S⓪MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 2055–2079 (2019) УДК 517.929

DOI 10.33048/semi.2019.16.146 MSC 34K06, 34K20

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ. ЧАСТЬ II

М.В. МУЛЮКОВ

Abstract. The system of two linear autonomous differential equations with a limited delay and a term without delay is considered. Complete classification of all three-parameter systems is obtained. For every such system the stability criterion in analytic and geometric form is obtained.

Keywords: system of differential equations with delay, autonomous equations, asymptotic stability, stability domain, D-subdivision method.

1. Объект исследования

Настоящая статья является второй часть работы, посвященной исследованию трехпараметрических систем вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) + Bx(t-h) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ x(t) = \psi(t), \quad t \in [-h, 0), \end{cases} \tag{1}$$

в следующих обозначениях и предположениях: A, B — вещественные 2×2-матрицы, $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, $h > 0$, начальная вектор-функция ψ суммируема на $[-h, 0]$, вектор-функция f локально суммируема.

Напомним, что система (1) называется трехпараметрической, если среди коэффициентов ее характеристического уравнения

$$\chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0$$

ровно три отличны от нуля и принимают произвольные вещественное значения.

Mulyukov, M.V., Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part II.

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект 18-01-00928).

Поступила 12 июля 2019 г., опубликована 26 декабря 2019 г.

Приведем характеристические уравнения всех трехпараметрических систем:

$$\zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0, \tag{31}$$

$$\chi \operatorname{ch} z + \beta + \mu z e^z + z^2 e^z = 0, \tag{32}$$

$$\chi \operatorname{ch} z + \beta + \nu z + z^2 e^z = 0, \tag{33}$$

$$\beta + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0, \tag{34}$$

$$\chi \operatorname{ch} z + \beta + \zeta \operatorname{sh} z + z^2 e^z = 0, \tag{35}$$

$$\chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \nu z + z^2 e^z = 0, \tag{36}$$

$$\beta + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0, \tag{37}$$

$$\chi \operatorname{ch} z + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0, \tag{38}$$

$$\beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0, \tag{39}$$

$$\chi \operatorname{ch} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0. \tag{40}$$

Уравнения (31)–(38) рассмотрены в [4]. Прежде, чем перейти к исследованию оставшихся двух уравнений, приведем некоторые сведения о двупараметрических характеристических уравнениях вида

$$f_0(z) + p_1 f_1(z) + p_2 f_2(z) = 0, \tag{11}$$

где $\mathbf{p} = \{p_1, p_2\} \in \mathbb{R}^2$.

2. Наборы D-разбиения

Доказательства приведенных в данном параграфе утверждений можно найти в работе [5] (за исключением леммы 1, доказательство которой приведено ниже).

Напомним, что любая точка D-разбиения принадлежит единственной линии D-разбиения, которые делятся на два класса: прямые и кривые D-разбиения. В свою очередь, двупараметрические характеристические уравнения делятся на четыре рода, отличающиеся свойствами областей и линий D-разбиения. Подробное описание каждого типа можно найти в [4].

В общем случае область устойчивости двупараметрического характеристического уравнения может быть неограниченной и состоять из любого числа компонентов связности (в том числе, и бесконечного). Кроме того, взаимное расположение кривых D-разбиения может быть сложным, а при движении вдоль выделенного направления в пространстве параметров абсолютный индекс областей может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Далее будем полагать, что $\mathbf{u}(\varphi) \not\equiv 0$, то есть характеристическое уравнение четвертого рода исключено из рассмотрения.

Определение 1. Будем называть набором D-разбиения произвольное множество линий D-разбиения, каждой из которых поставлено в соответствие натуральное число, называемое *весом этой линии в наборе.*

Будем говорить, что наборы ω_1 и ω_2 равны, если они содержат одни и те же линии D-разбиения и вес каждой линии в ω_1 равен весу этой линии в ω_2.

Для краткости вместо термина *набор D-разбиения* будем использовать термин *набор*. Кроме того, удобно оперировать не самими линиями D-разбиения, а их проекциями, поэтому слова «кривая C_n (прямая L_n) принадлежит набору ω и имеет вес v в этом наборе» следует понимать следующим образом: «кривая D-разбиения (прямая D-разбиения), проекция которой — это кривая C_n (прямая L_n), принадлежит набору ω и имеет вес v в этом наборе».

Определение 2.

- *Точкой набора* назовем точку D-разбиения, принадлежащую какой-либо линии данного набора.
- *Областью набора* назовем линейно связное открытое множество $V \in \mathbb{R}^2$ такое, что:
  - V не содержит проекции ни одной точки D-разбиения данного набора,
  - любое линейно связное открытое множество, собственным подмножеством которого является V, содержит проекцию хотя бы одной точки D-разбиения данного набора.
- Назовем набор *регулярным*, если он не содержит нерегулярные прямые D-разбиения.
- Точку в $\mathbb{R}^2$ будем называть *особой точкой набора*, если она является проекцией хотя бы одной нерегулярной точки набора; в противном случае точку $\mathbb{R}^2$ будем называть *неособой точкой набора*.
- Назовем ломаную $Q \subset \mathbb{R}^2$ *регулярной ломаной относительно набора*, если она не проходит через особую точку набора, и ни одно звено ломаной не принадлежит ни проекции прямой D-разбиения данного набора, ни главной прямой.

Пусть Q — регулярная ломаная относительно набора ω. Параметризуем эту ломаную взаимно-однозначной непрерывной функцией $\mathbf{k}\colon [0,1] \to Q$.

Обозначим через $\big\{\mathbf{k}(t_n), \varphi_n\big\}$ ($n = \overline{1, M}$, $t_n \in [0,1]$) множество точек D-разбиения набора, проекции которых принадлежат Q. Если $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n \pm 0)\big) = 0$, то Q содержит отрезок, принадлежащий проекции прямой D-разбиения или главной прямой, следовательно, $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n \pm 0)\big) \neq 0$.

Определение 3. Пусть ω — регулярный набор, а Q — ломаная, регулярная относительно набора ω. Будем называть *индексом ломаной Q относительно набора ω* число

$$\rho_\omega(Q) = \sum_{n=1}^{M} v_n s_n,$$

где v_n — вес в наборе ω той линии набора, которой принадлежит точка набора $\big(\mathbf{k}(t_n), \varphi_n\big)$, а s_n вычислено по следующему правилу:

- если $t_n \in (0,1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n - 0)\big) < 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n + 0)\big) > 0$, то $s_n = +1$;
- если $t_n \in (0,1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n - 0)\big) > 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n + 0)\big) < 0$, то $s_n = -1$;
- если $t_n \in (0,1)$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n - 0)\big) \operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n + 0)\big) > 0$, то $s_n = 0$;
- если $t_n = 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n + 0)\big) > 0$, то $s_n = 0$;
- если $t_n = 0$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n + 0)\big) < 0$, то $s_n = -1$;
- если $t_n = 1$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n - 0)\big) < 0$, то $s_n = +1$;
- если $t_n = 1$ и $\operatorname{Re} Z_{\varphi_n}\big(\mathbf{k}(t_n - 0)\big) > 0$, то $s_n = 0$.

Определение 4. Будем называть регулярный набор *индексируемым*, если относительно этого набора индекс любой простой регулярной замкнутой ломаной равен нулю.

Определение 5. Пусть $\mathbf{a}$ — неособая точка индексируемого набора ω; присвоим ей некоторое целое число $\rho_\omega(\mathbf{a})$. Тогда любой другой неособой точке $\mathbf{b}$ присвоим число $\rho_\omega(\mathbf{b})$ по формуле $\rho_\omega(\mathbf{b}) = \rho_\omega(\mathbf{a}) + \rho_\omega(Q)$, где Q — некоторая регулярная относительно набора ломаная с началом в $\mathbf{a}$ и концом в $\mathbf{b}$. Числа $\rho_\omega(\mathbf{a})$ и $\rho_\omega(\mathbf{b})$ будем называть *индексом точек* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *относительно* ω.

Таким образом, в индексируемом наборе существует бесконечно много способов присвоить относительные индексы областям, однако для всех точек набора разность индексов в двух различных индексациях одинакова.

Определение 6. Объединением наборов ω_1 и ω_2 назовем набор ω_0, состоящий из линий, входящих хотя бы в один из наборов. Вес линии в наборе ω_0 равен сумме ее весов в наборах ω_1 и ω_2.

Определение 7. Будем называть набор *полным*, если выполняются следующие пункты:

- набор содержит все линии D-разбиения;
- прямая, соответствующая нулевой частоте, имеет вес в данном наборе, равный одному;
- вес любой линии набора, кроме прямой, соответствующей нулевой частоте, равен двум.

Отметим, что в полном наборе прямая, соответствующая нулевой частоте, может и не существовать (что эквивалентно условию $f_1(0) = f_2(0) = 0$). Кроме того, полный набор всегда существует и единственен.

Напомним, что через $\rho(\mathbf{r})$ обозначен абсолютный индекс точки $\mathbf{r}$, то есть количество корней характеристического уравнения $F(;\mathbf{r}) = 0$ с неотрицательной вещественной частью.

Теорема 1. *Пусть полный набор ω может быть представлен в виде объединения не более чем счетного множества индексируемых наборов $\{\omega_n\}$ и существуют неособая точка* $\mathbf{a}$ *набора ω и номер m такие, что для любого $n > m$ имеем $\rho_{\omega_n}(\mathbf{a}) = 0$. Тогда полный набор индексируем и существует целое число N такое, что для любой неособой точки* $\mathbf{b}$ *имеем:*

1) $\rho_\omega(\mathbf{b}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{b})$;

2) $\rho(\mathbf{b}) = N + \rho_\omega(\mathbf{b})$.

Определение 8. Индексируемый набор ω назовем *элементарным*, если он не может быть представлен в виде объединения двух различных непустых индексируемых наборов.

Перечислим основные типы элементарных наборов.

Определение 9. Набор, состоящий из нестационарной прямой без центральной точки, будем называть *I-набором.*

Определение 10. Набор, состоящий из кривой без концевых точек с весом 2, будем называть *S-набором.*

Определение 11. Будем называть *T-набором* набор, состоящий из кривой C_n с весом 2 и нестационарной прямой L_m с весом 1 таких, что кривая имеет ровно одну концевую точку, совпадающую с центральной точкой прямой (то есть либо $\theta_m = \xi_n$, либо $\theta_m = \xi_{n+1}$).

Определение 12. Набор, состоящий из кривой C_n с весом 2 и прямых L_m, L_{m+1} с весом 1 таких, что обе концевые точки кривой существуют и совпадают с центральными точками прямых, будем называть *H-набором.*

Теорема 2. *I-набор, T-набор, S-набор и H-набор элементарны.*

Теорема 3. *Пусть $\Delta(\varphi) \not\equiv 0$ и у функций $\Delta, \Delta', u_1, u_1', u_2, u_2'$ нет общего корня. Тогда полный набор может быть представлен как объединение не более чем счетного множества S-, T- и H-наборов.*

Лемма 1. *Рассмотрим S-набор, состоящий из кривой C_n такой, что выполняются следующие условия:*

- *функция S_2 имеет единственный экстремум на интервале (ξ_n, ξ_{n+1});*
- $\lim_{\varphi\to\xi_n+0} S_1^{-1}(\varphi) = \lim_{\varphi\to\xi_{n+1}-0} S_1^{-1}(\varphi) = 0$*;*
- $\lim_{\varphi\to\xi_n+0} S_1(\varphi) \lim_{\varphi\to\xi_{n+1}-0} S_1(\varphi) < 0$.

Тогда из данной кривой можно сформировать S-набор такой, что выполняются следующие условия:

a*) существует ровно две неограниченные области набора,*
b*) множество ограниченных областей набора конечно,*
c*) существует способ индексации набора, при котором относительный индекс любой области равен -2, 0 или 2.*

Доказательство. Если кривая C_n простая, то, очевидно, существуют ровно две области набора. Эти области неограниченны. Если присвоить одной из них нулевой относительный индекс, то относительный индекс другой области равен 2 или -2.

Пусть C_n имеет точки самопересечения. Докажем, что в этом случае существует конечное число областей набора, которым можно присвоить в качестве относительного индекса число из следующего набора: -2, 0, 2.

Обозначим через φ^* точку экстремума функции S_2 на интервале (ξ_n, ξ_{n+1}). Без потери общности будем полагать, что это точка максимума. Обозначим $a = S_2(\varphi^*)$. Существуют $\varphi_1 < \varphi_2$ из интервала (ξ_n, ξ_{n+1}) такие, что $\mathbf{S}(\varphi_1) = \mathbf{S}(\varphi_2)$, $S_1(\varphi) < S_1(\varphi_1)$ при $\varphi < \varphi_1$ и $S_1(\varphi) > S_1(\varphi_2)$ при $\varphi > \varphi_2$. Иными словами, выше точки $\mathbf{S}(\varphi_1)$ нет точек самопересечения кривой C_n. Обозначим $b = S_2(\varphi_1)$.

