэффициентами соответственно. Отметим, что эти коэффициенты – суть положительные числа определенной размерности. Масштабный множитель, указанный на рис. 1.4, включен в пропорциональный коэффициент.

Структурная схема системы управления с ПИД-регулятором приведена на рис. 8.1.

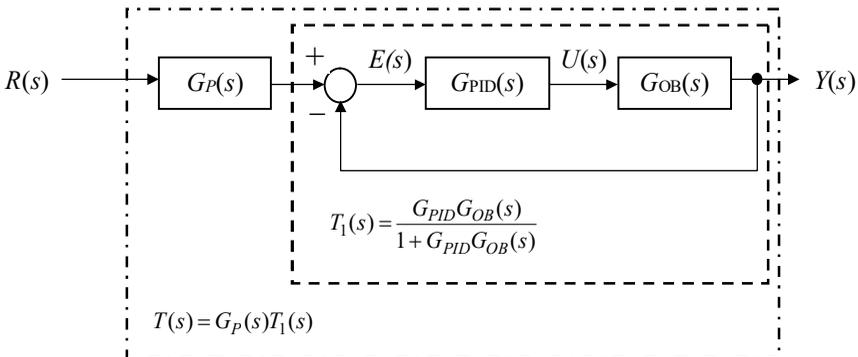


Рис. 8.1. Структурная схема системы управления с ПИД-регулятором и предшествующим фильтром

На рис. 8.1 $G_{OB}(s)$ – передаточная функция объекта управления, $G_{PID}(s)$ – ПФ регулятора, которая в соответствии с выражением (8.1) имеет вид

$$G_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}, \quad (8.3)$$

$G_P(s)$ – ПФ фильтра, установленного на входе системы по задающему воздействию (предшествующий фильтр). Наличие такого, определенным образом подобранного фильтра позволяет улучшить качество работы регулятора.

Проектировщику цифровых систем управления полезно знать особенности работы регуляторов для непрерывных систем, поскольку современная цифровая техника в определенных случаях позволяет использовать очень малые по сравнению с характерным временем объекта периоды квантования. А в таком случае цифровой регулятор будет работать как непрерывный. Исходя из этого, рассмотрим особенности работы непрерывных стандартных регуляторов.

Начнем исследование работы регуляторов с простейшего случая, когда

$$K_I = K_D = 0, \quad u(t) = K_P e(t), \quad G_{PID}(s) = K_P, \quad (8.4)$$

а предшествующий фильтр отсутствует. Регулятор в этом случае носит название **пропорционального** или **П-регулятора**.

Передаточная функция системы управления с П-регулятором, согласно рис. 8.1 и формулам (8.4), имеет вид

$$T(s) = \frac{K_P G_{OB}(s)}{1 + K_P G_{OB}(s)}. \quad (8.6)$$

Отклик системы на единичное ступенчатое воздействие $R(s) = 1(s) = \frac{1}{s}$ (см. формулу (4.3)) определится как

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{K G_{OB}(s)}{1 + K G_{OB}(s)} \cdot \frac{1}{s}. \quad (8.7)$$

Значение выходной величины в установившемся режиме, в соответствии с формулой (4.5),

$$y_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \frac{K_P G_{OB}(0)}{1 + K_P G_{OB}(0)}. \quad (8.8)$$

Поскольку при единичном значении входной переменной $y_{уст} = 1$, мы имеем установившуюся ошибку (см. рис. 6.4)

$$e_{ss} = y_{уст} - y_{\infty} = 1 - \frac{K_p G_{OB}(0)}{1 + K_p G_{OB}(0)} = \frac{1}{1 + K_p G_{OB}(0)}, \quad (8.9)$$

не равную нулю, кроме случая $K_p \rightarrow \infty$.

Регуляторы с ненулевой установившейся ошибкой называют **статическими**. Регуляторы, у которых установившаяся ошибка равна нулю, называют **астатическими**.

П-регулятор при конечных значениях пропорционального коэффициента является статическим, цели регулирования (2.7) он не достигает.

Чтобы понять смысл работы П-регулятора, рассмотрим для примера **задачу стабилизации температуры объекта**, который можно считать точечным, т.е. не учитывать процессы теплопроводности внутри него (тело, имеющее малые размеры или высокую теплопроводность). Единственная переменная состояния – средняя температура Θ , измеряемая одним датчиком. Управляющее воздействие – мощность $q(t)$, выводимая на нагреватель. Температура среды снаружи объекта – Θ_H , теплообмен происходит по закону Фурье, коэффициент теплообмена – k . Теплоемкость тела – C_0 , начальная температура – Θ_0 . Задача заключается в том, чтобы достичь заданной температуры $\Theta_{уст}$ и удерживать ее в течение всего времени работы регулятора (задача терминального управления).

Уравнение, описывающее поведение температуры объекта, имеет вид

$$C_0 \dot{\Theta} = -k(\Theta - \Theta_H) + q(t), \quad \Theta(0) = \Theta_0 < \Theta_{уст}. \quad (8.10)$$

Если ввести обезразмеренную величину x – отклонение температуры от заданного значения, измеренное в единицах уставки:

$$x = \frac{\Theta - \Theta_{уст}}{\Theta_{уст}}, \quad (8.11)$$

то уравнение (8.10) можно записать в виде

$$\dot{x} + \frac{1}{\tau_o} x = \frac{1}{\tau_o} \cdot F_d + \frac{1}{\tau_o} \cdot u(t), \quad x(0) = x_0 < 0, \quad x_{уст} = 0, \quad (8.12)$$

где введены обозначения

$$\tau_o = \frac{C_o}{k}, \quad F_d = \frac{\Theta_H - \Theta_{уст}}{\Theta_{уст}}, \quad u(t) = \frac{q(t)}{k\Theta_{уст}}. \quad (8.13)$$

Выходной переменной в рассматриваемой математической модели является переменная состояния x , т.е. уравнение выхода имеет простой вид

$$y = x, \quad (8.14)$$

цель регулирования можно представить аналогично формуле (2.7):

$$y \rightarrow 0, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (8.15)$$

Прежде чем исследовать работу П-регулятора, проанализируем полученную математическую модель (8.12)–(8.15). Уравнение (8.12) при отсутствии управляющего воздействия имеет решение

$$x = (x_o - F_d) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_o}} + F_d. \quad (8.16)$$

Из формулы (8.16) следует, что требуемое состояние системы $x = 0$ не является равновесным при $u(t) = 0$ из-за наличия в правой части уравнения (8.12) величины F_d . Указанную величину можно интерпретировать как постоянное внешнее воздействие (*внешнее возмущение*). Физический смысл этой ситуации в данном случае прост: тело, нагретое до температуры $\Theta_{уст} > \Theta_H$, релаксирует к температуре окружения Θ_H с характерным временем τ_o . И наоборот, если температура тела в начальный момент времени удовлетворяет условию равновесия $x(0) = F_d < 0$, а в этот момент включается постоянное управляющее воздействие

$$u(t) = -F_d, \quad (8.17)$$

то система переходит в требуемое состояние $x = 0$ с тем же характерным временем τ_o .

Таким образом, управляющее воздействие вида (8.17) *компенсирует внешнее воздействие* и обеспечивает достижение цели регулирования в течение характерного (собственного) времени релаксации системы. Если бы величина F_d была известна, можно было бы синтезировать разомкнутую систему управления, изображенную на рис. 8.2. Однако разомкнутая система очень чувствительна к изменению величины внешнего воздействия.

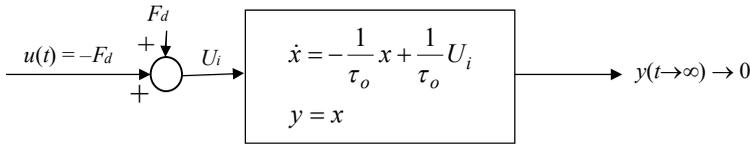


Рис. 8.2. Разомкнутая схема управления для компенсации внешнего воздействия

Кроме того, внешнее воздействие не измеряется и в замкнутой системе управления. Управляющее устройство получает от измерительного устройства информацию не о внешнем воздействии, а о выходном сигнале (точнее, устройство получает информацию о сигнале ошибки), и по этой информации алгоритм управляющего устройства должен автоматически перейти в режим (8.17). Другими словами, алгоритм регулирования, с помощью которого достигается цель управления, должен вырабатывать воздействие, удовлетворяющее обязательному условию (для линейных регуляторов)

$$u(t) \rightarrow -F_d, t \rightarrow \infty. \quad (8.18)$$

Переход регулятора в режим (8.18) должен происходить автоматически, в этом и состоит смысл работы регуляторов.

Вернемся к П-алгоритму для рассматриваемого примера. В данном случае $e(t) = 0 - x(t) = -x(t)$, поэтому

$$u(t) = -K_p x(t). \quad (8.19)$$

Можно построить структурную схему рассматриваемой системы во временной области (анализ схемы, содержащей передаточные функции в комплексном пространстве, затруднен из-за наличия внешнего возмущения).

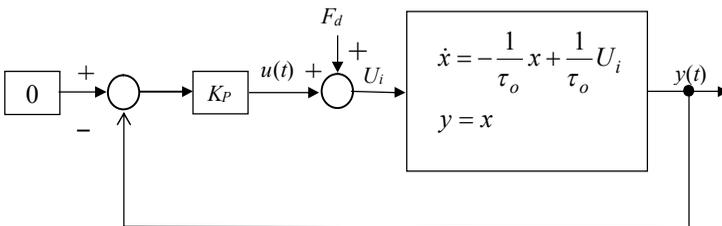


Рис. 8.3. Схема управления для компенсации внешнего воздействия с П-регулятором

Вид схемы изображен на рис. 8.3. Эту схему можно реализовать в Simulink и провести исследование работы системы с помощью компьютерного моделирования.

Однако в рассматриваемом случае исследование легко провести аналитически, что бывает крайне редко. Не будем упускать этот шанс и исследуем работу ПИ-регулятора. Подставив формулы (8.14), (8.19) в выражение (8.12), получим уравнение для выходной величины

$$\dot{y} + \frac{1}{\tau_o}(1 + K_P)y = \frac{1}{\tau_o}F_d, \quad y(0) = y_0 < 0. \quad (8.20)$$

Решение этого уравнения имеет вид, аналогичный формуле (8.16):

$$y = (y_0 - \frac{\tau}{\tau_o}F_d)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau}{\tau_o}F_d, \quad (8.21)$$

однако переходный процесс теперь происходит в течение времени

$$\tau = \frac{\tau_o}{1 + K_P}, \quad (8.22)$$

которое меньше собственного времени объекта.

Таким образом, пропорциональный регулятор, во-первых, ускоряет протекание переходных процессов; во-вторых, установившееся значение выходной величины

$$y_\infty = \frac{\tau}{\tau_o}F_d = \frac{1}{1 + K_P} \cdot F_d \quad (8.23)$$

приближается к нулю, т.е. к требуемому значению, с ростом коэффициента K_P . Отметим, что формулы (8.23) и (8.9) совпадают при единичном воздействии, поскольку для объекта первого порядка $G(0) = 1$.

Для устранения статической ошибки в цепь регулятора вводится интегрирующее звено, которое накапливает ошибку и изменяет управляющее воздействие, приближая его к требуемому значению (8.18). Пропорционально-интегральный регулятор (**ПИ-регулятор**) имеет передаточную функцию

$$G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s}, \quad (8.24)$$

поэтому ПФ системы с обратной связью в этом случае принимает вид

$$T(s) = \frac{sK_P G_{OB}(s) + K_I G_{OB}(s)}{s(1 + K_P G_{OB}(s)) + K_I G_{OB}(s)}. \quad (8.25)$$

Отметим, что введение интегрирующего звена повышает порядок системы на единицу.

Для величины выхода в установившемся режиме получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_I G_{OB}(0)}{K_I G_{OB}(0)} = 1, \quad (8.26)$$

следовательно, установившаяся ошибка равна нулю.

На рис. 8.4 приведены графики переходных процессов в системе (8.12) при разомкнутой схеме регулирования, при работе П-регулятора и ПИ-регулятора.

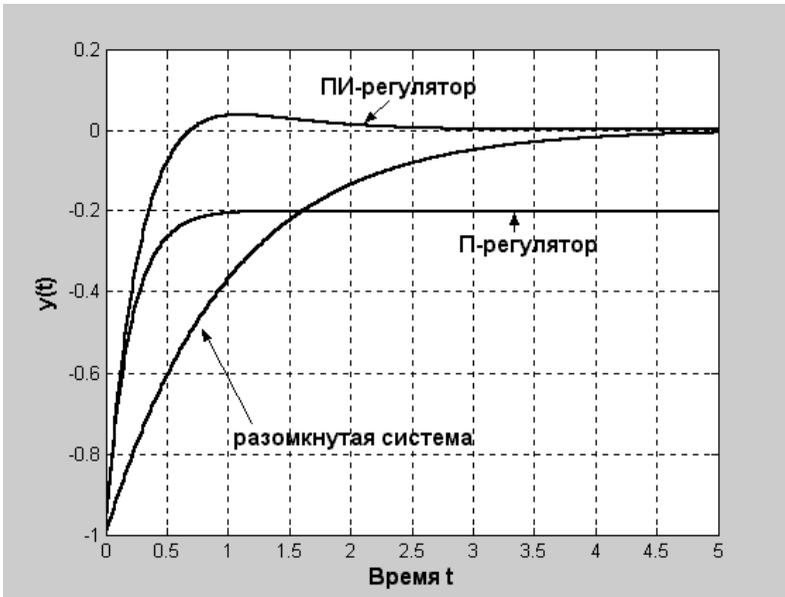


Рис. 8.4. Переходные процессы в разомкнутой системе с компенсацией внешнего воздействия и в замкнутой системе с П-регулятором и с ПИ-регулятором

Добавление дифференцирующего звена в регулятор не изменяет собственных значений времени, порядка системы и установившейся ошибки,

по сравнению с ПИ-регулятором. Смысл работы этого звена состоит в уменьшении управляющего воздействия при слишком быстром изменении выхода, т.е. дифференцирующее звено делает процесс регулирования более плавным, вместе с тем расширяются возможности настройки регулятора.

8.2. Нерекуррентный и рекуррентный ПИ-алгоритмы

Рассмотрим теперь алгоритм работы цифрового ПИ-регулятора в задаче стабилизации температуры объекта. Запишем уравнение для непрерывного регулятора с учетом обозначений (8.1)–(8.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} + \frac{1}{\tau_o} x &= \frac{1}{\tau_o} \cdot F_d + \frac{1}{\tau_o} \cdot u(t), & x(0) &= x_o < 0, & x_{уст} &= 0. \\ u(t) &= -Kx(t) - \frac{K}{T_{II}} \int_0^t x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Компьютер «не видит» производных и интегралов. Цифровой способ обработки информации предусматривает использование только арифметических операций и позволяет легко реализовывать алгебраические алгоритмы управления и сводящиеся к ним рекуррентные процедуры, которые представляют собой решения разностных уравнений. Запишем уравнения (8.27) в разностной форме. Предположим, что период квантования T много меньше собственного времени задачи τ_o . В этом случае производную в момент измерения kT можно представить в виде конечной разности:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}, \quad (8.28)$$

а величину интеграла записать по формуле прямоугольников в виде суммы

$$\int_0^{kT} x(t) dt = \sum_{j=0}^k x(jT) \cdot T. \quad (8.29)$$

Введем обозначение $f(kT) \equiv f_k$. Тогда уравнение движения с учетом формулы (8.28) запишется в разностной форме

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{T} + \frac{1}{\tau_o} x_k = \frac{1}{\tau_o} \cdot u_k + \frac{1}{\tau_o} \cdot F_d, \quad (8.30)$$

где управляющее воздействие u_k имеет вид

$$u_k = -K\left(1 + \frac{T}{T_{II}}\right)x_k - K \frac{T}{T_{II}} \sum_{j=0}^{k-1} x_j. \quad (8.31)$$

Уравнения (8.30), (8.31) дают систему разностных уравнений типа формулы (6.6) при наличии внешнего возмущения.

Отметим, что алгоритм (8.31) является нерекуррентным и требует вычисления больших сумм. Чтобы найти рекуррентный алгоритм дискретного ПИ-регулятора, запишем выражение для управляющего воздействия в $(k + 1)$ -й момент времени:

$$u_{k+1} = -K\left(1 + \frac{T}{T_{II}}\right)x_{k+1} - K \frac{T}{T_{II}} \sum_{j=0}^{k-1} x_j - K \frac{T}{T_{II}} x_k.$$

Вычитая из последнего равенства равенство (8.31), получаем рекуррентный алгоритм

$$u_{k+1} = u_k + Kx_k - K\left(1 + \frac{T}{T_{II}}\right)x_{k+1}, \quad (8.32)$$

который легко программируется и широко применяется в реальных цифровых системах управления. Отметим, что при достижении цели управления ($x = 0$) из выражения (8.32) следует, что

$$u_{k+1} = u_k \text{ при } x_k = 0, x_{k+1} = 0, \quad (8.33)$$

т.е. алгоритм дискретного ПИ-регулятора автоматически выходит на компенсацию внешнего воздействия (с точностью до ошибки квантования уровня сигнала), как и для непрерывного случая, в соответствии с формулой (8.18).