Функция S_2 осуществляет взаимно однозначное отображение интервалов (φ_1, φ^*), (φ^*, φ_2) на интервал (a, b). Поэтому можно обратить функцию на каждом из этих интервалов: S_2^{-1} отображает (a, b) на (φ_1, φ^*), а $\hat{S}_2^{-1}$ отображает (a, b) на (φ^*, φ_2). Коль скоро функция S_2 аналитична за исключением точки φ^*, то и функции S_2^{-1}, $\hat{S}_2^{-1}$ аналитичны на (a, b). Тогда $S_1(S_2^{-1})$ и $S_1(\hat{S}_2^{-1})$ являются аналитическими на (a, b) функциями.

Точки самопересечения кривой C_n определяются из решения уравнения $S_1\big(S_2^{-1}(r_2)\big) = S_1\big(\hat{S}_2^{-1}(r_2)\big)$. На конечном отрезке $[a, b]$ множество корней этого уравнения конечно. Обозначим их через $\{d_n\}$ $(n = \overline{1, m})$ так, что $a = d_0 < d_1 < \dots < d_m = b$.

Следовательно, при каждом $n = \overline{1, m}$ в полосе $r_2 \in [d_{n-1}, d_n]$ существует единственная ограниченная область набора (петля кривой C_n). Обозначим эту область через D_n. Таких областей конечное число. Кроме них существуют две неограниченные области: область D_0, граница которой совпадает с кривой C_n, и область D_{m+1}, граница которой состоит из двух участков этой кривой: $C_n^{(\xi_n, \varphi_1)} \cup C_n^{(\varphi_2, \xi_{n+1})}$.

Пусть относительный индекс области D_0 равен нулю. Любая другая область набора имеет с D_0 общую границу — участок кривой C_n без самопересечений, потому относительный индекс этих областей равен либо 2, либо -2. $\square$

На рис. 1 изображена кривая, удовлетворяющая требованиям данной леммы, где $m = 3$. Области D_0 и D_4 неограниченны, области D_1, D_2 и D_3 ограничены. Стрелочками обозначено направления положительного обхода кривой. Если данная кривая — положительна, то относительный индекс области D_0 равен нулю, областей D_1 и D_3 равен двум, а областей D_2 и D_4 — минус двум.

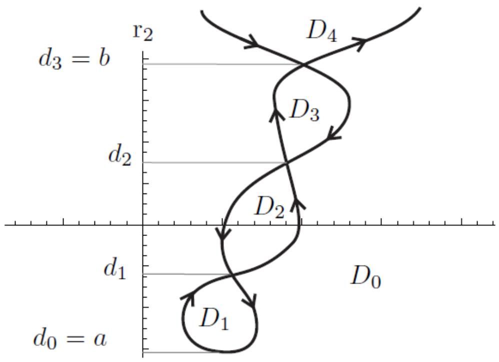

Рис. 1. Относительные индесы S-набора

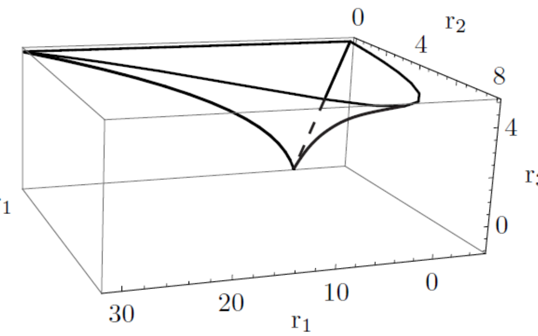

Рис. 2. Область $\mathcal{D}_9$ (выше)

3. Устойчивость трехпараметрических систем

3.1. **Уравнение** (39)**:** $\beta + \zeta \operatorname{sh} z + \mu z e^z + z^2 e^z = 0$**.** Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ область $\mathcal{D}_9$, состоящую из точек $\mathbf{r}$, удовлетворяющих условиям: $r_3 > -1$, $r_1 \in (-r_3, \psi^2 - r_3 \psi \operatorname{ctg} \psi)$, где ψ — единственный корень уравнения $r_3 = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(0, \pi)$, и $r_2 \in (0, \eta^2 \cos \eta + r_3 \eta \sin \eta)$, где η — единственный корень уравнения $r_1 = \varphi^2 - \varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(0, \psi)$. Эта область изображена на рис. 2.

Теорема 4. *Для того чтобы все корни уравнения* (39) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка* $\{\beta, \zeta, \mu\}$ *принадлежала области* $\mathcal{D}_9$.

Лемма 2. *Функция*
$$f(\varphi) = \varphi^2 \frac{\varphi + \sin\varphi \cos\varphi}{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}$$
отображает отрезок $\bigl[\pi k, \pi(k+1)\bigr]$ *в* $\bigl[\pi^2 k^2, \pi^2(k+1)^2\bigr]$ *при любом* $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Проведем замену $\psi = 2\varphi$ и будем рассматривать функцию
$$g(\psi) = 4f(\varphi) = \psi(\psi + \sin\psi)/(\psi - \sin\psi).$$
Итак, требуется показать, что g отображает отрезок $\bigl[2\pi k, 2\pi(k+1)\bigr]$ на $\bigl[4\pi^2 k, 4\pi^2(k+1)^2\bigr]$ при любом $k \in \mathbb{N}_0$. Имеем
$$g'(\psi)(\psi - \sin\psi)^2 = \psi\bigl(\psi^2(1+\cos\psi) - \sin\psi(\psi + \sin\psi)\bigr),$$
поэтому на интервале $\bigl(\pi(2k+1), 2\pi(k+1)\bigr)$ функция g монотонна, следовательно, g взаимно-однозначно отображает данный интервал в себя.

Докажем, что при $\psi \in \bigl[2\pi k, \pi(2k+1)\bigr]$ имеем $4\pi^2 k^2 \le g(\psi) \le 4\pi^2(k+1)^2$. Данные неравенства эквивалентны следующим:
$$(\psi^2 - 4\pi^2 k^2)\psi \ge -\sin\psi(\psi^2 + 4\pi^2 k^2), \tag{60}$$
$$\frac{2\sin\psi}{\psi - \sin\psi} \le \frac{4\pi^2(n+1)^2}{\psi^2} - 1. \tag{61}$$

Неравенство (60) выполняется в силу $\sin\psi > 0$.

Усилим неравенство (61): $2/(2\pi k-1) < (4k+3)/(2k+1)^2$ и перепишем его виде $8k^2(\pi-1)+6(\pi-2)k-5>0$, которое выполняется при любом натуральном k в силу того, что модули корней данного квадратного трехчлена меньше единицы.

Итак, остается показать, что $g(\psi) \le 4\pi^2$, если $\psi \in (0,\pi]$. Усилим доказываемое неравенство: $2\psi^3/(\psi-\sin\psi) < 4\pi^2$, и перепишем в виде: $\psi^2/(2\pi^2) < 1-\sin\psi/\psi$. Вновь усилим полученное неравенство: $\psi^2/(2\pi^2) < 1-\cos(\psi/2)$, и запишем в виде: $\psi^2/(2\pi)^2 < \sin^2(\psi/4)$. Таким образом, приходим к неравенству $\psi < 2\pi\sin(\psi/4)$, которое очевидно выполняется при $\psi \in (0,\pi]$. □

Доказательство теоремы 4. Уравнение (39) будем рассматривать как семейство двупараметрических уравнений (11) первого рода, где $p_1=\zeta$, $p_2=\beta$, а μ — параметр семейства.

Случай $\mu=0$ был рассмотрен в работы [5], поэтому далее будем полагать $\mu\ne 0$.

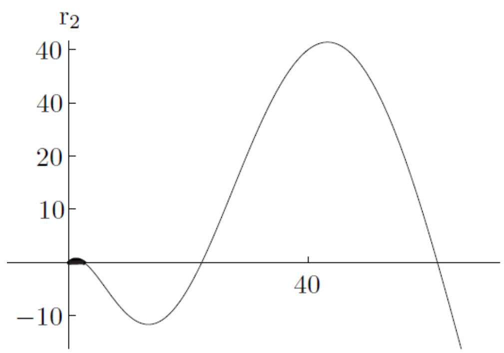

Рис. 3. Области D-разбиения при $\mu=0$

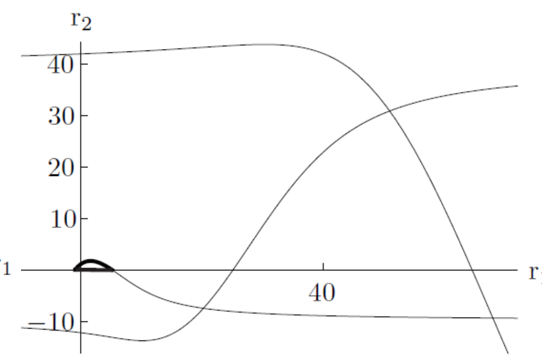

Рис. 4. Области D-разбиения при $\mu=1$

Имеем $\Delta(\varphi) = -\sin\varphi$,

$$\mathbf{u}(\varphi) = \bigl\{-\varphi^2\sin\varphi+\mu\varphi\cos\varphi, -\varphi\sin\varphi(\varphi\cos\varphi+\mu\sin\varphi)\bigr\},$$

следовательно, $\theta_0=0$, $\xi_n=\pi n$, где $n\in\mathbb{N}_0$, то есть имеется единственная прямая L_0 и счетное множество кривых C_n, которые задаются отображением

$$\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2-\mu\varphi\operatorname{ctg}\varphi, \varphi^2\cos\varphi+\mu\varphi\sin\varphi\}.$$

Прямая L_0 нестационарна, а ее центральная точка совпадает с концевой точкой кривой C_0 и имеет координаты $\mathbf{u}'(0)/\Delta'(0) = \{-\mu, 0\}$.

Обозначим через a_n единственный корень уравнения $\mu = -\varphi\operatorname{ctg}\varphi$ из интервала $\bigl(\pi n, \pi(n+1)\bigr)$, а через b_n — единственный корень уравнения $\mu=\varphi\operatorname{tg}\varphi$ из того же интервала. Заметим, что при $n\ge 1$ корни a_n и b_n существует при любых μ. Корень a_0 существует в том и только том случае, если $\mu>-1$, а корень b_0 — в том и только том случае, если $\mu>0$.

Очевидно, $\mathbf{S}(a_n)$ и $\mathbf{S}(b_n)$ — единственные точки пересечения кривой C_n с координатными осями r_1 и r_2 соответственно. Заметим, что если $n>m$, то $S_1(a_n) > S_1(a_m) > 0$ и $\bigl|S_2(b_n)\bigr| > \bigl|S_2(b_m)\bigr|$.

Рассмотрим функцию S_2. Уравнение $S_2'(\varphi)=0$ можно переписать в виде

$$\mu = \frac{\varphi^2\sin\varphi - 2\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi},$$

где функция, стоящая справа, монотонно возрастает в точках своей непрерывности. При $n \geq 1$ в точках $\varphi = \pi n$ данная функция принимает значение, равное -2, а в точке $\varphi = 0$ — значение -1. Следовательно, при $\mu \neq -2$ уравнение $S_2'(\varphi) = 0$ имеет единственное решение c_n на интервале $\big(\pi n, \pi(n+1)\big)$ при $n \geq 1$. На интервале $(0, \pi)$ уравнение $S_2'(\varphi) = 0$ имеет единственное решение c_0 если и только если $\mu > -1$. Если $\mu = -2$, то уравнение $S_2'(\varphi) = 0$ не имеет решений на интервале $\big(\pi n, \pi(n+1)\big)$ при $n \geq 1$. При $\mu \leq -1$ уравнение $S_2'(\varphi) = 0$ не имеет решений на интервале $(0, \pi)$.

Далее,

$$S_1(c_n) = \frac{(\mu+2)(\cos^2 c_n + 1)}{c_n^2 + 2} \left(\frac{c_n}{\sin c_n}\right)^2,$$

$$S_2(c_n) = \frac{c_n^2(c_n - \sin c_n \cos c_n)(\mu+2)}{\sin c_n (c_n^2+2)}.$$

Все корни функции Δ просты, поэтому полный набор является объединением одного T-набора ω_0, состоящего из L_0 и C_0, и счетного множества S-наборов ω_n, состоящих из единственной кривой C_n $(n \geq 1)$.

Рассмотрим случай $\mu > 0$.

Имеем $S_1'(\varphi) > 0$ при $\varphi \neq \xi_n$, то есть проекция ни одной кривой D-разбиения не имеет точек самопересечения, а положительное направление обхода кривых — слева направо.

Рассмотрим функцию F_0 с областью определения $(-\mu, +\infty)$ и счетный набор функций F_n с областью определения $\mathbb{R}$ $(n \geq 1)$. Разрешим уравнение $S_1(\varphi) = r_1$ при каждом фиксированном r_1 на интервале $\big(\pi n, \pi(n+1)\big) \cap \mathbb{R}_+$ и положим $F_n(r_1) = S_2(\varphi)$. Таким образом, кривая C_n задается уравнением $r_2 = F_n(r_1)$.

Рассмотрим простой S-набор ω_n при $n \geq 1$. Обозначим область, содержащую начало координат, через D_0^n и присвоим ей нулевой относительный индекс. Эта область задается неравенством $\big(F_n(r_1) - r_2\big)(-1)^n > 0$ при $r_1 \in \mathbb{R}$. Область, не содержащую начало координат, обозначим через D_1^n. Соответственно, эта область задается неравенством $\big(F_n(r_1) - r_2\big)(-1)^n < 0$ при $r_1 \in \mathbb{R}$. Найдем относительные индексы этих областей.

Кривая C_n пересекает ось r_1 в единственной точке $\mathbf{S}(a_n)$. Имеем $\Delta(a_n) = -\sin a_n$ и $S_2'(a_n) = -a_n(a_n - \sin a_n \cos a_n)/\sin a_n$. Следовательно четные кривые являются положительными, а в точке пересечения с осью r_1 направление положительного обхода кривой - снизу вверх; а нечетные кривые — отрицательны, а в точке пересечения с осью r_1 направление положительного обхода кривой - сверху вниз. По теореме 1 [4] и в том и другом случае первая компонента вектора $\nabla \operatorname{Re} Z_\varphi\big(\mathbf{S}(a_n)\big)$ положительна. Иными словами, $\rho_{\omega_n}(D_0^n) = 0$ и $\rho_{\omega_n}(D_1^n) = 2$.

Рассмотрим набор ω_0. Этот набор не является простым, поскольку кривая C_0 пересекает L_0 в единственной точке $\mathbf{S}(a_0)$. Существует четыре области этого набора: D_0^0, D_1^0, D_2^0 и D_3^0. Прямая L_0 — нестационарная, $\Delta'(0) = -1$, кривая C_0 отрицательна. Точки $\mathbf{S}(c_0)$, $\mathbf{S}(b_0)$ расположены выше оси r_1, схематичное взаимное расположение линий набора изображено на рис. 5. Расставим относительные индексы областей следующим образом: $\rho_{\omega_0}(D_0^0) = 0$, $\rho_{\omega_0}(D_1^0) = 1$, $\rho_{\omega_0}(D_2^0) = 2$ и $\rho_{\omega_0}(D_3^0) = 3$.

Особенно нас будет интересовать область D_0^0, которая описывается неравенствами $0 < r_2 < F_0(r_1)$ и $r_1 \in \big(-\mu, S_1(a_0)\big)$. Покажем, что $D_0^0 \subset D_0^n$ при любом $n \geq 1$. Для нечетных n это очевидно. Покажем, что из $r_1 \in \big(-\mu, S_2(b_n)\big)$ вытекает $F_n(r_1) > F_0(r_1)$ при четных n. Для этого зафиксируем r_1 и найдем φ_0 и φ_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(0, \pi)$ и $\big(\pi n, \pi(n+1)\big)$ соответственно. Очевидно, $\sin\varphi_0 > 0$ и $\sin\varphi_n > 0$. При этом $S_1(\pi/2) = \pi^2/4$, поэтому если $r_1 < \pi^2/4$, то $\cos\varphi_0 > 0$, а если $r_1 > \pi^2/4$, то $\cos\varphi_0 < 0$. Аналогично, из равенства $S_1\big(\pi(n+1/2)\big) = \pi^2(n+1/2)^2$ вытекает, что $\cos\varphi_n > 0$ при $r_1 < \pi^2(n+1/2)^2$ и $\cos\varphi_n < 0$ при $r_1 > \pi^2(n+1/2)^2$.

Пусть $r_1 < 0$, тогда $\cos\varphi_0 > 0$ и $\cos\varphi_n > 0$. Выразим из $r_1 = S_1(\varphi)$ выражение

$$\varphi \sin\varphi = \mu\varphi^2/\sqrt{\mu^2\varphi^2 + (\varphi^2 - r_1)^2}.$$

Функция, стоящая справа от знака равенства, монотонно возрастает, поэтому $\varphi_n \sin\varphi_n > \varphi_0 \sin\varphi_0$. С другой стороны, если переписать уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ в виде $\varphi \operatorname{ctg}\varphi = (\varphi^2 - r_1)/\mu$, получим, что $\varphi_n \operatorname{ctg}\varphi_n > \varphi_0 \operatorname{ctg}\varphi_0$, следовательно,

$$S_2(\varphi_n) = \varphi_n \sin\varphi_n(\varphi_n \operatorname{ctg}\varphi_n + \mu) > \varphi_0 \sin\varphi_0(\varphi_0 \operatorname{ctg}\varphi_0 + \mu) = S_2(\varphi_0).$$

Пусть $0 \le r_1 < \pi^2/4$, тогда, переписав уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ в виде $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\varphi^2 - r_1}{\mu\varphi}$, получаем $\operatorname{ctg}\varphi_n > \operatorname{ctg}\varphi_0 > 0$, следовательно, $0 < \cos\varphi_0 < \cos\varphi_n$ и $0 < \sin\varphi_n < \sin\varphi_0$. Используя уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$, получим $S_2(\varphi) = \mu\varphi/\sin\varphi + r_1\cos\varphi$, откуда получаем $S_2(\varphi_n) > S_2(\varphi_0)$.

Допустим, $\pi^2/4 \le r_1 \le \pi^2(n + 1/2)^2$, тогда, $S_2(\varphi_0) \le \mu\varphi_0 \sin\varphi_0 \le \pi\mu$, а $S_2(\varphi_n) \ge \mu\varphi_n/\sin\varphi_n \ge \mu\pi n$.

Область D_0^0 расположена левее полосы $\pi^2(n + 1/2)^2 < r_1 < S_2(b_n)$. Будем полагать, что оба выражения $S_2(\varphi_0)$, $S_2(\varphi_n)$ положительны: в этом случае $\operatorname{ctg}\varphi_0 < 0$ и $\operatorname{ctg}\varphi_n < 0$, поэтому уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ можно переписать в виде $|\varphi \operatorname{ctg}\varphi| = (r_1 - \varphi^2)/\mu$, откуда получаем $|\varphi_n \operatorname{ctg}\varphi_n| < |\varphi_0 \operatorname{ctg}\varphi_0|$. Усилим последнее неравенство: $|\operatorname{ctg}\varphi_n| < |\operatorname{ctg}\varphi_0|$, из которого вытекает, что $\sin\varphi_n > \sin\varphi_0$, но тогда

$$S_2(\varphi_n) = \varphi_n \sin\varphi_n(\mu - |\varphi_n \operatorname{ctg}\varphi_n|) > \varphi_0 \sin\varphi_0(\mu - |\varphi_0 \operatorname{ctg}\varphi_0|) = S_1(\varphi_0).$$

Итак, $D_0^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} D_0^n$, поэтому D_0^0 — единственная область с нулевым индексом относительно полного набора, а все остальные области D-разбиению имеют положительный индекс относительно полного набора. Известно [4, Теорема 12], [3, с. 130], что область устойчивости не пуста, следовательно, D_0^0 — область устойчивости. Эта область выделена жирной линией на рис. 4.

Рассмотрим случай $\mu < 0$.

Рассмотрим функцию

$$g(\varphi) = -\frac{2\varphi\sin^2\varphi}{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}.$$

Уравнение $S_1'(\varphi) = 0$ равносильно уравнению $\mu = g(\varphi)$.

Имеем $\lim_{\varphi\to 0} g(\varphi) = -3$ и $g(\pi) = 0$, а g монотонно возрастает на интервале $(0, \pi)$, поэтому при $\mu \in (-3, 0)$ функция S_1 имеет единственный экстремум (максимум) на интервале $(0, \pi)$, а при $\mu \le -3$ функция S_1 монотонно убывает на данном интервале.

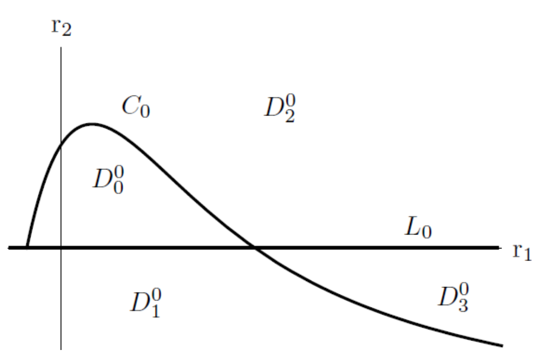

Рис. 5. Набор ω_0 при $\mu > -1$

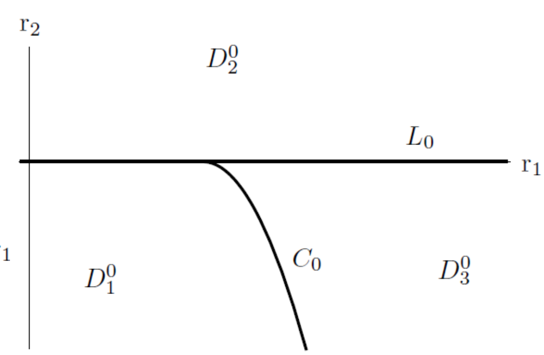

Рис. 6. Набор ω_0 при $\mu \le -1$

Рассмотрим набор ω_0. Имеем

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{S_2'(\varphi)}{S_1'(\varphi)} = 3\frac{1+\mu}{3+\mu},$$

поэтому возможны два варианта качественного расположения областей набора. Если $\mu \in (-1, 0)$, то имеются три области: обозначим их так, как схематично изображено на рис. 5 и проиндексируем так:

$$\rho_{\omega_0}(D_0^0) = 0, \rho_{\omega_0}(D_1^0) = 1, \rho_{\omega_0}(D_2^0) = 2, \rho_{\omega_0}(D_3^0) = 3.$$

Если $\mu \le -1$, то областей всего 3: обозначим их так, как изображено на рис. 6 и проиндексируем следующим образом:

$$\rho_{\omega_0}(D_1^0) = 1, \rho_{\omega_0}(D_2^0) = 2, \rho_{\omega_0}(D_3^0) = 3.$$

В дальнейшем нас будет особенно интересовать случай $\mu \in (-1, 0)$ и область D_0^0. Рассмотрим прямоугольник

$$V_0 = \bigl\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\colon r_1 \in (0, 4\pi^2/9), r_2 \in (0, \pi)\bigr\}.$$

Покажем, что область D_0^0 принадлежит V_0. Так как $S_2(\pi/2) = \mu\pi/2 < 0$, имеем $a_0 < \pi/2 < \eta$, где η — точка максимума функции S_1, поэтому верхняя граница области D_0^0 представляет собой участок $C_0^{(0,a_0)}$, следовательно, для любой точки этой области выполняются неравенства

$$0 < r_1 < S_1(a_0) = \mu^2 + a_0^2 < 1 + \pi^2/4 < 4\pi^2/9,$$

$$0 < r_2 < \pi^2/4 < \pi.$$

Рассмотрим набор ω_n при $n \ge 1$. Характер кривой C_n зависит знака величины $2+\mu$. Если $\mu < -2$, то $S_1(c_n) < 0$. Если $\operatorname{ctg}\varphi < 0$, то $g(\varphi) > -2$, следовательно, если η — корень уравнения $\mu = g(\varphi)$, то $S_1(\eta) > 0$. Таким образом, при $\mu \le -2$ кривая C_n простая, а при $\mu \in (-2, 0)$ может иметь петли.

Исследование петель — довольно трудоемкая задача, но, к счастью, нам достаточно знать только их возможно расположение и возможные относительные индексы.

Покажем, что при $\mu \in (-2, 0)$ все петли кривой C_n расположены в полуполосе

$$V_n = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2\colon (-1)^n r_2 > 0, \pi^2 n^2 < r_1 < \pi^2(n+1)^2\}.$$

На рис. 7 границы областей V_0, V_1 и V_2 обозначены тонкими линиями.

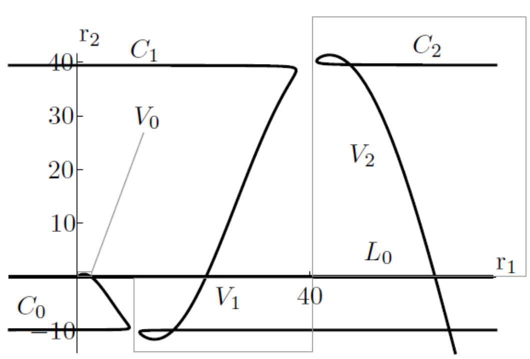

Рис. 7. Области D-разбиения при $\mu = -0.01$

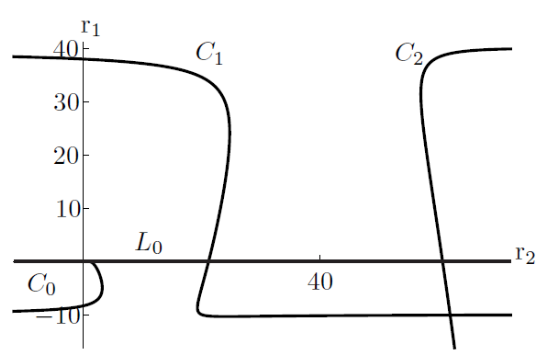

Рис. 8. Области D-разбиения при $\mu = -1$

Если η — корень уравнения $\mu = g(\varphi)$, то $S_1(\eta) = \eta^2 \frac{\eta+\sin\eta\cos\eta}{\eta-\sin\eta\cos\eta}$. Согласно лемме 2 если $\eta \in \big(\pi n, \pi(n+1)\big)$, то $\pi^2 n^2 < S_1(\eta) < \pi^2(n+1)^2$. Все экстремумы функции S_1 принадлежат V_n, поэтому и все петли принадлежат полосе $\pi^2 n^2 < r_1 < \pi^2(n+1)^2$. Участок $C^{(\pi n, a_n)}$ расположен в полуплоскости $(-1)^n r_2 > 0$, а участок $C^{\left(a_n, \pi(n+1)\right)}$ — в полуплоскости $(-1)^n r_2 < 0$. При этом $\operatorname{sgn} S_2(c_n) = (-1)^n$. Итак, мы доказали, что любая петля принадлежит полуполосе V_n и, кроме того, петли может образовывать только участок $C^{(\pi n, a_n)}$.