ГЛАВА 9. ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ СТАНДАРТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

9.1. Настройка ПИД-регулятора по критерию ИВМО

Существуют аналитические и экспериментальные методы настройки ПИД-регуляторов. В настоящее время экспериментальный метод чаще всего разделяется на два этапа: экспериментально определяются параметры объекта управления, т.е. его передаточная функция, а настройка коэффициентов регулятора проводится с помощью компьютерного моделирования. Здесь мы рассмотрим аналитический метод, использующий критерий ИВМО, в предположении, что математическая модель объекта управления построена. Экспериментальный метод Зиглера – Никольса рассмотрен в следующем подразделе. Разумеется, что способы настройки не ограничиваются этими двумя методами, количество методов настройки непрерывно увеличивается. Однако указанные два являются наиболее характерными, поэтому рассмотрев их, легко понять суть остальных методов.

Аналитический способ настройки ПИД-регулятора предполагает подбор трех коэффициентов, минимизирующих оценку ИВМО (см. подразд. 4.3), при которой система обладает хорошей, в смысле показателей качества, реакцией на ступенчатый сигнал. *Передаточная функция объекта управления считается известной.* Процедура синтеза для объекта второго порядка включает в себя следующие этапы:

- 1) по заданному времени установления определить параметр ω_n *замкнутой* системы;
- 2) используя найденное значение ω_n и соответствующее выражение для характеристического полинома из табл. 4.4, определить три коэффициента передаточной функции $T_1(s)$ (см. рис. 8.1);
- 3) определить предшествующий фильтр $G_P(s)$ так, чтобы передаточная функция $T(s)$ не имела нулей, как этого требует выражение (4.13).

Применение способа рассмотрим на конкретном примере.

Пример. Синтезировать регулятор температуры объекта, имеющего передаточную функцию $G_{об}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$, так, чтобы время установления (по критерию 2 %) было менее 0,5 с, а система была оптимальной по критерию ИВМО.

Если замкнуть объект регулирования единичной обратной связью (положить $G_{ПИД} = G_P = 1$) и подать ступенчатый входной сигнал, то по виду переходной характеристики можно определить, что установившаяся ошибка составляет примерно 50 %, а время установления – более 3 с.

Подставив заданное выражение для ПФ объекта и для ПФ ПИД-регулятора (8.3) в формулу для T_1 (см. рис. 8.1), получаем

$$T_1(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + (2 + K_D)s^2 + (1 + K_P)s + K_I}. \quad (9.1)$$

По табл. 4.4 определяем, что знаменатель в выражении (9.1) для минимальной оценки ИВМО должен иметь вид

$$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3. \quad (9.2)$$

Отсюда получаем три условия для определения трех коэффициентов. Осталось определить параметр ω_n , т.е. выполнить первый этап процедуры.

Значение ω_n может быть определено неоднозначно, поскольку требование к времени выхода наложено в виде неравенства. Будем считать, что время выхода для системы третьего порядка приближенно описывается выражением для

$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$, полученным для систем второго порядка. Из этого выражения следует,

что для ζ порядка 1 время выхода будет менее 0,5 с, если ω_n больше восьми. Поступим, как предлагает первоисточник: «выберем $\omega_n = 10$ ».

Приравняв знаменатель выражения (9.1) выражению (9.2) при $\omega_n = 10$, находим значения коэффициентов $K_1 = 214$, $K_2 = 1000$, $K_3 = 15,5$. Теперь выражение (9.1) примет вид

$$T_1(s) = \frac{15,5s^2 + 214s + 1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000}. \quad (9.3)$$

Реакция системы с данной передаточной функцией имеет перерегулирование около 32 %, время установления – 0,2 с.

Система, оптимальная по критерию ИВМО, должна иметь ПФ вида (4.13), т.е. не должна иметь нулей. Функция (9.3) этому требованию не удовлетворяет. Таким образом, минимизировать критерий ИВМО для ПИД-регулятора без использования предшествующего фильтра невозможно. Из выражения для $T(s)$ (см. рис. 8.1) следует, что ПФ фильтра должна иметь вид

$$G_P(s) = \frac{1000}{15,5s^2 + 214s + 1000} = \frac{64,5}{s^2 + 13,8s + 64,5}. \quad (9.4)$$

Окончательно для ПФ замкнутой системы получаем выражение

$$T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000}. \quad (9.5)$$

Показатели качества системы с ПФ (9.5), т.е. с найденными коэффициентами ПИД-регулятора и характеристиками сглаживающего предшествующего фильтра, следующие:

- относительное перерегулирование – 1,9 %;
- время установления – 0,45 с;
- установившаяся ошибка – 0,0 %.

Можно считать, что синтез дал прекрасные результаты.

9.2. Экспериментальный метод оптимизации Зиглера – Никольса

Более 80 лет назад Зиглер и Никольс, решая задачу оптимизации ПИД-регуляторов по показателям качества, предложили методику настройки этих регуляторов по экспериментальным данным, которая используется до сих пор, поскольку является простой и эффективной (*Ziegler J.G., Nichols N.B. Optimal Settings for Automatic Controllers // Trans. ASME, 1942. Vol. 64. P.759–762*).

Метод Зиглера – Никольса не предполагает предварительной идентификации параметров объекта управления. Оптимизации подлежит вся система управления, содержащая стандартный регулятор с тремя коэффициентами. Настройка коэффициентов K_P , K_I , K_D проводится в следующей последовательности:

1. Коэффициенты K_I и K_D устанавливаются равными нулю, а коэффициент усиления K_P увеличивается до тех пор, пока система не перейдет в критический (автоколебательный) режим, т.е. станет нейтрально устойчивой. Переходная характеристика непрерывной системы при этом будет иметь вид, аналогичный приведенному на рис. 6.3 при $K = 7$.

2. Предельное (критическое) значение коэффициента усиления обозначается как K_U , а измеренный период автоколебаний при этом значении – как P_U .

3. Задаются следующие значения коэффициентов регулятора:

$$K_P = \frac{3K_U}{5}, \quad K_I = \frac{6K_U}{5P_U}, \quad K_D = \frac{3}{40} K_U P_U. \quad (9.6)$$

При использовании S-модели ПИД-регулятора период P_U определяется по графику синусоидальных колебаний в окне просмотрщика (Score). Колебания

соответствуют нейтрально устойчивому режиму работы системы, возникающему между устойчивым и неустойчивым режимами. После вычисления коэффициентов по формулам (9.6) следует подставить их в модель и посмотреть переходную характеристику системы с целью проверки правильности настройки регулятора.

9.3. Использование блока настройки параметров Simulink

Важнейшими показателями качества работы системы управления являются:

- время нарастания;
- перерегулирование;
- время установления;
- установившаяся ошибка.

ПИД-регулятор должен быть настроен так, чтобы переходная характеристика соответствовала желаемым значениям этих показателей (desired step response). В Simulink разработаны специальные инструменты (блоки), производящие настройку систем управления на основе метода динамической оптимизации. Эти инструменты предназначены для автоматической настройки параметров моделируемых систем, с основой на определенных пользователем ограничениях (constraint parameters) на их динамические характеристики.

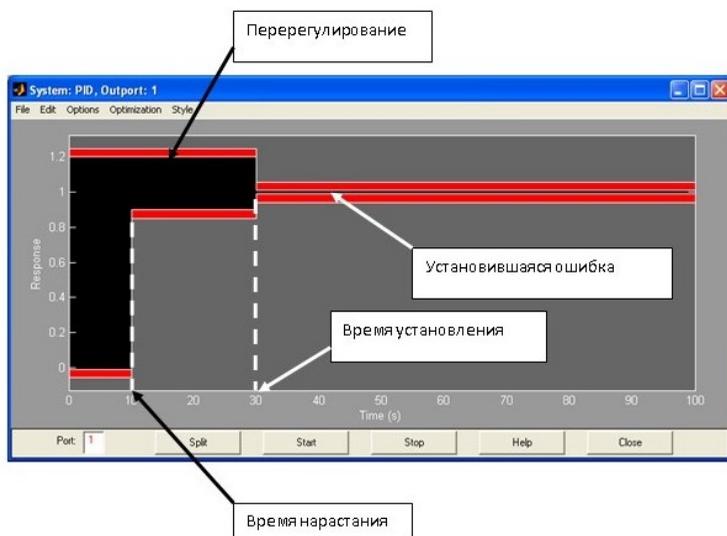


Рис. 9.1. Рабочее окно блока NCD Outport Simulink 5.0

В различных версиях пакета Simulink, реализованных в ходе развития выпусков MATLAB, блоки оптимизации назывались по-разному, например:

NCD (Nonlinear Control Design) Outport – Simulink 5.0, MATLAB 6.5;
Check Step Response Characteristics – Simulink 9.0, MATLAB R2016a;
Desired Step Response – Simulink 10.0, MATLAB R2019b.

В современных релизах MATLAB эти блоки работают внутри программного продукта Simulink Design Optimization.

Рассмотрим настройку параметров ПИД-регуляторов на примере работы блока NCD Outport. При моделировании диаграмма блока устанавливается на выходе системы вместо блока Scope или параллельно ему, поскольку блок NCD имеет рабочее окно со своим просмотрщиком (графическим интерфейсом – рис. 9.1). Блок позволяет в интерактивном режиме выполнять следующие операции:

- задавать требуемые ограничения во временной области на любой сигнал оптимизируемой системы;
- указывать параметры, подлежащие оптимизации;
- указывать неопределенные параметры и их граничные значения;
- проводить параметрическую оптимизацию системы с учетом заданных ограничений.

В графической части окна находятся ограничения на выходной сигнал системы, выделенные жирными красными линиями. Вид этих линий ограничения можно изменять. Линии можно устанавливать приблизительно (грубо) с помощью указателя мыши. Точную установку линий ограничения можно произвести, выделив линию щелчком левой кнопки мыши (выбранная линия приобретает белый цвет), а затем открыв окно редактора ограничений: Edit – Edit constraint. В строке окна редактора ограничений следует указать положение левого края (x_1 y_1) и правого края (x_2 y_2) выделенной линии. Стоит заметить, что линии ограничений могут быть и негоризонтальными.

Идентификаторы оптимизируемых параметров указываются через пробелы в строке Tunable Variables окна Optimization Parameters (последовательность действий: Optimization – Parameters – Tunable Variables). Обозначения параметров в S-модели и в окне настраиваемых параметров должны совпадать.

Перед запуском блока требуется задать в Command Window основного меню MATLAB начальные значения оптимизируемых параметров. Блок запускается кнопкой Start в его рабочем окне. В ходе работы блок NCD будет подбирать значения параметров так, чтобы выходной сигнал системы (в нашем случае – переходная характеристика) располагался в указанных границах. Форма выходного сигнала с начальными значениями параметров отображается белой линией, окончательная форма – зеленой. Оптимальные значения параметров можно посмотреть в основном окне MATLAB.

В заключение отметим, что современные инструменты MATLAB+Simulink позволяют производить автоматическую настройку коэффициентов ПИД-регуляторов как на основе S-моделей систем управления (Model-based PID controller tuning), так и для физических объектов в реальном масштабе времени (Real-time PID Autotuning). На рис. 9.2 показано окно блока PID Tuner, предназначенного для настройки ПИД-регуляторов. Окно открывается на вкладке приложений (APPS) основного меню MATLAB.

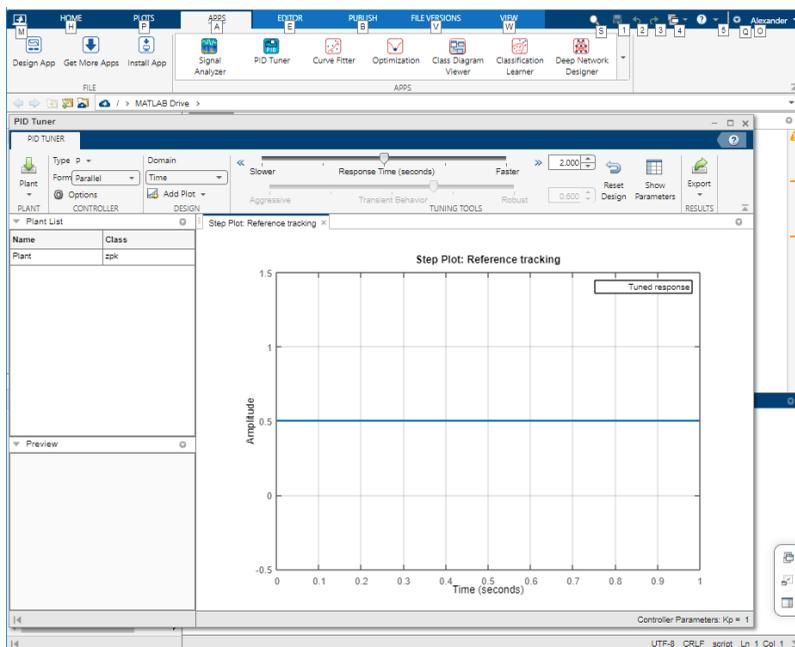


Рис. 9.2. Окно блока PID Tuner на вкладке APPS MATLAB Open MATLAB Online (basic) R2022b

Программное обеспечение MATLAB Coder позволяет непосредственно из кода MATLAB сгенерировать код C++ для прошивки в микроконтроллер.

ГЛАВА 10. РОБАСТНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

10.1. Неопределенности объектов управления

Традиционные методы теоретического анализа и синтеза систем управления основаны на предположении, что математическая модель объекта является известной и абсолютно точно описывает его поведение. Однако для современных подходов к постановке и решению задач управления характерен более критический взгляд на точность математических моделей, имеющихся в распоряжении разработчика. Дело в том, что любая модель представляет собой идеализированное (т.е. упрощенное) описание реального объекта. Кроме того, некоторые характеристики объекта могут быть заранее неизвестными или значительно изменяться в процессе его функционирования. При этом говорят о **неопределенности математической модели объекта** (или просто – о **неопределенном объекте**, понимая под этим неопределенность его математической модели).

Математическую модель, на основании которой разрабатываются алгоритмы управления, называют **номинальной**.

В условиях существенной неопределенности традиционные методы теории управления оказываются неприменимыми или дают плохие результаты. Исходя из этого, для объектов с неопределенными (т.е. с неточно известными) математическими моделями необходимо применение специальных методов анализа и синтеза систем управления.

Рассмотрим основные типы неопределенностей математических моделей на примере модели двигателя постоянного тока (гл. 2).

1. **Параметрическая неопределенность** означает, что неизвестными являются постоянные параметры математической модели. Значения параметров, использованные при синтезе алгоритма управления, называют **номинальными**. Во многих практических случаях *реальные* значения параметров могут существенно отличаться от принятых номинальных.

В модели двигателя все параметры (L , R , b , J) определены с какой-то погрешностью. Особо нужно отметить величину момента инерции, которая может быть разной для различных нагрузок. Если мы хотим, чтобы система управления двигателя работала в широком диапазоне нагрузок $J_{\min} \leq J \leq J_{\max}$, мы должны создавать алгоритм для **параметрически неопределенной** модели.

2. **Сигнальная неопределенность** означает, что математическая модель содержит неизвестные функции времени. Как правило, такие функции представляют собой математическую форму описания нестационарных (переменных во времени) параметров объекта или внешних возмущений, действующих на объект. Кроме того, при работе двигателя происходит разогрев, в результате чего активное сопротивление обмоток R изменяется с течением времени по неизвестному закону $R(t)$ – это *сигнальная неопределенность*.

3. **Функциональная неопределенность** означает, что математическая модель объекта содержит неизвестные функции координат состояния, регулируемых переменных или сигналов управления.

Во многих случаях, например при управлении вентиляторами или валами гребных установок судов, внешний момент является сложной, причем неизвестной, функцией частоты вращения вала: $T_d = T_d(\omega)$. Учет данной зависимости даст нам систему с *функциональной неопределенностью*.

4. **Структурная неопределенность** означает, что структура математической модели является неточно известной. Как правило, структурная неопределенность выражается в том, что динамический порядок (степень) реального объекта выше порядка его математической модели. При этом говорят о наличии *немоделируемой (паразитной) динамики*.

Двигатель, управляемый по цепи возбуждения, является, в соответствии с моделью (2.5), объектом третьего порядка. При этом связь между входным напряжением u и током в статоре i может быть описана с помощью передаточной функции $U(s) = \frac{1}{Ls + R} \cdot I(s)$.

Однако здесь не учтено время срабатывания исполнительного устройства τ , передающего управляющее напряжение в цепь возбуждения. Если учесть это время, входную цепь двигателя нужно изобразить в виде, указанном на рис. 10.1.

Порядок системы при этом увеличивается на единицу. Блок с передаточной функцией $\frac{1}{\tau s + 1}$ описывает *паразитную динамику*.

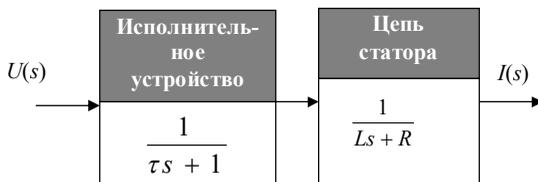


Рис. 10.1. Входная цепь двигателя, управляемого по цепи статора, с учетом времени срабатывания исполнительного устройства (паразитной динамики)

Наконец, отметим, что по отношению к этапу синтеза управления неопределенности делятся на априорные и текущие вариации математической модели. *Априорная* (т.е. изначальная) неопределенность существует уже на этапе синтеза системы. Она может быть обусловлена отсутствием точной информации о свойствах объекта управления и условиях его функционирования, отсутствием точного математического описания объекта, технологическим разбросом характеристик системы управления при ее изготовлении и т.п. *Текущие вариации математической модели* представляют собой непредсказуемые изменения математической модели объекта в ходе его рабочего функционирования. Причинами таких вариаций могут быть: изменение свойств нагрузки (например, уменьшение или увеличение приведенного момента инерции), характеристик объекта управления (нагрев обмоток двигателя, уменьшение массы топлива в баках ракет или самолета), изменение условий функционирования объекта (режимов его работы или свойств внешней среды).