Итак, если $\mu \leq -2$, то имеются две неограниченные области набора: D_0^n (содержащее начало координат) и D_1^n (не содержащее начало координат) с относительным индексами 0 и 2 соответственно. Если $\mu \in (-2, 0)$, то согласно лемме 1 кроме этих двух неограниченных областей могут присутствовать конечное количество петель, относительный индекс которых не меньше, чем -2. На рис. 9, 10 изображена кривая C_1 при различных значениях μ: в первом случае у кривой присутствует одна петля, а во втором — петли отсутствуют.

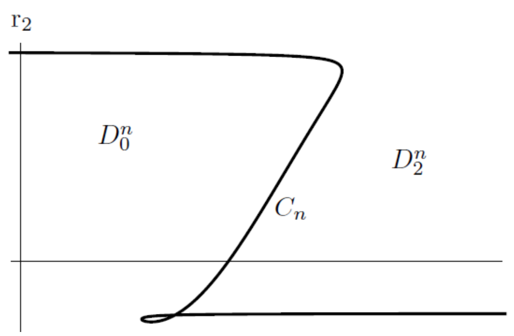

Рис. 9. Набор ω_1 при $\mu = -0.1$

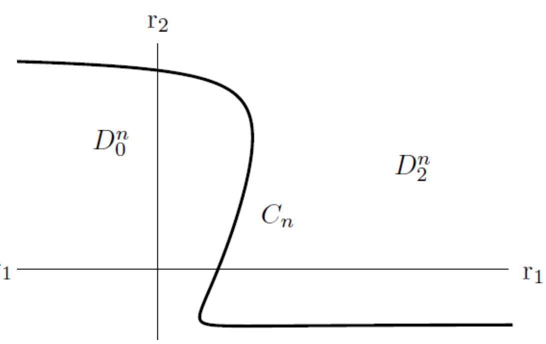

Рис. 10. Набор ω_1 при $\mu = -1$

Докажем, что индекс точки относительно полного набора Ω равен абсолютному индексу областей. Для этого вычислим индекс начала координат: эта точка принадлежит пересечению областей $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_0^n$, а индекс этой точки относительно ω_0 равен двум, то есть $\rho\big(0,0\big) = \rho_\Omega\big(0,0\big) = 2$.

Итак, при $\mu \leq 1$ суммарный относительный индекс любой точки положителен, следовательно, область устойчивости пуста (рис. 10).

Пусть $\mu > -1$. Имеем $V_n \cap V_m = \emptyset$ при $m \neq n$. Следовательно, нулевой абсолютный индекс могут иметь лишь точки, расположенные внутри D_0^0 или петель кривых C_n. Однако, $V_n \subset D_2^0$ при четных n и $V_n \subset D_3^0$ при нечетных n, поэтому абсолютный индекс точек внутри петли, образуемой кривой C_n не меньше, чем n.

Докажем, что D_0^0 — подмножество области D_0^n при любом n. Предположим, что C_n пересекает V_0, тогда из $S_1(\varphi) < 4\pi^2/9$, $\varphi > \pi$ вытекает $\mu \operatorname{ctg} \varphi > \varphi - 4\pi^2/(9\varphi) > 5\pi/9 > 1$, следовательно, $\operatorname{ctg}\varphi < -1$. Если n — четное, то $\cos\varphi < -\sqrt{2}/2$ и $\sin\varphi > 0$, поэтому $S_2(\varphi) < 0$. Если n — нечетное, то $\cos\varphi > \sqrt{2}/2$ и $\sin\varphi < 0$, следовательно, $S_2(\varphi) > \pi^2/\sqrt{2} > \pi$ — противоречие. Центральная точка прямой L_0 принадлежит D_0^n, следовательно, $D_0^0 \subset D_0^n$.

Итак, D_0^0 состоит из тех и только тех точек, абсолютный индекс которых равен нулю, а принадлежность $\{\zeta, \beta\}$ этой области и неравенство $\mu > -1$ эквивалентно тому, что точка $\{\zeta, \beta, \mu\}$ принадлежит $\mathcal{D}_9$. $\square$

3.2. **Уравнение** (40)**:** $\chi \operatorname{ch} z + \mu z e^z + \nu z + z^2 e^z = 0$**.** Рассмотрим следующие функции:

$$g_1(\varphi) = -\frac{2\varphi\cos^2\varphi}{\varphi + \sin\varphi\cos\varphi},$$
$$g_2(\varphi) = -1 - \varphi \operatorname{ctg}\varphi.$$

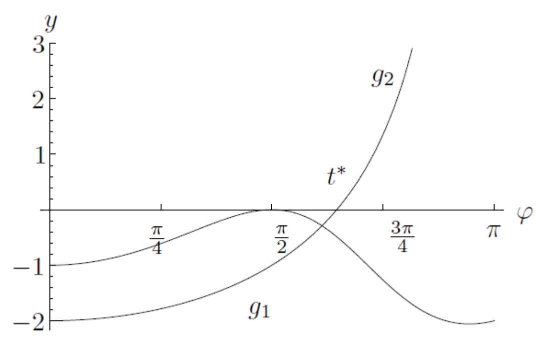

Рис. 11. Функции g_1 и g_2

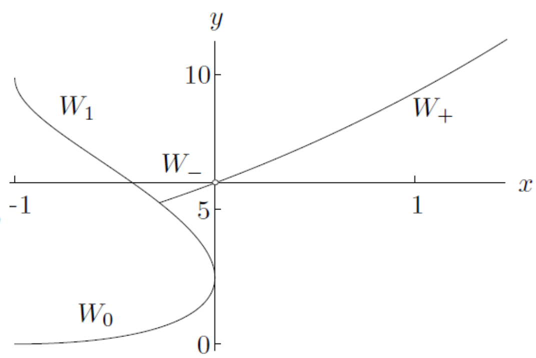

Рис. 12. Функции W_+, W_-, W_0, W_1

Лемма 3. *Если $\varphi \in [\pi n - \pi/4, \pi n + \pi/6]$, где $n \in \mathbb{N}$, то $g_1(\varphi) \le -1$.*

Доказательство. Неравенства $g_1(\varphi) \le -1$ и $2\varphi\cos 2\varphi \ge \sin 2\varphi$ эквивалентны при $\varphi > 0$.

Предположим, что $\varphi \in [\pi n - \pi/4, \pi n]$, тогда $\cos 2\varphi \ge 0$ и $\sin 2\varphi \le 0$, следовательно, $\sin 2\varphi \le 0 \le 2\varphi\cos 2\varphi$.

Пусть $\varphi \in (\pi n, \pi n + \pi/6]$, тогда $\cos 2\varphi \ge 1/2$ и $\sin 2\varphi < \sqrt{3}/2$, следовательно, $\sin 2\varphi < \pi < 2\varphi\cos 2\varphi$. □

Лемма 4. *Уравнение $g_1(\varphi) = g_2(\varphi)$ имеет единственное решение t^* на интервале $(\pi/2, \pi)$, причем $t^* < 3\pi/4$.*

Доказательство. Функция g_2 монотонно возрастает на этом интервале и $g_2(\varphi) > -1$. В то же время если $g_1(\varphi) > -1$, то $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/4)$ согласно лемме 3. Далее,

$$g_1'(\varphi) = \frac{\sin 2\varphi(2\varphi^2 + \varphi\operatorname{ctg}\varphi - \cos^2\varphi)}{(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)^2}. \tag{62}$$

Имеем

$$2\varphi^2 + \varphi\operatorname{ctg}\varphi - \cos^2\varphi > \frac{\pi(\pi-1)}{2} - 1 > 0,$$

поэтому g_1 убывает на интервале $(\pi/2, 3\pi/4)$, следовательно, существует единственная точка пересечения графиков функции g_1 и g_2 на этом интервале.

При $\varphi \in [3\pi/4, \pi)$ имеем $g_1(\varphi) < -1 < g_2(\varphi)$, поэтому $t^* < 3\pi/4$. □

Обозначим $\mu^* = g_1(t^*)$. В силу $\operatorname{ctg} t^* > 0$ и $g_2(t^*) < 0$ имеем $\mu^* \in (-1, 0)$.

Примерно: $t^* \approx 1.92467$ и $\mu^* \approx -0.28898$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi^2 + \mu\varphi\operatorname{tg}\varphi = \psi^2 + \mu\psi\operatorname{tg}\psi, \\ \varphi\sin\varphi - \mu\cos\varphi = \psi\sin\psi - \mu\cos\psi. \end{cases} \tag{63}$$

Лемма 5. *Если $\mu > 0$, то система (63) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0 < \varphi < \pi/2 < \psi < 3\pi/2$.*

Лемма 6. *Если $\mu \in (\mu^*, 0)$, то система (63) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$. Если $\mu \le \mu^*$, то у системы (63) не существует решения, удовлетворяющего условию $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$.*

Рассмотрим функцию W_+, ставящую каждому $\mu > 0$ число, равное $\varphi^2 + \mu\varphi \operatorname{tg}\varphi$, где φ, ψ — решение системы (63) такое, что $0 < \varphi < \pi/2 < \psi < 3\pi/2$.

Рассмотрим функцию W_-, ставящую каждому $\mu \in (\mu^*, 0)$ число, равное $\varphi^2 + \mu\varphi \operatorname{tg}\varphi$, где φ, ψ — решение системы (63) такое, что $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$.

Рассмотрим функцию W_0, ставящую каждому $\mu \in (-1, 0)$ в соответствии число, равное $\varphi^2 + \mu\varphi \operatorname{tg}\varphi$, где φ — корень уравнения $\mu = g_1(\varphi)$ из интервала $(0, \pi/2)$.

Рассмотрим функцию W_1, ставящую каждому $\mu \in (-1, 0)$ в соответствии число, равное $\varphi^2 + \mu\varphi \operatorname{tg}\varphi$, где φ — корень уравнения $\mu = g_1(\varphi)$ из интервала $(\pi/2, \pi)$.

Лемма 7. *Если $\mu \in (-1, 0)$, то $0 < W_0(\mu) < W_1(\mu)$. Если $\mu \in (\mu^*, 0)$, то $W_1(\mu) < W_-(\mu)$.*

Доказательство лемм 5–7 будет дано ниже.

Лемма 8. *Функция*

$$f(\varphi) = \varphi^2 \frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}$$

отображает отрезок $[0, \pi/2]$ в $[0, \pi^2/4]$, а при любом $k \ge 1$ отрезок $[-\pi/2 + \pi k, \pi/2 + \pi k]$ в $\bigl[(-\pi/2 + \pi k)^2, (\pi/2 + \pi k)^2\bigr]$.

Доказательство. Проведем замену переменных $\psi = 2\varphi$ и рассмотрим функцию $g(\psi) = 2f(\varphi)$. На отрезке $[2\pi n, 2\pi n + \pi]$ функция g монотонно возрастает при любом $n \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, остается показать, что если $\varphi \in (-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$, то $\pi^2(2n-1)^2 < g(\varphi) < \pi^2(2n+1)^2$.

Первое неравенство эквивалентно следующему:

$$\varphi\bigl(\varphi^2 - \pi^2(2n-1)^2\bigr) > \bigl(\varphi^2 + \pi^2(2n-1)^2\bigr)\sin\varphi, \tag{64}$$

а второе — следующему:

$$\frac{2|\sin\varphi|}{\varphi + \sin\varphi} < \left(\frac{\pi(2n+1)}{\varphi}\right)^2 - 1. \tag{65}$$

Неравенство (64) выполняется в силу неположительности $\sin\varphi$. Усилим неравенство (65):

$$\frac{2}{2\pi n + \pi - 1} < \frac{1 + 4n}{4n^2}.$$

Перепишем последнее неравенство в виде:

$$8(\pi - 1)n^2 + (6\pi - 4)n + \pi - 1 > 0,$$

которые выполняется при любом положительном n (так как корни квадратного трехчлена, стоящего слева, отрицательны). □

Рассмотрим уравнение

$$r_1 = \varphi^2 + r_3\varphi \operatorname{tg}\varphi \tag{66}$$

и интервал

$$I^* = \bigl(\eta_0 \sin\eta_0 - r_3\cos\eta_0, \eta_1\sin\eta_1 - r_3\cos\eta_1\bigr). \tag{67}$$

Рассмотрим область $\mathcal{D}_{10}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ содержащую такие точки, что $r_3 > -1$ и

- при $r_3 > 0$ выполняются неравенства: $r_1 \in \big(0, W_+(r_3)\big)$ и $r_2 \in I^*$, где η_0, η_1 — корни уравнения (66) такие, что $0 < \eta_0 < \pi/2 < \eta_1 < 3\pi/2$.
- при $r_3 = 0$ выполняются неравенства: $r_1 \in (0, \eta^2) \setminus \{\pi^2/4\}$, где η — единственный корень уравнения $\eta \sin \eta = \pi/2$ из интервала $(\pi/2, \pi)$, и если $r_1 < \pi^2/4$, то $\sqrt{r_1} \sin \sqrt{r_1} < r_2 < \pi/2$, а если $r_1 > \pi^2/4$, то $\pi/2 < r_2 < \sqrt{r_1} \sin \sqrt{r_1}$.
- при $r_3 \in (\mu^*, 0)$ выполняются неравенства: $r_1 \in \big(0, W_0(r_3)\big) \cup$ $\cup \big(W_1(r_3), W_-(r_3)\big)$ и $r_2 \in I^*$, где η_0, η_1 — корни уравнения (66) такие, что

$$\begin{cases} 0 < \eta_0 < \eta_1 < \pi/2, & \text{если } r_1 < W_0(r_3), \\ \pi/2 < \eta_0 < \eta_1 < \pi, & \text{если } r_1 > W_1(r_3). \end{cases}$$

- при $r_3 \in (-1, \mu^*]$ выполняются неравенства: $r_1 \in \big(0, W_0(r_3)\big)$ и $r_2 \in I^*$, где η_0, η_1 — корни уравнения (66) такие, что $0 < \eta_0 < \eta_1 < \pi/2$.

Область $\mathcal{D}_{10}$ связна, ограничена и частично изображена на рис. 13.

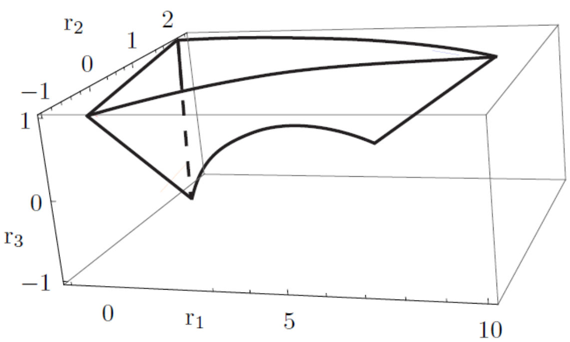

Рис. 13. Область $\mathcal{D}_{10}$ (выше)

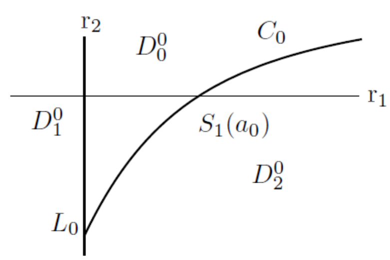

Рис. 14. Набор ω_0 в случае $\mu > 0$

Теорема 5. *Для того чтобы все корни характеристического уравнения* (40) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы точка* $\{\chi, \nu, \mu\}$ *принадлежала области* $\mathcal{D}_{10}$.

Далее будем рассматривать уравнение (40) как однопараметрическое семейство двупараметрических уравнений (11) первого рода, где $p_1 = \chi$, $p_2 = \nu$, а μ — параметр семейства.

Из $f_1(z) = \operatorname{ch} z$, $f_2(z) = z$ и $f_0(z) = z^2 e^z + \mu z e^z$ находим $\Delta(\varphi) = \varphi \cos \varphi$ и $u_1(\varphi) = \varphi^3 \cos \varphi + \mu \varphi^2 \sin \varphi$, $u_2(\varphi) = \varphi \cos \varphi (\varphi \sin \varphi - \mu \cos \varphi)$.

Случай $\mu = 0$ сводится к теореме 10 [4], поэтому далее будем полагать $\mu \neq 0$, тогда $\theta_0 = \xi_0 = 0$, $\xi_n = \pi(n - 1/2)$, где $n \in \mathbb{N}$, то есть имеется единственная прямая L_0 и счетное множество кривых C_n, которые задаются отображением

$$\mathbf{S}(\varphi) = \{\varphi^2 + \mu \varphi \operatorname{tg} \varphi, \varphi \sin \varphi - \mu \cos \varphi\}.$$

Найдем точки пересечения проекций кривых D-разбиения с осями координат. Для каждого $n \geq 0$ обозначим через a_n единственный корень уравнения $\mu = \varphi \operatorname{tg} \varphi$ из интервала $\big(\pi(n - 1/2), \pi(n + 1/2)\big) \cap (0, +\infty)$. Точка $\mathbf{S}(a_n)$ — единственная точка пересечения кривой C_n с положительной полуосью r_1. Имеем $S_1(a_n) = \mu^2 + a_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Для каждого $n \geq 1$ обозначим через b_n единственный корень уравнения $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $\big(\pi(n - 1/2), \pi(n + 1/2)\big) \cap (0, +\infty)$, тогда $\mathbf{S}(b_n)$ — единственная точка пересечения кривой C_n с осью r_2. Имеем $S_2(b_n) = (-1)^n \operatorname{sgn} \mu \sqrt{\mu^2 + b_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Отметим, что при $\mu \in (-1, 0)$ существует b_0 — единственный корень уравнения $\mu = -\varphi \operatorname{ctg} \varphi$ из интервала $(0, \pi/2)$, причем $S_2(b_0) = \sqrt{\mu^2 + b_0^2}$. Если $\mu \notin (-1, 0)$, то данное уравнение неразрешимо на этом интервале.

Далее, $\Delta'(0) = 1$,

$$\Delta'\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1}, u_1\left(\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\right) = \mu\pi^2(n - 1/2)^2(-1)^n,$$

поэтому согласно теореме 3 полный набор может быть представлен в виде объединения T-набора ω_0, состоящего из прямой L_0 и кривой C_0, и счетного набора S-наборов ω_n, каждый из которых состоит только из кривой C_n.

Кривая C_n пересекает ось r_1 в единственной точке $\mathbf{S}(a_n)$. Центральная точка прямой L_0 имеет координаты $\{0, -\mu\}$. Проиндексируем все S-наборы таким образом, чтобы относительный индекс начала координат был равен нулю. Кривая C_n не пересекает интервал $(-\mu, 0)$ оси r_2, поэтому индекс точки $\{0, -\mu\}$ относительно любого S-набора тоже равен нулю.

Проиндексируем T-набор следующим образом. Через начало координат проходит прямая L_0, а кривая C_0 не проходит, поэтому это неособая точка набора. Присвоим ей единичный относительный индекс в том случае, если $\mu > 0$. Если $\mu < 0$, то присвоим этой точке относительный индекс, равный двум.

Началу координат соответствует характеристическое уравнение $z(z+\mu) = 0$, поэтому абсолютный индекс точки равен единице, если $\mu > 0$, и двум, если $\mu \leq 0$. Таким образом, согласно теореме 1 для любой неособой точки $\mathbf{p}$ имеем $\rho(\mathbf{p}) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{\omega_n}(\mathbf{p})$.

Исследуем поведение функции S_1. Уравнение $S_1'(\varphi) = 0$ равносильно уравнению $\mu = g_1(\varphi)$. Поскольку $g_1 \leq 0$, то при $\mu > 0$ функция S_1 монотонно возрастает в точках своей непрерывности.

Пусть η — точка экстремума функции S_1, тогда

$$S_1(\eta) = \frac{\eta^2(\eta - \sin\eta\cos\eta)}{\eta + \sin\eta\cos\eta} > 0, \tag{68}$$

следовательно, участок проекции любой кривой D-разбиения, расположенный в полуплоскости $r_1 < 0$, представляет собой простую кривую, а все петли на проекциях кривых располагаются в полуплоскости $r_1 > 0$.

Покажем, что если $\mu \in (-1, 0)$, то уравнение $g_1(\varphi) = \mu$ имеет единственный корень на интервале $\big(\pi n/2, \pi(n+1)/2\big)$ при каждом $n \in \mathbb{N}_0$. Обозначим этот корень через c_n.

Имеем $g_1(\pi n) = -2$ и $g_1\big(\pi(n + 1/2)\big) = 0$, поэтому при $\mu \in (-1, 0)$ уравнение $\mu = g_1(\varphi)$ имеет по крайней мере один корень на каждом интервале $\big(\pi n/2, \pi(n+1)/2\big)$. На интервале $\big(\pi n, \pi(n + 1/2)\big)$ согласно формуле (62) получаем

$$\operatorname{sgn} g_1'(\varphi) = \operatorname{sgn} \sin 2\varphi\big(2\varphi^2 + \operatorname{ctg}\varphi(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\big) > 0.$$

Рассмотрим интервал $\big(\pi(n - 1/2), \pi n\big)$. Согласно лемме 3 достаточно рассмотреть интервал $\big(\pi(n - 1/2), \pi(n - 1/4)\big)$. На этом интервале $\operatorname{ctg}\varphi \in (-1, 0)$, следовательно, $g_1'(\varphi) < 0$ в силу выражения (62).

Пусть $\mu \in (-1, 0)$. В силу $c_n \in \big(\pi n, \pi(n+1/2)\big)$ и согласно лемме 8 получаем $S_1(c_n) < \pi n < S_1(c_{n-1})$. Итак, *все экстремумы функции S_1 упорядочены по возрастанию.*

Исследуем поведение функции S_2. Равенство $S_2'(\varphi) = 0$ можно переписать в виде $\mu = g_2(\varphi)$. Функция g_2 монотонно возрастает в точках своей непрерывности, следовательно, на интервале $(0, \pi/2)$ данное уравнение имеет решение только при $\mu \in (-2, -1)$.

Таким образом, если $\mu \geq -1$, то функция S_2 монотонно возрастает на интервале $(0, \pi/2)$. Если $\mu \in (-2, -1)$, то функция S_2 имеет единственный минимум на интервале

$(0, \pi/2)$. Если $\mu \leq -2$, то функция S_2 монотонно убывает на интервале $(0, \pi/2)$. Итак, C_0 — простая кривая при любых значениях $\mu \neq 0$.

При $n \geq 1$ имеем $g_2\big(\pi(n-1/2)\big) = -1$, поэтому уравнение $g_2(\varphi) = -1$ не имеет корней на интервале $\big(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2)\big)$ при $n \in \mathbb{N}$. Иными словами, если $\mu = -1$, то все проекции кривых D-разбиения — простые кривые.

Если $\mu \notin \{-1, 0\}$, то при $n \in \mathbb{N}$ уравнение $\mu = g_2(\varphi)$ имеет единственный корень на интервале $\big(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2)\big)$, следовательно, при $n \in \mathbb{N}$ функция S_2 имеет ровно один экстремум на этом интервале. Обозначим точку экстремума через d_n. Имеем

$$S_2''(d_n) = \frac{\mu+1}{d_n \cos d_n}(d_n - \sin d_n \cos d_n),$$

следовательно, если $\mu > -1$, то при четных n функция S_2 имеет в точке d_n локальный минимум, а при нечетных n — локальный максимум.

Заметим, что если $\mu > -1$, то $d_n \in \big(\pi(n-1/2), \pi n\big)$, а если $\mu < -1$, то $d_n \in \big(\pi n, \pi(n+1/2)\big)$.

Свойства кривых D-разбиения качественно зависит от величины μ. Рассмотрим три случая.

1. Случай $\mu > 0$.

В этом случае проекции D-разбиения удобно задать иначе. Рассмотрим функцию $F_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и множество функций $F_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$. Функция S_1 монотонно возрастает в точках своей непрерывности, поэтому разрешив уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ относительно $\varphi \in \big(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2)\big) \cap \mathbb{R}_+$, положим $F_n(r_1) = S_2(\varphi)$. Итак, при $n \in \mathbb{N}_0$ кривая C_n — это график функции $r_2 = F_n(r_1)$.

Доказательство леммы 5. Докажем, что если числа m и n имеют различную четность, то уравнение $F_n(r_1) = F_m(r_1)$ имеет единственное решение. Пусть m — четное число, а n — нечетное. Без ограничения общности можно считать, что $m < n$.

Пусть $m = 0$, а n — нечетное натуральное число. На интервале $(0, \pi/2)$ функция S_2 строго возрастает, поэтому и функция F_0 строго возрастает на $\mathbb{R}_+$. Из $S_2(0) = -\mu$ и $S_2(\pi/2) = \pi/2$ вытекает, что график функции F_0 расположен в полосе $r_1 > 0$, $r_2 \in (-\mu, \pi/2)$.

Заметим, что $F_n(\pi^2 n^2) = \pi n$.