Можно задать естественный вопрос: «Если нельзя использовать традиционные методы теории управления, то как управлять неопределенными объектами?». Ответ на этот вопрос дает современная теория адаптивных и робастных систем, которая изучает методы управления неопределенными объектами. Рассмотрим ее применительно к линейным SISO-системам.

10.2. Понятие грубости и робастности систем управления

Задача исследования систем с неопределенностями может быть сформулирована следующим образом. Пусть система с номинальной математической моделью обладает некоторыми *желаемыми свойствами* (например, определенным типом устойчивости, заданными показателями точности или заданными показателями динамического качества и т.п.). Сохранятся ли эти свойства при изменении (*вариациях* или *возмущениях*) математической модели? Проблема сохранения некоторого свойства системы при изменении ее математической модели изучается *теорией грубости свойства систем управления*. Дадим следующее определение.

Если некоторое свойство системы сохраняется хотя бы при малых (в определенном смысле) вариациях ее математической модели, то данное свойство называется **грубым** по отношению к выделенному классу вариаций. В противном случае свойство называется **негрубым**.

Термин «грубая система» был введен в научный оборот в 1937 г. А.А. Андроновым, изучавшим топологические свойства динамических систем. Поскольку фундаментальным свойством любой динамической системы является устойчивость, то прежде всего интересуются грубостью свойств устойчивости (хотя можно изучать грубость свойств переходных процессов, точностных свойств, частотных характеристик и т.п.).

В современной научной литературе часто вместо термина «грубость» используется термин «робастность» (от англ. robust – крепкий, сильный). Обычно, говоря о робастности, предполагают знание количественных оценок допустимых вариаций математической модели. Другими словами, вариации могут быть не малыми, а конечными величинами. В этом смысле «грубость» может трактоваться как «локальная робастность». Термины «грубый» и «робастный» используются также по отношению к алгоритмам управления и замкнутым системам. При этом для корректного использования этих терминов необходимо оговаривать класс номинальных *моделей* систем управления, класс допустимых *вариаций* и указывать *свойство* системы, которое сохраняется при данных вариациях. Однако во многих специальных разделах современной теории управления термин «робастный» используется в специальном, более узком, смысле без каких-либо дополнительных оговорок и условий.

Робастные (грубые) системы – это системы управления, обеспечивающие приемлемое (в смысле некоторого критерия) качество при наличии параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления.

При этом, как правило, в ходе рабочего функционирования робастной системы *коэффициенты регулятора не подстраиваются*, а малая чувствительность (т.е. грубость или робастность) к различного рода вариациям математической модели объекта достигается за счет специальным образом выбранной структуры регулятора (алгоритм управления).

Таким образом, робастные системы относятся к классу *ненастраиваемых* систем управления, а их малая чувствительность к различного рода вариациям математической модели объекта обеспечивается на этапе синтеза алгоритма управления.

10.3. Структура и классификация адаптивных систем управления

Адаптивные (самонастраивающиеся) системы – это системы управления, обеспечивающие компенсацию параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления за счет автоматической подстройки регулятора в ходе рабочего функционирования системы.

Другими словами, адаптивные системы восполняют нехватку априорной информации об объекте управления в ходе работы системы.

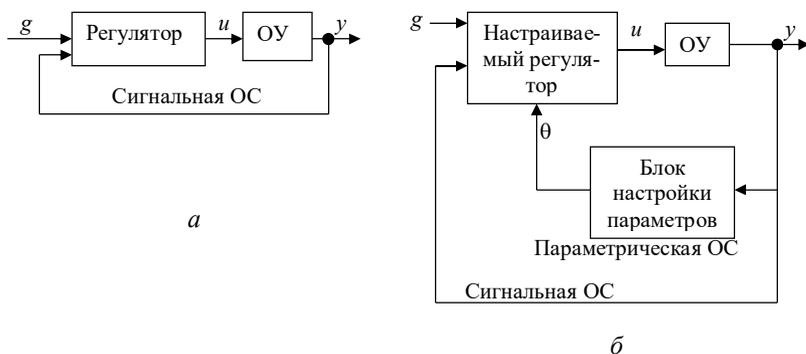


Рис. 10.2. Схемы неадаптивной (а) и адаптивной (б) замкнутых систем

На рис. 10.2, а приведена обобщенная структурная схема замкнутой неадаптивной системы управления. «Регулятором» здесь назван весь управляющий комплекс: устройство измерения, блок сравнения, управляющее устройство, содержащее алгоритм управления, и исполнительное устройство, оказывающее управляющее воздействие на объект управления (ОУ). Вход системы g может быть константой (задача стабилизации) или заданной функцией времени $g = g(t)$ (задача слежения). Выходной сигнал системы y подается на регулятор по каналу *сигнальной обратной связи* (ОС).

Структурная схема замкнутой адаптивной системы управления приведена на рис. 10.2, б. Отличительной чертой адаптивных (самонастраивающихся) систем является наличие дополнительной обратной связи, образованной цепью, содержащей блок настройки параметров регулятора. Эта обратная связь получила название *параметрической*, в отличие от сигнальной обратной связи, образованной непосредственно регулятором. Блок настройки предназначен для корректировки математической модели в ходе функционирования системы.

По принципу действия алгоритма блока настройки адаптивные системы делят на два типа:

- *идентификационные адаптивные системы* (системы с косвенной адаптацией);
- *безыдентификационные адаптивные системы* (системы с прямой адаптацией).

Структурная схема **идентификационной адаптивной системы** приведена на рис. 10.3. Принцип построения идентификационных адаптивных систем (или систем с косвенной адаптацией) основан на использовании процедур идентификации объекта, т.е. на получении оценок его параметров или динамических характеристик по результатам *измерений выходного сигнала и управляющих воздействий*. Полученные оценки используются далее для расчета коэффициентов регулятора. Таким образом, в своей структуре идентификационные адаптивные системы содержат: блок (алгоритм) идентификации, вырабатывающий оценки неизвестных параметров объекта управления θ , блок расчета параметров регулятора k и собственно настраиваемый регулятор. Очевидно, что при стремлении оценок параметров объекта к истинным свойства замкнутой системы будут приближаться к желаемым.

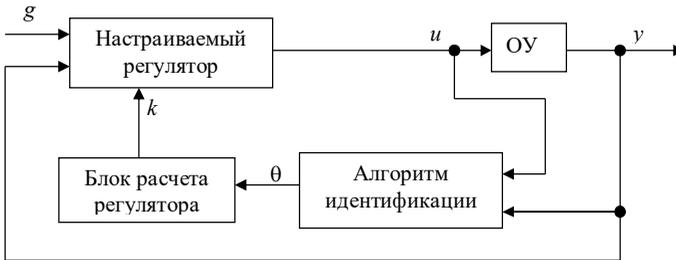


Рис. 10.3. Система идентификационного адаптивного управления

Идентификационные адаптивные системы относятся к наиболее простому по реализации типу адаптивных систем. Несмотря на простоту основной идеи, системы с косвенной адаптацией обладают рядом недостатков. Во-первых, описанная выше стратегия требует дополнительного времени на изучение объекта, что приводит к задержке при выработке правильного управления. Во-вторых, цели функционирования настраиваемого регулятора и блока оценки параметров оказываются, по существу, различными. Цель функционирования регулятора – обеспечение желаемого поведения регулируемой переменной y , в то время как цель блока идентификации – получение оценок параметров объекта управления. В этом смысле цепь настройки параметров является разомкнутой по глав-

ной цели управления: блок настройки параметров не отслеживает качество выходного сигнала и не связывает ошибку выхода с возможными неточностями идентификации параметров.

Более совершенной, хотя и более сложной в реализации, является стратегия, состоящая в настройке параметров регулятора из условия минимизации ошибки управления. При этом и настраиваемый регулятор, и блок (алгоритм) его настройки объединяются единой целью функционирования. На таком принципе основаны *безыдентификационные адаптивные системы* (или *системы с прямой адаптацией*).

В качестве примера рассмотрим *системы с эталонной моделью*. Адаптивные системы с эталонной моделью впервые были предложены более сорока лет назад, а в настоящее время они представляют собой хорошо разработанный класс адаптивных систем, получивших наиболее широкое распространение в практических реализациях и широко представленных в научной литературе.

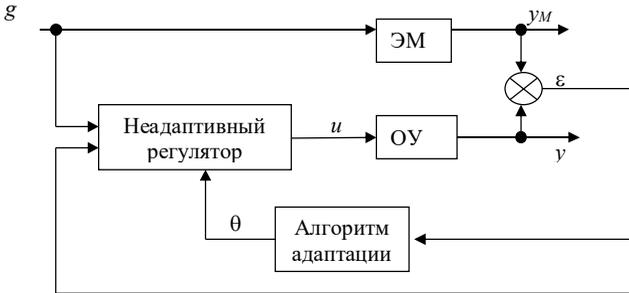


Рис. 10.4. Система адаптивного управления с эталонной моделью

Структурная схема такой системы приведена на рис. 10.4. Здесь цель управления задается с помощью *эталонного* (модельного) значения регулируемой переменной $u_M(t)$. Для выработки эталонного значения регулируемой переменной $u_M(t)$, как правило, используется специальный динамический блок – эталонная модель (отсюда второе название эталонной переменной – модельная переменная). Наиболее часто эталонная модель (ЭМ) реализуется в виде линейной системы, формирующей желаемый отклик на задающее воздействие $g(t)$. Настраиваемый регулятор строится таким образом, чтобы при соответствии его коэффициентов параметрам объекта управления его замкнутая система вела себя точно так же, как эталонная модель. Тогда информацию о параметрических рассогласованиях в системе будет нести ошибка слежения за эталонной моделью $\varepsilon = y - u_M$. При этом в качестве цели работы *алгоритма адаптации* (или *алгоритма настройки коэффициентов регулятора*) естественно принять минимизацию ошибки ε . Таким образом, происходит объединение самого регулятора

и алгоритма его адаптации единой целью – минимизацией ошибки слежения за эталонной моделью. Отметим, что, в отличие от идентификационного подхода, в данном случае не требуется проведения процедуры оценки неизвестных параметров объекта, а коэффициенты регулятора настраиваются непосредственно из условия выполнения главной цели управления.

10.4. Адаптивное управление с эталонной моделью объектом первого порядка

Рассмотрим скалярный объект, описываемый уравнением

$$\dot{x} = \theta x + u, \quad (10.1)$$

где x – регулируемая переменная, u – сигнал управления, θ – постоянный параметр, который неизвестен. Робастный регулятор достигает цели управления с приемлемой точностью при *неизменных* коэффициентах регулирования. Теперь попытаемся *одновременно* определить значение неизвестного параметра в ходе работы регулятора и достичь цели управления *с наибольшей точностью*.

Вход системы (задающее воздействие) описывается функцией времени $g(t)$. Мы хотим, чтобы выход системы приближался к входному сигналу так же, как для *эталонной модели*

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g, \quad (10.2)$$

где сигнал x_M носит название *эталонного выхода*, а положительная постоянная λ определяет *желаемые динамические свойства замкнутой системы*. Очевидно, что модель (10.2) можно переписать в виде передаточной функции

$$X_M(s) = \frac{1}{Ts + 1} G(s),$$

где T – постоянная времени апериодического звена первого порядка, $T = 1/\lambda$. Введение эталонной модели позволяет формализовать постановку задачи, потребовав выполнения *целевого условия*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_M(t)) = 0 \quad (10.3)$$

для любых задающих воздействий $g(t)$. Другими словами, необходимо синтезировать управление u , обеспечивающее нулевое установившееся значение *ошибки слежения за эталонной моделью*

$$\varepsilon = x - x_M. \quad (10.4)$$

Алгоритм адаптивного управления удобно представить в виде двух блоков:

- настраиваемого регулятора

$$u = -\lambda x - \xi x + \lambda g; \quad (10.5)$$

- алгоритма адаптации

$$\dot{\xi} = \tau(\varepsilon, x). \quad (10.6)$$

Здесь ξ – настраиваемый параметр регулятора, генерируемый алгоритмом адаптации *из условия минимизации ошибки слежения* ε . Структура алгоритма адаптации $\tau(\varepsilon, x)$ может быть установлена строго математически, но в нашем простом случае попробуем определить ее путем логических рассуждений (спекулятивно).

Во-первых, при достижении цели регулирования параметр ξ принимает искомое постоянное значение, равное θ , т.е. $\dot{\xi} = 0$ при $\varepsilon = 0$. Ввиду этого функция $\tau(\varepsilon, x)$ должна быть пропорциональна ε .

Во-вторых, можно потребовать, чтобы настраиваемый параметр изменялся тем быстрее, чем далее значение x отклоняется от требуемого (в данном случае нулевого) значения. Требование будет выполнено, если функция $\tau(\varepsilon, x)$ будет пропорциональна величине x . Таким образом, можно попробовать выбрать алгоритм адаптации в виде $\tau(\varepsilon, x) = \gamma \varepsilon x$.

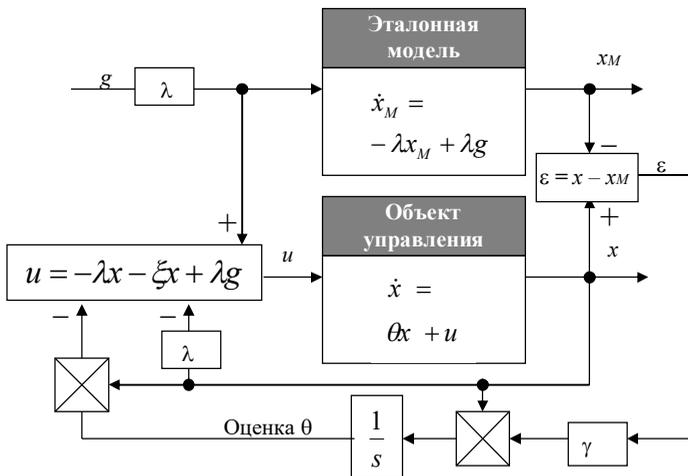


Рис. 10.5. Структурная схема системы адаптивного управления с эталонной моделью объектом первого порядка

Оказывается, что, действительно, алгоритм адаптивного управления

$$u = -\lambda x - \xi x + \lambda g,$$

$$\dot{\xi} = \gamma \varepsilon x \tag{10.7}$$

является устойчивым алгоритмом и обеспечивает слежение за эталонной моделью для параметрически неопределенного объекта (10.1).

Структурная схема системы с эталонной моделью объектом (10.1) с алгоритмом (10.7) приведена на рис. 10.5.

Коэффициент γ в формуле (10.7) определяет скорость настройки параметра ξ и носит название *коэффициента адаптации*. Из вида алгоритма (10.7) следует, что при его реализации необходимо решать нелинейное дифференциальное уравнение, а в общем случае – систему нелинейных дифференциальных уравнений, что может привести к определенным трудностям при реализации алгоритма в автономных управляющих устройствах. Составление модели системы адаптивного управления со структурной схемой, приведенной на рис. 10.5, в MATLAB трудности не представляет.

ГЛАВА 11. СОВРЕМЕННЫЕ РОБАСТНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

11.1. Градиентный метод

Рассмотрим некоторые современные подходы к синтезу управления дискретными системами. Математическую модель дискретной системы управления представим в виде

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k), \quad (11.1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ – номер стадии функционирования дискретной системы или номер очередного момента измерения и подачи управления t_k ; $x_k \in R_n$ – вектор переменных состояния (фазовых переменных), $u_k \in R_m$ – вектор входов (управлений), соответствующих моменту t_k .

Рассмотрим *градиентный метод*, который предназначен для построения управления моделью (11.1) в случае, когда цель управления задана при помощи некоторой гладкой неотрицательной *целевой функции* $Q = Q(x)$ в виде

$$Q(x_{k+1}) \leq \Delta \text{ при } k > k_*, \quad (11.2)$$

где $\Delta > 0$ – заданное значение порога точности задачи. В качестве целевой функции может быть выбрана функция дискретного аргумента

$$Q(x_{k+1}) = \frac{1}{2} \langle x_{k+1} - x_* | x_{k+1} - x_* \rangle. \quad (11.3)$$

Выразим очередное состояние объекта из модели (11.1) и подставим в выражение (11.2). Тогда получим приведенную целевую функцию (точнее, семейство функций $Q_k(u)$, зависящих от номера шага), непосредственно зависящую от управления

$$Q_k(u) = Q(f_k(x_k, u)). \quad (11.4)$$

Градиентный метод основан на изменении вектора u_k в направлении, противоположном направлению градиента (вектора из частных производных) от функции Q_k по управляющим переменным

$$u_{k+1} = u_k - \gamma_k \nabla_u Q_k(u_k), \quad (11.5)$$

где $\nabla_u = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right\}^T$ – вектор градиента; $\gamma_k \geq 0$ – коэффициент шага по

управлению. Метод малочувствителен к выбору конкретного значения коэффициента γ_k , поэтому он обладает свойством робастности.