Выше мы показали, что точка максимума функции S_2 (точка d_n) принадлежит интервалу $\big(\pi(n-1/2), \pi n\big)$, поэтому точка максимума функции F_n (точка $S_1(d_n)$) принадлежит интервалу $(0, \pi^2 n^2)$. Итак, при $r_1 \leq \pi^2 n^2$ имеем $F_0(r_1) < \pi^2 n^2 \leq F_n(r_1)$. На множестве $(\pi^2 n^2, +\infty)$ функция F_0 растет, а F_n убывает, кроме того,

$$\lim_{r_1 \to \infty} F_n(r_1) = -\pi/(n+1/2) < \pi/2 = \lim_{r_1 \to \infty} F_0(r_1),$$

поэтому существует единственная точка пересечения графиков функций F_0 и F_n.

Теперь пусть m — четное натуральное число, а n — нечетное. Отметим, что у функции F_m существует единственная точка экстремума — это точка минимума, принадлежащая интервалу $(0, \pi^2 m^2)$. Тогда при $r_1 \leq \pi^2 m^2$ имеем $F_m(r_1) < 0 < F_n(r_1)$.

В силу $\lim_{r_1 \to \infty} F_m(r_1) = \pi(m+1/2)$ при $r_1 \in (\pi^2 m^2, \pi^2 n^2]$ имеем $F_m(r_1) < \pi(m+1/2) < \pi n \leq F_n(r_1)$. На множестве $(\pi^2 n^2, \infty)$ функция F_m растет, а F_n убывает, откуда и вытекает существование и единственность точки пересечения графиков.

Решение системы (63) такое, что $0 < \varphi < \pi/2 < \psi < 3\pi/2$ соответствует точке пересечения кривых C_0 и C_1. □

Докажем, что *для любого четного n из $r_1 \in \big(0, S_1(a_n)\big]$ вытекает $F_0(r_1) > F_n(r_1)$.*

(1) Пусть $r_1 \in (0, \pi^2 n^2]$. На этом участке функция F_n имеет единственный экстремум (минимум), поэтому
$$F_n(r_1) \le \max\{F_n(0), F_n(\pi^2 n^2)\} = \max\{-\sqrt{\mu^2 + b_n^2}, -\mu\} = -\mu.$$
С другой стороны, в силу монотонности F_0 имеем $F_0(r_1) > F(0) = -\mu$, поэтому на этом участке $F_0(r_1) > F_n(r_1)$.

(2) При $r_1 \in \bigl(S_1(a_0), S_1(a_n)\bigr]$ имеем $F_0(r_1) > 0 \ge F_n(r_1)$.

(3) Если $S_1(a_0) \le \pi^2 n^2$, то доказательство утверждения закончено. В противном случае существует полуинтервал $\bigl(\pi^2 n^2, S_1(a_0)\bigr]$, на котором $-\mu < F_0(r_1) \le 0$ и $-\mu < F_n(r_1) < 0$. Пусть r_1 принадлежит этому полуинтервалу, тогда существуют η_0 и η_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(0, \pi/2)$ и $\bigl(\pi n, \pi(n+1/2)\bigr)$ соответственно. Перепишем уравнение $r_1 = S_1(\varphi)$ в виде $\operatorname{tg}\varphi = (r_1 - \varphi^2)/(\mu\varphi)$. Если $r_1 > 0$, то функция $(r_1 - \varphi^2)/(\mu\varphi)$ монотонно убывает, следовательно, $0 < \operatorname{tg}\eta_n < \operatorname{tg}\eta_0$, поэтому $\cos\eta_n > \cos\eta_0 > 0$, следовательно, Тогда имеем
$$\bigl|F_0(r_1)\bigr| = \cos\eta_0 \frac{\eta_0^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} < \cos\eta_n \frac{\eta_n^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} = \bigl|F_n(r_1)\bigr|.$$

Теперь докажем, что *для любого нечетного* $n \ge 2$ *из* $r_1 \in \bigl[0, S_1(a_n)\bigr)$ *вытекает* $F_n(r_1) > F_1(r_1)$.

(1) Пусть $r_1 \in (0, \pi^2]$, тогда в силу $S_1(a_n) > S_1(a_n) > \pi^2$ имеем $F_0(r_1) > 0$ и $F_n(r_1) > 0$. Пусть η_1 и η_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(\pi/2, \pi)$ и $\bigl(\pi(n - 1/2), \pi n\bigr)$ соответственно, тогда
$$S_2^2(\eta_1) - \mu^2 = \eta_1^2 - \left(\frac{r_1 \cos\eta_1}{\eta_1}\right)^2 < \pi^2,$$
$$S_2^2(\eta_n) - \mu^2 = \eta_n^2 - \left(\frac{r_1 \cos\eta_n}{\eta_n}\right)^2 > \eta_n^2 - \frac{\pi^4}{\eta_n^2}.$$
Неравенство $\eta_n^2 - \pi^4/\eta_n^2 > \pi^2$ выполняется при $\eta_n > \pi\sqrt{(\sqrt{5}+1)/2}$, в чем нетрудно убедиться. А так как $\varphi_n > 5\pi/2$, то на рассматриваемом полуинтервале графики функций не пересекаются.

(2) При $r_1 \in (\pi^2, \pi^2 n^2]$ имеем $F_1(r_1) < \mu \le F_n(r_1)$.

(3) При $r_1 \in \bigl(S_1(a_1), S_1(a_n)\bigr]$ имеем $F_1(r_1) < 0 \le F_n(r_1)$.

(4) Если $\pi^2 n^2 < S_1(a_1)$, то необходимо еще рассмотреть полуинтервал $\bigl(\pi^2 n^2, S_1(a_1)\bigr]$. Пусть r_1 принадлежит этому полуинтервалу, а η_1 и η_n — корни уравнения $r_1 = S_1(\varphi)$ из интервалов $(\pi, 3\pi/2)$ и $\bigl(\pi n, \pi(n + 1/2)\bigr)$ соответственно. Из $S_1(\eta_1) = S_1(\eta_n)$ вытекает $0 < \operatorname{tg}\eta_n < \operatorname{tg}\eta_0$, поэтому $\cos\eta_n < \cos\eta_0 < 0$, следовательно,
$$F_1(r_1) = |\cos\eta_1| \frac{\eta_1^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} < |\cos\eta_n| \frac{\eta_n^2 + \mu^2 - r_1}{\mu} = F_n(r_1).$$

Доказательство теоремы 5 в случае $\mu > 0$. Как было показано выше,
кривая C_0 не пересекает прямую L_0 и является простой кривой. Относительный индекс начала координат равен нулю, при этом $\Delta'(0) = 1$, следовательно, существуют три области набора: D_0^0, D_1^0 и D_2^0, относительные индексы которых равны $0, 1$ и 2 соответственно. Схематично эти области изображены на рис. 14.

При $n \ge 1$ кривая C_n простая, поэтому она разбивает плоскость на две области: D_0^n и D_1^n. Обозначим через D_0^n ту область, которая содержит начало координат. Выше мы присвоили этой области нулевой относительный индекс. Имеем
$$\Delta(a_n) u_1(a_n) u_2'(a_n) = a_n^5 (a_n + \sin a_n \cos a_n) > 0,$$

поэтому $(\nabla Z_{a_n}, \mathbf{S}(a_n)) > 0$ согласно теореме 1 [4]. Следовательно, относительный индекс области D_1^n равен двум. Эти наборы изображены на рис. 15, 16.

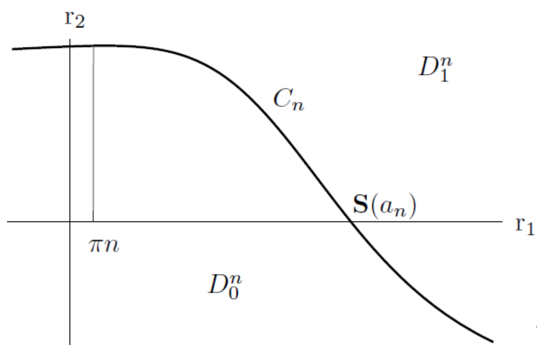

Рис. 15. Набор ω_n при нечетных n в случае $\mu > 0$

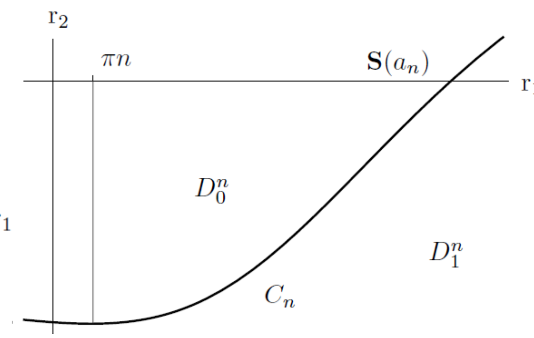

Рис. 16. Набор ω_n при четных n в случае $\mu > 0$

Итак, область $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_0^n$ и только она имеет нулевой абсолютный индекс.

Покажем, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} D_0^n = D_0^0 \cap D_0^1$.

Пусть $\mathbf{r}$ принадлежит $D_0^0 \cap D_0^1$ и замыканию D_1^n, при некотором четном целом n. Тогда $r_1 > 0$, $F_0(r_1) < r_2 < F_1(r_1)$ и $r_2 \leq F_n(r_1)$. Как было показано выше, если $r_1 \in (0, S_1(a_n))$, то $F_0(r_1) > F_n(r_1)$, следовательно, $r_1 \geq S_1(a_n)$, но тогда $F_1(r_1) < 0 < F_0(r_1)$. Полученное противоречие показывает, что $D_0^0 \cap D_0^1$ — подмножество D_0^n. Аналогично рассматривается случай, когда n — нечетное число, большее двух.

Заметим, что при условии $r_1 > 0$ неравенства

$$F_0(r_1) < F_1(r_1), \quad r_1 < W_+(\mu)$$

эквивалентны, а принадлежность точки $\{\chi, \nu\}$ области $D_0^0 \cap D_0^1$ эквивалентно тому, что $\mu > 0$ и $\{\chi, \nu, \mu\} \in \mathcal{D}_{10}$.

На рис. 17, 18 граница пересечения областей D_0^0, D_0^1 выделена жирной линией. $\square$

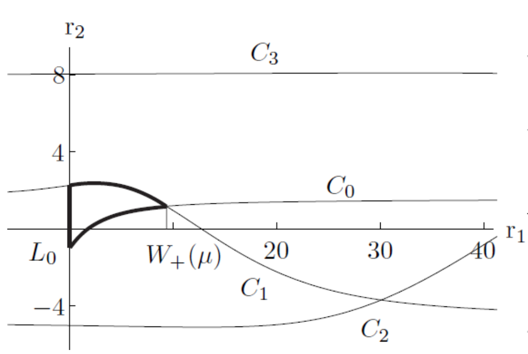

Рис. 17. Области D-разбиения в случае $\mu = 1$

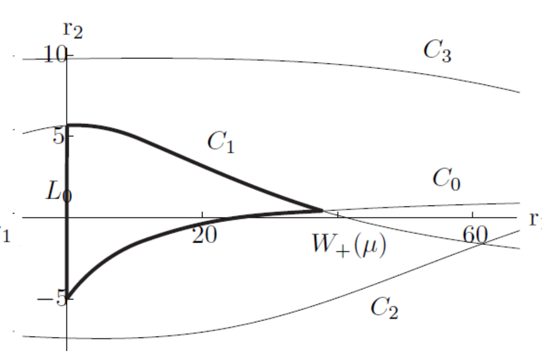

Рис. 18. Области D-разбиения в случае $\mu = 5$

2. Случай $\mu \leq -1$.

Доказательство теоремы 5 в случае $\mu \le -1$. На интервале $(0, \pi/2)$ функция S_2 монотонно убывает, а кривая C_0 не пересекает ось r_2, поэтому ω_0 — простой T-набор. Имеются три области набора: D_0^0, D_1^0 и D_2^0, относительные индексы которых равны $1, 2$ и 3 соответственно. Схематично эти области изображены на рис. 19.

Если $\mu = -1$, то, как было показано выше, функция S_2 монотонна $\big(\pi(n-1/2), \pi(n+1/2)\big)$. Если $\mu < -1$, то все проекции кривых D-разбиения просты. Это вытекает из того, что $S_1(d_n) < 0$, но $S_1(\eta) > 0$, где η — любой корень уравнения $\mu = g(\varphi)$.

Кривая C_n разбивает плоскость на две области: D_0^n и D_1^n, относительные индексы которых 0 и 2 соответственно (рис. 20). Итак, суммарный относительный индекс любой точки больше нуля, поэтому область устойчивости пуста. □

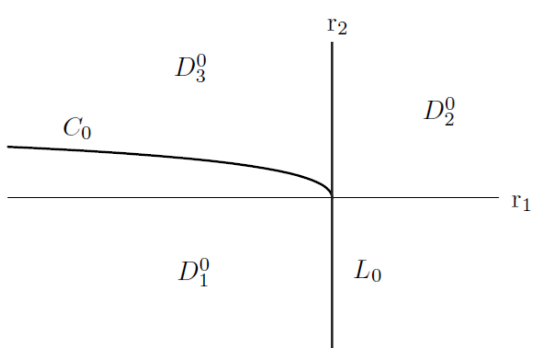

Рис. 19. Набор ω_0 в случае $\mu \le -1$

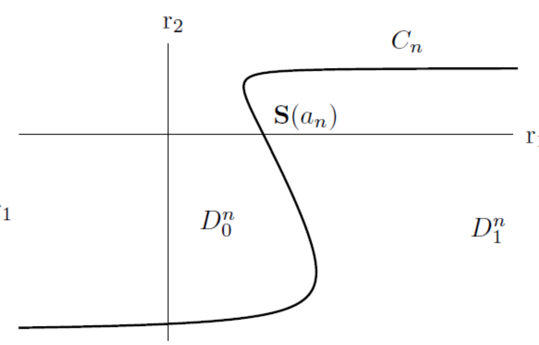

Рис. 20. Набор ω_n при нечетных n в случае $\mu \le -1$

3. Случай $\mu \in (-1, 0)$.

Доказательство леммы 6. Решение системы (63), удовлетворяющее условию $\pi/2 < \varphi < \psi < \pi$ соответствует точке самопересечения участка кривой $C_1^{(\pi/2,\pi)}$.

Докажем, что точка самопересечения существует. Имеем $S_2(\pi/2) = \pi/2 > 0$ и $S_2(\pi) = \mu < 0$. На интервале $(0, \pi/2)$ функция S_1 имеет единственный экстремум (минимум) в точке c_1, и у функции S_2 имеется единственный экстремум (максимум) в точке d_1. Для того, чтобы участок кривой $C_1^{(\pi/2,\pi)}$ имел точки самопересечения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $c_1 < d_1$.

Согласно лемме 4 значение t^* — это точка пересечения графиков g_1 и g_2 на интервале $(\pi/2, \pi)$. Функция g_2 возрастает на этом интервале и $g_2(\varphi) > -1$, поэтому при $\mu > \mu^*$ имеем $d_1 > t^*$, а при $\mu < \mu^*$ имеем $d_1 < t^*$. На интервале $(\pi/2, t^*)$ функция g_1 убывает, поэтому при $\mu > \mu^*$ имеем $c_n < t^*$. На интервале (t^*, π) функция g_1 не является монотонна, тем не менее, функция убывает на том участке, где она принимает значения больше, чем -1, поэтому при $\mu < \mu*$ имеем $c_n > t^*$. Таким образом, если $\mu \le \mu^*$, то $c_n \ge d_n$, поэтому точек самопересечения нет. Если же $\mu > \mu^*$, то $c_n < d_n$, следовательно, участок кривой $C_1^{(\pi/2,\pi)}$ пересекает себя хотя бы в одной точке.

Покажем, что C_1 пересекает себя в единственной точке.

Для этого достаточно показать, что на участке кривой $C_1^{(\pi/2,\pi)}$ не меняется направление выпуклости, то есть знак выражения $S_1'(\varphi)S_2(\varphi) - S_1(\varphi)S_2'(\varphi)$ постоянно на интервале $(\pi/2, \pi)$.

Имеем $S_1'(\varphi)S_2(\varphi) - S_1(\varphi)S_2'(\varphi) = -G(\varphi,\mu)\sec^3\varphi$, где

$$\begin{aligned} G(\varphi,\mu) &= 2\varphi\cos^4\varphi - 2\cos^3\varphi\sin\varphi - 2\varphi^2\cos^3\varphi\sin\varphi \\ &+ \mu\big(2\varphi\cos^4\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi - 3\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi \\ &-2\varphi\sin^2\varphi - \varphi\cos^2\varphi\sin^2\varphi\big) \\ &+ \mu^2\big(\varphi\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi + \cos^3\varphi\sin\varphi - 2\varphi\sin^2\varphi\big). \end{aligned} \tag{69}$$

График функции $y = G(\varphi,\mu^*)$ изображен на рис. 21.

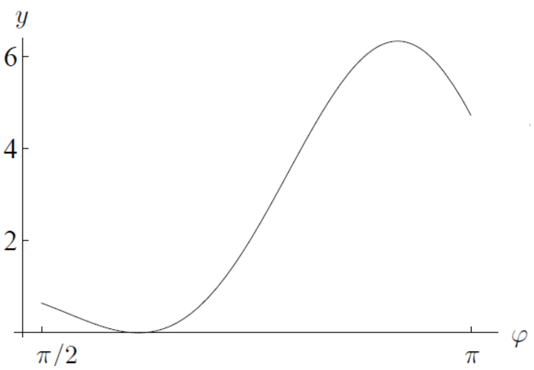

Рис. 21. График $y = G(\varphi,\mu^*)$

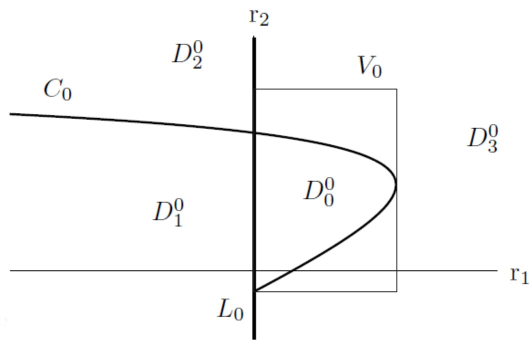

Рис. 22. Набор ω_0 при $\mu \in (-1,0)$

Покажем, что $G(\varphi,\mu^*) \geq 0$ для любого $\varphi \in (\pi/2,\pi)$. Для этого подставим $\mu = -1 - t^*\operatorname{ctg} t^*$ в выражение для S_2, а

$$\mu = -\frac{2t^*\cos^2 t^*}{t^* + \sin t^*\cos t^*}$$

подставим в выражения для S_1, тогда получаем

$$G(\varphi,\mu^*) = 2T(\varphi,t^*)\sin t^*/(t^* + \sin t^*\cos t^*),$$

где

$$\begin{gathered} T(\varphi,t) = t^2\varphi\cos^3 t\cos^2\varphi - t^2\varphi\cos t\cos^4\varphi + t\varphi\cos^2 t\cos^2\varphi\sin t \\ -t\varphi\cos t^2\cos^4\varphi\sin t - 2t^2\cos^3 t\cos\varphi\sin\varphi + t^2\cos t\cos^3\varphi\sin\varphi \\ +t^2\cos^3 t\cos^3\varphi\sin\varphi + 3t\varphi^2\cos^2 t\cos\varphi\sin t\sin\varphi \\ -t\varphi^2\cos^3\varphi\sin t\sin\varphi - \varphi^2\cos t\cos^3\varphi\sin^2 t\sin\varphi \\ -2t^2\varphi\cos^3 t\sin^2\varphi + t\varphi\cos^2 t\cos^2\varphi\sin t\sin^2\varphi. \end{gathered}$$

Имеем $T(t,t) = 0$.

Докажем, что если $\varphi \in (\pi, 3\pi/2)$, $t \in (\pi, 3\pi/4)$ и $\varphi \neq t$, то $T(\varphi,t) > 0$. Представим T в виде

$$T(\varphi,t) = Y_0(\varphi,t) - 2\varphi t\sin\varphi\cos t(\sin t - \sin\varphi)\big(Y_1(\varphi,t) - Y_2(\varphi,t)\big),$$

где

$$\begin{gathered} Y_0(\varphi,t) = \sin\varphi(\varphi\cos\varphi\sin t - t\cos t\sin\varphi) \\ \times\big(t\cos^2 t(\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) - \varphi\cos^2\varphi(t + \sin t\cos t)\big), \\ Y_1(\varphi,t) = \frac{t(\sin t + \sin\varphi)(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)}{2\varphi\sin\varphi}, \\ Y_2(\varphi,t) = \frac{\varphi\cos\varphi\sin t - t\cos t\sin\varphi}{\sin t - \sin\varphi}. \end{gathered}$$

Имеем $Y_0(\varphi,t)=\sin t\sin^2\varphi(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)(t+\sin t\cos t)$

$$\times(\varphi\operatorname{ctg}\varphi-t\operatorname{ctg}t)\big(t\cos^2t/(t+\sin t\cos t)-\varphi\cos^2\varphi/(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)\big).$$

В силу монотонности функций $\varphi\operatorname{ctg}\varphi$ и $\varphi\cos^2\varphi/(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)$ имеем $Y_0(\varphi,t)>0$ если $t\neq\varphi$.

Теперь рассмотрим функции Y_1 и Y_2. При $\varphi=t$ доопределим функцию Y_2 по непрерывности значением $Y_2(\varphi,\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi$. Имеем $Y_1(t,t)=Y_2(t,t)$, поэтому достаточно показать, что при каждом фиксированном $t\in(\pi/2,3\pi/4)$ функция $Y_1(\varphi,t)$ монотонно возрастает на $\varphi\in(\pi/2,\pi)$, а функция $Y_2(\varphi,t)$ не возрастает.

Рассмотрим функцию Y_1. Неравенство $\frac{\partial Y_1(\varphi,t)}{\partial\varphi}>0$ эквивалентно следующему:

$$\sin t(\varphi\sin^3\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi-\varphi^2\cos\varphi)>\varphi\sin^2\varphi\cos2\varphi-\cos\varphi\sin^3\varphi. \tag{70}$$

Неравенство (70) вытекает из того, что $\sin t\in(\sqrt{2}/2,1)$ по предположению и из двух элементарно проверяемых неравенств:

$$\varphi\sin^2\varphi\cos2\varphi-\cos\varphi\sin^3\varphi<1/2,$$

$$\varphi\sin^3\varphi+\cos\varphi\sin^2\varphi-\varphi^2\cos\varphi>\pi/2,$$

имеющих место при $\varphi\in(\pi/2,\pi)$.

Рассмотрим Y_2. Неравенство $\frac{\partial Y_2(\varphi,t)}{\partial\varphi}\le0$ эквивалентно $Y_3(\varphi,t)\ge0$, где $Y_3(\varphi,t)=\varphi-t\cos t\cos\varphi+\cos\varphi\sin t-\cos\varphi\sin\varphi-\varphi\sin t\sin\varphi$.

Имеем $Y_3(t,t)=0$ и $\frac{\partial Y_3(t,t)}{\partial\varphi}=0$, поэтому для того, чтобы доказать, что $\varphi=t$ — единственный корень уравнения $Y_3(\cdot,t)=0$, достаточно показать, что $\frac{\partial^2Y_3(t,t)}{\partial\varphi^2}>0$ для любых $\varphi\in(\pi/2,\pi)$ и $t\in(\pi/2,2\pi/3)$. Имеем

$$\frac{\partial^2Y_3(t,t)}{\partial\varphi^2}=t\cos t\cos\varphi-3\cos\varphi\sin t+2\sin2\varphi+\varphi\sin t\sin\varphi.$$

Усилим неравенство $\frac{\partial^2Y_3(t,t)}{\partial\varphi^2}>0$: $\sin t(\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi)>-2\sin2\varphi$. Последнее неравенство вытекает из элементарно проверяемых неравенств

$$-\frac{2\sin2\varphi}{\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi}=\frac{4\sin\varphi}{3-\varphi\operatorname{tg}\varphi}<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin t.$$

В силу того, что $t^*\in(\pi/2,3\pi/4)$ при $\varphi\in(\pi/2,\pi)$ имеем $G(\varphi,\mu^*)>0$ и, очевидно, $G(\varphi,0)>0$. Докажем, что если $\varphi\in(\pi/2,\pi)$ и $\mu\in[\mu^*,0]$, то $G(\varphi,\mu)>0$. При фиксированном φ выражение (69) представляет собой квадратный трехчлен относительно μ. Если коэффициент при μ^2 отрицателен, то ветви параболы направлены вниз, поэтому квадратный трехчлен достигает наименьшего значения на концах отрезка $[\mu^*,0]$. Если коэффициент при μ^2 равен нулю, то тем более $G(\varphi,\mu)\ge\min\{G(\varphi,\mu^*),G(\varphi,0)\}$.

Пусть коэффициент при μ^2 положителен, тогда

$$2(\cos^2\varphi-2\sin^2\varphi)>\sin2\varphi-\sin\varphi\cos^3\varphi,$$

следовательно, $\cos^2\varphi>2\sin^2\varphi$, откуда получаем $\varphi\in(3\pi/4,\pi)$. Покажем, что в этом случае вершина параболы принадлежит множеству $(-\infty,-1)$. Перепишем неравенство $\sin\varphi\frac{\partial G(\varphi,-1)}{\partial\mu}>0$ в виде

$$-3\varphi^2\cos\varphi-2\cos^3\varphi+2\varphi\sin\varphi>2\varphi\cos^2\varphi\sin\varphi-2\cos\varphi+\varphi\cos^2\varphi\sin\varphi. \tag{71}$$

В силу $\varphi\in(3\pi/4,\pi)$ левая часть неравенства (71) не меньше, чем $27\pi^2/16+1$, а правая часть этого неравенства не больше, чем $3\pi/2+2$. Таким образом, неравенство (71) выполняется, поэтому вершина параболы не принадлежит интервалу $(\mu^*,0)$, следовательно, $G(\varphi,\mu)>0$ на этом интервале.