Идея метода хорошо известна в теории оптимизации: при малом γ_k поправка $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ приводит к уменьшению значения функции $Q_k(u)$. В более изощренном выборе нет необходимости, поскольку на следующем шаге управления целевая функция изменится в силу динамики системы. Однако простая форма алгоритма не означает простоты условий его применимости. В число этих условий входит выпуклость функции $Q_k(u)$ по u , существование общего решения $u = u^*$ системы целевых неравенств $Q_k(u) < \Delta$ и выбор коэффициента шага γ_k с зоной нечувствительности:

$$\text{если } Q_k(u_k) \leq \Delta, \text{ то } \gamma_k = 0. \quad (11.6)$$

Условие (11.6) означает, что при достижении цели регулирования вектор управления компенсирует внешнее воздействие, не изменяясь по величине, аналогично алгоритму ПИ-регулятора (8.33).

ПИ-алгоритм для дискретных систем является частным случаем градиентного метода. Рассмотрим подробнее связь между ПИ-регулятором и градиентным методом для линейного объекта первого порядка. Пусть разностное уравнение движения имеет вид, аналогичный формуле (11.6). В общем случае его можно представить в следующей форме:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F, \quad (11.7)$$

где A , B и F – некоторые константы. Рекуррентный ПИ-алгоритм, полученный путем дискретизации непрерывной системы, определяется выражением (8.32), которое запишем в виде

$$u_{k+1} = u_k - K \left(1 + \frac{T}{T_H} \right) x_{k+1} + Kx_k. \quad (11.8)$$

Найдем алгоритм управления, который получается на основе градиентного метода с целевой функцией вида (11.3). Поскольку выражение (11.8) получено для задачи стабилизации при $x_* = 0$, то целевая функция в рассматриваемом случае принимает простой вид

$$Q(x_{k+1}) = \frac{1}{2} x_{k+1}^2. \quad (11.9)$$

Подставим выражение (11.7) в формулу (11.9) и найдем частную производную полученной функции по переменной u :

$$\frac{\partial Q_k(u)}{\partial u} = (Ax_k + Bu_k + F) \cdot B = Bx_{k+1}. \quad (11.10)$$

Подстановка выражения (11.10) в формулу (11.5) приводит к закону управления

$$u_{k+1} = u_k - \gamma_k \cdot B \cdot x_{k+1}, \quad (11.11)$$

с учетом условия (11.6), имеющего в данном случае следующий вид:

$$\text{если } \frac{1}{2} x_{k+1}^2 \leq \Delta, \text{ то } \gamma_k = 0.$$

Таким образом, применение градиентного метода привело к алгоритму (11.11), похожему на алгоритм (11.8), но без слагаемого, содержащего x_k (значение переменной состояния на предыдущем шаге). Кроме того, ПИ-алгоритм не предусматривает выполнения условия типа (11.6). При приближении к цели управления эти отличия в работе алгоритмов становятся несущественными.

Сравнительный анализ законов управления моделями (11.8) и (11.11) позволяет предложить для произвольного объекта первого порядка (11.7) следующий робастный алгоритм:

$$u_{k+1} = u_k - \Gamma_k x_{k+1}, \quad \Gamma_k = \begin{cases} \Gamma > 0, & x_{k+1}^2 > \Delta; \\ 0, & x_{k+1}^2 \leq \Delta. \end{cases} \quad (11.12)$$

Алгоритм (11.12) нужно исследовать на устойчивость. Применение условий устойчивости, рассмотренных в гл. 6, приводит к следующим допустимым значениям для коэффициента Γ :

$$\Gamma > \frac{A-1}{B}, \text{ если } A > 1. \text{ В остальных случаях } \Gamma > 0.$$

Отметим, что в непрерывном случае П-алгоритм, применяемый для управления объектом первого порядка, дает устойчивую систему *при любых* значениях пропорционального коэффициента. Следовательно, результаты, полученные для непрерывных систем, нельзя автоматически обобщать на дискретные системы. В последнем случае необходимы дополнительные исследования.

11.2. Адаптивный регулятор на основе быстрых алгоритмов

Рассмотрим теперь пример адаптивного алгоритма, т.е. алгоритма, учитывающего изменение условий функционирования системы (изменение параметров объекта или внешних воздействий) и выполняющего цель регулирования наиболее точно.

Разработка алгоритма определяется при некоторых фиксированных параметрах системы.

Рассмотрим дискретную систему первого порядка, номинальная модель которой имеет вид (11.7):

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = \tilde{x}_0 \neq 0. \quad (11.13)$$

В отсутствие управления ($u_k \equiv 0$) объект является асимптотически устойчивым при $|A| < 1$. В этом случае предельное значение дискретной переменной состояния, обусловленное наличием внешнего воздействия C , будет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{F}{1 - A}. \quad (11.14)$$

Выберем цель регулирования в виде выражения (11.2) с целевой функцией (11.9). При $\Delta \rightarrow 0$ цель регулирования (11.2), (11.9) можно записать в простой форме

$$x_{k+1} \rightarrow 0 \text{ при } k > k^*. \quad (11.15)$$

Если параметры номинальной модели соответствуют реальной системе, цель регулирования (11.15) может быть достигнута *за один шаг* с помощью управляющего воздействия

$$u_k = -\frac{1}{B}(Ax_k + F). \quad (11.16, \text{ а})$$

Подстановка выражения (11.16, а) в уравнение (11.13) даст $x_{k+1} = 0$, поэтому для дальнейших шагов получим

$$u_{k+1} = -\frac{F}{B}, \quad u_{k+2} = u_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.16, \text{ б})$$

Алгоритм управления (11.16) назовем *быстрым алгоритмом* (fast algorithm). Если возможности управления ограничены и управляющее воздействие, рассчитанное по формуле (11.16, а), превосходит максимально возможное значение U_{\max} , на вход объекта управления должна подаваться величина U_{\max} с соответствующим знаком, что обеспечит движение системы в нужном направлении, аналогично градиентному методу.

Если параметры системы (11.13) неизвестны или могут изменяться во время работы (параметрически неопределенная система), то их можно найти, применив в течение нескольких шагов любой устойчивый робастный алгоритм (предполагается, что параметры системы в течение этих шагов не изменяются). В результате мы получим *идентификационный адаптивный алгоритм управления на основе быстрого алгоритма*. Рассмотрим его подробнее.

Будем использовать П-регулятор на первых трех шагах управления: $u_k = -K_p x_k, k = 0, 1, 2$. В результате, в соответствии с формулой (11.13), получим три выражения:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + Bu_0 + F, \\ x_2 &= Ax_1 + Bu_1 + F, \\ x_3 &= Ax_2 + Bu_2 + F. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Здесь значения входов объекта u_k и измеряемых выходов $x_k, k = 0, 1, 2, 3$ являются известными величинами, а три параметра A, B, F составляют вектор неизвестных параметров, подлежащих идентификации.

Введем векторы $|\xi\rangle, |Y\rangle$ и матрицу G_3 по правилам:

$$|\xi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A \\ B \\ F \end{pmatrix}, \quad |Y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} x_0 & u_0 & 1 \\ x_1 & u_1 & 1 \\ x_2 & u_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11.18)$$

тогда систему уравнений (11.17) можно записать в виде

$$G_3 \cdot |\xi\rangle = |Y\rangle. \quad (11.19)$$

Вектор неизвестных параметров определится после решения уравнения (11.19):

$$|\xi\rangle = G_3^{-1} \cdot |Y\rangle. \quad (11.20)$$

Определив параметры A, B, F , можем синтезировать быстрый алгоритм (11.16) при $k = 3$. С целью фильтрации возможных ошибок измерений алгоритм идентификации позволяет использовать n начальных шагов, где $n \geq 3$. В этом случае вместо системы трех уравнений (11.19) мы получим следующую систему:

$$G_n \cdot |\xi\rangle = |Y\rangle, \quad |Y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad G_n = \begin{pmatrix} x_0 & u_0 & 1 \\ x_1 & u_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & u_{n-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.21)$$

Система (11.21) содержит число уравнений, превосходящее количество неизвестных, т.е. является несовместной. Для решения используется метод наименьших квадратов или другие методы линейного регрессионного анализа. Полученный вектор будет называться псевдорешением системы (11.21).

Заметим, что произведение матрицы G_n из системы (11.21) на транспонированную матрицу \tilde{G}_n даст квадратную симметричную матрицу размерности 3×3 , для которой можно найти обратную матрицу. Умножив обе части системы (11.21) на \tilde{G}_n и проведя операцию обращения квадратной матрицы, найдем вектор

$$|\xi\rangle = (\tilde{G}_n G_n)^{-1} \cdot \tilde{G}_n \cdot |Y\rangle. \quad (11.22)$$

Вычисления по формуле (11.22) легко провести в MATLAB. Следует, однако, иметь в виду, что при достижении цели регулирования (11.15) первый столбец матрицы G_n будет состоять из нулей, поэтому расчеты по формуле (11.22) становятся невозможными. С другой стороны, достижение цели регулирования говорит о правильной идентификации параметров объекта, следовательно, их не нужно рассчитывать, а следует брать их предыдущие значения. Аналогично функции (11.2) нужно назначить значение порога точности задачи $\Delta > 0$, а целевую функцию определить как сумму квадратов переменных состояния на всех n шагах этапа идентификации:

$$Q_n = \sum_{j=1}^n x_{k+j}^2. \quad (11.23)$$

Полностью работа идентификационной адаптивной системы управления на основе быстрого алгоритма должна быть описана следующим образом:

$$u_{k+1} = -K \cdot x_{k+1} - V, \quad K = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}, \quad V = \frac{F_{k+1}}{B_{k+1}}. \quad (11.24)$$

Здесь $A_{k+1}, B_{k+1}, F_{k+1}$ – значения параметров системы на $(k + 1)$ -м шаге, определенные по алгоритму:

- если $Q_n > \Delta$, то $A_{k+1} = \xi_1, B_{k+1} = \xi_2, F_{k+1} = \xi_3$, вектор $|\xi\rangle$ определяется по формуле (11.22);
- если $Q_n \leq \Delta$, то $A_{k+1} = A_k, B_{k+1} = B_k, F_{k+1} = F_k$. (11.25)

Экспериментальные исследования и результаты численного моделирования в MATLAB показали возможность реализации рассмотренного алгоритма управления, его эффективность и преимущества по сравнению с оптимально настроенными стандартными регуляторами.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

**Моделирование систем управления
физико-техническими объектами**

Использование пакета MATLAB+Simulink для моделирования систем управления²

Функции MATLAB

Для определения модели в *пространстве состояний* и последующего анализа во временной области необходимо задать четыре матрицы. Первое число в размерности матриц – количество строк, второе – количество столбцов:

Матрица	Размерность	Определение
A	$n \times n$	Матрица коэффициентов
B	$n \times m$	Матрица входа
C	$p \times n$	Матрица выхода
D	$p \times m$	Матрица обхода

Для описания передаточной функции объекта необходимо задать полином $p(s)$, стоящий в числителе ПФ, и полином $q(s)$ – знаменатель ПФ. Полиномы в MATLAB представляются в виде векторов-строк, состоящих из коэффициентов в убывающем порядке степеней. Например, полином $p(s) = s^3 + 3s^2 - 5$ определится командой “>>p = [1 3 0 -5];”.

При работе с матрицами в MATLAB нужно помнить, что *элементы строки разделяются между собой пробелами, а строки отделяются друг от друга точками с запятой.*

Перечень функций, используемых при выполнении лабораторных работ, приведен в табл. 1.

Таблица 1

Функции MATLAB

№ п/п	Функция MATLAB	Назначение функции
1	ss(A,B,C,D)	Определяет модель в пространстве состояний по заданным матрицам A, B, C и D
2	tf(num,den)	Определяет передаточную функцию по полиномам числителя (num) и знаменателя (den)
3	ss(sys_tf)	Определяет модель в пространстве состояний по известной передаточной функции (переменная sys_tf)
4	tf(sys_ss)	Определяет передаточную функцию по известной модели в пространстве состояний (переменная sys_tf)
5	eig(A)	Вычисляет собственные значения матрицы A

Полная документация по пакету MATLAB+Simulink содержится на сайте Центра инженерных технологий и моделирования (ЦИТМ Экспонента) по адресу <https://docs.exponenta.ru>. Здесь приведем краткую справку по функциям MATLAB и блокам Simulink, используемым при выполнении лабораторных работ.²

№ п/п	Функция MATLAB	Назначение функции
6	plot(y)	Строит график массива y
7	det(A)	Находит определитель матрицы A
8	poly(A)	Определяет характеристический полином матрицы A
9	roots(p)	Находит корни полинома p
10	pole(sys_tf)	Находит полюса передаточной функции sys_tf
11	ctrb(A,B)	Определяет матрицу управляемости по известным матрицам A и B
12	obsv(A,C)	Определяет матрицу наблюдаемости по известным матрицам A и C
13	feedback(sysg,sys_h)	Определяет передаточную функцию системы с обратной связью ($sysg$ – передаточная функция объекта, sys_h – передаточная функция цепи обратной связи)
14	step(sys)	Формирует переходную характеристику системы в виде массива

Задав математическую модель СУ в MATLAB, можно далее исследовать ее свойства и изучать поведение системы с течением времени. Небольшие программы, которые необходимы для моделирования, в MATLAB принято называть скриптами. Скрипт – это определенная последовательность команд, набранных в командном окне (Command Window), разделенных точками с запятой. Ввод последней команды без точки с запятой приводит к выполнению всей программы. Следует иметь в виду, что скрипт, выполненный в Command Window, повторно не редактируется. Для редактирования и отладки программ их рекомендуется оформлять в виде m -файлов. m -Файлы могут быть набраны в любом текстовом редакторе и затем скопированы в командное окно. Однако лучшим вариантом является использование собственного редактора MATLAB. Редактор запускается из основного окна MATLAB последовательными действиями “File – New – M-file” или нажатием специальной клавиши на линейке управления основного окна MATLAB.

Приведем пример m -файла для построения переходной характеристики RLC-цепи:

```

clc; clear; % очистка командного окна и памяти
R=51; L=100e-3; Ce=20e-6; % задание параметров цепи
pn=R; pd=[L*Ce R*Ce 1]; % полиномы числителя и знаменателя
su_tf=tf(pn, pd) % математическая модель в виде ПФ
y=step(su_tf); % формирование зависимости выходного
сигнала % от времени в виде массива

plot(y), grid % построение графика переходной
% характеристики с нанесением сетки
xlabel('Time (s)') % подпись оси X
ylabel('Output (V)') % подпись оси Y

```

Если необходимо вычислить переходную характеристику системы за определенный интервал времени с определенным шагом, необходимо использовать следующие команды:

```
t=[0:0.001:0.05]; [y,t]=step(sys,t);  
plot(t,y), grid –
```

Данный скрипт построит график переходной характеристики в первые 50 мс с шагом 1 мс. Результат работы программы приведен на рис. 1.

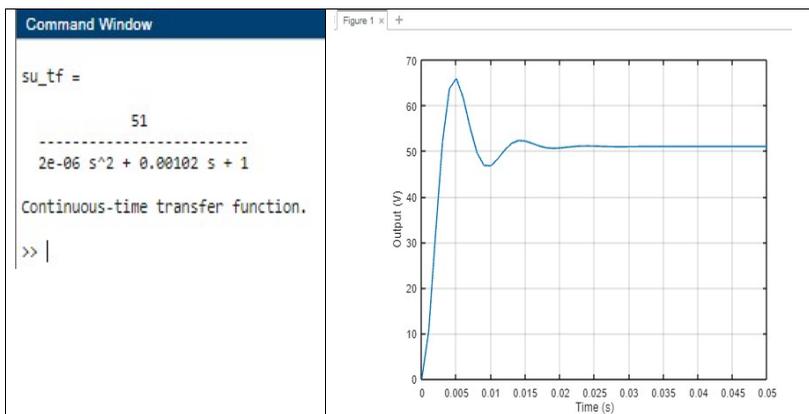


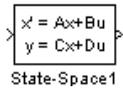
Рис. 1. Передаточная функция и переходная характеристика RLC-цепи.
Open MATLAB Online (basic) R2022b

Блоки пакета Simulink

Основные блоки пакета Simulink, которые должны быть использованы при выполнении работ, приведены в табл. 2. Несомненно, что лучший способ изучить работу Simulink – это работа в Simulink.

Таблица 2

Основные блоки пакета Simulink, применяемые для исследования свойств непрерывных систем

№ п/п	Название	Блок Simulink			
		Blockset	Библиотека	Наименование	Диаграмма
1	Модель в пространстве состояний (ABCD-модель)	Simulink	Continuous	State-Space	 State-Space 1
2	Передаточная функция	Simulink	Continuous	Transfer Fcn	 Transfer Fcn
3	Виртуальные часы – источник текущего времени моделирования	Simulink	Sources	Clock	 Clock
4	Константа	Simulink	Sources	Constant	 Constant
5	Ступенчатая функция	Simulink	Sources	Step	 Step
6	Сумматор сигналов	Simulink	Math Operations	Sum	
7	Умножение сигнала на константу (усиление)	Simulink	Math Operations	Gain	 Gain

№ п/п	Название	Блок Simulink			
		Blockset	Библиотека	Наименование	Диаграмма
8	Нахождение производной по времени	Simulink	Continuous	Derivative	 Derivative
9	Интегрирование сигнала по времени	Simulink	Continuous	Integrator	 Integrator
10	Блок оптимизации параметров	Simulink Design Optimization	Signal Constraints	Check Step Response Characteristics	 Check Step Response Characteristics
11	Индикатор выходного сигнала (виртуальный осциллограф)	Simulink	Sinks	Scope	 Scope

Для создания S-модели необходимо открыть окно построения моделей Simulink, выбрать способ описания объекта (пространство состояний или передаточные функции) и поместить соответствующую диаграмму в окно моделей. Дважды кликнув на диаграмму в окне, открыть ее маскирующую иконку и задать свойства объекта. Создать цепь обратной связи и задать ее свойства. Выбрать источник сигналов из библиотеки источников (Sources) и просмотрщик сигналов из библиотеки получателей сигналов (Sinks).

После создания модели запустить ее командой Run и посмотреть выходной сигнал, изменив при необходимости свойства окна просмотра (виртуального осциллографа). Длительность моделирования устанавливается в следующей последовательности: Simulation – Simulation Parameters – **Stop Time**. Параметры конкретного блока модели можно задавать в численном виде непосредственно на его иконке, которая открывается двойным кликом мыши на изображение диаграммы, или указывать значения переменных в командном окне MATLAB.

Например, в S-модели регулятора, приведенной на рис. 2, значения пропорционального, интегрального и дифференциального коэффициентов можно обозначить как K_p , K_i и K_d в соответствующих блоках Gain, а их значения задать в Command Window, предварительно объявив их глобальными переменными:

```
>> global Kp Ki Kd
>> Kp=1; Ki=0.1; Kd=0.2;
```

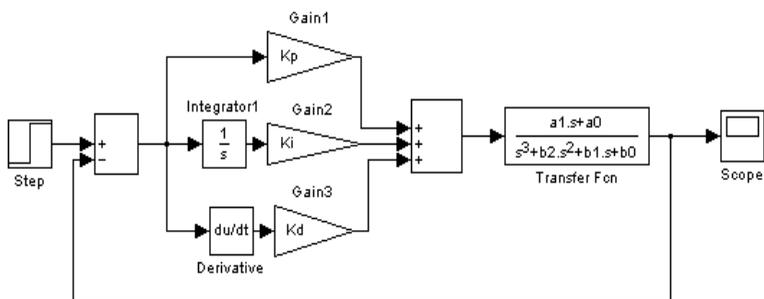


Рис. 2. S-модель ПИД-регулятора Simulink 5.0

Для возврата данных в MATLAB необходимо в окне настройки осциллографа Scope пройти по пути: Configuration Properties – Logging – **Log data to workspace**, затем указать имя файла (по умолчанию ‘ScopeData’) и формат данных.

В заключение заметим, что в Simulink имеется готовый блок ПИД-регулятора. Однако вид модели, приведенный на рис. 2, обладает тем преимуществом, что параметры регулятора находятся в полном распоряжении разработчика, а не «спрятаны» в недрах пакета MATLAB. По этой же причине не рекомендуется использовать Control System Toolbox, в котором имеются готовые блоки для всех составных частей замкнутых систем управления.

Лабораторная работа № 1³

Построение математических моделей объектов и систем управления

Вариант 1

Сформулируйте возможные цели управления для приведенных ниже примеров объектов управления:

- температура воздуха в комнате;
- скорость транспортного средства;
- курс корабля;
- орбита искусственного спутника Земли;
- рука робота-манипулятора;
- качество аудио- или видеосигнала;
- скорость химической или ядерной реакции;
- диссоциация отдельных молекул;
- прибыль фирмы;
- количество народонаселения.

Вариант 2

Одним из примеров регулятора прямого действия является печь с автоматической регулировкой температуры, изобретенная голландским мастером Корнелиусом Дреббелем в 1620 г. Устройство печи изображено на рис. Л.1.

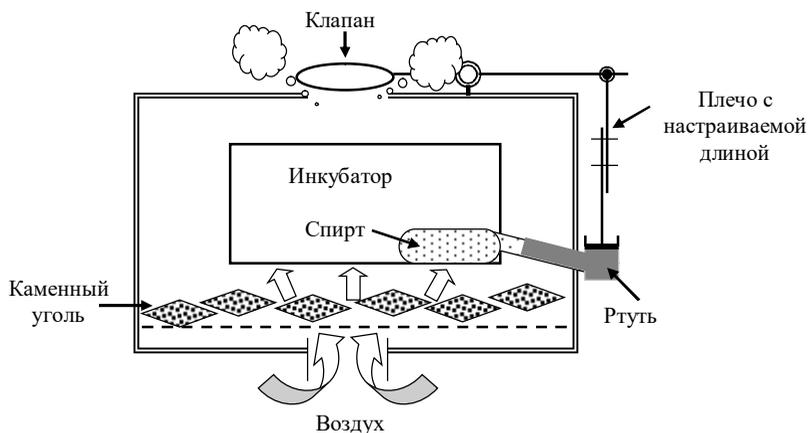


Рис. Л.1. Печь с автоматической регулировкой температуры (К. Дреббель, 1620 г.)

³ Перед выполнением работ необходимо согласовать с преподавателем номер варианта

Объектом управления здесь является внутренний отсек печи (инкубатор), температуру в котором нужно поддерживать на заданном уровне, это – цель управления. Источником энергии служит горящий каменный уголь. Интенсивность горения обеспечивается степенью открытия демпфирующего клапана, перекрывающего вытяжное отверстие в верхней части печи: при полностью закрытом клапане горение прекращается, при полностью открытом – происходит самое интенсивное горение и обеспечивается максимально возможная температура в инкубаторе. Для автоматического регулирования положения клапана создана цепь обратной связи: в инкубатор помещается сосуд со спиртом, который расширяется или сжимается в зависимости от температуры в инкубаторе; спирт через трубку действует на ртуть в сосуде, ртуть выталкивает находящийся в ней поплавок, поплавок через систему рычагов с регулируемой длиной плеча действует на клапан.

Изобразите структуру печи К. Дреббеля как системы автоматического управления и укажите основные элементы этой системы в конструкции печи. Поясните, как происходит изменение температурной уставки (требуемого значения температуры в инкубаторе).

Вариант 3

Пожалуй, самым известным регулятором прямого действия является регулятор Уатта (Джеймс Уатт, 1788 г.), представляющий собой одну из разновидностей центробежных регуляторов. Схематическое изображение регулятора приведено на рис. Л.2.

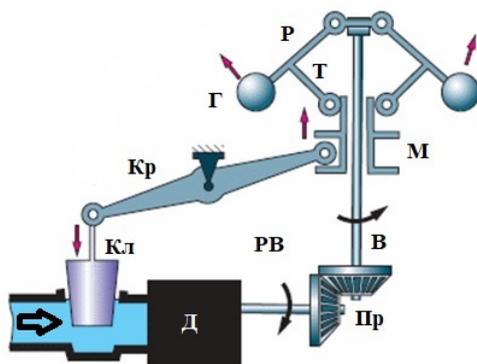


Рис. Л.2. Регулятор Уатта (Дж. Уатт, 1788 г.)

Цель работы регулятора состоит в поддержании заданной частоты вращения рабочего вала (РВ) паровой машины (двигателя Д). Регулятор состоит из

вала регулятора В с передачей Пр в виде шкива или зубчатых колес, как показано на рисунке; двух грузиков Г, подвешенных на рычагах Р; двух тяг Т, соединяющих рычаги с муфтой М, скользящей по валу, и коромысла Кр, одним концом закрепленного в выемке муфты, а другим соединенного с тягой клапана подачи пара Кл. Положение грузиков на рычагах может изменяться, в соответствии с чем изменяются длины рычагов.

При работе машины вращение рабочего вала двигателя передается на вал регулятора. Под действием центробежной силы грузики отклоняются от оси, причем чем быстрее вращается вал, тем дальше расходятся грузики. При этом рычаги взаимодействуют через тяги с муфтой и перемещают ее по оси вала. Поступательное движение муфты через коромысло передается на тягу, соединенную с клапаном подачи пара таким образом, чтобы при повышении скорости вращения вала подача уменьшалась, а при уменьшении – увеличивалась. Муфта ходит с некоторым трением, что необходимо для обеспечения устойчивости работы системы.

Изобразите структуру регулятора Уатта как системы автоматического управления и укажите основные элементы этой системы в конструкции регулятора. Поясните, как происходит установка требуемого значения частоты вращения вала.

Вариант 4

Для RLC-цепи, изображенной на рис. 1.2, в качестве переменных состояния можно выбрать два напряжения: $v_c(t)$ и $v_L(t)$, где v_L – напряжение на индуктивности. Тогда новые переменные состояния x_1^* и x_2^* будут связаны со старыми переменными x_1 и x_2 соотношениями

$$x_1^* = v_c = x_1,$$

$$x_2^* = v_L = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2.$$

Постройте математическую модель RLC-цепи в пространстве состояний в переменных $\{x_1^, x_2^*\}$.*

Вариант 5

Для RLC-цепи, изображенной на рис. 1.2, в качестве переменных состояния можно выбрать два напряжения: $v_c(t)$ и $v_L(t)$, где v_L – напряжение на индук-

тивности. Тогда новые переменные состояния x_1^* и x_2^* будут связаны со старыми переменными x_1 и x_2 соотношениями

$$x_1^* = v_c = x_1,$$

$$x_2^* = v_L = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2.$$

Изобразите сигнальный граф для RLC-цепи в переменных $\{x_1^*, x_2^*\}$.

Вариант 6

В простейшем случае модель электродвигателя, запитываемого от цепи постоянного тока, можно представить в виде схемы, приведенной на рис. Л.3. К валу двигателя прикреплена нагрузка. Вход объекта – приложенное напряжение, выход – угол поворота вала φ . Статор представляет собой электрическую цепь, содержащую сопротивление R (активное сопротивление обмотки) и индуктивность L , межвитковыми емкостями пренебрегаем. Протекающий по обмотке статора ток i создает в зазоре двигателя магнитный поток Φ , который взаимодействует с постоянным током якоря и вызывает крутящий момент M , что приводит к вращению якоря и жестко скрепленного с ним вала с нагрузкой.

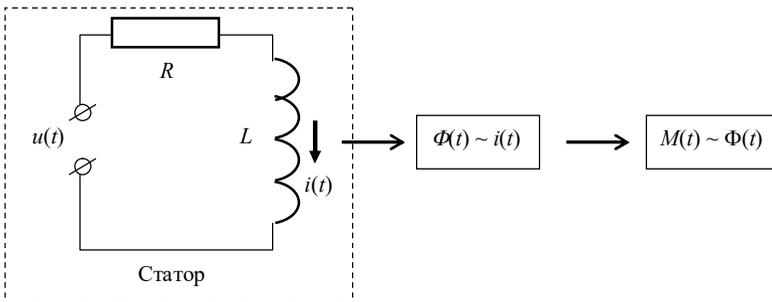


Рис. Л.3. Простейшая модель электродвигателя, управляемого по цепи статора

Будем считать, что магнитный поток Φ прямо пропорционален току i в статоре, а механический момент M , в свою очередь, пропорционален магнитному потоку:

$$\Phi(t) = k_1 i(t), \quad M(t) = k_2 \Phi(t) = k_1 k_2 i(t) \equiv Ki(t).$$

J – момент инерции вала с нагрузкой, β – коэффициент трения.

Постройте математическую модель электродвигателя в пространстве состояний, используя в качестве переменных состояния величины: $x_1 = \phi$, $x_2 = i$, $x_3 = \varphi$.

Вариант 7

Передаточная функция $T(s)$ системы второго порядка имеет вид

$$T(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

где K – масштабный коэффициент (при анализе переходной характеристики он может быть положен равным единице), ω_n имеет размерность частоты (как и переменная s), а ζ – безразмерный параметр (декремент). Полюса ПФ имеют вид

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1},$$

откуда получаем явный вид переходной функции $y(t)$ при $0 < \zeta < 1$ (в колебательном режиме):

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta).$$

Проанализировав эту функцию, находим основные показатели качества для системы второго порядка, они приведены в табл. Л.1.

Таблица Л.1

Основные показатели качества для системы второго порядка

Показатель	Обозначение	Расчетная формула
Время максимума	T_P	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$
Время установления ($\delta = 2\%$)	T_S	$\approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$
Относительное перерегулирование	$\delta_P = \frac{M_P - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100\%$	$100 \cdot e^{-\zeta\pi / \sqrt{1 - \zeta^2}}$

Получите расчетные формулы, приведенные в таблице.

Вариант 8

Объект регулирования описывается моделью первого порядка

$$\dot{x} + \frac{1}{\tau_o} x = \frac{1}{\tau_o} \cdot F_d + \frac{1}{\tau_o} \cdot u(t),$$

где F_d – постоянное внешнее воздействие, $u(t)$ – управление. Уравнение выхода имеет вид

$$y = x.$$

В начальный момент объект находится в состоянии равновесия $x(0) = x_o = F_d < 0$, цель регулирования задается выражением

$$y \rightarrow 0, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Исследуйте для рассматриваемой системы работу ПИ-регулятора.

$$u(t) = -K_p y(t) - K_I \int_0^t y(\tau) d\tau; \quad K_p > 0, \quad K_I > 0.$$

Путем аналитических вычислений и с помощью компьютерного моделирования в MATLAB покажите, что управляющее воздействие удовлетворяет условию

$$u(t) \rightarrow -F_d, \quad t \rightarrow \infty.$$

Лабораторная работа № 2

Исследование переходных характеристик двигателя постоянного тока

На рис. Л.4 представлена модель двигателя постоянного тока.

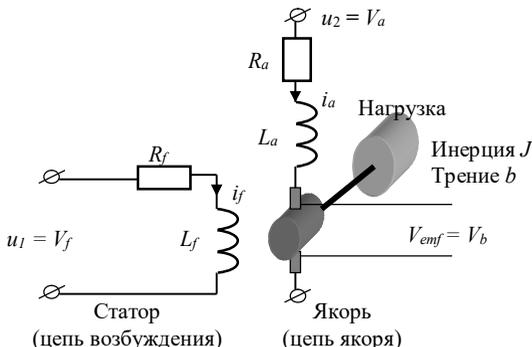


Рис. Л.4. Модель двигателя постоянного тока

Величины, относящиеся к элементам и переменным цепи статора, имеют индекс «*f*» (field), элементы и переменные в цепи якоря имеют индекс «*a*» (armature).

Если задан ток якоря ($i_a = \text{const}$), мы имеем **двигатель, управляемый по цепи возбуждения**. Если фиксирован ток в обмотке статора ($i_f = \text{const}$) или магнитное поле в зазоре создается постоянными магнитами, мы имеем **двигатель, управляемый по цепи якоря**. Рассмотрим последний случай.

Двигатель, управляемый по цепи якоря. Входом является напряжение на обмотках якоря $u_a(t)$, выходом – угол поворота вала φ .

Структурная схема двигателя изображена на рис. Л.5.

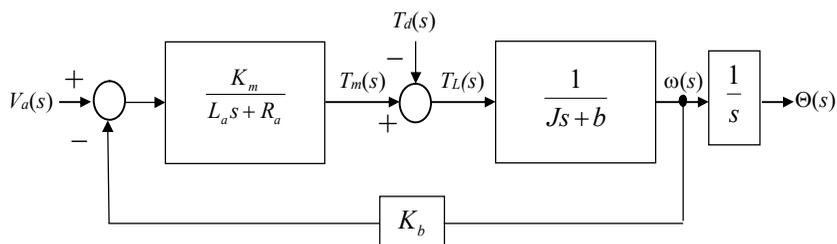


Рис. Л.5. Структурная схема двигателя, управляемого по цепи якоря

Задайте следующие параметры двигателя:

$R = 2 \text{ Ом}$, $L = 0,5 \text{ Гн}$, $J = 0,02 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $K_m = K_b = 0,015 \text{ Н}\cdot\text{м/А}$, $b = 0,2 \text{ Н}\cdot\text{м/с}$.

1. Найдите с помощью MATLAB ABCD-модель двигателя, получив предварительно выражение для передаточной функции системы при отсутствии внешних возмущений.

2. Промоделируйте структурную схему рис. Л.5 в Simulink и исследуйте переходные характеристики системы при различных значениях возмущений T_d .

Лабораторная работа № 3

Оптимизация работы стандартных регуляторов по критерию ИВМО

Структурная схема системы управления с ПИД-регулятором приведена на рис. Л.6.

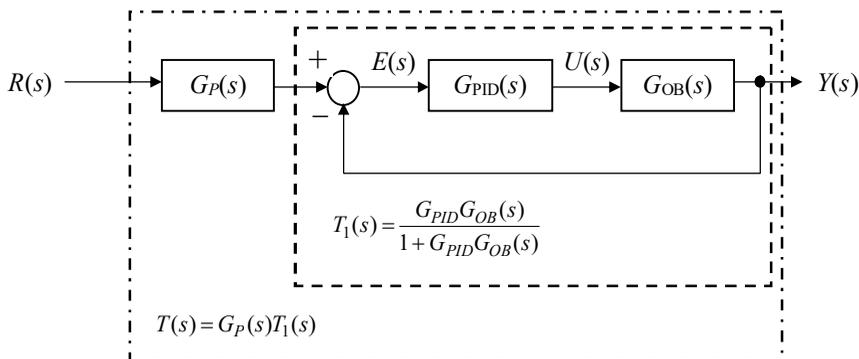


Рис. Л.6. Структурная схема системы управления с ПИД-регулятором и предшествующим фильтром

На рис. Л.6 $G_{OB}(s)$ – передаточная функция объекта управления, $G_{PID}(s)$ – ПФ регулятора, которая имеет вид

$$G_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s},$$

$G_P(s)$ – ПФ фильтра, установленного на входе системы по задающему воздействию (предшествующий фильтр). Наличие такого, определенным образом подобранного фильтра позволяет улучшить качество работы регулятора.