Итак, на участке кривой $C_1^{(\pi/2,\pi)}$ не меняется направление выпуклости, поэтому точка пересечения единственна. $\square$

Доказательство теоремы 5 в случае $\mu\in(-1,0)$. Покажем, что при $\mu\in(-1,0)$ кривая C_0 не имеет общих точек ни с одной из кривых C_n при $n\in\mathbb{N}$.

Функция S_2 монотонно возрастает, а функция S_1 достигает своего наибольшего значения $S_1(c_0)$ на интервале $(0,\pi/2)$. Следовательно, C_0 расположена в прямоугольнике $V_0=\big\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2\colon 0<r_1<S_1(c_0), r_2\in(-\mu,\pi/2)\big\}$. На рис. 22 границы этого прямоугольника выделены серым цветом.

Имеем $\lim_{\varphi\to\pi(n-1/2)-0}S_1(\varphi)=+\infty$. У функции S_1 имеется точка минимума c_{2n-1} на интервале $\big(\pi(n-1/2),\pi n\big)$ и точка максимума c_{2n} на интервале $\big(\pi n,\pi(n+1/2)\big)$. Выше было доказано, что $S_1(c_{2n})>S_1(c_{2n-1})>S_1(c_0)$, поэтому участок $C_n^{\left(\pi(n-1/2),c_{2n}\right)}$ расположен правее полосы V_0.

Если n — нечетное число, то оставшийся участок кривой $C_n^{\left(c_{2n},\pi(n+1/2)\right)}$ расположен ниже оси r_1, следовательно, ниже V_0.

Докажем, что если n — четное число, то $C_n^{\left(c_{2n},\pi(n+1/2)\right)}$ находится выше прямоугольника V_0. Согласно лемме 3 имеем $c_{2n}>\pi n+\pi/6$, поэтому для любого $\varphi\in\big(c_{2n},\pi(n+1/2)\big)$ имеем $S_1(\varphi)>\varphi\sin\varphi>\varphi/2>\pi n>\pi$.

Выше мы показали, что при $\mu\in(\mu^*,0)$ кривая C_1 имеет единственную петлю. Докажем, что ни одна проекция кривой D-разбиения не пересекает внутренность этой петли.

Только что было доказано, что кривые C_0 и C_1 не пересекаются. Петля кривой C_1 расположена в прямоугольнике

$$V_1=\Big\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2\colon r_1\in\big(S_1(c_1),S_1(c_2)\big), r_2\in(0,\mu^2+\pi^2)\Big\}.$$

Если $n\geq 2$, то участок кривой $C_n^{\left(\pi(n-1/2),c_{2n}\right)}$ расположен в полуплоскости $r_1>S_1(c_{2n-1})$. Имеем $S_1(c_{2n-1})>S_1(c_2)$, поэтому этот участок расположен правее прямоугольника V_1.

Если n — нечетное число, большее двух, то участок кривой $C_n^{\left(c_{2n},\pi(n+1/2)\right)}$ расположен ниже оси r_1, поэтому не пересекает V_1.

Пусть n четное число, большее двух, тогда согласно лемме 3 имеем $c_{2n}>\pi n+\pi/6$, поэтому при $\varphi>c_{2n}$ имеем

$$S_2(\varphi)>S_2(c_{2n})>\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{6}\right)>\sqrt{\pi^2+1},$$

следовательно, участок кривой $C_n^{\left(c_{2n},\pi(n+1/2)\right)}$ расположен выше V_1.

Далее, $W_0(\mu)=S_1(c_0)$ и $W_1(\mu)=S_1(c_1)$, а W_- — проекция на r_1 точки самопересечения кривой C_1.

Лемма 7 вытекает из неравенств $S_1(c_0)<S_1(c_1)$ *и* $S_1(c_1)<W_-(\mu)$.

Набор ω_0 — это T-набор, причем C_0 и L_0 имеет единственную точку пересечения, поэтому существует всего четыре области набора: D_0^0, D_1^0, D_2^0 и D_3^0, которые обозначены на рис. 22. Относительные индексы этих областей таковы: $\rho_{\omega_0}(D_0^0)=0$, $\rho_{\omega_0}(D_1^0)=1$, $\rho_{\omega_0}(D_2^0)=2$, $\rho_{\omega_0}(D_3^0)=3$.

Рассмотрим набор ω_1. При $\mu\in(\mu^*,0)$ имеются три области набора: D_0^1, D_1^1 и D_2^1, которые обозначены на рис. 23. Заметим, что область D_0^1 содержит начало координат, поэтому $\rho_{\omega_0}(D_0^1) = 0$. Область D_2^1 — это петля, относительный индекс которой равен -2. Относительный индекс неограниченной области D_1^1 равен 2.

Если $\mu \in (-1, \mu^*]$, то кривая C_1 простая. Имеются две неограниченные области D_0^1 и D_1^1, относительные индексы которых равны 0 и 2 соответственно (рис. 24).

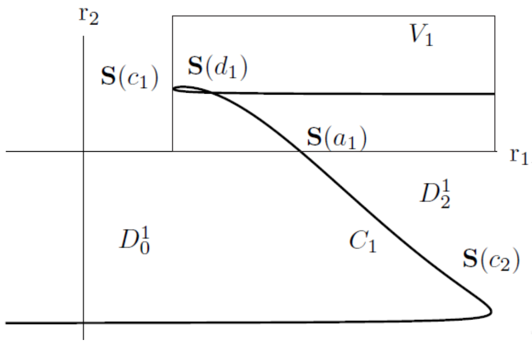

Рис. 23. Набор ω_1 в случае $\mu \in (\mu^*, 0)$

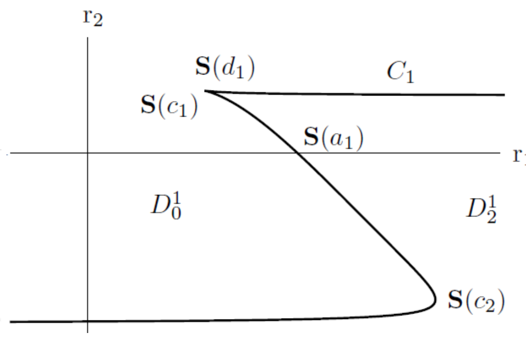

Рис. 24. Набор ω_1 при $\mu \in (-1, \mu^*]$

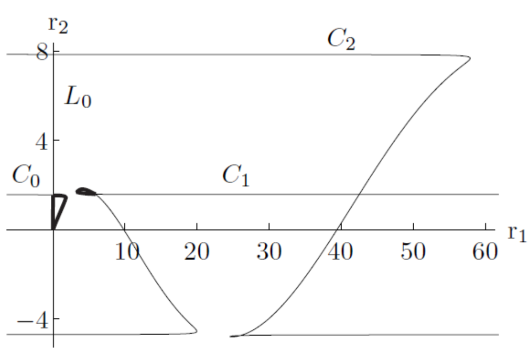

Рис. 25. Области D-разбиения в случае $\mu = -0.03$

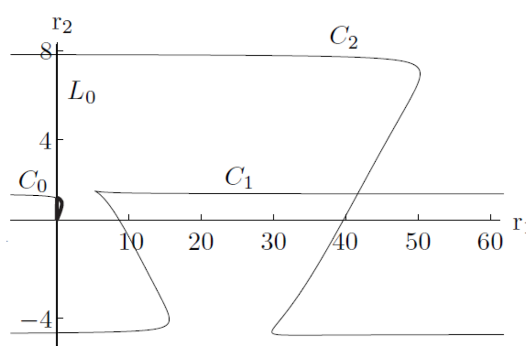

Рис. 26. Области D-разбиения в случае $\mu = -0.3$

Рассмотрим набор ω_n при $n \geq 2$.

Согласно лемме 1 имеются две неограниченные области D_0^n, D_1^n (первая из них содержит начало координат), и не более чем счетное множество областей, являющихся внутренностью петель, образованных кривой C_n. Однако, все эти области расположены в полосе $r_1 \in \big(S_1(c_{2n-1}), S_1(c_{2n})\big)$ и имеют относительные индексы либо -2, либо 2.

Выберем петлю набора ω_n при $n \geq 2$, имеющую относительный индекс, равный -2. Эта петля является подмножеством пересечения областей D_1^0 и D_1^1, следовательно, абсолютный индекс точек этой петли не меньше, чем 1.

Область D_0^0 является подмножеством областей D_0^n при любом $n \geq 1$, поэтому абсолютный индекс точек этой области равен нулю. Внутренняя точка любой другой области набора ω_n имеет положительный индекс относительно этого набора, поэтому для того, чтобы она имела нулевой абсолютный индекс, необходимо, чтобы она имела отрицательный индекс относительно другого набора. Единственная возможность для этого — точки области D_2^1 при $\mu \in (\mu^*, 0)$. Эта область является подмножеством D_0^0 и областей D_0^n при любом $n \geq 2$, следовательно, абсолютный индекс этой области равен нулю.

Таким образом, если $\mu \in (\mu^*, 0)$, то область устойчивости имеет две компоненты связности, а принадлежность точки $\{\chi, \nu\}$ множеству $D_0^0 \cup D_2^1$, выделенному на рис. 25, эквивалентна тому, что $\{\chi, \nu, \mu\} \in \mathcal{D}_{10}$. Если $\mu \in (-1, \mu^*]$, то область устойчивости связна, а принадлежность $\{\chi, \nu\}$ области D_0^0, выделенной на рис. 26, эквивалентно тому, что $\{\chi, \nu, \mu\} \in \mathcal{D}_{10}$. □

Заключение

В настоящей статье проведена полная классификация всех трехпараметрических систем (1). Для каждой из десяти систем построена область устойчивости и дано ее аналитическое описание.

Для пяти уравнений (33), (34), (36), (39), (40) области устойчивости построены впервые. Несмотря на то, что для остальные пяти областей устойчивости были известны (для уравнения (31) в работе [6], (32) — [9], (35) — [7], (37) — [8], (38) — в работе состоящей из двух частей [1], [2]), в настоящей статьей все десять случаев исследованы единообразно.

Область устойчивости представляет собой

- пустое множество ровно для одной системы (уравнение (31));
- несвязное множество для двух систем (уравнения (35), (36));
- ограниченное непустое множество для двух систем (уравнения (35), (34));
- непустое неограниченное связное множество для пяти систем (уравнения (32), (37), (38), (39), (40)).

Отметим, что в шести случаях (уравнения (31)–(36)) удалось выбрать параметр семейства так, что получаемое двупараметрическое характеристическое уравнение имеет третий тип, а в одном случае (уравнение (38)) — второй тип. Таким образом, в этих семи случаях трехмерные области устойчивости имеют линейчатую структуру, в трех оставшихся случаях — нет.

Построенные области могут быть как использованы непосредственно для исследования локальной устойчивости математических моделей, так и представляет собой базу для дальнейшего исследования системы (1).

References

[1] C.S. Hsu, S.J. Bhatt *Stability charts for second-order dynamical systems with time lag*, J. Appl. Mech., **33**:1 (1966), 113–118. Zbl 0143.10503

[2] C.S. Hsu, S.J. Bhatt *Stability charts for second-order dynamical systems with time lag*, J. Appl. Mech., **33**:1 (1966), 119–124. Zbl 0143.10601

[3] L.E. Jl'sgol'ts, S.B. Norkin, *Introduction to the theory of differential equations with deviating argument*, Nauka, Moscow, 1971. (in Russian) Zbl 0224.34053

[4] M.V. Mulyukov, *Stability of three-parameter systems of two linear differential equations with delay. Part I*, Siberian Electronic Mathematical Reports, (in Russian, in print).

[5] M.V. Mulyukov, *Stability of two-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay*, Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ., **51** (2018), 79–122. Zbl 07124540

[6] M.V. Mulyukov, *The stability of the linear autonomous differential equation with distributed and concentrated delay*, Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki, **20**:5 (2015), 1325–1331. (in Russian)

[7] M.V. Mulyukov, *Stability of inverted pendulum with delayed feedback* (Russian), Applied Mathematics and Control Sciences, **2017**:4 (2017), 73–87. (Russian)

[8] M.V. Mulyukov, *Asymptotic stability of the system of autonomous differential equations of delayed type with degenerate matrices*, Proceedings of VII international conference «Modern methods of applied mathematics, control theory and computer technology», Voronej (2014), 268–270. (Russian)

[9] M.V. Mulyukov, *On stability of three-parameter system of two autonomous linear delay differential equations*, Proceedings of 2015 international conference «stability and control processes» in memory of V.I. Zubov (scp), joined with 21st international workshop on beam dynamics and optimization (bdo). Saint-Petersburg, 05-09 october 2015.

Mikhail Vadimovich Mulyukov
Perm National Research Polytechnic University,
29, Komsomolskiy ave.,
Perm, 614990, Russia
Perm State National Research University,
15, Bukireva str.,
Perm, 614990, Russia
E-mail address: Mulykoff@gmail.com