Для передаточной функции вида

$$T_q(s) = \frac{\omega_n^q}{s^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

были определены значения коэффициентов b_k , $k = 0, 1, \dots, q - 1$, которые минимизируют интеграл от взвешенного модуля ошибки (оценка ИВМО). Эти коэффициенты приведены в табл. Л.2 для $q = 1, \dots, 5$.

**Оптимальные значения коэффициентов $T(s)$,
основанные на критерии ИВМО, при ступенчатом входном сигнале**

Порядок q	Коэффициенты ПФ					
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0
1	–	–	–	–	1	ω_n
2	–	–	–	1	$1,4\omega_n$	ω_n^2
3	–	–	1	$1,75\omega_n$	$2,15\omega_n^2$	ω_n^3
4	–	1	$2,1\omega_n$	$3,4\omega_n^2$	$2,7\omega_n^3$	ω_n^4
5	1	$2,8\omega_n$	$5,0\omega_n^2$	$5,5\omega_n^3$	$3,4\omega_n^4$	ω_n^5

Таким образом, оптимальная (по критерию ИВМО) передаточная функция, например, для системы третьего порядка имеет вид

$$T_3^{ИВМО}(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3}.$$

Отметим, что в любом случае система порядка q , оптимизированная по критерию ИВМО, обладает нулевой установившейся ошибкой, а ее передаточная функция имеет q полюсов и **не содержит нулей**.

Аналитический способ настройки ПИД-регулятора предполагает подбор трех коэффициентов, минимизирующих оценку ИВМО, при которой система обладает хорошей, в смысле показателей качества, реакцией на ступенчатый сигнал. Передаточная функция объекта управления считается известной. Процедура синтеза для объекта второго порядка включает в себя следующие этапы:

1. По заданному времени установления определить параметр ω_n замкнутой системы.
2. Используя найденное значение ω_n и соответствующее выражение для характеристического полинома из таблицы, определить три коэффициента передаточной функции $T_1(s)$.
3. Определить предшествующий фильтр $G_F(s)$ так, чтобы передаточная функция $T(s)$ не имела нулей.

Механическая рука робота имеет передаточную функцию

$$G_R(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

Синтезируйте ПИД-регулятор с предшествующим фильтром для управления рукой, используя оценку качества ИВМО при $\omega_n = 10$. Постройте S-модель системы управления, получите переходную характеристику и определите в случае ступенчатого входного сигнала величину перерегулирования, время максимума переходной характеристики и время установления (по критерию 2 %).

Лабораторная работа № 4

Настройка ПИД-регуляторов по методике Зиглера – Никольса и с использованием блока настройки параметров Simulink

Настройка трех коэффициентов K_P , K_I , K_D , в соответствии с методикой Зиглера – Никольса, проводится в следующей последовательности:

1. Коэффициенты K_I и K_D устанавливаются равными нулю, а коэффициент усиления K_P увеличивается до тех пор, пока система не перейдет в критический (автоколебательный) режим, т.е. станет нейтрально устойчивой. Переходная характеристика непрерывной системы при этом будет иметь вид, аналогичный приведенному на рис. 6.3 при $K = 7$, а дискретной системы – на рис. 7.7 при $K = 1,5$.

2. Предельное (критическое) значение коэффициента усиления обозначается как K_U , а измеренный период автоколебаний при этом значении – как P_U .

3. Задаются следующие значения коэффициентов регулятора:

$$K_P = \frac{3K_U}{5}, \quad K_I = \frac{6K_U}{5P_U}, \quad K_D = \frac{3}{40} K_U P_U.$$

Объект регулирования имеет передаточную функцию

$$G(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

с параметрами, указанными в табл. Л.3.

Таблица Л.3

Параметры объекта регулирования

Номер варианта	Числитель		Знаменатель		
	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
1	0	0,04	0,80	0,02	0,01
2	0	0,04	0,90	0,04	0,02
3	0	0,04	0,95	0,06	0,02
4	0	0,04	1,00	0,10	0,02
5	0	0,04	1,00	0,10	0,03
6	0	0,04	1,00	0,15	0,03
7	0	0,04	0,90	0,10	0,03
8	0	0,04	1,00	0,08	0,02

А. Синтезируйте для данного объекта ПИД-регулятор, определив его параметры по методике Зиглера – Никольса. Численный эксперимент проводите в S-модели системы управления, приведенной на рис. 1.5. Получите переходную характеристику системы.

Б. Настройте ПИД-регулятор для выбранного объекта, который имеет характеристики переходного процесса, указанные в табл. Л.4, с использованием блока настройки параметров Simulink. В качестве начальных значений коэффициентов регулятора выберите найденные по методике Зиглера – Никольса в п. А данного задания.

Таблица Л.4

Максимально допустимые характеристики переходного процесса

Название характеристики	Номер варианта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Установившаяся ошибка, %	1	1	2	2	1,5	1,5	0,5	0,5
Относительное перерегулирование, %	10	15	20	10	15	10	10	15
Время установления, с	30	35	25	30	15	20	20	20
Время максимума, с	10	8	9	8	8	10	7	8

Лабораторная работа № 5

Исследование работы систем управления физико-техническими объектами

Объект управления указан в вашем варианте.

При выполнении работы необходимо:

- составить математическую модель системы управления,
- исследовать систему управления на устойчивость,
- построить S-модель системы автоматического управления и исследовать ее работу в устойчивом и неустойчивом режимах.

В указаниях для выполнения работы могут быть приведены и другие задания.

Вариант 1

Автоматическая стабилизация курса корабля

Корабль, двигающийся с постоянной скоростью, испытывает вращательное движение вокруг вертикальной оси (изменяет курс), если положение руля отклоняется от осевой линии. Простейшая модель этого движения описывается уравнением

$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = k\psi,$$

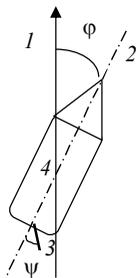


Рис. Л.7. Модель корабля: 1 – курс корабля, 2 – ось корабля, 3 – руль, 4 – центр инерции

где φ – угол отклонения корабля от курса; ψ – угол отклонения руля от оси судна; I – момент инерции корабля относительно вертикальной оси, проходящей через центр корабля; h – коэффициент жидкостного трения; k – коэффициент эффективности руля (рис. Л.7).

Пусть автоматический регулятор положения руля (авторулевой) работает на основе ПД-алгоритма, так что уравнение авторулевого имеет вид

$$T\dot{\psi} + \psi = -\alpha\xi - \beta\dot{\xi}.$$

Здесь ξ – измеренное значение угла уклонения; α и β – пропорциональный и дифференциальный коэффициенты (параметры авторулевого, которые могут подбираться); T – постоянная времени авторулевого. В уравнении авторулевого учтено, что измерение угла уклонения φ не происходит мгновенно, а описывается уравнением $\tau\dot{\xi} + \xi = \varphi$, где τ – постоянная времени измерителя.

Если введем обозначения

$$x_1 = \varphi, x_2 = \dot{\varphi}, x_3 = \psi, x_4 = \dot{\psi},$$

то получим математическую модель системы управления в форме пространства состояний, имеющую вид четырех линейных дифференциальных уравнений для вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

где коэффициенты характеристического полинома зависят от параметров системы.

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$I = 1000, h = 0,01, k = 1, T = 100, \tau = 0,1.$$

Найдите зависимость коэффициентов характеристического полинома $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}$ от параметров корабля и авторулевого и исследуйте его на устойчивость с помощью критерия Рауса – Гурвица в пространстве величин (α, β) . Укажите область устойчивости в этом пространстве.

Составьте структурную схему и по ней постройте Simulink-модель системы управления. Проверьте результаты определения области устойчивости, получив переходные характеристики системы в устойчивом и неустойчивом режимах работы при единичном ступенчатом входном сигнале.

Вариант 2

Следящая система с приводом

Приводом называется устройство, преобразующее подводимую к нему энергию в поступательное движение, передаваемое объекту управления. Исполнительным устройством в приводе могут служить электродвигатели, пневматические или гидравлические цилиндры, магнестрикционные или электрострикционные элементы. Движение объекту передается посредством редуктора, сердечника, поршня и других механизмов. Величина перемещений, осуществляемых приводами, может быть самой разной. С помощью приводов осуществляется поворот руля корабля, ракеты или элеронов самолета, автоматическое раскрытие ворот, поднятие шлагбаума или затвора плотины, поворот стрелы подъемного крана, а также микроперемещение иглы или других устройств в измерительных или хирургических инструментах. На рис. Л.8 приведена схема электромагнитного привода (актуатора) на основе пьезокристалла: электрическое напряжение U , подводимое к кристаллу, преобразуется в перемещение x сердечника, к которому прикреплен объект. Набор таких актуаторов может применяться, например, для управления диаметром оболочки камеры высокого давления в газотурбинном двигателе.

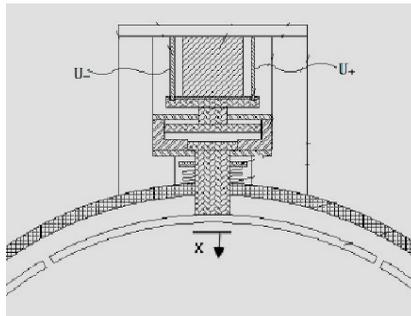


Рис. Л.8. Схема электромагнитного актуатора

Цель работы следящей системы состоит в том, чтобы выходной параметр – перемещение объекта $x_{\text{вых}}(t)$ – отслеживал (отсюда проистекает название системы) входное воздействие $x_{\text{вх}}(t)$, задаваемое в виде аналогового или цифрового сигнала. Типовая блок-схема такой системы изображена на рис. Л.9. В этой системе для улучшения ее динамических свойств имеются две цепи обратной связи – внутренняя и внешняя. Первая из них предусматривает дифференцирование сигнала (дифференциальное звено с коэффициентом k_D), вторая содержит блок пропорционального усиления сигнала (пропорциональное звено с коэффициентом k_P).

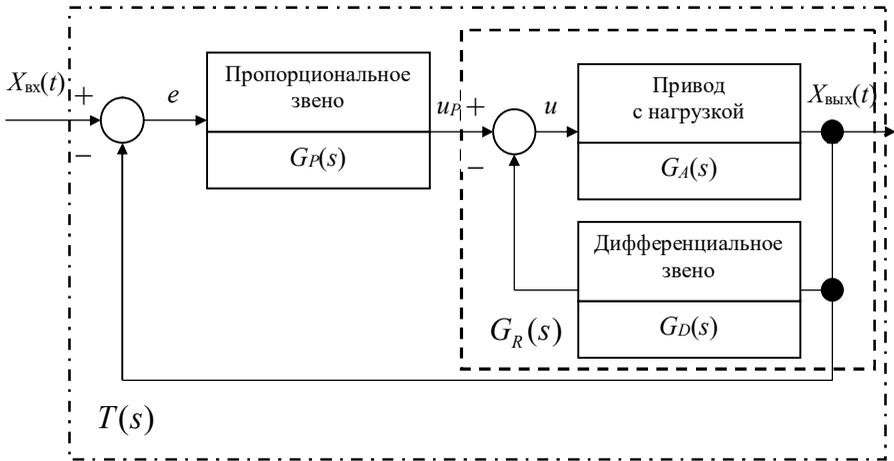


Рис. Л.9. Блок-схема следящей системы с приводом

Для нахождения передаточной функции привода с нагрузкой запишем его уравнение движения в форме уравнения Ньютона. В отсутствие возвращающей пружины уравнение получит вид

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} + Ku,$$

где m – суммарная масса всех движущихся компонентов; b – коэффициент трения; u – внешнее воздействие, например электрическое напряжение в актуаторе. Передаточная функция, соответствующая этому уравнению, имеет вид

$$G_A(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{k_A}{s(T_A s + 1)}.$$

Здесь введены обозначения: $k_A = K / b$, $T_A = m / b$.

Передаточные функции двух других звеньев имеют следующие выражения:

$$G_D(s) = k_D s,$$

$$G_P(s) = \frac{U_P(s)}{E(s)} = \frac{k_P}{T_p s + 1}.$$

В последнем выражении учтено время срабатывания усилителя.

Для передаточной функции внутреннего звена с обратной связью $G_R(s)$ в соответствии с формулой (3.16) получаем выражение

$$G_R(s) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_P(s)} = \frac{G_A(s)}{1 + G_D(s)G_A(s)}.$$

Полная передаточная функция модели следящей системы с приводом имеет вид

$$T(s) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(s)}{X_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{G_P(s)G_R(s)}{1 + G_P(s)G_R(s)} = \frac{b_0}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0},$$

где коэффициенты характеристического полинома $\{a_3, a_2, a_1, a_0\}$ выражаются через параметры системы k_A, T_A, T_P и настроечные коэффициенты k_p, k_D .

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$k_A = 5; T_A = 0,6; T_P = 0,5.$$

Найдите зависимость коэффициентов характеристического полинома $\{a_3, a_2, a_1, a_0\}$ от параметров системы и настроечных коэффициентов и исследуйте его на устойчивость с помощью критерия Рауса – Гурвица в пространстве величин k_p, k_D . Укажите область устойчивости в этом пространстве.

На основании блок-схемы, приведенной на рис. Л.9, постройте Simulink-модель системы управления и проверьте результаты определения области устойчивости, получив переходные характеристики системы в устойчивом и неустойчивом режимах работы.

Исследуйте работу системы управления в устойчивом режиме при синусоидальном входном сигнале.

Вариант 3

Автоматическое управление курсом самолета

При описании траектории движения самолета различают две декартовы прямоугольные системы координат, одна из которых связана с Землей, другая – с самим самолетом с центром в его центре масс и тремя осями: крена, направленную вперед; тангажа, направленную в сторону правого борта; и курса, направленную вверх (рис. Л.10).

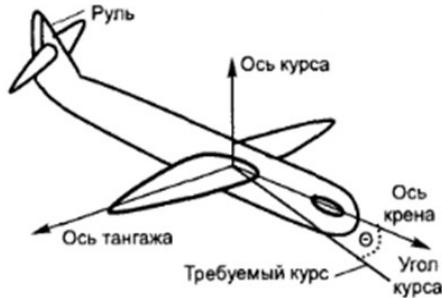


Рис. Л.10. Система координат самолета

При этом поворот самолета вокруг оси крена определяется углом крена, вокруг оси тангажа – углом тангажа, вокруг оси курса – углом курса. Изменение трех данных углов есть ключ к автоматическому управлению полетом самолета с помощью автопилота.

Рассмотрим, например, как осуществляется стабилизация курса самолета. Пусть под действием воздушных масс или иных причин самолет отклонился от заданного курса. Гироскоп, являющийся составной частью автопилота, фиксирует это отклонение, вследствие чего в систему управления поступает соответствующий сигнал рассогласования, формирующий сигнал ошибки. Последний усиливается и поступает в устройство привода, управляющее поворотом руля самолета. Под действием измененного положения руля самолет начинает возвращаться к первоначальному курсу. При достижении нулевой ошибки маневр прекращается, и самолет продолжает двигаться в строго заданном направлении. Аналогичным образом осуществляется целенаправленное изменение курса самолета под действием специально вводимой в систему внешней команды (задача слежения).

Описанная процедура автоматического управления курсом самолета может быть отражена в виде блок-схемы, приведенной на рис. Л.11. В состав системы входит сам объект управления – динамическое звено, отражающее реак-

цию самолета на изменение положения руля поворота, расположенного в хвостовом оперении самолета. Эта реакция носит инерционный характер и отражает изменение курса самолета с определенной задержкой по отношению к изменению угла поворота руля. Измерение курсового угла осуществляется гироскопом, имеющимся в цепи обратной связи. Кроме того, в систему входят пропорциональный усилитель и фильтр.

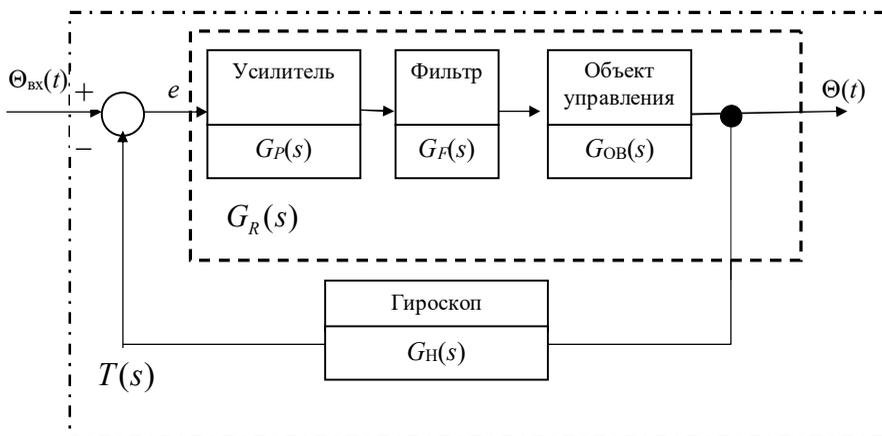


Рис. Л.11. Блок-схема системы автоматического управления курсом самолета

Приведем выражения для передаточных функций (ПФ) звеньев системы:
 $G_P(s) = K_P$ – ПФ усилителя сигнала ошибки;

$$G_F(s) = \frac{1}{T_F s + 1} \text{ – ПФ фильтра;}$$

$G_H(s) = K_H$ – ПФ гироскопа;

$$G_{ОВ}(s) = \frac{k_1(T_1 s + 1)}{s[(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k_2 T_1]}$$

– ПФ динамического звена, связывающего угол курса самолёта с углом поворота руля.

Здесь k_1, k_2, T_1, T_2 – параметры, определяемые конструкцией самолета.

Введем также обозначение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$G_R(s) = G_P G_F G_{ОВ}(s).$$

Полная передаточная функция модели автоматической системы управления курсом самолета имеет вид

$$T(s) = \frac{\Theta_{\text{ВЫХ}}(s)}{\Theta_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_H(s)G_R(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0},$$

где коэффициенты характеристического полинома $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}$ выражаются через параметры системы k_1, k_2, T_1, T_2, K_H и настроечные коэффициенты K_P, T_F .

Анализ работы автоматической системы управления углами тангажа и крена самолета может быть проведен аналогично. Модели систем будут отличаться друг от друга только передаточными функциями динамических звеньев, которые описывают реакцию самолета на изменение положения соответствующих устройств.

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$k_1 = 0,8; k_2 = 2; T_1 = 1; T_2 = 2; K_H = 1.$$

Найдите зависимость коэффициентов характеристического полинома $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}$ от параметров системы и настроечных коэффициентов и исследуйте его на устойчивость с помощью критерия Рауса – Гурвица в пространстве величин K_P, T_F . Укажите область устойчивости в этом пространстве.

На основании блок-схемы, приведенной на рис. Л.11, постройте Simulink-модель системы управления и проверьте результаты определения области устойчивости, получите переходные характеристики системы в устойчивом и неустойчивом режимах работы при единичном ступенчатом входном сигнале.

Вариант 4

Автоматическая посадка космического аппарата на Луну

Первую в истории мягкую посадку на Луну совершила советская межпланетная автоматическая станция «Луна-9» 3 февраля 1966 г. Это произошло в Океане Бурь, к северо-востоку от кратера Кавальери. Полная масса станции составляла 1583 кг. В верхней части аппарата размещалась автоматическая лунная станция (АЛС), в нижней части – корректирующая и тормозная двигательная установка (КТДУ). Станция оснащалась герметичным отсеком системы управления, двумя сбрасываемыми навесными отсеками с системой астроориентации «Юпитер» и радиовысотомером больших высот. АЛС представляла собой герметичный контейнер, в котором находились радиосистема, аккумуляторы, система терморегулирования и научная аппаратура, содержащая легкую панорамную телекамеру и детектор радиации. Перед самым касанием поверхности Луны был выполнен сброс АЛС (лунного модуля) массой около 100 кг. Подпрыгнув несколько раз, модуль успешно прилунился. После этого был произведен отстрел баллонов, а затем раскрылись четыре лепестковые антенны, открыв штыверные антенны и телекамеру (рис. Л.12). Установленная на модуле аппаратура работала в течение 75 ч и дала семь сеансов связи, передав на Землю панорамные снимки лунной поверхности.

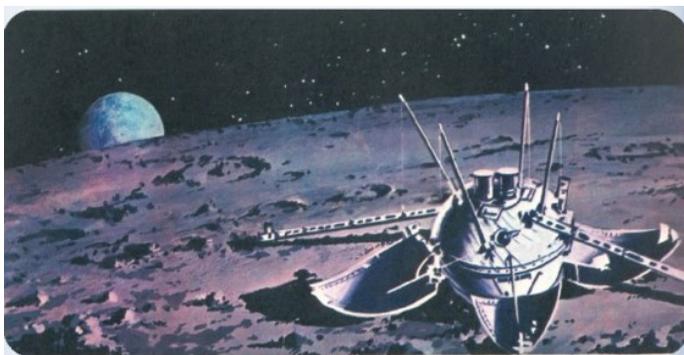


Рис. Л.12. Лунный модуль станции «Луна-9» в рабочем положении

«Луна-9» была двенадцатой попыткой Советского Союза высадиться на Луне. Все предыдущие одиннадцать миссий провалились. Некоторым не удалось запуститься, два аппарата пролетели мимо Луны, три аппарата достигли поверхности Луны, но разбились. Дело в том, что обеспечение мягкой посадки на поверхность Луны является исключительно сложной задачей, поскольку Лу-

на не имеет атмосферы, поэтому для торможения нельзя использовать парашютные системы, как при посадке на Землю. Уменьшение скорости спускаемого аппарата может быть осуществлено только с помощью тормозных двигателей, расходующих топливо.

В процессе торможения спутника необходимо уменьшить его крейсерскую скорость, составляющую 2,64 км/с, до безопасной скорости столкновения 2–3 м/с. Участок конечного торможения станции начинается на расстоянии около 90 км от Луны. Система ориентации и основной двигатель на этом участке работают так, чтобы на высоте h_0 , равной примерно 11 км, направления тяги двигателей точно совместились с лунной вертикалью, а вертикальная скорость приняла значение

$$v_0 = \sqrt{gh_0},$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Луны, $g = 1,62$ м/с. Основной двигатель при этом прекращает работу и отделяется от космического корабля. Начинается процесс мягкой посадки, управление которым мы и рассмотрим.

Систему координат выбираем так, как показано на рис. Л.13. Уравнение движения спускаемого аппарата массой m имеет вид

$$m\ddot{z} = mg - F_T = mg - ma_T, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = v_0.$$

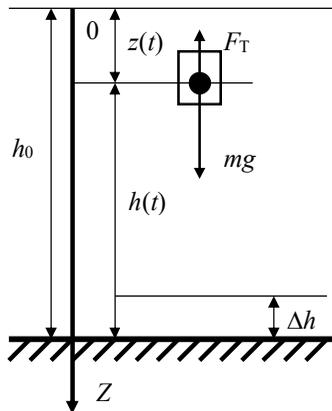


Рис. Л.13. Система координат

где F_T – сила тяги двигателей, пропорциональная расходу топлива, a_T – тяговое ускорение. В конце движения должно выполняться условие $v|_{z=h_0} = 0$.

Сформулированная задача имеет точное решение при неизменном значении массы m : если тяга двигателя будет постоянна и $F_T = mg + \frac{mv_0^2}{2h_0}$, то спустя время $t = \frac{2h_0}{v_0}$, аппарат коснется поверхности с нулевой скоростью, при этом работу двигателя необходимо прекратить. Такой режим равнозамедленного движения технически трудно осуществить, поскольку начальная масса аппарата точно неизвестна, а при работе двигателя она будет меняться из-за расхода топлива. Ввиду этого для обеспечения мягкой посадки применяют систему управления с обратной связью по скорости. Блок-схема системы приведена на рис. Л.14.

Командный блок вырабатывает заданное значение скорости $v_3(t)$ исходя из требования плавного экспоненциального уменьшения этого значения до нуля:

$$v_3(t) = v_0 e^{-\alpha t},$$

где декремент уменьшения выбирается равным обратному характерному времени задачи:

$$\alpha = \sqrt{\frac{g}{h_0}}.$$

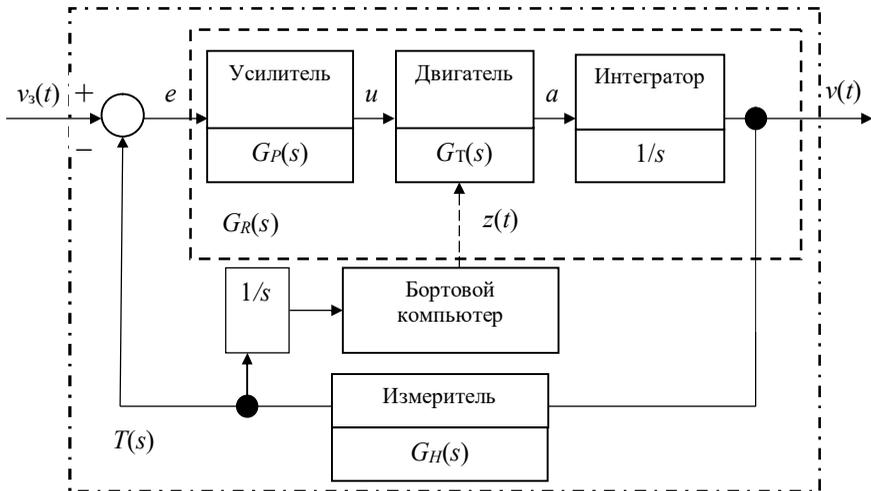


Рис. Л.14. Блок-схема системы автоматического управления мягкой посадкой

Передаточные функции (ПФ) звеньев системы имеют вид:

- ПФ усилителя сигнала ошибки $G_p(s) = \frac{K_p}{T_p s + 1}$;
- ПФ двигателя $G_T(s) = \frac{K}{m}$;

здесь K – коэффициент преобразования сигнала управления u в открытие топливного клапана двигателя;

- ПФ измерителя $G_H(s) = 1$.

Значение высотной координаты $z(t)$ передается в бортовой компьютер (БК) по вспомогательной цепи обратной связи. БК отсекает работу двигателя на высоте $\Delta h = 4 \dots 6$ м над поверхностью Луны.

Для передаточной функции разомкнутой системы получим выражение

$$G_R(s) = \frac{K_p}{T_p s + 1} \cdot \frac{K}{m} \cdot \frac{1}{s}.$$

Полная передаточная функция модели автоматической системы управления мягкой посадкой имеет вид

$$T(s) = \frac{V(s)}{V_3(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_H(s)G_R(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

где коэффициенты характеристического полинома $\{a_2, a_1, a_0\}$ выражаются через аппаратные параметры m, K и настроечные коэффициенты K_p, T_p .

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$g = 1,62 \text{ м/с}^2; h_0 = 10 \text{ км}; K/m = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Найдите зависимость коэффициентов характеристического полинома $\{a_2, a_1, a_0\}$ от параметров системы и настроечных коэффициентов и исследуйте его переход из демпфированного режима в колебательный режим в пространстве величин K_p, T_p . Постройте критическую линию в этом пространстве.

На основании блок-схемы, приведенной на рис. Л.14, постройте Simulink-модель системы управления и получите переходные характеристики системы в демпфированном и колебательном режимах работы. В S-модели учтите наличие силы тяжести, не отраженной на блок-схеме.

Вариант 5

Автоматическое управление затвором плотины

Процесс управления гидроэлектростанцией (ГЭС) (рис. Л.15) заключается во включении-выключении гидрогенератора, в поднятии на заданную высоту затвора холостого сброса воды плотины с помощью гидроподъемника, в контроле работы всего электроэнергетического оборудования – трансформаторов, масляных выключателей, стабилизаторов напряжения. Кроме того, постоянно контролируются такие параметры, как напряжение и количество энергии, вырабатываемой ГЭС; скорость вращения ротора генератора; расход воды, вытекающий из водохранилища; уровень воды верхнего и нижнего бьефов водохранилища.



Рис. Л.15. Камская ГЭС

Из всего перечисленного комплекса вопросов рассмотрим систему автоматического управления затвором плотины, от высоты поднятия h которого (рис. Л.16) зависит объем воды, сбрасываемой с водохранилища, что определяет уровень воды в водохранилище, а также водоснабжение некоторого района. Команда на поднятие или опускание затвора на определенную высоту поступает с пункта управления ГЭС.

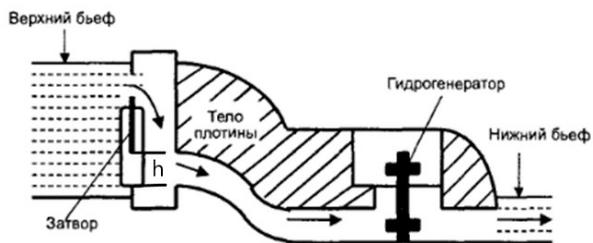


Рис. Л.16. Схематичный разрез плотины гидроэлектростанции

Далее весь процесс протекает в автоматическом режиме в рамках блок-схемы, приведенной на рис. Л.17. Датчиком измерения высоты поднятия затвора относительно дна подъема может являться мостовая схема, в одно из плеч которой включен потенциометр. Ось потенциометра связана с помощью редуктора с механизмом, осуществляющим поднятие затвора. При этом напряжение на выходе мостовой схемы в определенных пределах пропорционально высоте поднятия затвора h . Может использоваться также и любой другой тип высотомера, измеряющий высоту в пределах нескольких десятков метров, например ультразвукового типа.

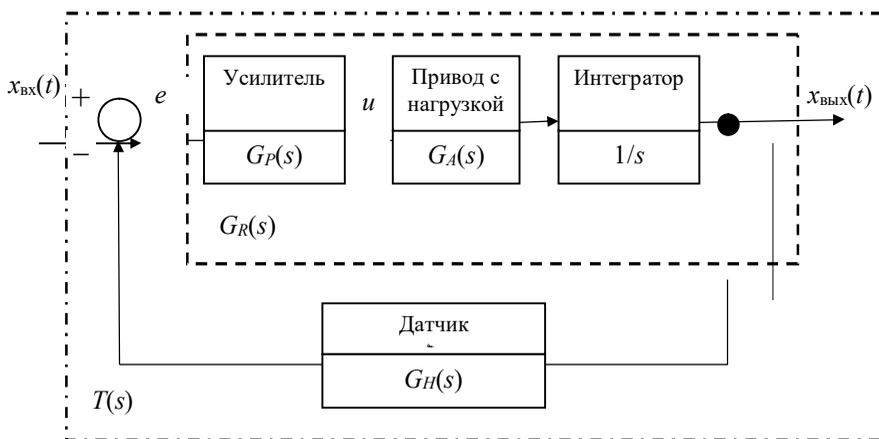


Рис. Л.17. Блок-схема системы автоматического управления

Команда на высоту поднятия затвора преобразуется в сигнал $x_{вх}(t) = U_0$. Сформированный в результате сравнения сигнал ошибки $e(t) = x_{вх}(t) - x_{вых}(t)$, где $x_{вых}(t)$ – сигнал на выходе системы, пропорциональный текущей высоте поднятия затвора $h(t)$, усиливается (пропорциональный регулятор). Сигнал с

усилителя $u(t)$ определяет скорость работы привода, которая после интегрирования преобразуется в перемещение.

Передаточные функции звеньев имеют следующие выражения:

$$G_P(s) = \frac{U_P(s)}{E(s)} = \frac{k_P}{T_P s + 1};$$

$$G_A(s) = \frac{k_A}{T_A s + 1}; \quad G_H(s) = 1.$$

где T_P, T_A – постоянные времени усилителя сигнала ошибки и гидравлического привода; k_P, k_A – коэффициенты усиления тех же звеньев.

Передаточная функция разомкнутой системы:

$$G_R(s) = G_P G_A(s) / s.$$

Полная передаточная функция автоматической системы управления затвором плотины имеет вид

$$T(s) = \frac{x_{ВЫХ}(s)}{x_{ВХ}(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_H(s)G_R(s)} = \frac{b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

где коэффициенты характеристического полинома $\{a_3, a_2, a_1, a_0\}$ выражаются через параметры привода k_A, T_A и настроечные коэффициенты k_P, T_P .

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$k_A = 0,4 \text{ с}^{-1}; T_A = 1 \text{ с}.$$

Найдите зависимость коэффициентов характеристического полинома $\{a_3, a_2, a_1, a_0\}$ от параметров системы и настроечных коэффициентов и исследуйте его на устойчивость с помощью критерия Рауса – Гурвица в пространстве величин k_P, T_P . Укажите область устойчивости в этом пространстве.

На основании блок-схемы, приведенной на рис. Л.17, постройте Simulink-модель системы управления и проверьте результаты определения области устойчивости, получив переходные характеристики системы в устойчивом и неустойчивом режимах работы для $U_0 = 20 \text{ м}$.

Для рассматриваемого объекта управления крайне нежелательным является колебательный режим. Определите с помощью S-модели значение коэффициента усиления k_P , при котором возникают колебания для $T_P = 2 \text{ с}$.

Вариант 6

Система автоматического управления углом тангажа ракеты

Движение ракеты описывается в двух прямоугольных системах координат: начало координат первой системы находится в точке старта ракеты и неподвижно относительно Земли, вторая система координат перемещается вместе с ракетой (собственная система координат – ССК). Центр ССК находится в центре масс ракеты, первая ось направлена вперед (ось крена), вторая ось направлена в сторону правого борта (ось тангажа), третья ось, перпендикулярная первым двум, – ось курса (рис. Л.18).

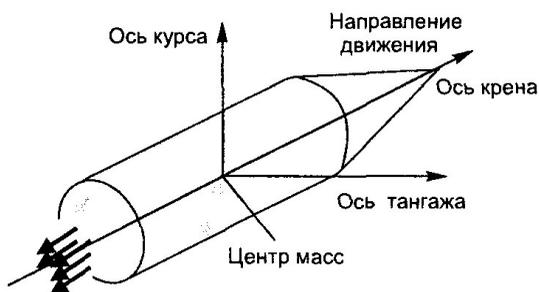


Рис. Л.18. Собственная система координат ракеты

Поступательное движение ракеты задается тяговым двигателем. Для управления углами крена, тангажа и курса существуют специальные рулевые двигатели относительно малой тяги, а также управление может осуществляться путем поворота основного двигателя относительно корпуса ракеты. Измерение отклонения всех трех углов от заданного курса осуществляется с помощью гироскопов. В целом рулевая машина представляет собой следящий привод электрического, пневматического или гидравлического типа с обратной связью, поворачивающей руль до тех пор, пока сигнал ошибки не станет равным нулю.

Рассмотрим систему автоматического управления углом тангажа. Смысл работы этой системы состоит в том, чтобы ее выходной параметр – угол тангажа $\theta(t)$ – отслеживал команды, сформированные в центральном компьютере ракеты или поступающие от гироскопа, и до минимума снижал бы собственные колебания корпуса ракеты, вызванные работой мощных двигателей и машинных рулей, перемещением жидкого топлива в баках, неравномерным расходом топлива, порывами ветра и любыми другими причинами. Иными словами, система должна выполнять две основные функции: выполнение командных зада-

ний (функция слежения) и устранение отклонений, вызванных случайными воздействиями (функция стабилизации).

Разберем простейшую задачу слежения: отработка системой управления команды в виде единичной ступеньки. Блок-схема системы управления углом тангажа ракеты для этого случая приведена на рис. Л.19. В состав системы входит сам объект управления – динамическое звено, связывающее угол тангажа ракеты с углом поворота рулевой машины; гироскоп, имеющийся в цепи обратной связи; кроме того, в систему входят пропорциональный усилитель и фильтр.

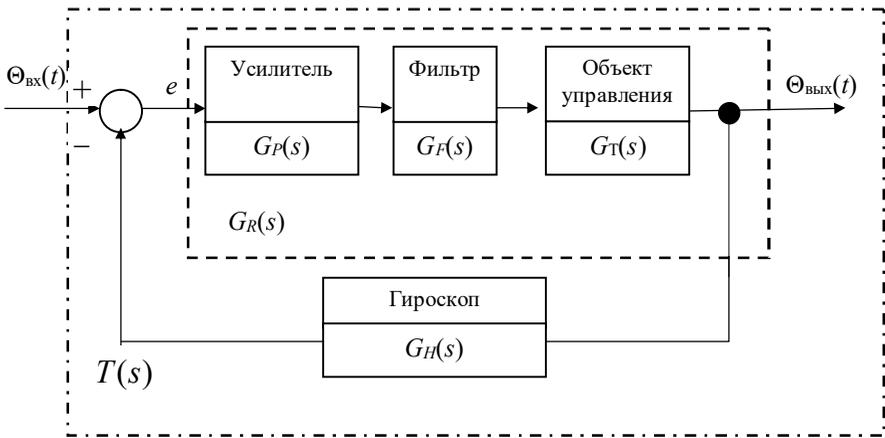


Рис. Л.19. Блок-схема системы автоматического управления углом тангажа ракеты

Приведем выражения для передаточных функций (ПФ) звеньев системы:

$G_p(s) = K_p$ – ПФ усилителя сигнала ошибки;

$G_f(s) = \frac{1}{T_f s + 1}$ – ПФ фильтра;

$G_H(s) = K_H$ – ПФ гироскопа;

$G_t(s) = \frac{k_T(T_1 s + 1)}{s T_1 (T_2^2 s^2 + 2\gamma T_2 s + 1)}$ – ПФ динамического звена, связывающего

угол тангажа ракеты с углом поворота рулевой машины.

Здесь T_1, T_2 – постоянные времени, зависящие от конструкции, скорости и высоты полета ракеты; γ – параметр, определяющий затухание колебательно-го процесса. Для некоторых типов ракет T_1, T_2 имеет значения порядка секунды, $\gamma = 0,1 \dots 0,5$.

Введем также обозначение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$G_R(s) = G_P G_F G_T(s).$$

Полная передаточная функция модели автоматической системы управления углом тангажа ракеты имеет вид

$$T(s) = \frac{\Theta_{\text{ВЫХ}}(s)}{\Theta_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_H(s)G_R(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

где коэффициенты характеристического полинома $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}$ выражаются через параметры системы $k_T, T_1, T_2, \gamma, K_H$ и настроечные коэффициенты K_P, T_F .

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$k_T = 0,2; T_1 = 4 \text{ с}; T_2 = 1 \text{ с}; \gamma = 0,5.$$

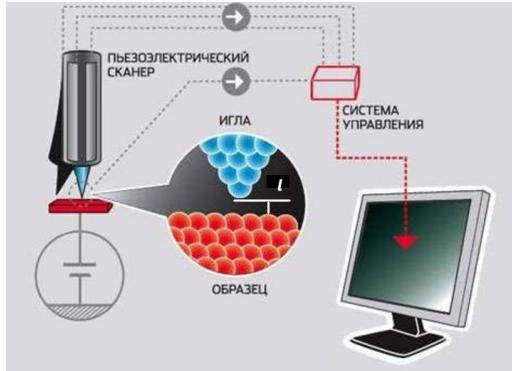
Найдите зависимость коэффициентов характеристического полинома $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}$ от параметров системы и настроечных коэффициентов и исследуйте его на устойчивость с помощью критерия Рауса – Гурвица в пространстве величин K_P, T_F . Укажите область устойчивости в этом пространстве.

На основании блок-схемы, приведенной на рис. Л.19, постройте Simulink-модель системы управления и проверьте результаты определения области устойчивости, получив переходные характеристики системы в устойчивом и неустойчивом режимах работы при единичном ступенчатом входном сигнале. Для $T_F = 1 \text{ с}$ подберите значение коэффициента усиления K_P , исключающего возникновение колебательного процесса в системе.

Вариант 7

Система стабилизации туннельного тока в СТМ

Сканирующий туннельный микроскоп (СТМ) предназначен для измерения рельефа проводящих поверхностей с высоким пространственным разрешением.



В современном виде (рис. Л.20) СТМ изобретен в 1981 г. Гердом Карлом Биннигом и Генрихом Рорером из лаборатории ИВМ в Цюрихе. В 1986 г. Бинниг и Рорер за это изобретение были удостоены Нобелевской премии.

В СТМ острый металлический зонд подводится к образцу на расстояние нескольких ангстрем (\AA). Зонд представляет собой тончайшую вольфрамовую иглу, заточенную так, что на ее конце находится один-единственный атом. При подаче на иглу относительно образца небольшого потенциала возникает туннельный ток. Величина этого тока I экспоненциально зависит от расстояния l между поверхностью образца и концом иглы:

$$I \sim \exp(-k\sqrt{A_0} \cdot l),$$

где для электронов коэффициент $k = 1.025 \text{ эВ}^{-1/2} \text{\AA}^{-1}$, а A_0 – средняя работа выхода двух веществ, находящихся в контакте. Типичные значения силы тока – 1–1000 пА при расстоянии образец–игла около 1\AA . Поскольку величина A_0 составляет несколько электронвольт, экспоненциальная зависимость тока от расстояния позволяет различать изменение расстояний на величину порядка размеров атомов. Так, с помощью вольфрамового зонда легко сканируется поверх-

ность золотой фольги и на растровом изображении видно расположение атомов на поверхности кристаллической решетки.

В процессе сканирования игла движется вдоль поверхности образца по координатным осям X и Y , ось иглы направлена по координате Z . Первая методика предполагает движение иглы на фиксированной высоте над поверхностью образца. В этом случае измеряется изменение величины туннельного тока и на основе данной информации идет построение топографии поверхности. Во второй методике туннельный ток поддерживается стабильным за счет действия обратной связи и показания следящей системы меняются в зависимости от топографии поверхности. Такие изменения фиксируются, и на их основе строится карта высот. Рассмотрим второй метод.

Работа микроскопа в режиме стабилизации тока схематически изображена на рис. Л.21 (схема содержится в нобелевской лекции Биннига и Рорера, опубликованной в журнале «Успехи физических наук» (УФН), 1988, т. 154, вып. 2, с. 261–278).

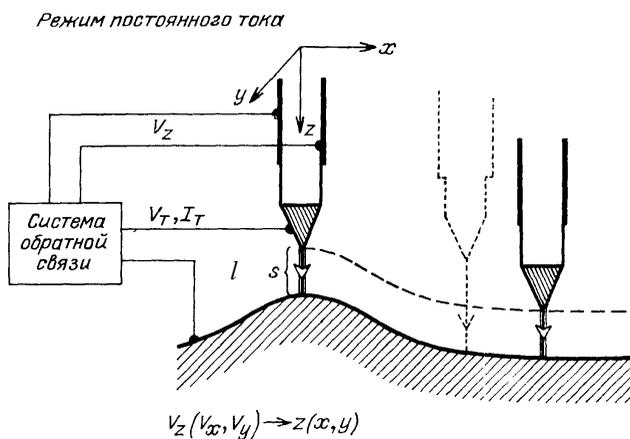


Рис. Л.21. Схема работы СТМ в режиме постоянного тока

Острие иглы перемещается по оси Z с помощью пьезоэлектрического привода (актуатора). При движении зонда вдоль поверхности стабилизация туннельного тока осуществляется за счет изменения вертикального положения острия в зависимости от напряжения обратной связи V_z . Таким образом, измерение величины V_z позволяет определить форму рельефа поверхности сканируемого образца. Изменение формы сканируемой поверхности вызывает изменение туннельного тока, что воспринимается системой как внешнее воздействие, регулятор при этом должен стабилизировать выходной ток.

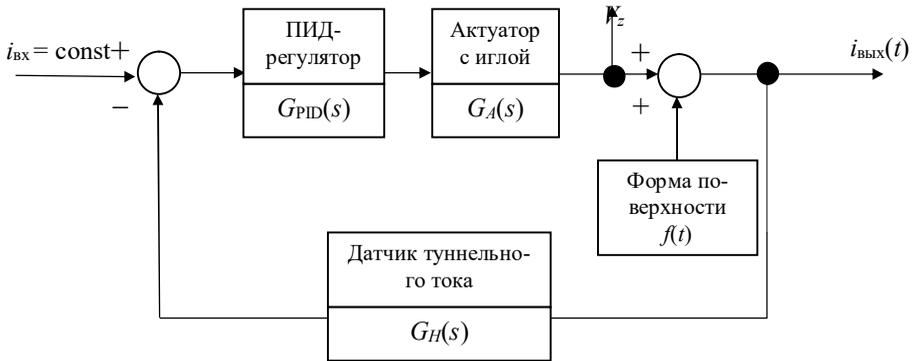


Рис. Л.22. Блок-схема системы стабилизации туннельного тока

Блок-схема системы стабилизации представлена на рис. Л.22. Сигнал на выходе актуатора пропорционален вертикальному перемещению иглы, т.е. напряжению, подаваемому на пьезоэлемент привода. Изменение высоты сканируемой поверхности моделируется функцией времени $f(t)$.

Передаточная функция ПИД-регулятора выражается стандартным образом (см. лабораторную работу № 3):

$$G_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Передаточная функция зонда (актуатора с иглой) имеет вид

$$G_A(s) = \frac{k_E}{T_E s + 1} \cdot \frac{k_M}{T_M s + 1} \cdot \frac{1}{s};$$

где T_E , T_M – постоянные времени электрической и механической частей привода; k_E , k_M – масштабировующие коэффициенты.

Передаточную функцию датчика будем считать равной единице: $G_H(s) = 1$.

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$k_E = 2; k_M = 5; T_E = 5 \text{ мс}; T_M = 20 \text{ мс}; i_{\text{вх}} = 100 \text{ нА}; f = 0.$$

На основании блок-схемы, приведенной на рис. Л.22, постройте Simulink-модель системы управления. В S-модели рекомендуется использовать схему ПИД-регулятора, приведенную на рис. 1.5.

Настройте ПИД-регулятор по методике Зиглера – Никольса, затем оптимизируйте значения коэффициентов с использованием блока настройки параметров Simulink (см. лабораторную работу № 4).

Проверьте работу системы управления при ступенчатом изменении функции f в момент времени $t = 200$ мс на 20 % от величины стабилизируемого тока.

Исследуйте систему на устойчивость с помощью критерия Рауса – Гурвица в пространстве величин K_p , K_D при $K_I = 0$. Укажите область устойчивости в этом пространстве.

Вариант 8

Автоматическое позиционирование наконечника сварочного робота

Современное производство, связанное с наличием электродуговой сварки металлоизделий (изготовление стальных строительных конструкций, судостроение, автомобилестроение), трудно представить без использования сварочных автоматов и роботов (рис. Л.23). Наконечник сварочного узла подводится, например, к различным местам кузова автомобиля и совершает необходимые действия. Таким образом, одна из основных задач заключается в быстром и точном позиционировании сварочного наконечника.



Рис. Л.23. Сварочный робот

Система позиционирования наконечника представляет собой систему управления с обратной связью, блок-схема которой приведена на рис. Л.24. В состав системы входит сам объект управления – динамическое звено, отражающее реакцию привода на изменение положения наконечника. Эта реакция

носит инерционный характер и описывается уравнением третьего порядка. Измерение положения осуществляется датчиком, имеющимся в цепи обратной связи. Кроме того, в систему входят пропорционально-дифференциальный (ПД) регулятор и фильтр.

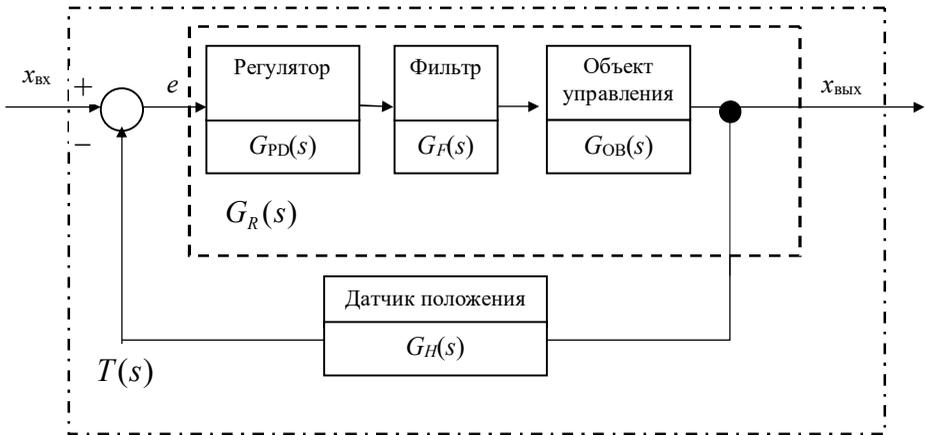


Рис. Л.24. Блок-схема системы автоматического управления позиционированием наконечника сварочного робота

Передаточная функция ПД-регулятора может быть выражена следующим образом (см. лабораторную работу № 3):

$$G_{PD}(s) = K_P(1 + T_D s).$$

Передаточная функция динамического звена имеет вид

$$G_{OB}(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{k_2}{T_2 s + 1} \cdot \frac{1}{s},$$

где T_1, T_2 – постоянные времени привода; k_1, k_2 – масштабирующие коэффициенты.

Передаточная функция фильтра:

$$G_F(s) = \frac{1}{T_F s + 1}.$$

Передаточную функцию датчика будем считать равной единице: $G_H(s) = 1$.

Введем также обозначение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$G_R(s) = G_{PD}G_FG_{ОВ}(s).$$

Полная передаточная функция модели автоматической системы управления позиционированием наконечника имеет вид

$$T(s) = \frac{X_{ВЫХ}(s)}{X_{ВХ}(s)} = \frac{G_R(s)}{1 + G_H(s)G_R(s)} = \frac{b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0},$$

где коэффициенты характеристического полинома $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}$ выражаются через параметры системы k_1, k_2, T_1, T_2, T_F и коэффициенты регулятора K_P, T_D .

Указания для выполнения задания:

Моделирование проведите при следующих значениях параметров:

$$k_1 = 0,5; k_2 = 0,2; T_1 = 0,5 \text{ с}; T_2 = 0,2 \text{ с}; T_F = 1 \text{ с}.$$

Найдите зависимость коэффициентов характеристического полинома $\{a_4, a_3, a_2, a_1, a_0\}$ от параметров системы и коэффициентов регулятора и исследуйте его на устойчивость с помощью критерия Рауса – Гурвица в пространстве величин K_P, T_D . Укажите область устойчивости в этом пространстве.

На основании блок-схемы, приведенной на рис. Л.24, постройте Simulink-модель системы управления и проверьте результаты определения области устойчивости, получив переходные характеристики системы в устойчивом и неустойчивом режимах работы при единичном ступенчатом входном сигнале.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ощепков А. Ю.* Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB: учебное пособие. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2018. – 208 с. (2-е изд. – 2013 г.)

2. *Каганов В. И.* Радиоэлектронные системы автоматического управления. Компьютеризированный курс: учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2009. – 432 с.

3. *Деменков Н. П.* Модельно-ориентированное проектирование систем управления // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2008. – № 11. – С. 66–69.

4. *Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М.* MATLAB 6.x: программирование численных методов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 672 с.

5. *Дэбни Дж., Харман Т.* Simulink 4. Секреты мастерства. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. – 403 с.

6. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. – М.: ЛБЗ, 2002. – 800 с.

Учебное издание

Ощепков Александр Юрьевич
Жужгов Максим Викторович

**Проектирование цифровых систем управления.
Моделирование систем управления
физико-техническими объектами**

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. Б. Денисова*
Корректор *Д. Е. Булатова*
Компьютерная верстка: *А. Ю. Ощепков*

Подписано в печать 17.02.2023. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 7,9. Тираж 300 экз. Заказ 27

Управление издательской деятельности
Пермского государственного
национального исследовательского университета
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15